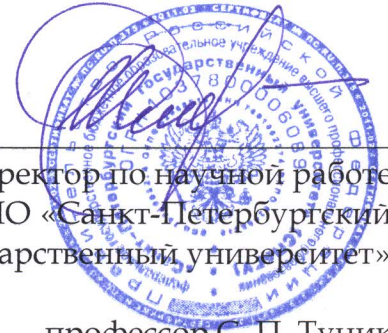


«УТВЕРЖДАЮ»



Проректор по научной работе
ФВБУ ВПО «Санкт-Петербургский
государственный университет»

профессор С. П. Туник

04 июля

2014 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
ФВБУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

на диссертационную работу Малышева Кирилла Леонидовича

«КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ НИЗКОРАЗМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ
МОДЕЛЕЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ АСИМПТОТИКИ»,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических
наук по специальности 01.01.03 - математическая физика.

Диссертация К.Л. Малышева посвящена вычислению корреляционных функций и исследованию их асимптотических представлений для некоторых низкоразмерных неоднородных моделей статистической физики, представляющих актуальные области современной математической и теоретической физики. В частности, рассматриваются проблемы, находящиеся на стыке теории квантовых интегрируемых систем, с одной стороны, а также перечислительной комбинаторики, теории симметрических функций и случайных матриц, с другой. При этом основными методами применяемыми в диссертации являются как квантовый метод обратной задачи, разработанный в лаборатории математических проблем физики ПОМИ под руководством Л.Д. Фаддеева, так и подход континуального интегрирования, восходящий к работам Р. Фейнмана и М. Каца. Подход континуального (функционального) интегрирования получил дальнейшее существенное развитие в работах Л.Д. Фаддеева, В.Н. Попова, А.Н. Васильева, А.А. Славнова, В.С. Ярунина и других (при решении проблем, связанных с квантованием полей Янга--Миллса, с применением ренорм-группы в теории критических явлений и стохастической динамике, с исследованием коллективных явлений в моделях физики конденсированного состояния).

В работе К.Л. Малышева рассмотрены низкоразмерные модели статистической физики, для которых вычисляются соответствующие корреляционные функции и изучается их асимптотическое поведение.

Актуальность темы исследования.

Квантовый метод обратной задачи рассеяния, в значительной степени разработанный в лаборатории математических проблем физики ПОМИ под руководством академика Л. Д. Фаддеева, является основным подходом к изучению интегрируемых моделей квантовой теории поля и статистической физики. Вычисление корреляционных функций является актуальной задачей теории квантовых интегрируемых систем. Квантовый метод обратной задачи позволяет находить корреляционные функции в конечном объеме и при различных граничных условиях. Большой интерес при этом вызывают точные ответы, связанные с представлениями в виде определителей, которые позволяют эффективно исследовать асимптотическое поведение корреляционных функций. Квантовый метод обратной задачи связан с такими бурно развивающимися областями современной математики и математической физики как теория квантовых групп, маломерная топология и конформная теория поля. Кроме того, возникают связи квантовой интегрируемости с теорией суперсимметричных калибровочных моделей, а также удается установить связи с перечислительной комбинаторикой, симметрическими функциями и случайными матрицами.

В современной теоретической и математической физике особое место занимают исследования низкоразмерных моделей статистической физики. Информацию о моделях дают как точные корреляционные функции (функции Грина), так и их асимптотические оценки. При этом интерес к точно решаемым моделям связан с достижениями в области практической реализации маломерных систем конечного размера (например, при моделировании огрубления (плавления) кристаллов). Прогресс в квантовой оптике и в nano-приборостроении стимулирует интерес к пространственно неоднородным системам. При этом неоднородность может обуславливаться либо конечностью объема или внешним потенциалом, либо дефектами (дислокациями, дисклинациями). Неоднородные системы связаны, в частности, с атомными газами в магнито-оптических ловушках, а также, например, с нанотрубками и графеновыми пленками. Атомные газы в ловушках удается реализовать как квази-одномерные системы, в которых проявляются черты либо фермионного, либо бозонного поведения.

Заметный интерес вызывают связи квантовых интегрируемых моделей статистической физики с перечислительной комбинаторикой. Вычисление температурных корреляционных функций специального вида для ХХZ-модели Гейзенберга (пределы нулевой и бесконечной анизотропии) приводит к соотношениям, имеющим отношение к перечислению плоских разбиений и решеточных самоизбегающих путей.

Структура и содержание диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы. Объем диссертации -- 184 страницы. Библиография включает 195 наименований.

Во вводной части диссертации приведена общая характеристика работы, включающая актуальность исследованных тем и обзор основных методов, а также обсуждается структура работы.

