На правах рукописи

Гнутов Федор Александрович

Вербальные отображения с константами простых алгебраических групп

01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2021г.

Работа выполнена на кафедре алгебры Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Гордеев Николай Леонидович.

Официальные оппоненты:

Кондратьев Анатолий Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник.

Степанов Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», доцент.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится «___»_________ 2021 г. в _______ на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 на базе ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «___»_________ 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук
Пономаренко Илья Николаевич

Общая характеристика работы

Вербальные отображения с константами. Пусть G – произвольная группа, а F_n– свободная группа ранга n. Пусть, далее, $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ – некоторая последовательность элементов из G. Выражение вида

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1},$$

где

$$w_1 = w_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_m = w_m(x_1, \ldots, x_n) \in F_n$$

– элементы свободной группы, называют словом с константами. В диссертации мы будем также предполагать, что $\sigma_i \notin Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы G и что $w_2, \ldots, w_m \neq 1$.

Мы не исключаем случай постоянных слов $w_\Sigma = \sigma \in G$ и случай $\Sigma = \emptyset$, т.е. слов из F_n. Кроме того, мы рассматриваем и тривиальное слово $w_\Sigma = 1$ (здесь 1 – нейтральный элемент группы G). Таким образом, слова с константами здесь – это элементы свободного произведения $G * F_n$ без слов с элементами из центра и постоянные слова $w_\Sigma = \sigma \in G$.

Слово с константами w_Σ определяет вербальное отображение с константами $\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$, заданное формулой

$$\widetilde{w}_\Sigma((g_1, \ldots, g_n)) :=$$

$$= w_1(g_1, \ldots, g_n)\sigma_1 w_2(g_1, \ldots, g_n)\sigma_2 \cdots w_m(g_1, \ldots, g_n)\sigma_m w_{m+1}(g_1, \ldots, g_n).$$

Актуальность и степень разработанности темы. В последние годы интенсивно развивается теория вербальных отображений простых алгебраических групп. Отправной точкой здесь служит теорема А. Бореля, которая утверждает, что вербальное отображение $\widetilde{w} \colon G^n \to G$ простой алгебраической группы G доминантно. Это значит, что образ такого отображения $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ содержит непустое открытое подмножество $U \subset G$, а значит, этот образ есть “почти вся” группа G. Однако простой пример $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), w = x^2$ показывает, что этот образ может не совпадать со всей группой G. Действительно, в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ не извлекается квадратный корень из матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и, следовательно, такая матрица не может лежать в образе отображения $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{x^2} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. С другой стороны, то же вербальное отображение, для группы PGL_2 уже является сюръективным.

Вопрос о сюръективности того или иного вербального отображения простой алгебраической групп представляется достаточно сложным. В настоящее время все примеры несюръективных вербальных отображений простых алгебраических групп соответствуют словам $w = \omega^m$, которые являются степенями других слов. С другой стороны, и примеров с сюръективными отображениями также не много. Теорема А. Бореля гарантирует сюръективность для вербальных отображений, у которых слово w является произведением двух слов $w_1(x_1, \ldots, x_k)$ и $w_2(y_1, \ldots, y_l)$ от независимых переменных (действительно, в этом случае образ $\mathrm{Im}\, w = \mathrm{Im}\, \widetilde{w}_1 \, \mathrm{Im}\, \widetilde{w}_2$ и образы $\mathrm{Im}\, \widetilde{w}_1, \mathrm{Im}\, \widetilde{w}_2$ содержат открытые подмножества $U_1, U_2 \subset G$, произведение которых совпадает со всей группой G). Для "неразложимых" отображений, которые также не являются степенями других вербальных отображений, нет общих критериев сюръективности-несюръективности. Этот вопрос остается открытым даже для простейшей группы PGL_2.

Т. М. Бандман и Ю. Г. Зархин доказали следующие теоремы.

