На правах рукописи

ХАРТОВ АЛЕКСЕЙ АНДРЕЕВИЧ

СЛОЖНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2014

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей и математической статистики математико-механического факультета
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Научный руководитель:

Лифшиц Михаил Анатольевич
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Официальные оппоненты:

Белопольская Яна Исаевна
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры математики ФГБОУ ВПО
«Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет»

Чирина Анна Владимировна
кандидат физико-математических наук,
ассистент кафедры высшей математики № 2 ФГБОУ ВПО
«Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)»

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова»

Защита состоится «____» __________ 2014 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «____» __________ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория гауссовских случайных функций интенсивно развивается в последние годы (см. [1], [4]). Одним из ее современных направлений является исследование вопросов конечноранговой аппроксимации случайных полей (см. [3] и [7]). Здесь центральным является следующий вопрос: каким должен быть ранг аппроксимирующего поля, чтобы ошибка аппроксимации имела заданную малость? Задача может рассматриваться в двух постановках — в среднем и по вероятности. Наименьший подходящий ранг в этих постановках называется соответственно сложностью аппроксимации в среднем и сложностью аппроксимации по вероятности. Эти характеристики являются главными объектами изучения в теории информационной сложности, оформившейся в 80-х годах с выходом монографий [9]–[11].

В 90-х годах в рамках теории информационной сложности началось активное изучение многопараметрических задач аппроксимации. Основные положения и результаты этого молодого направления сформулированы в недавно изданном фундаментальном трехтомнике Э. Новака и Х. Вожняковского «Tractability of Multivariate Problems» [12]–[14]. В многопараметрических задачах представляет интерес изучение случайных полей, зависящих от настолько большого числа параметров, что к самой параметрической размерности случайного поля можно подойти асимптотически. Иными словами, рассматривается не одно случайное поле, а целая последовательность случайных полей, как правило, структурно связанных между собой. Для каждого поля из этой последовательности можно определить характеристики сложности аппроксимации и изучать их при растущей параметрической размерности. Здесь есть два пути исследования. В одном из них сложность рассматривается как функция двух независимых переменных: уровня ошибки и параметрической размерности. В настоящее время центральную роль на этом пути играет понятие трактабильности, которое характеризует скорость изменения сложности аппроксимации по каждой из своих переменных. Здесь недавно получены важные результаты (см. [5] и [6]). Наряду с предыдущим подходом, можно рассматривать сложность аппроксимации в несколько иной постановке, а именно, при сколь угодно малом, но фиксированном уровне ошибки, и при стремящейся к бесконечности параметрической размерности. Фактически, речь идет о нахождении асимптотик сложности аппроксимации. Такая постановка представляет самостоятельный интерес, поскольку, как отмечается в [12], она характерна для некоторых моделей финансовых вычислений. Кроме того, в ней применяются идеи и методы, отличные от тех, что используются при рассмотрении трактабильности. Это направление до недавнего времени оставалось мало изученным.

Цель работы. Диссертация посвящена исследованию аппроксимационных свойств однородных и неоднородных тензорных гауссовских случайных полей. Основная цель — это получение логарифмических и точных асимптотик сложности аппроксимации в среднеквадратической и вероятностной постановках при фиксированном уровне ошибки и при стремящейся к бесконечности параметрической размерности поля.

Методы исследований. В диссертационной работе центральную роль в асимптотическом анализе сложности аппроксимации играет вероятностный подход, идея которого была впервые предложена в работе М. А. Лифшица и Е. В. Туляковой [7]. Этот подход значительно обобщается и дополняется автором, что позволяет достигать полученных результатов, используя аппарат классических предельных теорем и их уточнений. Кроме того в диссертации используются факты из теории безгранично делимых распределений и теории правильно меняющихся функций, применяются оценки теории больших уклонений.

Основные результаты.

1. Найдены логарифмические асимптотики сложности аппроксимации тензорных степеней случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в постановках в среднем и по вероятности при специальных условиях на спектр маргинального процесса. Доказано, что эти условия являются необходимыми для асимптотик заданного вида. Полученные теоремы применены к анализу сложности аппроксимации однородных тензорных случайных полей, спектры которых имеют регулярное изменение специального вида.

2. Получена точная асимптотика сложности в среднем для тензорных степеней случайных процессов. Показано, что ее вид зависит от арифметической структуры последовательности собственных чисел маргинального процесса. Соответствующие теоремы применены к исследованию тензорных степеней винеровского процесса и броуновского моста.

3. Доказана эквивалентность сложности аппроксимации по вероятности и сложности аппроксимации в среднем для тензорных степеней случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в очень широкой области варьирования уровня значимости.