В Главе 1 рассмотрено вычисление температурных корреляционных функций - "выживание ферромагнитной струны" и "выживание доменной стенки" - для ХХZ цепочки при нулевой и бесконечной анизотропии. В этих предельных случаях N-частичные векторы состояния допускают запись с помощью симметрических функций Шура. Для форм-факторов операторов ферромагнитной струны и доменной стенки, автором получены ответы, выраженные с помощью определителей. Вычисление полученных представлений в специальной q-параметризации приводит к выражениям, содержащим q-биномиальные определители. Вычисление q-биномиальных определителей приводит к выражениям, являющимся производящими функциями плоских разбиений в ящике, и в пределе $q=1$ возникают аналоги формулы Мак-Магона для числа разбиений в ящике. При $q=1$ возникает также интерпретация форм-факторов операторов ферромагнитной струны и доменной стенки в терминах самоизбегающих путей на квадратной решетке. Далее, вычисляются асимптотики температурных корреляционных функций выживания ферромагнитной струны и выживания доменной стенки в случае длинной, но конечной цепочки и при достаточно низкой температуре. Получены представления в виде матричных интегралов, сводящиеся к произведению статсуммы гауссова унитарного ансамбля и коэффициента в виде квадрата числа плоских разбиений. Получены соотношения, явно выражающие асимптотическое поведение корреляционных функций в случае, когда все параметры (полное число узлов цепочки M , число спинов "вниз" N , число последовательных спинов в ферромагнитной струне или в доменной стенке n , обратная температура $1/T$) растут. Если рост параметров подчинен определенному соотношению, то обеспечено убывание коррелятора.

Специальные корреляционные функции ХХ0 цепочки Гейзенберга над ферромагнитным состоянием могут быть использованы для перечисления путей блуждания недружественных пешеходов в модели со случайными поворотами. Для ХХ0 модели Гейзенберга на периодической цепочке вычисляется специальная двухточечная корреляционная функция над суперпозицией собственных состояний магнетика, которую также можно интерпретировать как производящую функцию случайных блужданий недружественных пешеходов на одномерной решетке в среде с переменным числом недружественных соседей. Получена оценка числа путей пешехода, перемещающегося между двумя достаточно удаленными узлами в пределе, когда число поворотов растет как квадрат расстояния между начальным и конечным положениями пешехода.

Рассматривается также XY цепочка Гейзенберга. Для производящей функции соответствующих корреляторов третьих компонент спинов получено выражение в терминах функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным интегрирования. Вычисление производящей функции осуществляется с помощью представления в виде конечнократного грасманового интеграла. При этом структура производящей функции такова, что при переходе от конечнократного интеграла к функциональному оказывается естественным подчинить переменные интегрирования определенным граничным условиям, выражающим квазипериодичность на отрезке мнимого времени. Интегралы гауссова типа вычисляются стандартно, и в регуляризованном виде принимают вид определителей конечных матриц. Полученные выражения можно использовать для вывода многоточечных корреляторов третьих компонент спинов. В качестве одного из приложений, рассматривается использование интеграла с квазипериодическими условиями при вычислении производящей функции случайных блужданий недружественных пешеходов для XX0 модели.

В Главе 2 рассматриваются модели квантовой статистической физики, объединенные тем, что функциональное интегрирование используется для вывода температурных корреляционных функций. Вычисление интегралов связано с приемом, активно обсуждавшимся в работах В.Н. Попова и состоящим в разделении переменных интегрирования на высокоэнергетичную ("быструю") и низкоэнергетичную ("медленную") составляющие.

Во первых, рассматривается одномерный бозе-газ в гармоническом потенциале на вещественной оси. Функциональное интегрирование используется для вывода однопетлевого эффективного действия. Стоит отметить, что модель бозе-газа в удерживающем потенциале существенно отличается от аналогичной задачи для пространственно однородного бозе-газа. Это связано с тем, что бозе-конденсация в неоднородном случае происходит не только в импульсном пространстве, но и в координатном, где и характеризуется ярко выраженным пиком распределения. Чтобы учесть данную специфику, оказывается интересным рассмотреть модель не в импульсном представлении (как в "классической" задаче о корреляциях в однородном бозе-газе), а именно в координатном, для которого адекватным приближением для плотности распределения оказывается приближение Томаса-Ферми. При этом роль "медленного" поля как раз и играет решение, получаемое в приближении Томаса-Ферми. В режиме Гросса-Питаевского (отталкивание слабое, плотность частиц высокая) и в приближении Томаса-Ферми исследуются асимптотики двухточечных и многоточечных температурных корреляционных функций. Для вывода ведущих асимптотических оценок используется предложенный В. Н. Поповым метод получения оценок для критических индексов в случае однородного бозе-газа. Метод В. Н. Попова дает функцию Грина бозе-системы с качественно правильной длинноволновой асимптотикой в тех случаях, когда точный ответ известен. В частности, правильный вид имеет асимптотика вариационной функции Грина пространственно одномерной бозе-системы. Для неоднородного бозе-газа в диссертации получены оценки корреляторов в пределах, когда температура стремится к нулю, а объем, занимаемый квази-конденсатом

растет. Определены критические индексы, которые зависят от пространственных координат и которые характеризуют убывание корреляционной функции. В целом, результаты полученные в рамках приближенного подхода, который основан на функциональном интегрировании, сводятся, в соответствующих пределах (например, при исчезновении удерживающего потенциала), к соотношениям для однородного бозе-газа, получаемым в рамках анзаца Бете. Полученные соотношения для критического индекса записаны в терминах физических наблюдаемых и могут на практике продемонстрировать эффект неоднородности в виде конкретной зависимости от координат.

