ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе МЕДВЕДЕВА АЛЕКСЕЯ НИКОЛАЕВИЧА «Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа А. Н. Медведева «Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля» посвящена исследованию следующей задачи. Пусть F — непостоянная голоморфная функция в единичном круге, непрерывная в его замыкании K и $\varphi = |F|$. Как связаны между собой параметры гладкости (например, модули непрерывности) функций F и φ на K? Во-первых, из результатов Харди и Литтлвуда (1932 г.) следует, что указанную задачу достаточно рассматривать для сужений функций F и φ на границу T круга K. Во-вторых, без каких-либо априорных ограничений на нули функции F на K задача теряет смысл. Не вдаваясь в подробности, связанные с этими известными естественными ограничениями (в терминах канонической факторизации функции F), отметим, что в диссертации по существу рассматривается случай, когда F — внешняя функция. Точнее, пусть φ — неотрицательная непрерывная функция на T с условием $\log(\varphi) \in L_1(T)$ (оно необходимо),

$$F(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log(\varphi(e^{it}))\,dt\right]$$

— построенная по φ внешняя функция ($|F|_T| = \varphi$). Отождествляя φ и $F|_T$ с их 2π-периодическими версиями φ_1 и F_1 на вещественной оси, получаем, что

$$F_1(t) = \varphi_1(t)\exp(iH[\log(\varphi_1)](t))\,,$$

где H — периодический вариант преобразования Гильберта:

$$H[f](t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{t-\tau}{2}\right) f(\tau)\,d\tau\,.$$

Требуется оценить параметры гладкости функции F_1 через *соответствующие параметры* функции φ_1.

Эта задача и её вариации популярны с середины 20 века. Из результатов Хавина и Шамояна (1970) следует, что гёльдеровская гладкость функции

F_1 в общем случае вдвое хуже гёльдеровской гладкости функции φ_1 (для показателей $s \in (0,1]$). В 1971 г. Хавин обобщил и уточнил эти результаты на более широкий класса модулей непрерывности (для «порядков гладкости» не выше первого). Бреннан (1977) и Широков (1988) распространили результаты Хавина и Шамояна на показатели гельдера $s \in (1,2)$ и $s \geq 2$ соответственно. Кроме того, Широков доказал (2013), что в случае дополнительного ограничения $\log(\varphi_1) \in L^p([-\pi,\pi])$, $p \in (1,+\infty)$, падение гельдеровской гладкости происходит не более, чем в $p/(p+1)$ раз.

В рассматриваемой диссертации устанавливаются «поточечные» (локальные) аналоги указанных выше результатов для порядков гладкости *не выше двух*, причем существенно расширена шкала условий на функцию $\log(\varphi_1)$. Получены также непрямые (специфические) аналоги этих утверждений для верхней полуплоскости.

Кратко обсудим *содержание* диссертации, состоящей из введения, трех глав (разбитых на параграфы), заключения и списка литературы. Диссертация изложена на 91 страницах. Список литературы включает 32 наименования, из которых первые 4 — работы автора по теме диссертации.

Во введении дан исторический обзор и обоснована актуальность темы исследования; введены необходимые обозначения и понятия, сформулированы цели и основные полученные результаты; выделены основные элементы новизны, теоретической и практической значимости. Отметим, что гладкость функции измеряется как в терминах средних осцилляций, так и с помощью усредненных конечных разностей. В последнем разделе введения устанавливается взаимосвязь этих понятий и вытекающая из них «равномерная гладкость».

В первой главе доказывается Теорема 1, в которой оценивается гладкость функции F_1 в произвольной фиксированной точке t в условиях, когда у функции φ_1 в точке t выполнены условия на гладкость *порядка не выше 1* (т.е. её обычный модуль непрерывности в точке t оценивается некоторой 1-мажорантой $\omega(\delta)$).

В разделе 1.1 излагается необходимая информация о банаховых *симметричных пространствах* X и вводится понятие фундаментальной функции Φ_X, в терминах которых формулируются основные определения и результаты главы. Наиболее существенными здесь являются условие ограниченности на X оператора Гильберта (теорема Бойда) и условие $\log(\varphi_1) \in X$. Этот новый общий подход к задаче позволил получить точные достаточные условия, гарантирующие падение гладкости функции F_1 (в заданной точке) не более, чем в фиксированном отношении по сравнению с φ_1. Так, в Теореме 1, в точке t, где $\varphi_1(t) = 0$, X-модуль непрерывности $\Omega_X(\delta)$ функции F_1 *в этой точке* оценивается просто: $\Omega_X(\delta) \le C\omega(\delta)$; в общем случае он оценивается следующим образом:

