УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
д.э.н., профессор Вадим Валерьевич Радаев

____

«____» _______________ 2022 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Каплуна Александра Владимировича «Алгебра эйконалов метрического графа», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика

Актуальность темы диссертации

Диссертация А. В. Каплуна посвящена применению алгебраической версии метода граничного управления к обратной задаче математической физики, связанной с распространением волн в метрическом графе. Этот метод, предложенный М. И. Белишевым в конце 1980-х гг., доставляет различные способы восстановления пространства, связанного с динамической системой, по ее граничным данным. Отличительная черта метода граничного управления – его междисциплинарность; помимо теории дифференциальных уравнений, в терминах которой формулируется исходная задача, метод существенно опирается на теорию управления, теорию систем, асимптотические методы, функциональный анализ и т.д. На протяжении последних тридцати с небольшим лет метод граничного управления был существенно развит, модифицирован и успешно применен многими авторами при решении ряда конкретных задач.

Алгебраическая версия метода граничного управления, также разработанная в серии работ М. И. Белишева, использует для решения задачи восстановления теорию банаховых алгебр. В самых общих чертах суть метода заключается в том, чтобы по граничным данным (которые формализуют результаты измерений, осуществляемых внешним наблюдателем) построить некоторую банахову алгебру, а затем извлекать из этой алгебры информацию об искомом пространстве – в идеале, полностью восстановить это пространство по алгебре. В большинстве конкретных реализаций этого метода (например, в задачах импедансной и волновой томографии) рассматриваемая банахова алгебра оказывается коммутативной, а искомое пространство восстанавливается как ее гельфандов спектр. По-видимому, первой задачей, в которой для решения проблемы восстановления было предложено привлечь существенно некоммутативную алгебру, стала задача о распространении волн в метрическом графе, рассмотренная М. И. Белишевым и Н. Вэдой в 2015 г. Построенная ими алгебра представляет собой C*-алгебру, порожденную некоторым семейством самосопряженных операторов – так называемых эйконалов, действующих в пространстве квадратично интегрируемых функций на графе и связанных с достижимыми множествами системы. Важное свойство алгебры эйконалов заключается в том, что она субоднородна, т.е. все ее неприводимые представления конечномерны. Субоднородные C*-алгебры являются стандартными объектами исследования в теории операторных алгебр, их изучение восходит к основополагающим работам Фелла, Томиямы и Такесаки 1960-х гг. Говоря неформально, субоднородные C*-алгебры хоть и некоммутативны, но «не слишком далеко ушли от коммутативных». Благодаря этому они в определенном смысле «геометричны», и при их исследовании важную роль играют алгебро-топологические конструкции – расслоения, когомологии и т.п. Это может рассматриваться как дополнительный аргумент в пользу того, что алгебра эйконалов является подходящим алгебраическим объектом для решения проблемы восстановления графа по граничным данным волновой задачи.

Обратным задачам на графах посвящена обширная литература. В последние годы многочисленные результаты по этой тематике были получены в работах С. А. Авдонина, П. Б. Курасова, А. С. и В. С. Михайловых, П. А. Кучмента, В. А. Юрко, Г. М. Берколайко. Диссертация А. В. Каплуна находится в русле современных исследований по теории обратных задач на графах и является тем самым вполне актуальной.

Новизна полученных результатов и выводов

В диссертации А. В. Каплуна получены новые результаты об алгебре эйконалов метрического графа, представляющие несомненный интерес. С точки зрения автора данного отзыва, центральным результатом работы является теорема 3, описывающая строение алгебры эйконалов. В частности, эта теорема утверждает, что алгебра эйконалов изоморфна прямой сумме нескольких так называемых *стандартных* алгебр, каждая из которых состоит из всех непрерывных матричнозначных функций на отрезке, в концах отрезка принимающих значения в некоторых специальных подалгебрах алгебры матриц. Этот результат, названный автором *каноническим представлением* алгебры эйконалов, существенно усиливает доказанную ранее М. И. Белишевым и Н. Вэдой теорему о вложимости алгебры эйконалов в прямую сумму алгебр непрерывных матричнозначных функций (из которой, в частности, следует субоднородность этой алгебры – см. выше). На самом деле теорема о каноническом представлении содержит существенно больше информации об алгебре эйконалов, чем сказано выше; в частности, она дает полезное явное выражение для самих эйконалов в виде комбинаций некоторых проекторов. Доказательство теоремы весьма нетривиально и опирается на развитую автором технику работы с подалгебрами в суммах нескольких алгебр («блоков») , порожденных одномерными проекторами. Эта техника, говоря упрощенно, позволяет автору «склеивать» друг с другом пары стандартных алгебр через так называемую «граничную» алгебру и в результате после нескольких итераций этой процедуры приходить к каноническому представлению алгебры эйконалов.