Для сверхтекучего гелия-3А получено в лондоновском пределе разложение среднего оператора тока частиц по степеням производных параметра порядка. Асимптотика коррелятора исследуется методом Лапласа. Доказан сам факт наличия поправок (наличие или отсутствие которых активно обсуждалось в литературе) по степеням производных параметра порядка. Доказано наличие квадратичных поправок (которые более существенны) и продемонстрированы кубические поправки.

Кроме того, функциональное интегрирование применяется для вывода спектра коллективных возбуждений в антиферромагнитной фазе двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием как вблизи нулевой температуры, так и в окрестности критической температуры Нееля. Интерес к указанной модели был продиктован задачами, связанными с поиском модели высокотемпературной сверхпроводимости и с описанием (сильных) электронных корреляций в двумерных решеточных системах.

Большой теоретический и практический интерес вызывает физика наноматериалов. Здесь существенную роль играют такие дефекты кристаллической структуры как дислокации и дисклинации. Широко известные ("классические") дислокационные решения, возникающие в рамках теории упругости с несовместностью, характеризуются полюсной особенностью тензора напряжений на оси дефекта. В главе 3 рассмотрены две задачи. Во-первых, предложена трансляционно-калибровочная лагранжева модель, приводящая к решениям, характеризующимся тензором напряжений со сглаженной особенностью. Цилиндрическая область вблизи оси дефекта, внутри которой происходит сглаживание, называется областью ядра дефекта. Уравнения (нелинейной) модели решены для конкретного случая прямолинейной винтовой дислокации в упругом бесконечном цилиндре, и соответствующий тензор напряжений получен в линейном и квадратичном приближениях по модулю вектора Бюргерса. При этом калибровочное уравнение эйнштейновского вида играет роль нестандартного закона несовместности. Физический закон, который связывает тензоры напряжений и деформаций, содержит члены как первого, так и второго порядков. Используется метод функции напряжений, при котором уравнения равновесия в напряжениях удовлетворяются тождественно. Получаемые окончательно компоненты тензора напряжений определены как вне, так и внутри ядра, причем область ядра характеризуется самосогласованно возникающими параметрами длины (радиусами). Самосогласованность решения обеспечивается возможностью фиксировать имеющийся произвол в выборе параметров. Это свидетельствует об

удовлетворительности предложенной модели, в рамках которой собственная энергия дислокаций описывается калибровочным лагранжианом, квадратичным по плотности дефектов.

Далее, функциональное интегрирование используется для вычисления статистической суммы и температурных корреляционных функций компонент напряжений в модели, рассматривающей набор модифицированных дислокаций как термодинамический ансамбль. Модель дислокаций при ненулевой температуре эквивалентна двумерному кулоновскому газу зарядов, потенциал взаимодействия которых имеет логарифмический вид на больших расстояниях и сглажен (стремится к нулю) для зарядов на близком расстоянии. Корреляторы компонент напряжений используются для получения закона перенормировки упругих постоянных, возникающей при зарождении дислокационных диполей. При этом основное внимание уделяется тем проявлениям, которые связаны с тем, что используются решения для несингулярных (модифицированных) дислокаций. Продемонстрировано, что эффекты обусловленные конечным размером ядер дислокаций имеют место и также могут быть проверены в экспериментах с коллоидными пленками.

Отметим, что каждая из трех глав носит самостоятельный заверченный характер. При этом цельность диссертации обеспечивается общностью исследуемых систем (низкоразмерные модели статистической физики) и используемых методов (квантовый метод обратной задачи, функциональное интегрирование).

Цель работы состоит в вычислении температурных корреляционных функций и их асимптотик для низкоразмерных моделей статистической физики, характеризующихся пространственной неоднородностью вызванной либо конечностью объема (длиной цепочки), либо наличием внешнего потенциала или дефектов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит в основном теоретический характер. Однако, разработанные в ней методы и полученные результаты могут быть применены для дальнейшего изучения как указанных систем статистической физики, так и других родственных задач. Кроме того, результаты диссертации должны стимулировать экспериментальные исследования низкоразмерных систем.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Для XXZ цепочки Гейзенберга конечной длины $M+1$, рассматриваемой при нулевой и бесконечной анизотропии, вычислены температурные корреляционные функции "выживание ферромагнитной струны" и "выживание доменной стенки". Также вычислены форм-факторы операторов ферромагнитной струны и доменной стенки над N -частичными состояниями. Для форм-факторов получены ответы в

