

ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации П.Н.Иевлева

«Операторный подход к построению комплексных и отражающихся случайных процессов»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

Павел Иевлев поступил в аспирантуру ПОМИ в 2020 году, до этого он под моим руководством защитил сначала бакалаврскую, а потом магистерскую работу на кафедре высшей математики и математической физики физического факультета СПбГУ. За это время Павел проявил себя вдумчивым исследователем, способным выдвигать самостоятельные идеи. Особо следует подчеркнуть способность Павла исключительно быстро разбираться в большом объеме научной литературы.

Работа П.Н. Иевлева связана, во-первых, с построением вероятностных аппроксимаций для решений задачи Коши для уравнения Шрёдингера и начально-краевых задач для оператора Лапласа и операторов Леви в \mathbb{R}^d , а во-вторых, с изучением структуры полугрупп и построением аналога разложения Скорохода для отражающегося броуновского движения в d -мерном шаре и отражающихся симметричных процессов Леви в ограниченных областях с гладкой границей.

Данная тематика исследования является актуальной – как вопросам вероятностной аппроксимации решений задачи Коши для эволюционных уравнений, фундаментальное решение которых не является вероятностной мерой, так и исследованию свойств случайных процессов, принимающих значения в ограниченной области и отражающихся от границы области, посвящено много работ в современной литературе по теории стохастических процессов. В диссертации приведен подробный обзор современной литературы, относящейся к тематике исследования.

Тематика исследования, связанная с представлением решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера интегралом по мере в функциональном пространстве ведет свое начало с работ Р. Фейнмана, в которой решение было представлено в виде интеграла по так называемой «мере Фейнмана». Довольно скоро было выяснено, что мера Фейнмана является только конечно-аддитивной комплексной мерой и не может быть (в отличие от меры Винера) продолжена до счетно-аддитивной меры в функциональном пространстве. Одним из направлений развития этой науки явилась теория так называемых «псевдопроцессов» – объектов, которые, как и мера Фейнмана, являются только конечно-аддитивными мерами (Lachal, Mazzucchi, Далецкий и др.). К минусам теории псевдо-процессов можно отнести то, что построенные на основе теории псевдо-процессов объекты лишены вероятностного смысла и, соответственно, не могут быть использованы в методах Монте-Карло.

Другое направление связано не с представлением решения в виде интеграла по мере (что невозможно), а с его аппроксимацией (в метриках соболевских пространств) математическими ожиданиями функционалов от стохастических

процессов. В диссертации Павла Иевлева была построена аппроксимация решения задачи Коши для многомерного нестационарного уравнения Шрёдингера (без потенциала) математическими ожиданиями функционалов от точечного пуассоновского поля, а также математическими ожиданиями функционалов от сумм независимых случайных векторов (фактически – «комплексный» аналог центральной предельной теоремы). Эти результаты являются многомерным обобщением результатов работы Ибрагимова, Смородиной, Фаддеева, и основаны на использовании идеологии теории обобщенных функций. Следует отметить, что в работе Павла кроме доказательства теорем об аппроксимации была также введена (глава 1) понятие случайного функционала, обобщающее понятие случайной величины, и определены операции над случайными функционалами. Этот формализм обеспечил, в частности, компактную запись сложных формул.

Вторая часть диссертации посвящена построению процессов Леви, принимающих значения в ограниченной области D пространства \mathbb{R}^d с гладкой границей и отражающихся от границы области. Интерес к отражающимся процессам связан с тем, что с их помощью строятся вероятностные представления начально-краевых задач с краевым условием Неймана. Трудности при построении отражающихся процессов объясняются тем, что траектории процессов Леви устроены достаточно нерегулярным образом. В частности, траектории винеровского процесса, хотя и являются непрерывными, но с вероятностью единица не дифференцируемы ни в одной точке, что делает невозможным использование классического понятия отражения т.е. смены знака производной по нормали к поверхности. Прочие процессы Леви имеют разрывные траектории, причем множество точек разрыва может быть всюду плотным.

Теория отражающихся процессов началась с работы А.В.Скорехода, построившего отражение от начала координат произвольной (неслучайной) непрерывной функции, далее это понятие отражения было обобщено на многомерный случай, но существенным требованием осталось требование непрерывности функции, что, как уже отмечалось, для траекторий произвольных процессов Леви не выполняется. Известны также другие методы построения отражающихся процессов, но в основном они также привязаны к условию непрерывности траекторий процесса. В диссертации содержится подробный обзор литературы.


Всякий отражающийся процесс фактически представляет из себя пару процессов. Первый процесс, который является марковским процессом со значениями в области, соответствует движению случайно движущейся частицы внутри области, а второй процесс соответствует тому «следу», который этот процесс оставляет на границе. В случае винеровского процесса этот «след» есть локальное время отражающегося процесса на границе области. Павлу Иевлеву удалось построить отражающиеся версии процессов Леви, мера Леви которых инвариантна относительно поворотов. Для решения этой задачи им были использованы методы теории операторов, а также методы теории обобщенных функций. Основная идея состояла в том, что рассматривались функционалы от процесса, а операция отражения переносилась с траектории процесса на функционал. Технически задача эта крайне сложна, и потребовала от Павла как умения проделывать длинные выкладки, так и большой изобретательности. Главный объект, который ему удалось построить – это случайный оператор, действующий на функции, определенные на границе области и переводящий их в функции, определенные

уже во всей области. Для винеровского процесса, выпущенного из точки произвольной точки $x \in D$, этот случайный оператор совпадает с интегралом по локальному времени винеровского процесса на границе области.

За время работы над диссертацией П.Н.Иевлев проявил себя упорным и вдумчивым исследователем, способным как выдвигать самостоятельные идеи, так и преодолевать значительные технические трудности. Считаю работу П.Н.Иевлева успешной, а самого Павла – способным и квалифицированным исследователем, вполне готовым к самостоятельной научной деятельности.

Я считаю, что диссертационная работа П.Н.Иевлева «Операторный подход к построению комплексных и отражающихся случайных процессов» по своему содержанию соответствует специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
лаборатории статистических методов
ПОМИ РАН

 — Н.В. Смородина

27.05.2021.

