На правах рукописи

МЕРКУЛОВ АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена на кафедре математического анализа математического факультета ФГБОУ ВПО «Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена»

Научный руководитель

Широков Николай Алексеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты:

Коточигов Александр Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики №2 ФГБОУ ВПО
«Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)»

Васин Андрей Васильевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВПО
«Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С.О. Макарова»

Ведущая организация

ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»

Защита состоится «_» _____ 2014 года в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, http//www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «_» _____ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук А.Ю. Зайцев

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Развитие теории функций побудило ввести и изучить важные сингулярные интегральные операторы несверточного типа. Первый пример подобных операторов рассмотрел Кальдерон. В работе [2] доказано, что соответствующий оператор действует из пространства $L^p(\mathbb{R})$ в пространство $L^p(\mathbb{R})$. Случай прямой оценки в норме $L^p(\mathbb{R})$ рассматривался также в работе [1]. Затем Койфман и Мейер в [3], а также Койфман, Макинтош и Мейер в [4] обобщили определение оператора Кальдерона.

Важность изучения подобных операторов связана в случае прямой и с одним из возможных подходов к оценке интеграла типа Коши

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

для кривых Γ, являющихся графиками функций, удовлетворяющих условию Липшица, хотя впервые такая оценка была получена Кальдероном [5] без применения коммутаторов.

Аналоги коммутаторов Кальдерона для комплексной плоскости были определены в работе [6], в ней же была доказана ограниченность этих операторов в норме $L^p(\mathbb{C}), \quad 1 < p < \infty$. Оказывается, что такие операторы ограничены и во всех весовых пространствах $L^p(\omega)$ с весом ω, удовлетворяющим на плоскости условию Макенхаупта A_p. Эти результаты можно использовать для оценки некоторых сингулярных интегральных операторов специального вида.

Цель работы. Диссертация посвящена исследованию вопроса ограниченности сингулярных интегральных операторов, аналогичных коммутаторам Кальдерона, на комплексной плоскости в весовых пространствах $L^p(\omega)$ с весом ω, удовлетворяющим на плоскости условию Макенхаупта.

Методы исследований. В работе применяются сильные результаты гармонического анализа – оценки интегральных операторов с весами, удовлетворяющими условию Макенхаупта, а также приемы анализа разработанные автором, позволяющие воспользоваться имеющейся теорией.

Основные результаты.

Получены весовые оценки сингулярных интегральных операторов на комплексной плоскости для весов, удовлетворяющих условию Макенхаупта. При этом сингулярные интегральные операторы оказываются несверточного типа, что исключает получение для них оценки в L^2 с помощью преобразования Фурье.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее методы могут использоваться в других задачах, связанных с оценкой сингулярных интегральных операторов, аналогичных коммутаторам Кальдерона, на комплексной плоскости.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре по теории операторов и комплексному анализу в ПОМИ РАН в 2013 году.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 3 работы в журнале из списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на 11 параграфов, изложена на 57 страницах. Список литературы включает 9 названий.

Содержание работы

Первая глава посвящена изучению коммутаторов Кальдерона на комплексной плоскости в весовом пространстве $L^p(\omega)$. Главной целью является обобщение результатов, полученных в [6] на случай веса, удовлетворяющего условию Макенхаупта.

В первом параграфе даются основные определения. Пусть $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению

$$|V(z) - V(\zeta)| \leq \mathrm{w}|z - \zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C}. \tag{$*$}$$

Вес $\omega \geq 0$, определенный на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называют удовлетворяющим условию Макенхаупта A_p, $\quad 1 < p < \infty$, если для любого круга B справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega d\sigma\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega^{-\frac{1}{p-1}} d\sigma\right)^{p-1} \leq c_0,$$

где σ – плоская мера Лебега, $|B|$ – площадь B, $c_0 = c_0(\omega)$.
Рассмотрим оператор

$$T_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon}\left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta)\right|,$$

где $\sigma(\zeta)$ – плоская мера Лебега в $\mathbb{C}$, $f \in L^p(\omega)$.
Фиксируем $\delta > 0$ и обозначим через $\varepsilon(z)$ измеримую функцию на $\mathbb{C}$, для которой $\varepsilon(z) \geq \delta$. Определим операторы:

