Отзыв официального оппонента
профессора, доктора физико-математических наук
Белова Юрия Сергеевича

на диссертационную работу Исаева Константина Петровича
“Представление функций рядами экспонент”

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 “Вещественный, комплексный и функциональный анализ”

Диссертация К.П. Исаева посвящена представлению аналитических функций рядами из экспонент и смежным вопросам. Эта классическая тема одномерного комплексного анализа, которая (в зависимости от типа рассматриваемых пространств и вида сходимости) содержит сотни математических вопросов, многие из которых до сих пор открыты. Начиная с знаменитой теоремы отсчетов Шэннона-Котельникова-Витакера (ортогональная система экспонент на отрезке) эта тема постоянно привлекает внимание математиков всего мира. Например, к ней можно отнести, одно из самых заметных достижений гармонического анализа 20-го века – формулу Берлинга-Малльявена для радиуса полноты систем из экспонент на отрезке вещественной оси. Экспоненциальными системами занимались такие классики анализа как Ж.П. Кахан, Р. Даффин, А.Ф. Леонтьев, Б.И. Коренблюм, К.Сейп, А.М. Олевский и многие другие. Другие темы, к которым обращается автор (системы из воспроизводящих ядер в пространствах целых функций, аппроксимация аналитическими функциями), тесно связаны с главной и тоже привлекали к себе внимание многих известных специалистов. Таким образом, тема диссертации, вне всяких сомнений, актуальна.

В диссертации можно выделить три группы результатов:

- результаты об аппроксимации целыми и субгармоническими функциями с контролем производной и хорошей разделенностью множества нулей;
- результаты о представлении функций из весовых пространств H(D) рядами экспонент, сходящимися в ослабленной норме, и построение соответствующих классов аналитических функций;
- результаты о наличии или отсутствии базисов из воспроизводящих ядер в малых пространствах Фока и базисов из экспонент в весовых пространствах на отрезке.

Начнем с обзора результатов об аппроксимации (глава 1). Задача о построении целой функции с предписанной асимптотикой на плоскости вначале рассматривалась как внутренняя задача теории целых функций. С другой стороны, эта задача имеет многочисленные связи как с задачей, представления функции рядом из экспонент, так и с другими задачами комплексного и гармонического анализа. Например, с задачей описания резонансов для оператора Шредингера на отрезке.

Другое применение – построение полных и минимальных систем малой плотности в пространствах типа Фока и построение допустимых мажорант для модельных подпространств (инвариантных относительно обратного сдвига) классического пространства Харди. Этот список может быть продолжен.

Так как логарифм модуля целой функции субгармоничен, задачу об аппроксимации можно переформулировать как задачу аппроксимации субгармонической функции логарифмом модуля целой функции.

Первый ключевой результат в этом направлении был получен В.С. Азариным в 1969-м году. Впоследствии этот результат уточнялся. Следующий важный шаг был сделан в 1985-м году Р.С. Юлмухаметовым. Его результат позволял аппроксимировать субгармоническую функцию с точностью до логарифмического слагаемого. Окончательный результат для чисто аппроксимационной постановки задачи был получен Ю.И. Любарским и Е.В. Малинниковой в 2002-м году. Оказалось, что аппроксимация имеет место «с точностью до половины логарифма».

Задачи представления рядами экспонент тесно связаны с задачами аппроксимациями целыми функциями, но непосредственно применить аппроксимационные результаты здесь не удается. От множества нулей аппроксимирующей функции требуется дополнительная разделенность. Для этого автор диссертации доказывает аналоги теорем Азарина и Юлмухаметова в которых соответствующая целая функция обладает дополнительными хорошими свойствами (теоремы 1.1-1.3).

Для медленно растущих субгармонических функций автор получил более точные оценки (теоремы 1.7-1.8). Эти результаты безусловно представляют интерес и наверняка найдут применение не только в теоремах о представлении рядами из экспонент.

Обратимся теперь ко второй группе результатов (главы 2 и 3). Задача описания сопряженного (к H(D,phi)) пространства с помощью преобразования Фурье-Лапласа — хорошо известная задача теории аналитических функций, тесно связанная с задачей представления функций рядами из экспонент. В этом направлении автору удалось получить ряд новых результатов при помощи нового подхода. Ранее рассматривались проективные пределы равномерно-весовых пространств H(D, phi_j) с убывающей последовательностью весовых функций phi_j. Автор предлагает начать с одного фиксированного нормированного пространства E (подмножества H(D)) и рассмотреть его инвариантную оболочку (E_i).

Этот новый метод в комбинации со схемой достаточных множеств Эренпрайса позволяет получить новые теоремы о представляющих системах экспонент (теоремы 2.4.1-2.4.3).