4. Найдены логарифмические асимптотические представления сложности аппроксимации для неоднородных тензорных произведений случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в постановках в среднем и по вероятности. Показана связь таких представлений с классом саморазложимых законов распределения. Полученные теоремы применены к исследованию растущих тензорных произведений эйлеровских интегрированных процессов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться для вычисления логарифмических и точных асимптотик сложности в среднем и по вероятности для конкретных гауссовских случайных полей тензорного типа с явно заданной корреляционной структурой. Также они будут полезны для специалистов по проблемам компьютерного моделирования гауссовских случайных процессов. В перспективе результаты диссертации могут найти применение в других разделах теории случайных функций.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на 43-й всероссийской школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 29 января – 5 февраля 2012 г.), на международной конференции «Вероятность и анализ» (Польша, Бедлево, 10–16 июня 2012 г.), на международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения» (Москва, 26–30 июня 2012 г.), на международной конференции «Современная стохастика: теория и приложения III» (Украина, Киев, 10–14 сентября 2012 г.), на 4-ом Северном Треугольном семинаре (Финляндия, Хельсинки, 6–8 марта 2013 г.). Кроме того, были сделаны доклады по теме диссертации в Санкт-Петербурге на городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика И. А. Ибрагимова (март 2014 г.), на семинаре «Современная стохастика» (май 2011 г.) и на семинаре «Теория вероятностей» в Лаборатории им. П. Л. Чебышева (сентябрь 2013 г. и февраль 2014 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [П1]–[П3] журналов, рекомендованных ВАК, а также в тезисах [П4]–[П6] докладов автора на конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 101 наименование. Общий объем работы составляет 137 страниц.

Содержание работы

Во **введении** приводится общая постановка задачи о конечноранговой аппроксимации случайных полей, излагается история вопроса, описывается содержание диссертации.

Рассмотрим случайное поле $X(t)$, $t \in T$, с траекториями в некоторого нормированном пространстве $(Q, \|\cdot\|_Q)$ функций, определенных на T. Будем аппроксимировать поля X с помощью *полей конечного ранга*:

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{m=1}^{n} \xi_m \psi_m(t), \qquad t \in T, \tag{1}$$

где ξ_m – случайные величины, $\psi_m(\cdot)$ – детерминированные функции, принадлежащие пространству Q. Обозначим $\mathcal{R}_n$ класс полей вида (1). Задача заключается в поиске такого n, чтобы ошибка аппроксимации имела заданную малость. Здесь возможны две постановки — *в среднем* и *по вероятности*. *Сложностью аппроксимации в среднем* называется величина

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \inf_{\widetilde{X} \in \mathcal{R}_n} \mathbb{E}\, \|X - \widetilde{X}\|_Q^2 \leqslant \varepsilon^2 \mathbb{E}\, ||X||_Q^2 \Big\}.$$

Сложностью аппроксимации по вероятности называется величина

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta) := \min\Big\{ n \in \mathbb{N} : \inf_{\widetilde{X} \in \mathcal{R}_n} \mathbb{P}\Big(\|X - \widetilde{X}\|_Q^2 > \varepsilon^2 \mathbb{E}\, \|X\|_Q^2 \Big) \leq \delta \Big\}.$$

Здесь $\varepsilon \in (0,1)$ — *порог ошибки*, а $\delta \in (0,1)$ — *уровень значимости.*

В рамках *теории многопараметрических задач* (см. [12]–[14]) представляет интерес изучение величин $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ для случайных полей возрастающей параметрической размерности. То есть рассматривается не одно поле X, а последовательность случайных полей $X_d(t)$, $t \in T_d \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с траекториями в нормированных пространствах $(Q_d, \|\cdot\|_{Q_d})$. Для каждой пары (Q_d, X_d), $d \in \mathbb{N}$, определяются характеристики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$, и далее они изучаются при $d \to \infty$.

Описанная задача в той степени общности, в которой она сформулирована, пока изучена слабо. Мы рассматриваем только гильбертов случай $Q_d := L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$. Здесь непрерывное в среднеквадратическом случайное поле $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, как элемент пространства $L_2([0,1]^d)$ с нормой $\|\cdot\|_{2,d}$ с вероятностью 1 может быть представлено *разложением Кархунена–Лоэва*:

$$X_d(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \lambda_{d,m}^{1/2}\, \xi_{d,m}\, \psi_{d,m}(t), \quad t \in [0,1]^d, \tag{2}$$

где $(\lambda_{d,m})_{m \in \mathbb{N}}$ — невозрастающая последовательность собственных чисел, $(\psi_{d,m})_{m \in \mathbb{N}}$ — соответствующая последовательность собственных функций корреляционного оператора поля X_d, $(\xi_{d,m})_{m \in \mathbb{N}}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Как известно (см. [8], с. 51), разложение (2) является в $L_2([0,1]^d)$ оптимальным с точки зрения конечноранговой аппроксимации. Здесь справедливы следующие представления для сложности в среднем:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min\Big\{n \in \mathbb{N} :\ \mathbb{E}\,\|X_d - X_{d,n}\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\,\mathbb{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2\Big\},$$

и сложности по вероятности:

$$n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) := \min\Big\{n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}\big(\|X_d - X_{d,n}\|_{2,d}^2 > \varepsilon^2\,\mathbb{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2\big) \leqslant \delta\Big\}.$$

где $X_{d,n}(t) := \sum_{m=1}^n \lambda_{d,m}^{1/2}\,\xi_{d,m}\,\psi_{d,m}(t),\ t \in [0,1]^d$.