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)}\left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta),$$

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\lambda^n T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z),$$

где λ – комплексное число, $|\lambda| < \frac{1}{\mathrm{w}}$, w взято из условия $(*)$.
Основным результатом этого параграфа является оценка

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)\right|^p \omega(z) d\sigma(z) \leq \frac{b(p, c_0, |\lambda|)}{(1-|\lambda|\mathrm{w})^{2p}} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z).$$

Второй параграф содержит формулировку теоремы 1 и ее доказательство, основанное на связи между операторами $T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}$ и $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}$, которая позволяет оценить сначала $T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}$, а потом и T_n^* следующим образом:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{C}} (T_n^* f)^p \omega d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \leq b(p,n)\mathrm{w}^n \left(\int\limits_{\mathbb{C}} |f|^p \omega d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вторая глава содержит применение полученных результатов к оценке операторов специального вида.

Пусть ω – вес на плоскости, удовлетворяющий условию Макенхаупта, $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению $(*)$, $f \in L^p(\omega)$. Для целой функции $F(z) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ рассмотрим оператор

$$P_F^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} F\left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}\right) \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

и его частный случай

$$P^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} e^{c\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right|.$$

В первом параграфе формулируются следующие утверждения.

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\|P_F^* f\|_{p,\omega} \leq 2M(2\mathrm{w})C_1 A \|f\|_{p,\omega},$$

где $M(2\mathrm{w}) = \max\limits_{|z|=2\mathrm{w}} |F(z)|$.

Следствие. *Для оператора P^* верно*

$$\|P^* f\|_{p,\omega} \leq 2C_2 A \|f\|_{p,\omega}.$$

Второй параграф посвящен изучению вспомогательных операторов P_ε и $P_{F,\varepsilon}$, определенных следующим образом:

$$P_{F,\varepsilon} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} F\left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right) \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta),$$

$$P_\varepsilon f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} e^{c\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta).$$

Третий параграф завершает доказательство, используя полученные оценки для вспомогательных операторов:

$$\|P_{F,\varepsilon} f\|_{p,\omega} \leq M(2\mathrm{w}) C_1 A \|f\|_{p,\omega},$$

$$\|P_\varepsilon f\|_{p,\omega} \leq C_2 A \|f\|_{p,\omega}.$$

В третьей главе происходит обобщение понятия коммутатора Кальдерона.

В первом параграфе рассматривается случай двух функций $V_1(z)$ и $V_2(z)$, таких, что $V_2 = \overline{V}_1$. Это приводит к рассмотрению нового оператора

$$S_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{|V(\zeta) - V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|,$$

для которого формулируется теорема 3 с соответствующей оценкой

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1 n^{\frac{3}{2}} \|f\|_{p,\omega}.$$

Во втором параграфе определяются вспомогательные операторы

$$S_{n,\varepsilon}f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{|V(\zeta) - V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta),$$

$$M_{f,\varepsilon}(\lambda, \mu)(z) =$$

$$= \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{\left((\zeta + \lambda V(\zeta) + \mu \overline{V}(\zeta)) - (z + \lambda V(z) + \mu \overline{V}(z))\right)^2},$$

а также доказывается оценка

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |M_{f,\varepsilon}(\lambda, \mu)(z)|^p \, \omega(z) d\sigma(z) \le$$

$$\le b(p, c_0, |\lambda|) n^{2p} 4^p \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z).$$

Третий параграф содержит завершение доказательства теоремы 3 основанное на связи между операторами $S_{n,\varepsilon}$ и $M_{f,\varepsilon}(\lambda, \mu)$, которая используется для последовательного получения оценок для $S_{n,\varepsilon}$ и S_n^*.

В четвертой главе получает дальнейшее развитие идея обобщения коммутаторов Кальдерона на случай нескольких функций $V_j(z)$.