Еще один набор теорем, полученных автором, относится к построению рядов из экспонент, сходящихся в ослабленной норме. Автору удалось показать, что для выпуклых областей, содержащих точку 0, и широкого класса весов, существует представляющая система экспонент (теоремы 3.1.1 и 3.1.2). Для весовых функций конечного порядка эти результаты удалось сформулировать более изящно (теоремы 3.1.3 и 3.1.4).

Также в диссертации доказаны аналогичные результаты для пространств типа H(D,M). Основной технической шаг в доказательстве этих теорем – результаты первой главы об аппроксимации субгармоническими функциями (с дополнительными требованиями регулярности).

Обратимся теперь к третьей группе результатов – теоремам о безусловных базисах из воспроизводящих ядер в нормированных пространствах целых функций.

Описание базисов из экспонент на интервале – важная и трудная задача гармонического анализа второй половины 20-го века. Первый ключевой результат в этом направлении - теорема Кадеца об ¼. Впоследствии выяснилось, что для полного описания безусловных базисов из экспонент требуются трудные факты из теории сингулярных интегральных операторов. В 1979-м году Б.С. Павлов получил первое (почти полное) описание базисов из экспонент. Впоследствии этот результат был усилен в совместной работе Б.С. Павлова, Н.К. Никольского и С.В. Хрущева. В конце концов А. Минкину в 1991-м году удалось избавиться от всех ограничений.

Таким образом, даже для тривиального веса задача описания безусловных базисов из экспонент очень тяжелая. Отметим, что при помощи преобразования Фурье эта задача переходит в задачу описания безусловных базисов из воспроизводящих ядер в пространстве Пэли-Винера.

С другой стороны, для многих пространств не ясно даже наличие хоть какого-то безусловного базиса из воспроизводящих ядер. Например, в 1992-м году К. Сейп доказал, что в классическом пространстве Фока (с гауссовским весом) нет ни одного базиса из воспроизводящих ядер.

В диссертации рассматривается два типа пространств – весовые пространства Фока (и системы их воспроизводящих ядер) и весовые пространства на интервале (и системы из экспонент).

Для весовых пространств Фока с радиальной симметрией А.А. Боричев и Ю.И. Любарский в 2009-м году показали, что если вес растет быстрее чем exp(log^2 r), то в пространстве нет безусловных базисов из воспроизводящих ядер. С другой стороны, если вес растет не быстрее чем exp(log^2 r), то безусловный базис есть. В 2018-м году Ю.С. Белов, А.Д. Баранов и А.А. Боричев уточнили этот результат и показали, что наличие вещественного безусловного базиса связано с изоморфностью весового пространства Фока какому-нибудь пространству де Бранжа.

Автор диссертации показал, что для любого нетривиального (растущего быстрее логарифма) веса есть подчиненный вес, такой, что в соответствующем пространстве Фока нет безусловного базиса (теорема 4.2.1). Это важный и интересный результат. Также в диссертации есть аналогичные положительные результаты для различных классов малых пространств Фока.

Наличие базисы из экспонент в весовом пространстве на интервале – важный вопрос. Отметим, что после преобразования Фурье задача опять сводится к наличию безусловных базисов из воспроизводящих ядер. Соответствующий вес в пространстве целых функций оказывается симметричным относительно вещественных сдвигов.

В диссертации было получено существенное продвижение в решении этого вопроса для весов специального вида (имеющих особенности только на конце интервала).

Оказалось, что для такого класса весов безусловных базисов из экспонент нет (теорема 5.3.1). Это очень сильный результат.

Суммируя вышесказанное можно заключить, что диссертация К.П. Исаева вносит значимый вклад в теорию аналитических функций. Все результаты диссертации математически строго доказаны. Отмечу, что некоторые результаты представляют собой продвижение в известных открытых вопросах теории функций.

Результаты диссертации полностью и своевременно опубликованы в журналах из списка ВАК. Автореферат диссертации правильно отображает ее содержание. Полученные результаты могут найти применение в дальнейших исследованиях по теории аналитических функций и теории операторов в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении математического института В.А. Стеклова РАН, Московском государственном университете, Санкт-Петербургском государственном университете.

Таким образом, диссертационная работа К.П. Исаева удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям Положением о присуждении ученых степеней, а ее автор Исаев Константин Петрович вне всяких сомнений заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Ю.С. Белов 08.09.2021

Подпись профессора СПбГУ доктора физико-математических наук Ю.С. Белова заверяю:

Подпись руки Ю.С. Белова

УДОСТОВЕРЯЮ

Начальник отдела кадров (А.Д. Сидоренкова)

08.09.21