Теорема (i) (Бандман-Зархин). *Пусть K – алгебраически замкнутое поле, $w \in F_n$ – нетривиальное слово. Тогда образ $\mathrm{Im}\, \widetilde{w}$ вербального отображения $\widetilde{w} : \mathrm{SL}_2(K)^n \to \mathrm{SL}_2$ содержит все нецентральные полупростые элементы группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.*

Из Теоремы (i) следует, что образ вербального отображения

$$\widetilde{w} : \mathrm{PGL}_2^n(K) \to \mathrm{PGL}_2(K)$$

содержит все полупростые элементы группы $\mathrm{PGL}_2(K)$, и для сюръективности такого отображения достаточно найти в его образе нетривиальный унипотентный элемент.

Теорема (ii) (Бандман-Зархин). *Пусть K – алгебраически замкнутое поле, $w \in F_2 \setminus F_2^2$, где $F_2^2 = [[F_2, F_2], [F_2, F_2]]$ – второй член нормального ряда свободной группы F_2. Тогда $\widetilde{w} : \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ – сюръективное отображение.*

Кроме того, Т. М. Бандман и Ю. Г. Зархин привели пример неразложимого слова $w \in F_2^2 \setminus F_2^3$, для которого также соответствующее отображение $\widetilde{w}$ сюръективно. Этот пример был просчитан с помощью компьютерных вычислений. Недавно появился препринт U. Jezernik, J. Sanchez, *On surjectivity of word maps on PSL_2*, в котором доказана сюръективность вербальных отображений $\widetilde{w}\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ для слов вида $w = [[x^k, y^l], [x^m, y^n]] \in F_2^2$. Доказательство работы основано на сложных вычислениях со следами матриц.

В диссертации мы строим некоторый алгоритм, который позволяет строить бесконечные рекурсивные последовательности вербальных отображений на группах PGL_2, SL_2, которые являются сюръектиными и у которых соответствующие слова – это элементы из любого члена нормального ряда. При этом, все соответствующие слова являются неразложимыми. (Эффективность изучения рекурсивных последовательностей слов для вербальных отображений была продемонстрирована в работе А. Тома (*Convergent sequences in discrete groups*, Canad. Math. Bull. **56** (2013)) о вербальных отображениях компактных топологических групп).

В данной работе мы рассматриваем отображения с константами для простой алгебраической группы (вербальные отображения также рассматриваются как вербальные отображения с пустым множеством констант).

Одним из важных вопросов здесь является вопрос об образе $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ такого отображения. В случае когда $\Sigma = \emptyset$, т.е. $\widetilde{w}_\Sigma = w$ – обычное вербальное отображение, справедливо равенство

$$\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma} = G$$

согласно теореме А. Бореля (здесь $\overline{X}$ – это замыкание X в топологии Зарисского). Для достаточно "общего слова" w_Σ образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ также плотен в G . Однако для произвольного слова мы не можем ожидать, что образ соответствующего вербального отображения "почти совпадает" со всей группой G.

Пример. *Пусть $\Sigma = \{\sigma\}, w_\Sigma = x\sigma x^{-1}$. Тогда образ – это класс сопряженности элемента σ, размерность которого может быть достаточно маленькой.*

Следует отметить, что в отличие от вербальных отображений образ вербального отображения с константами не является инвариантным относительно сопряжения. Для некоторых задач важной является оценка не самого образа, а множества

$$\{g\,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma g^{-1} \quad | \quad g \in G\},$$

т.е. образа $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ "с точностью до сопряжения в группе" G. Для некоторых слов w_Σ удается доказать, что

$$\overline{\{g\,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma g^{-1} \quad | \quad g \in G\}} = G, \tag{0.1}$$

т.е. образ $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_\Sigma$ "почти совпадает" со всей группой G с "точностью до" сопряжений элементами группы G. В этом случае мы имеем в образе представителей “почти всех” классов сопряженных группы G. Например, в работе N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups*, J. Algebra **500** (2018), 390–424. равенство 0.1 было доказано для слова вида

$$w_\Sigma = w_1\sigma^{k_1}w_2\sigma^{k_2}\cdots w_m\sigma^{k_m}w_{m+1},\ \text{ где }\ \sum_i k_i = 0$$

и σ – элемент некоторого открытого подмножества X группы G.

