Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук
(ИМ СО РАН)
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98
E-mail: im@math.nsc.ru

24.11.2014 № 15302-2-2174

На № _______________ от ___________

«У Т В Е Р Ж Д А Ю»
Зам. директора ФГБУН ИМ СО РАН по науке, д.ф.-м.н., доцент
___________________ Е. П. Вдовин
«_24_» __ ноября __ 2014 г.

ОТЗЫВ
ведущей организации

на диссертацию **Степанова Алексея Владимировича**
Структура и подгруппы групп Шевалле над кольцами
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Диссертация А. В. Степанова посвящена изучению групп Шевалле над коммутативными кольцами. Классификация групп Шевалле над алгебраически замкнутыми полями была получена в середине 20-го века. Немного позже была построена структурная теория групп Шевалле над произвольными полями. Эти работы во многом были инициированы классификацией простых конечных групп. С другой стороны, в работах Гротендика и Демазюра был заложен фундамент для изучения групповых схем. В 1960-е годы, в связи с изучением арифметических групп, возник интерес к изучению линейных групп над коммутативными кольцами. Еще одной мотивацией для изучения линейных групп над кольцами была развивающаяся в то время алгебраическая K-теория. С начала 1970-х до начала 1990-х годов этой тематике были посвящены сотни работ, в которых были установлены основные свойства групп Шевалле, такие как нормальное строение и коммутационные формулы. Выяснилось, что важную роль в описании структуры группы Шевалле $G(R)$ играют ее конгруэнцподгруппы $G(R,I)$, относительные элементарные подгруппы $E(R,I)$ и факторгруппы $K_1^G(R,I) = G(R,I)/E(R,I)$, где I – идеал кольца R.

Начиная с 1970-х годов возник интерес также к подгруппам линейных групп над кольцами, содержащих некоторую фиксированную подгруппу, такую как группа диагональных, клеточно-диагональных матриц или группа над подкольцом. Эта тематика возникла как совместное обобщение результатов об арифметических подгруппах и о максимальных подгруппах групп Шевалле над полями, в частности, простых конечных групп.

Приведем основные результаты диссертации с указанием их значимости в изучаемой области.

(1) Найдено множество образующих относительной элементарной группы. Этот результат усиливает аналогичный результат Л. Васерштейна и может быть применен для изучения стабилизации и предстабилизации функторов $K_1^G(R,I)$ и $K_2^G(R,I)$ по отношению к вложениям групповых схем $G \to G'$, индуцированных вложением систем корней.

(2) Доказана мульти-относительная коммутационная формула. Также как стандартные коммутационные формулы являются одним из ключевых шагов в описании нормальных подгрупп, коммутационная формула, полученная в диссертации, должна сыграть важнейшую роль при описании субнормальных подгрупп группы Шевалле над кольцом.

(3) Доказан мульти-относительный аналог теоремы о нильпотентной структуре K_1^G. Этот результат не только доказывает нильпотентность группы $K_1^G(R,I)$, но и показывает, как на этой группе действует конгруэнцподгруппа, соответствующая другому идеалу.

(4) Доказана ограниченность множества коммутаторов в произвольной функториальной системе образующих. Одной из интригующих проблем является вопрос о конечности ширины элементарной группы в стандартных образующих (конечность диаметра графа Кэли). Известно, что ширина $SL_n(\mathbb{Z})$ конечна, а $SL_n(\mathbb{C}[x])$ – нет. При этом ответ неизвестен уже для групп $SL_n(\mathbb{F}_q[x])$ и $SL_n(\mathbb{Q}[x])$. Результат, полученный в диссертации проливает свет на препятствие к конечности ширины элементарной группы Шевалле $E(R)$.

(5) Пусть G – группа Шевалле, соответствующая системе корней с двойными связями (B_l, C_l или F_4), а $R \subseteq A$ – пара колец, причем $1/2 \in R$. В диссертации доказано, что описание решетки подгрупп группы $G(A)$, нормализуемых группой $E(R)$, является стандартным.

(6) Пусть теперь группа G соответствует системе корней с простыми связями (A_l, D_l, E_l). В противоположность предыдущему пункту, в диссертации доказано, что стандартность решетки подгрупп $G(A)$, содержащих $E(R)$ (или нормализуемых ей), влечет сильное условие на расширение колец $R \subseteq A$, названное автором "квазиалгебраичность". При этом, если это условие не выполнено, то задача описания решетки подгрупп