

Отзыв научного руководителя
на кандидатскую диссертацию
Давида Зелимовича Кумаллагова на тему
"Весовые структуры на мотивных категориях и их применения"

Диссертационная работа Давида Кумаллагова посвящена, в основном, новому классу фильтраций на различных триангулированных мотивных категориях. Эти фильтрации изучаются во второй и третьей главе диссертации. Они задаются т. н. айлами (это — некоторые классы объектов триангулированной категории), определенными в терминах соответствующих «мотивов» (всех) гладких многообразий над исходным совершенным полем. Эти айлы индексируются некоторыми возрастающими последовательностями сдвигов. В частности, для случаев «+бесконечной последовательностей» определение, данное Давидом, задает т. н. слайс-фильтрации Воеводского на соответствующих категориях. Также важен случай постоянных сдвигов; как было показано в нашей с Давидом статье, опубликованной в журнале «Алгебра и Анализ» (и не вошедшей в диссертацию), он дает новую конструкцию весовой структуры Чжоу для категории (неограниченных) мотивных комплексов Воеводского. Напомню, что последняя конструкция никак не зависит от разрешения особенностей многообразий над базовым полем, и поэтому дает возможность изучать весовую структуру Чжоу для мотивов с целыми коэффициентами (в том числе, над полями положительной характеристики). В случае стабильной гомотопической мотивной категории эти айлы также связаны с недавней интересной работой Т. Бахманна и др.

Давид показал, что рассматриваемые айлы обладают рядом интересных свойств. То, принадлежит ли данный мотив конкретному айлу, полностью определяется когомологиями мотива в смысле соответствующей гомотопической t -структуры. Соответственно, рассматриваемые айлы можно охарактеризовать в терминах некоторых фильтраций на ядрах этих гомотопических t -структур. Эти фильтрации были подробно исследованы Давидом; он доказал, что это — т. н. слабо бирациональные фильтрации. Кроме того, эффективные версии этих фильтраций могут быть описаны как в терминах когомологий Нисневича пучков, так и в терминах т.н. стягиваний Воеводского; соответствующее утверждение широко обобщает хорошо известные результаты Кана и Сужаты.

Кроме того, Давид доказал, что все айлы, рассмотренные в нашей статье, задают как весовые структуры, так и соседствующие с ними t -структуры. С помощью этих структур можно описать как функторы слайсов, так и т. н. высшие неразветвленные функторы. Он также доказал ряд интересных свойств слабо бирациональных подкатегорий и неразветвленных когомологий, связанных с этими конструкциями.

Наконец, последняя, четвертая, глава диссертации посвящена т. н. Чжоу-весовым гомотопиям. Эти теории гомотопий были ранее определены М.В. Бондарко и В.А. Соснило для геометрических мотивов Воеводского. Диссертанту удалось перенести ряд определений и свойств этих теорий на значительно большую категорию «весограниченных сверху» мотивов. В отличие от категории геометрических мотивов, на этой категории определены функторы слайсов; это позволяет получить новый результат о связи между обнулением высших групп Чжоу-весовых гомотопий и соответствующих мотивных гомотопий мотива (формулировка немного напоминает теорему Гуревича и также использует некоторые возрастающие последовательности сдвигов). Эти теорема 4.2.12 дает новые утверждения, в том числе, и для геометрических мотивов. Из нее выводится теорема 4.3.1, которая говорит, что если некоторые группы мотивных гомотопий и Чжоу-весовых гомотопий геометрических мотивов являются кручением, то их показатели конечны. Эти утверждения успешно применяются к мотивам многообразий с компактным носителем; это дает новый результат о связи между высшими группами Чжоу многообразия и эффективности его (этальных и сингулярных) когомологий с компактным носителем.