Условие 0.1 удобно рассматривать в следующей форме. Для любой полупростой алгебраической группы G имеется морфизм факторизации

$$\pi\colon G \to T/W,$$

где T – фиксированный максимальный тор группы G, W – группа Вейля системы корней G (здесь рассматривается естественное действие группы W на максимальном торе), T/W – аффинное многообразие, являющееся фактором действия W на T. Морфизм π сопоставляет любому элементу g группы G элемент $t_g \in T$, сопряженный полупростой части g_s разложения Жордана $g = g_s g_u$ элемента g. Таким образом, для некоторого подмножества $M \subset G$ равенство $\pi(M) = T/W$ означает, например то, что M пересекает все полупростые классы сопряженных элементов. Условие 0.1 эквивалентно условию

$$\overline{\mathrm{Im}\ \pi\circ\widetilde{w}_\Sigma} = T/W. \tag{0.2}$$

Отметим, что для слов из примера, приведенного выше, условие 0.2 не может выполняться, поскольку образ отображения $\pi\circ w_\Sigma$ в данном случае заведомо состоит из одной точки. Пусть v_Δ – слово с константами. Тогда для слов вида

$$w_\Sigma = v_\Delta g v_\Delta^{-1} \tag{0.3}$$

множество $\mathrm{Im}\ \pi\circ\widetilde{w}_\Sigma$ – это также в точности одна точка, т.е. эти слова наиболее “удаленные” от условия 0.2. Отметим, что если $\mathrm{Im}\ \pi\circ\widetilde{w}_\Sigma$ не является точкой, то это некоторое конструктивное подмножество в T/W, замыкание которого – связное аффинное многообразие размерности ≥ 1. Этот факт иногда позволяет “индукционно” описать весь образ $\pi\circ\widetilde{w}_\Sigma$.

Слова вида 0.3 будем называть словами *C-типа* (постоянные слова $w_\Sigma = \sigma \in G$ также являются словами C-типа).

Цель исследования. Целью исследования является описание образов отображений с константами (в частности, вербальных отображений). Для достижения цели поставлены следующие задачи:

(1) Построить рекурсивные последовательности сюръективные вербальные отображения групп $\mathrm{PGL}_2, \mathrm{SL}_2$ соответственно от двух и трех переменных, члены которых (в отличие от Теоремы Бандман-Зархина (ii)) существуют в любом члене нормального ряда свободной группы.
(2) Получить описание "малых" вербальных отображений с константами, образы которых попадают в один класс сопряженных элементов.
(3) Получить обобщение Теоремы Бандман-Зархина (i) на случай вербальных отображений с константами.
(4) Получить описание образов "общих вербальных отображений с константами".
(5) Получить описание образов вербальных отображений с константами простых алгебраических групп специальных типов $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8,\ F_4, G_2$.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы как для теории вербальных отображений с константами (в частности, вербальных отображений) простых алгебраических групп, так и для структурной теории таких групп.

Методы исследования. В данной работе применялись теоретические методы теории алгебраических групп, методы алгебраической геометрии и теории алгебраических чисел.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми в теории вербальных отображений с константами и вербальных отображений простых алгебраических групп. Получен новый алгоритм построения сюръективных отображений на группах ранга один, получено описание малых вербальных отображений с константами, разработан новый метод редукции вербальных отображений с константами к полям положительной характеристики. Получено обобщение Теоремы Бандман-Зархина на вербальные отображения с константами.

Степень достоверности. Все результаты работы снабжены подробными доказательствами.

