# ОТЗЫВ

научного консультанта о диссертации Нировой Марины Сефовны
«Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и автоморфизмы»,
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Изучение комбинаторно симметричных графов является одним из наиболее важных направлений в теории графов. Это направление тесно связано с теорией групп. Одной из главных задач этой теории является классификация дистанционно транзитивных графов. С другой стороны, классификация дистанционно регулярных графов представляется неразрешимой задачей. Речь может идти об описании конкретных классов дистанционно регулярных графов.

Перечислим некоторые направления исследований, в которых получены результаты диссертации.

Комбинаторно симметричные графы часто строятся с помощью конечных геометрий. Возникают и обратные задачи – построение конечных геометрий по заданным графам. Многие авторы изучали однородные расширения частичных геометрий (Камерон П., Пазини А., Хобарт С., Хьюз Д., Дель Фра А. и др.). Заметим, что точечный граф сильно φ-однородного расширения частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ является псевдогеометрическим для $pG_\varphi(s+1, st/\alpha)$.

Задача изучения локально $GQ(s,t)$-графов (графов, в которых окрестности вершин являются точечными графами для $GQ(s,t)$) является классической. Эта задача решена для $s < 4$ (Ф. Бюкенхаут и К. Юбо для $s = 2$, А.А. Махнев и Д.В. Падучих для $s = 3$).

Локально циклические графы привлекают внимание топологов и специалистов по теории графов. В.П. Буриченко и А.А. Махнев нашли массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с не более 1000 вершинами. Ими была предложена программа классификации реберно симметричных графов с массивами из этого списка.

При изучении t-изорегулярных графов наиболее интересной представляется задача существования точно 4-изорегулярных графов. Такой граф является псевдогеометрическим для $pG_r(2r,2r^3+3r^2-1)$ и обозначается Izo(r). Известно существование графа Izo(r) только для r, равного 1 или 2.

Хорошо известно, что имеются 30 наборов параметров неизвестных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100. Бехбахани и Лам установили, что только 11 из них могут отвечать реберно симметричным графам.

Пусть Г – дистанционно регулярный граф диаметра 3. Интересны случаи, когда графы $Г_2$ или $Г_3$ сильно регулярны. Возникают задача определения параметров этих графов по массиву пересечений графа Г и задача восстановления массива пересечений графа Г по параметрам графов $Г_2$ или $Г_3$.

Пусть Г – дистанционно регулярный граф диаметра d, большего 2 и $\theta_0>\theta_1>\ldots>\theta_d$ – собственные значения Г. Тогда выполняется фундаментальная граница

$$ka_1b_1/(a_1+1)^2 \le (\theta_1+k/(a_1+1))\ (\theta_d+k/(a_1+1)).$$

Положим $b^+=-1-b_1/(1+\theta_d)$, $b^-=-1-b_1/(1+\theta_1)$. Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальная границе, называется плотным. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями $a_1$, $b^+$, $b^-$. Антиподальный граф диаметра 4 с индексом антиподальности r и сильно регулярными локальными подграфами, имеющими неглавные собственные значения $p=b^+$, $-q=b^-$, называется AT4(p,q,r)-графом. Заметим, что граф $Г_2(u)$ для AT4(p,p+2,r)-графа Г также является дистанционно регулярным. Возникает задача описания автоморфизмов AT4(p,p+2,r)-графа Г и его подграфа $Г_2(u)$.

Пусть Г – дистанционно регулярный граф диаметра 3, для которого графы $Г_2$ и $Г_3$ сильно регулярны. Представляет интерес задача перечисления массивов пересечений графов в случае, когда $Г_3$ не содержит треугольников.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением $\theta_1$, равным $a_3$. Для графа Шилла Г число $a=a_3$ делит k и полагают b=b(Г)=k/a.

Юришич и Видали доказали, что дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий локально регулярный максимальный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, имеет массив пересечений {a(p+1),cp,a+1;1,c,ap} или {a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap}, где $a=a_3$, $c=c_2$, $p=p^3_{33}$. В первом случае граф имеет собственное значение $\theta_2=-1$ и граф $Г_3$ является псевдогеометрическим для GQ(p+1,a). Во втором случае получаем граф Шилла с $b_2=c_2$. Обратно, граф Шилла с $b_2=c_2$ имеет массив пересечений {a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap}, где p=b-1. Возникают задачи изучения дистанционно регулярных графов с массивами пересечений {a(p+1),cp,a+1;1,c,ap} или {a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap}.

В диссертации М.С. Нировой решаются вышеуказанные задачи, при этом завершаются программы исследований:

- дистанционно регулярных локально \$GQ(4,t)\$-графов,
- примитивных дистанционно регулярных реберно симметричных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000,
- реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100.

