"Утверждаю"
Ректор ПетрГУ профессор
А.В. Воронин
..... сентября 2014 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертацию Меркулова Алексея Сергеевича
"Некоторые типы сингулярных интегральных операторов на плоскости",
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и
функциональный анализ

Теория сингулярных интегральных операторов – достаточно давняя, но продолжающая интенсивно развиваться ветвь математического анализа. Операторы Кальдерона-Зигмунда, преобразования Рисса и многие другие сингулярные интегральные операторы нашли свое приложение в других разделах анализа. Например, в современных приложениях к исследованию свойств емкости множеств в $\mathbb{R}^n$, — в определении емкости как раз используются преобразования Рисса.

В диссертации Алексея Сергеевича Меркулова изучаются сингулярные операторы новых типов на комплексной плоскости, её содержание ново, и сама тематика в силу активного развития теории сингулярных интегральных операторов (достаточно упомянуть известные работы в этой области С.В. Кислякова, В. Эйдермана, А. Вольберга, Ф. Назарова и др., датированные 2000-ми годами), действительно актуальна.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Во введении кратко описывается история вопроса и содержание диссертации. Основной целью первой главы является вопрос об ограниченности в пространстве $L^p(\omega)$, ω — вес на комплексной плоскости, удовлетворяющий условию A_p Макенхаупта, интегрального оператора

$$T_n^*f(z) = \sup_{\epsilon>0}\left|\int_{|\zeta-z|>\epsilon}\left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}\right)^n \frac{f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma(\zeta)\right|,$$

где V — комплекснозначная функция, определённая на $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$|V(\zeta)-V(z)| \le w|\zeta-z|,$$

$\sigma(\zeta)$ — плоская мера Лебега. В теореме 1 сформулировано соответствующее утверждение об ограниченности этого оператора. Формулировке теоремы предшествовал важный вспомогательный результат, которому был посвящён §1 в главе 1. Доказательство теоремы 1 дано в параграфе 2.

Оценки норм операторов T_n^*, полученных в главе 1, оказываются достаточно точными, чтобы с их помощью получать ограниченность в $L^p(\omega)$ операторов ещё одного принципиально нового типа. Именно, пусть функция V такая, как в теореме 1, F — произвольная целая функция. Автор определяет следующий оператор

$$P_F^* f(z) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|\zeta - z|>\epsilon} F\left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta - z}\right) \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

и его частный случай

$$P^* f(z) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|\zeta - z|>\epsilon} \exp\left(c\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta - z}\right) \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

($F(z) = \exp(cz)$). В теореме 2 и следствии из неё (стр. 23), в частности, формулируются утверждения об ограниченности операторов P_F^* и P^* в $L^p(\omega)$ в виде

$$||P_F^* f||_{p,\omega} \leq 2M(2w)C_1 A ||f||_{p,\omega},\, M(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|.$$

Все три параграфа главы 2 посвящены доказательству теоремы 2 и следствия к нему.

В главе 3 рассматриваются дальнейшие обобщения сингулярных операторов. Прежде всего, надо отметить новый тип операторов

$$S_n^* f(z) = \sup_{\epsilon>0} \left| \int_{|\zeta - z|>\epsilon} \frac{|V(\zeta)-V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(z)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|,$$

аргумент ядра в интеграле которого может существенно отличаться от аргумента ядра в определении оператора $T_{2n}^* f$ главы 1. В теореме 3 главы 3 установлено, что

$$||S_n^* f||_{p,\omega} \leq b_1 n^{3/2} ||f||_{p,\omega},$$

b_1 имеет логарифмический рост по n. Доказательство теоремы 3 занимает три параграфа главы 3.

В главе 4 рассматривается ещё более общий тип операторов, чем $T_n^* f$ — оператор $U_n^* f$. Обобщение это делается не только ради более общего интеграла, но и для более гибких конкретных и интересных приложений, собранных в §3 главы 4. Например, на стр. 48 приведена оценка оператора

$$\sup_{\epsilon>0}\left|\int_{|\zeta-z|>\epsilon}\frac{|e^{i\zeta}-e^{iz}|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}}\frac{f(z)}{(\zeta-z)^2}d\sigma(\zeta)\right|.$$

Все результаты диссертации являются строго доказанными научными фактами. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Результаты диссертации своевременно опубликованы в трёх статьях в журналах из списка ВАК. Результаты работы заинтересуют специальстов по комплексному и вещественному анализу. Работа хорошо оформлена. Есть в ней и недостатки.

1) В формулировке теоремы 1 (стр. 20) следовало бы сразу указать значение $b(p,n)$, поскольку оно существенно используется в доказательстве теоремы 2, а в диссертации оно приведено лишь на стр. 21 в формуле (21), при том возведённое в степень p.

2) В формулировке теоремы 2 и следствия из нее автор мог бы потрудиться "расшифровать" информацию о встречающихся в неравенствах константах тем более, что порой они выписываются явно, чтобы не "выуживать" это из доказательств; например, в цитированном выше неравенстве из теоремы 2 константа записана в виде произведения 3-х: $2C_1A$, и из формулировки не ясно, почему это не записать как одну константу.

Указанные недочеты не меняют общей положительной оценки диссертационной работы А.С. Меркулова, написанной в целом на хорошем профессиональном уровне. Считаю, что диссертация является законченной научно-исследовательской работой. Ее основные результаты являются новыми, они докладывались на на семинаре по теории операторов и комплексному анализу в ПОМИ РАН, на семинаре по комплексному анализу и приложениям в ПетрГУ, опубликованы в трех статьях в журнале из списка ВАК РФ. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертационной работы. Результаты работы могут найти применение в исследованиях интегральных операторов, проводимых в ПОМИ РАН, СПбГУ, МГУ, НГУ, и-те математики НО РАН, и др.

Считаем, что диссертационная работа "Некоторые типы сингулярных интегральных операторов на плоскости" соответствует требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор Меркулов Алексей Сергеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по указанной специальности.

Отзыв заслушан и утвержден на заседании кафедры математического анализа Петрозаводского государственного университета 25 сентября 2014 г.

Заведующий кафедрой
математического анализа,
доктор физико-математических наук,
профессор

Старков В.В.

Подпись руки проф. Старкова Виктора Васильевича
УДОСТОВЕРЯЮ.
Уч. секретарь ученого совета
Сутвило А.И.
«25» сентября 2014 г.