С помощью канонического представления автору удается получить полное описание спектра (пространства неприводимых представлений) алгебры эйконалов. А именно, оказывается, что ее спектр гомеоморфен дизъюнктному объединению нескольких отрезков с «расщепленными концами» (последнее означает, что концу каждого такого отрезка может соответствовать не одна, а несколько точек, неотделимых друг от друга в стандартной топологии Джекобсона). Используя это описание, автор получает частичный, но важный и многообещающий ответ на вопрос о возможности восстановления исходного графа Ω по алгебре эйконалов. С этой целью он вводит на спектре алгебры эйконалов отношение эквивалентности, определяемое в терминах спектров образов самих эйконалов в неприводимых представлениях и «склеивающее» в точку каждый из расщепленных концов отрезков, а также некоторые концы между собой. В результате факторизации по этому отношению получается некоторый граф. Автор показывает, что при выполнении определенных естественных условий этот граф тесно связан с исходным графом Ω, а именно, гомеоморфен его остову – пространству, полученному факторизацией части Ω, захваченной волнами, по некоторому отношению эквивалентности, определяемому в терминах так называемых минимальных множеств. Таким образом, остов графа Ω полностью восстанавливается по алгебре эйконалов. Данный результат представляется весьма ярким, перспективным и в очередной раз подчеркивающим плодотворность алгебраической версии метода граничного управления.

Апробация работы и публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в трех статьях, опубликованных в журналах, рекомендованных ВАК. Все эти журналы входят в реферативные базы данных Web of Science и Scopus. Кроме того, основные результаты работы докладывались на ряде научных семинаров и конференций.

Обоснованность научных положений и выводов, сформулированных в диссертации

Диссертация носит теоретический характер. Все полученные в ней результаты полностью обоснованы и снабжены математически строгими доказательствами.

Соответствие содержания диссертации автореферату и указанной специальности

Содержание диссертации полностью соответствует автореферату и указанной специальности 01.01.03 – математическая физика.

Значимость результатов для науки и производства

Результаты, полученные соискателем в данной диссертации, представляются весьма глубокими, интересными и многообещающими. С одной стороны, они лежат в русле современных исследований по теории обратных задач и дают решение конкретной и практически важной задачи о восстановлении остова метрического графа по граничным данным. С этой точки зрения они могут представлять несомненный интерес для специалистов по математической физике. С другой стороны, полученные автором результаты хорошо иллюстриуют силу и гибкость алгебраической версии метода граничного управления и открывают обширную и захватывающую область приложений теории операторных алгебр в задачах математической физики. С этой точки зрения работа может быть интересна специалистам по функциональному анализу и, в частности, по C*-алгебрам. Важно также отметить, что данная диссертация не «ставит точку» в решении какой-то одной проблемы, а, напротив, открывает новое и перспективное направление исследований. Следующим естественным шагом могло бы стать решение задачи о восстановлении уже всего графа Ω (а не только его остова) по алгебре эйконалов, или – если в буквальном смысле сделать это не удастся – то по какой-либо ее модификации.

Замечания по диссертационной работе

Серьезных замечаний по диссертации А. В. Каплуна у автора данного отзыва нет. Работа написана весьма тщательно, доказательства (за редким исключением) даны во всех подробностях. Имеется, однако, ряд замечаний, касающихся в основном используемой автором терминологии. Вот некоторые из них.

1. Во втором абзаце на с. 5 в фразе «располагая любым представлением…» слово «представление» не вполне уместно – речь фактически идет не о представлении, а об изоморфной копии исходной алгебры.
2. В нескольких местах автор использует довольно необычное обозначение для прямой суммы нескольких векторных пространств (см., например, предпоследний абзац на с. 6).
3. В начале второго абзаца на с. 7 речь идет только о неприводимых представлениях, а не о произвольных; следовало бы сказать об этом явно.
4. Абстрактное определение метрического графа, которое дает автор на с. 10, является несколько более общим, чем то, которое фактически используется в работе (а именно, неявно предполагается, что множества вершин и ребер графа конечны).
5. Для того, чтобы пространство $L_2(\Omega)$ было определено, на множестве Ω должна быть, строго говоря, определена некоторая сигма-алгебра подмножеств, а на ней – сигма-аддитивная мера. Об этом автор, однако, ничего не пишет (см. с. 11), предоставляя читателю догадываться о деталях самостоятельно.
6. На с. 33 автор ссылается на предложение 1, имея в виду, по-видимому, следствие 1.