В диссертации получены следующие основные результаты:

- найдены параметры сильно (s-2)-однородных расширений частичных геометрий $pG\alpha(s,t)$ и классифицированы дистанционно регулярные локально GQ(4,t)-графы;
- перечислены допустимые массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda=2$, иеющих не более 4096 вершин, найдены автоморфизмы примитивных дистанционно регулярных графов с $\lambda=2$ и числом вершин, не большим 1000;
- найдены автоморфизмы графа $\Delta$ с параметрами антиокрестности вершины в 4-изорегулярном графе Izo(3), установлено, что граф $\Delta$ не является реберно симметричным, доказано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, нет (проблема Лама);
- найдены автоморфизмы AT4(4,6,5)-графа с массивом пересечений {204,175,48,1;1,12,175,204}, найдены автоморфизмы второй окрестности вершины этого графа, имеющей массив пересечений {144,125,32,1;1,8,125,144};
- доказано, что для дистанционно регулярного графа Г диаметра 3 с собственным значением $\theta_2$ =-1 дополнительный граф к графу $Г_3$ является псевдогемерическим для $pG_{c3}(k,b_1/c_2)$, с помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {44,35,3;1,5,42};
- изучены свойства дистанционно регулярного графа Г диаметра 3, для которого графы $Г_2$ и $Г_3$ сильно регулярны, перечислены массивы пересечений в случае, когда графы $Г_3$ не содержит треугольников и $\mu(Г_3)$ не больше 11;
- получены новые границы для порядков клик в сильно регулярном графе $Г_3$, с помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {27,20,7;1,4,21}, в классе массивов {a(p+1),cp,a+1;1,a-1,ap}, отвечающих максимальным 1-кодам, найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений;
- доказано, что граф Шилла с $b_2=c_2$ и нецелым собственным значением имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$, и нйдены кратности его собственных значений. Найдены массивы пересечений графов Шилла с $b_2=c_2$ без треугольников в случае b<170. Классифицированы графы Шилла с $b_2=c_2$ и b=4.

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. В первой главе изучены сильно (s-2)-однородные расширения частичных геометрий, завершена классификация дистанционно регулярных локально $GQ(4,t)$-графов, изучаются 4-изорегулярные графы, их сильно регулярные подграфы и автоморфизмы. Отметим, что s-однородные и сильно (s-1)-однородные расширения частичных геометрий были изучены в кандидатской диссертации М.С. Нировой.

В главе 2 перечислены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda=2$ и числом вершин, не большим 4096, найдены автоморфимы примитивных дистанционно регулярных графов с $\lambda=2$ и числом вершин, не большим 1000, и доказано, что новых реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин, не большим 100, нет (решение проблемы Лама).

Главы 3–5 посвящены изучению влияния симметричных структур и собственных значений на строение дистанционно регулярных графов. В главе 3 найдены автоморфимы $AT4(4,6,5)$-графа и второй окрестности его вершины. Там же доказано, что для дистанционно регулярного графа $\Gamma$ диаметра 3 с собственным значением $\theta_2=-1$ дополнительный граф к графу $\Gamma_3$ является псевдогемерическим для $pG_{c3}(k,b_1/c_2)$. С помощью этого результата доказано несуществование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44,35,3;1,5,42\}$.

В главе 4 изучены свойства дистанционно регулярного графа $\Gamma$ диаметра 3, для которого графы $\Gamma_2$ и $\Gamma_3$ сильно регулярны, перечислены массивы пересечений в случае, когда графы $\Gamma_2$ и $\Gamma_3$ сильно регулярны, $\Gamma_3$ не содержит треугольников и $\mu(\Gamma_3)$ не больше 11, найдены автоморфизмы дистанционно регулярного графа $\Gamma$ с массивом пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$, для которого граф $\Gamma_3$ является сильно регулярным графом без треугольников.

В главе 5 отмечается, что дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий максимальный 1-код, имеет массив пересечений $\{a(p+1),cp,a+1;1,c,ap\}$ или $\{a(p+1),(a+1)p,c;1,c,ap\}$, где $a=a_3$, $c=c_2$, $p=p^3_{33}$. В первом случае граф имеет собственное значение $\theta_2=-1$ и в случае массива $\{a(p+1),cp,a+1;1,a-1,ap\}$ найдены новые бесконечные серии допустимых массивов пересечений. Доказано также, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{27,20,7;1,4,21\}$ не существует. Во втором случае получаем граф Шилла с $b_2=c_2$. Доказано, что граф Шилла с $b_2=c_2$ и нецелым собственным значением имеет массив пересечений $\{b^2(b-1)/2,(b-1)(b^2-b+2)/2,b(b-1)/4;1,b(b-1)/4,b(b-1)^2/2\}$, и нйдены кратности его собственных значений. Найдены массивы пересечений графов Шилла с $b_2=c_2$ без треугольников в случае $b<170$. Классифицированы графы Шилла с $b_2=c_2$ и $b=4$.

Результаты диссертации докладывались на международных научных конференциях и семинарах. Совокупность этих результатов является существенным продвижением в развитии классического научного направления – изучения дистанционно регулярных графов и их групп автоморфизмов.

Считаю, что диссертационная работа «Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и автоморфизмы» удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Нирова Марина Сефовна, заслуживает присуждения ей ученой степени доктора физико-математических наук.

Научный консультант, зав. отделом
алгебры и топологии ИММ УрО РАН
доктор физико-математических наук,
член-корр. РАН Александр Алексеевич Махнев
11 августа 2018 года
620990 Екатеринбург, Ковалевской 16
ИММ УрО РАН, makhnev@imm.uran.ru
+79221341464

Подпись заверяю
Ученый секретарь ИММ УрО РАН
канд. физ.-мат. наук Олег Николаевич Ульянов