Апробация работы. По теме исследования было прочитано два доклада:

(1) Ф. Гнутов, *Вербальные отображения на группе* GL_2,
IV Всероссийская научная конференция с международным участием “Математическое моделирование и информационные технологии”,
Сыктывкарский Государственный Университет им. П. Сорокина, 12 - 14 ноября 2020.

(2) Ф. Гнутов, *Рекурсивные последовательности вербальных отображений групп* PGL_2, SL_2,
Международный вебинар “Actual problems of the theory of Algebraic groups”,
Российский Государственный Педагогический Университет им. А.И. Герцена, 16-18, декабря 2020.

По теме работы опубликовано три статьи в журналах, индексируемых наукометрическими базами данных Web of Science/SCOPUS.

[1] F. Gnutov, N. Gordeev, *Recursive sequences of surjective word maps for the algebraic groups* PGL_2 *and* SL_2, Arch. Math. 114, no. 6 (2020), 609-618.

[2] Ф. А. Гнутов, Н. Л. Гордеев, *Об образе вербального отображения с константами простой алгебраической группы*, Записки научных семинаров ПОМИ РАН, т. 478 (2019), 78-99.

[3] Ф.А. Гнутов, *Об образе вербального отображения с константами простой алгебраической группы II*, Записки научных семинаров ПОМИ РАН, т. 492 (2020), 75-93.

В статьях [1] и [2], опубликованных в соавторстве, автору принадлежит следующее. В работе [1] — вычисления необходимые для доказательства теоремы и доказательства следствий (i),(ii); в работе [2] — доказательства теорем 1 и 2.

Положения, выносимые на защиту.

Теорема 1. *Пусть* K *– алгебраически замкнутое поле и* $\omega = \omega(x, y) \in F_2 = \langle x, y\rangle$ *такое, что* $\omega(x, y) \neq x^l$ *для каждого* $l \in \mathbb{Z}$. *Тогда*

1. для каждого слова

$$w(x, y) := [[x, [x, \omega]], x[x, [x, \omega]]x^{-1}]$$

соответствующее вербальное отображение $\widetilde{w}\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ *сюръективно;*

2. существует число $d = d(\omega) \in \mathbb{N}$ *такое, что для слова* $w'(x,y,z) = w(x,y)\nu(x,z) \in F_3 = \langle x,y,z\rangle$, *где*

$$\nu(x,z) = \Big[[x^{2d},\omega(x,z)], x^d[x^{2d},\omega(x,z)]x^{-d}\Big],$$

вербальное отображение $\widetilde{w}'\colon \mathrm{SL}_2(K)^3 \to \mathrm{SL}_2(K)$ *сюръективно.*

Следствие 1. *Пусть* K *– алгебраически замкнутое поле. Тогда*

1. существует бесконечная последовательность сюръективных неразложимых вербальных отображений $\widetilde{w}_m\colon \mathrm{PGL}_2(K)^2 \to \mathrm{PGL}_2(K)$ *(где* $m \in \mathbb{N}, w_m \in F_2$*) такая, что для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется следующее утверждение:*

$$w_m \in F_2^i \Rightarrow w_{m+1} \in F_2^{i+1};$$

2. существует бесконечная последовательность сюръективных неразложимых вербальных отображений $\widetilde{w}'_m\colon \mathrm{SL}_2(K)^3 \to \mathrm{SL}_2(K)$ *(где* $m \in \mathbb{N}, w'_m \in F_3$*) такая, что для каждого* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется следующее утверждение:*

$$w'_m \in F_3^i \Rightarrow w'_{m+1} \in F_3^{i+1}.$$

Следствие 2. *Для любой простой алгебраической группы* G*, определенной над полем характеристики ноль существует бесконечная последовательность неразложимых вербальных отображений* $\widetilde{w}_m$: $G^2 \to G$ *таких, что* $w_m \in F_2^m \setminus F_2^{m+1}$ *и образ любого отображения* $\widetilde{w}_m$ *содержит все унипотентные элементы группы* G.