7. Автор определяет С*-алгебру как банахову алгебру с инволюцией (см. с. 38). Следует, однако, отметить, что обычно под «банаховой алгеброй с инволюцией» принято понимать более общие объекты, а именно, банаховы алгебры, снабженные изометрической инволюцией, удовлетворяющей обычным алгебраическим условиям. А С*-*алгеброй* называется банахова алгебра с инволюцией, в которой выполнено так называемое С*-*тождество*. Автору стоило бы привести полное определение, особенно с учетом того, что работа адресована не только специалистам по операторным алгебрам, но и математическим физикам.
8. С*-алгебры, связанные изометрическим *-изоморфизмом, обычно называют просто *изоморфными*, а не *изометричными*.
9. В определении эквивалентности представлений на с. 38 вместо «изометрия пространств представлений» правильнее было бы написать «унитарный изоморфизм» (т.к. изометрия не всегда сюръективна).
10. В п. 2.5.2 автор неоднократно подчеркивает, что рассматривает векторные пространства и алгебры над полем вещественных чисел. Однако С*-алгебры традиционно рассматриваются над *комплексными* числами, и это существенно уже для их определения, не говоря уже об основных результатах из их теории. Справедливости ради следует сказать, что теория вещественных С*-алгебр существует, однако является областью довольно экзотической даже для большинства функциональных аналитиков, не говоря уже о специалистах в других областях. Вряд ли автор, говоря о С*-алгебрах, имеет в виду вещественные С*-алгебры в вышеупомянутом смысле. Так или иначе, он приводит ссылки на литературу, в которой рассматриваются исключительно комплексные С*-алгебры. Поэтому оптимальным выходом из этой ситуации было бы заменить в подходящих местах работы вещественные числа на комплексные.
11. В предложении 4 не сказано, что такое «В готическое».
12. Во втором абзаце на с. 40 автор пишет: “Спектр стандартной алгебры состоит из классов … неприводимых представлений вида (2.31) и представлений … , которые могут оказаться приводимыми”. Но если они приводимые – значит, они не принадлежат спектру! Нетрудно понять, что на самом деле здесь имеется в виду, но при буквальном прочтении фраза лишена смысла.
13. В названии главы 3 слово «образованные» лучше было бы заменить более общепринятым в данной ситуации термином «порожденные».
14. На с. 71 автор использует термин «максимальная компактная линейно-связная компонента». Правильно было бы написать просто «связная компонента» или «линейно связная компонента». Компактной она будет автоматически. А слово «максимальная» здесь уж точно лишнее – на то она и компонента (получается масляное масло).
15. Следует отметить, что термин «внутренняя точка» (и соответствующее ему обозначение int для множества внутренних точек) используется автором на с.71 и далее в нетрадиционном смысле. Речь идет о точках, обладающих окрестностью, гомеоморфной интервалу, а вовсе не о точках, внутренних в обычном топологическом смысле.

16. То же самое относится к термину «максимальная открытая компонента», используемому автором в шаге 2 на с. 78. Строго говоря, множество S_l не является максимальной открытой компонентой спектра, т.к. множество S_l также открыто, связно и строго содержит S_l (и именно оно является «настоящей» компонентой спектра). Нетрудно догадаться, что автор на самом деле имеет в виду, однако используемая им здесь терминология отличается от стандартной общетопологической.

Разумеется, все вышеупомянутые недочеты легко исправимы и совершенно не влияют на корректность доказательств и на ценность полученных результатов.

Вывод

Диссертационная работа Каплуна Александра Владимировича «Алгебра эйконалов метрического графа» соответствует требованиям пунктов 9-10 Положения о присуждении ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 года № 842, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Отзыв подготовлен кандидатом физико-математических наук, доцентом факультета математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Пирковским Алексеем Юльевичем.

Отзыв рассмотрен и одобрен структурным подразделением федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» факультетом математики и утвержден на заседании Ученого совета факультета математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», протокол № 2.5-01/250722 от «25» июля 2022 года.

Сведения о ведущей организации: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)

Адрес: 101000 г. Москва, ул. Мясницкая, 20.
Тел.: (495) 771-32-32
Электронная почта: hse@hse.ru
Сайт: http://www.hse.ru

Руководитель
декан факультета математики
к. физ.-мат.н, доцент — Скрипченко Александра Сергеевна

Доцент факультета математики
к. физ.-мат.н, доцент — Пирковский Алексей Юльевич

Подпись за...
спец. по пер...
Прокопенко ...
09.08.2022