Первый параграф описывает ситуацию с четырьмя функциями, удовлетворяющими соотношению

$$|V_j(z) - V_j(\zeta)| \le |z - \zeta|, \quad 1 \le j \le 4.$$

Тогда соответствующий оператор будет иметь вид

$$U_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{V_1(\zeta) - V_1(z)}{\zeta - z} \right)^n \left(\frac{V_2(\zeta) - V_2(z)}{\zeta - z} \right)^n \times \right.$$

$$\times \left(\frac{V_3(\zeta)-V_3(z)}{\zeta-z}\right)^n \left(\frac{V_4(\zeta)-V_4(z)}{\zeta-z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta)\Bigg|.$$

В этом случае также удается получить оценки для нормы U_n^* с помощью рассмотрения дополнительных операторов $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ и $U_{n,\varepsilon}$ связанных с U_n^*. Если оценка для $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ с очевидностью следует из третьей главы, то соответствующие результаты для $U_{n,\varepsilon}$ сформулированы в качестве леммы, доказательство которой вынесено в отдельный параграф. Далее формулируется и доказывается теорема 4 для оператора U_n^* с оценкой

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \le b_1(p,c_0) n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}.$$

Второй параграф полностью посвящен доказательству леммы для $U_{n,\varepsilon}$. Основной результат имеет вид

$$\|U_{n,\varepsilon} f\|_{p,\omega} \le \frac{b_1}{2} n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}$$

и получается при помощи связи между операторами $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ и $U_{n,\varepsilon}$.

В третьем параграфе описываются частные случаи для ранее изученных операторов. После нескольких тривиальных примеров рассматриваются более сложные ситуации для функций $V(z)=e^{i|z|}$ и $W(z)=e^{i|V(z)|}$, но наиболее интересным представляется случай $V_j(z)=r_{E_j}^{1+i}(z)$, где V_j определены на замкнутых множествах E_j меры ноль ($E_2=E_1, E_4=E_3$), $r_E(z)=dist(z;E)$. Тогда при условии

$$V_1(z)=r_{E_1}^{1+i}(z), V_2(z)=\overline{V}_1(z), V_3(z)=r_{E_3}^{1+i}(z), V_4(z)=\overline{V}_3(z)$$

оценки для операторов U_n^* и S_n^* выглядят следующим образом:

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \le b_1(p,c_0) 3^{2n} n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_2(p, c_0) 3^n n^{\frac{3}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}.$$

Завершает работу рассмотрение случая

$$V(z) = r(z)^{1+i\varphi(r(z))},$$

где $r(z) = dist(z; E)$, E – замкнутое множество меры ноль, $\varphi(a)$ вещественнозначная функция, удовлетворяющая условиям:

$$|\varphi(a)| \leq C_1, a|\varphi'(a) \log a| \leq C_2, a > 0.$$

В этой ситуации оценка для S_n^* примет вид

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_3(p, c_0) C_3^{2n} n^{\frac{3}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

где $C_3 = \sqrt{1 + (C_1 + C_2)^2}$.

Список литературы

1. Benedek A., Panzone R., Continuity properties of the Hilbert transform, J. Func. Anal., 7, N2, 217–234, 1971

2. Calderon A.P., Commutators of singular integral operators, Proc. Mat. Acad. Sei., 53, 1092–1099, 1965

3. Coifman R.R., Meyer Y., Le double commutateur, Anal. Harm. D'Orsay, N180, 1976

4. Coifman R.R., McIntosh A., Meyer Y., L'integrale de Cauchy definit un operateur borne sur L^2 pour les courbes lipschitziennes, Ann. of Math., 116, 361–387, 1982

5. Calderon A.P., Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, Proc. Nat. Acad. Sei., USA, 74, 1324–1327, 1977

6. Широков Н.А., Оценки в $L^p(\mathbb{C})$ некоторых сингулярных интегральных операторов, Изв. АН Арм. ССР, XV, N1, 63–76, 1980

Публикации по теме диссертации

1. Меркулов А.С., Широков Н.А., Весовые оценки коммутаторов Кальдерона на комплексной плоскости, Вестник СПбГУ, 1, N3, 48–54, 2010

2. Меркулов А.С., Широков Н.А., Применение весовых оценок коммутаторов Кальдерона, Вестник СПбГУ, 1, N2, 52–57, 2012

3. Меркулов А.С., Сингулярные интегральные операторы, аналогичные коммутаторам Кальдерона, Вестник СПбГУ, 1, N1, 91–96, 2013