Следствие 3. *Для простой алгебраической группы* G*, относящейся к одному из типов* $B_r, C_r,\ D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$*, существует бесконечная последовательность неразложимых вербальных отображений* $\widetilde{w}_m\colon G^2 \to G$ *таких, что* $w_m \in F_3^m \setminus F_3^{m+1}$ *и образ каждого отображения* $\widetilde{w}_m$ *содержит все полупростые элементы группы* G.

Теорема 2. *Пусть* G *– простая присоединенная алгебраическая группа типа* $A_l, D_l,\ E_6, E_7, E_8$*. Пусть, далее,* w_Σ *– слово с константами из группы* G*. Множество* $\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ *состоит из одной точки тогда и только тогда, когда* w_Σ *– слово* C*-типа.*

Теорема 3. *Пусть G – простая присоединенная алгебраическая группа типа B_l, C_l, F_4, G_2, определенная над полем, характеристика которого $\neq 2, 3$. Пусть далее, w_Σ – нееденичное слово с константами из группы G, не содержащее среди констант малые полупростые и малые унипотентные элементы. Тогда множество $\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки в том и только том случае, когда w_Σ – слово C-типа.*

Теорема 4. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Пусть $\widetilde{w}_\Sigma : \mathrm{PGL}_2(K)^n \to \mathrm{PGL}_2(K)$ – вербальное отображение с константами. Тогда либо любой нееденичный полупростой класс сопряженных элементов группы $\mathrm{PGL}_2(K)$ пересекается с образом $\widetilde{w}_\Sigma$, либо w_Σ – слово C-типа.*

Теорема 5. *Пусть G – простая алгебраическая группа и пусть*

$$w_1, \ldots, w_{m+1} \in F_n, \ \text{ где } \ w_2 \neq 1, m > 1.$$

Тогда существует такое непустое открытое подмножество $\mathcal{U} \subset G^n$, что для любой последовательности $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathcal{U}$ отображение

$$\pi \circ w_\Sigma \colon G^n \to T/W,$$

где

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2\sigma_2 \cdots w_m\sigma_m w_{m+1},$$

доминантно.

Теорема 6. *Пусть G – простая алгебраическая группа типа B_r, C_r, $D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ и пусть $T \leq G$ – фиксированный максимальный тор. Далее, пусть*

$$w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m w_m,$$

где $w_i \in F_n, w_i \neq 1$, где $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset T$ – некоторое множество регулярных элементов. Тогда образ $\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma$ вербального отображения $\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$ пересекает любой полупростой регулярный класс элементов группы G.

Содержание работы

Глава 1 посвящена доказательству Теоремы 1 и ее следствиям. Доказательство теоремы основано не только на прямых вычислениях. *Принципиальным моментом доказательства является теория вербальных отображений с константами.*

Значимым в Теореме 1 является тот факт, что отображение $\widetilde{w}$ строится по слову ω с теми же переменными x, y, что позволяет построить рекурсивную последовательность групп w_m в группе F_2 (или F_3) из Следствий 1–3. Построение сюръективных вербальных отображения при прибавлении независимых переменных – это несложное следствие Теоремы Бореля (см. п. 1.5.1 диссертации).

Основной результат второй главы данной работы – описание слов с константами, для которых $\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ – это в точности одна точка, т.е. “малых” вербальных отображений с константами. Здесь результат разбивается на две части. В первой части мы рассматриваем простые алгебраические группы типов A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 – т.е. группы, у которых все корни соответствующей системы корней имеют одинаковую длину, а во второй части – типов B_l, C_l, F_4, G_2 – группы, корни которых имеют разную длину. Это связано с тем фактом, что для групп первого типа существуют так называемые *тождества с константами*, а для второго – нет.

Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть G – простая присоединенная алгебраическая группа типа $A_l, D_l,\ E_6, E_7, E_8$. Пусть, далее, w_Σ – слово с константами из группы G. Множество $\mathrm{Im}\,\pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ состоит из одной точки тогда и только тогда, когда w_Σ – слово C-типа.*

Таким образом, в данном случае все слова с “малым” образом $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}_\Sigma$ – это в точности слова C-типа.