$$\Omega_X(\delta) \le C(\omega(\delta) + \omega(\psi_X(\delta))) ,$$

где $\psi_X(u)$ — функция, обратная к $u\Phi_X(u)$, $u < 2\pi$. Установлен и «равномерный» вариант этой теоремы (Следствие 1): если модуль непрерывности функции φ_1 на $[-\pi, \pi]$ оценивается некоторой 1-мажорантой $\omega(\delta)$, то

$$|F_1(x) - F_1(y)| \le C\omega(\psi_X(|x-y|)) , \ |x-y| \le 2\pi ,$$

где C зависит только от $||\log(\varphi_1)||_X$ и ω (а в Теореме 1 еще и от $||H||_{X\to X}$).

В разделе 1.2 указан пример, показывающий точность полученных результатов.

Доказательство Теоремы 1 приводится в разделе 1.3.

Во второй главе доказываются Теорема 2 и Следствие 2, по форме аналогичные Теореме 1 и Следствию 1 из главы 1, но для случая *порядков гладкости от 1 до 2*. В виду существенных дополнительных сложностей, в отличие от предыдущей главы, здесь ограничиваются условием $\log(\varphi_1) \in L^p$ (т.е. $X = L^p([-\pi, \pi])$, $1 \le p \le +\infty$).

В третьей главе устанавливается Теорема 3 и её следствия (аналогичные Теореме 1 и Следствию 1 из главы 1) для верхней полуплоскости. Здесь возникает своя специфика, и падение гладкости носит белее сложный характер, зависящий, в частности, от рассматриваемой точки.

В заключении сформулированы *выносимые на защиту основные результаты* и обсуждены вопросы, пока остающиеся открытыми.

Рассмотрение диссертации позволяет сделать следующие выводы.

Диссертация А. Н. Медведева «Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля» относится к хорошо известному специалистам и активно развивающемуся направлению современного анализа. *Таким образом, тема диссертации является актуальной.*

Основными достижениями диссертации, определяющим ее *научную новизну*, являются следующие результаты:

1) Показано, что гёльдерово условие порядка не выше двух (не обязательно степенного типа) на модуль внешней функции в круге в одной граничной точке гарантирует для самой функции вдвое меньшую гладкость в той же точке в некотором интегральном смысле.

2) Если модуль внешней функции обладает гладкостью не выше 1 в одной граничной точке круга, найдены точные достаточные условия, гарантирующие падение гладкости самой функции в этой точке не более, чем в фиксированном отношении.

3) Установлено, что аналогичные результаты для случая гладкости порядка меньше 1 имеют место и для внешних функций в верхней полуплоскости. Там, однако, падение гладкости наблюдается лишь на близких расстояниях от точки, в которой измеряется гладкость, а также сам порог, начиная с которого наступает упомянутое падение гладкости, зависит от положения точки на границе.

Все полученные автором результаты обоснованы строгими и аккуратными математическими доказательствами. Это подтверждает их *достоверность*.

Основные результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории граничных значений аналитических и гармонических функций. Это определяет их *теоретическую ценность*.

Считаю, что полученные результаты диссертации найдут дальнейшее применение в исследованиях по комплексному и гармоническому анализу, проводимых в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в Санкт-Петербургском государственном университете, в ПОМИ РАН, и в других математических исследовательских центрах в России и за рубежом. Это, в частности, определяет *практическую значимость* результатов диссертации.

Результаты диссертации своевременно и в полном объеме опубликованы автором в 4 работах, включая 3 статьи, опубликованные в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Все основные результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по линейному и комплексному анализу в Санкт-Петербурге.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Замечания. Существенных замечаний по диссертации нет. Имеется несколько очевидных опечаток, неизбежных в работах большого объема. Например, в формулах (18), (24), (1.3), (2.3), в оценке (1) Следствия 2, в формуле в конце стр. 40. В автореферате на с. 5 строка 4 должна начинаться так: «Если *модуль* внешней функции...».

Приведенные замечания никак не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы и на научную значимость полученных результатов. Таким образом считаю, что диссертация А. Н. Медведева «Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля» соответствует всем требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации №842 от 24.09.2013, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Медведев Алексей Николаевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры Теории функций и функционального анализа
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

18.10.2017

/ Парамонов Петр Владимирович /

Почтовый адрес: 119991, ГСП-1,
Москва, Ленинские горы, МГУ
Телефон: (495) 939-36-80.
Адрес электронной почты: `tffa.msu@yandex.ru`