Для случая групп B_l, C_l, F_4, G_2 нам потребуется следующее определение. Элемент $g \in G \setminus Z(G)$ называется *малым полупростым элементом*, если он сопряжен некоторому элементу $t \in T$, для которого $\alpha(t) = 1$ для любого длинного корня $\alpha \in R$. Элемент $g \in G$ называется *малым унипотентным элементом*, если он сопряжен некоторому корневому элементу $x_\alpha(s)\,(s \neq 1)$ для какого-либо длинного корня α.

Теорема 3. *Пусть G – простая присоединенная алгебраическая группа типа $B_l, C_l,\ F_4, G_2$, определенная над полем, характеристика которого $\neq 2, 3$. Пусть далее, w_Σ – неединичное слово с константами из группы G, не содержащее среди констант малые полупростые* *и малые унипотентные элементы. Тогда множество* $\operatorname{Im} \pi \circ \widetilde{w}_\Sigma$ *состоит из одной точки в том и только том случае, когда* w_Σ *– слово* C*-типа.*

Используя Теорему 2 мы получим следствие, которое является аналогом Теоремы (i) (Бандман-Зархина).

Теорема 4. *Пусть* K *– алгебраически замкнутое поле. Пусть* $\widetilde{w}_\Sigma : \mathrm{PGL}_2(K)^n \to \mathrm{PGL}_2(K)$ *– вербальное отображение с константами. Тогда либо любой нееденичный полупростой класс сопряженных элементов группы* $\mathrm{PGL}_2(K)$ *пересекается с образом* $\widetilde{w}_\Sigma$*, либо* w_Σ *– слово* C*-типа.*

Для доказательства Теорем 2 и 3 мы разработали *метод редукции к локально конечным полям*, позволяющий свести исследование вербальных отображений с константами $\widetilde{w}_\Sigma : G(K)^n \to G(K)$ для произвольного алгебраически замкнутого поля K к случаю, когда $K = \overline{F}_p$, где F_p – простое конечное поле характеристики $p > 0$, а $\overline{F}_p$ – его алгебраическое замыкание (некоторые вопросы теории вербальных отображений с константами, в частности, исследуемые в данной работе, удобнее изучать именно над такими полями).

В третей главе рассматриваются некоторые типы вербальных отображений с константами, для которых, используя результаты, полученные в предыдущей главе, мы оцениваем их образ.

Теорема 5 является обобщением результата работы N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin, *Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups*, J. Algebra **500** (2018), 390–424 о вербальных отображениях с константами "общего положения".

Теорема 5. *Пусть* G *– простая алгебраическая группа и пусть*

$$w_1, \ldots, w_{m+1} \in F_n, \ \text{где} \ w_2 \neq 1, m > 1.$$

Тогда существует такое непустое открытое подмножество $\mathcal{U} \subset G^n$*, что для любой последовательности* $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathcal{U}$ *отображение*

$$\pi \circ w_\Sigma \colon G^n \to T/W,$$

где

$$w_\Sigma = w_1\sigma_1 w_2 \sigma_2 \cdots w_m \sigma_m w_{m+1},$$

доминантно.

Также используя Теорему 4 и специфику систем корней $B_r, C_r, D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$ доказываем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть G – простая алгебраическая группа типа B_r, C_r, $D_{2r}, E_7, E_8, F_4, G_2$, и пусть $T \leq G$ – фиксированный максимальный тор. Далее, пусть*

$$w_\Sigma = \sigma_1 w_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m w_m,$$

где $w_i \in F_n, w_i \neq 1$, где $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subset T$ – некоторое множество регулярных элементов. Тогда образ $\operatorname{Im} \widetilde{w}_\Sigma$ вербального отображения $\widetilde{w}_\Sigma \colon G^n \to G$ пересекает любой полупростой регулярный класс элементов группы G.