Основное внимание в работе уделяется случайным полям X_d, $d \in \mathbb{N}$, с корреляционными функциями следующего вида:

$$\mathcal{K}_d(t,s) := \prod_{j=1}^d \mathcal{K}^{(j)}(t_j,s_j), \quad t,s \in [0,1]^d, \tag{3}$$

где $\mathcal{K}^{(j)}$ — корреляционные функции некоторых однопараметрических процессов $X^{(j)}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. Случайные поля с такой корреляционной структурой называют *тензорными* (см. [4]); в частности, говорят, что поле $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$ есть *тензорное произведение процессов* $X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}$. Если в формуле (3) все $\mathcal{K}^{(j)}$ одинаковы и равны корреляционной функции $\mathcal{K}$ некоторого процесса X, то X_d называют *тензорной степенью процесса* X. Класс случайных полей тензорного типа достаточно широк. Типичными его представителями служат *броуновский лист* — тензорная степень винеровского процесса, *броуновская «подушка»* — тензорная степень броуновского моста, тензорные произведения интегрированных гауссовских процессов с определенными степенями гладкости и т.д. (см. [2]).

Для тензорного произведения процессов $X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}$ с корреляционной функцией вида (3) собственные пары в разложении Кархунена–Лоэва (2) формируются следующим образом: $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ есть занумерованная в порядке невозрастания последовательность чисел $\prod_{j=1}^d \lambda_{k_j}^{(j)}$, а $(\psi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ — соответствующим образом индексированная последовательность собственных функций вида $\prod_{j=1}^d \psi_{k_j}^{(j)}(t_j)$, $t = (t_1,\ldots,t_d) \in [0,1]^d$, $k_j \in \mathbb{N}$, где для каждого $j \in \mathbb{N}$ невозрастающая последовательность $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$ обозначает собственные числа, а $(\psi_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$ — соответствующие собственные функции корреляционного оператора процесса $X^{(j)}$, при этом обозначим $\Lambda^{(j)} := \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i^{(j)}$. Если $\mathcal{K}^{(j)} = \mathcal{K}$, то мы будем упрощать обозначения: $\lambda_i := \lambda_i^{(j)}$, $i \in \mathbb{N}$, $\Lambda := \Lambda^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$.

Таким образом, для L_2-нормы задача изучения сложности аппроксимации при $d \to \infty$ во многом сводится к асимптотическому анализу упорядоченнного по невозрастанию массива произведений $\prod_{j=1}^d \lambda_{k_j}^{(j)}$ с растущим к бесконечности числом сомножителей.

В **главе 1** настоящей работы делается обзор теории информационной сложности и теории многопараметрических задач, описывается понятие трактабильности, приводятся связанные с ней результаты. В этой главе мы рассматриваем задачу L_2-аппроксимации в рамках данных теорий с более абстрактной точки зрения, где X_d является случайным элементом тензорного произведения сепарабельных гильбертовых пространств. Кроме того, в главе 1 подробно рассматривается семейство тензорных случайных полей и его известные представители.

Детальному изучению сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ при фиксированном пороге ошибки $\varepsilon \in (0,1)$, параметрической размерности $d \to \infty$, и уровне значимости $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$, возможно зависящем от ε и d, посвящены главы 2–5 диссертации.

В **главе 2** мы рассматриваем последовательность случайных полей X_d, $d \in \mathbb{N}$, без предположения тензорной корреляционной структуры. Все полученные результаты о поведении $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ при $d \to \infty$ формулируются в терминах серий $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$, $d \in \mathbb{N}$. Отметим, что теоремы и утверждения главы 2 широко используются в последующих главах.

Глава 3 диссертации посвящена асимптотическому анализу сложности аппроксимации в среднем. В параграфе 1 рассматривается вопрос о критериях ограниченности сложности. Приведем полученные утверждения в сокращенной форме.

Утверждение 1. *Следующие соотношения эквивалентны:*

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \infty;$

(ii) $\forall \varepsilon \in (0,1) \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \to \infty, \quad d \to \infty.$

Утверждение 2. *Следующие соотношения эквивалентны:*

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < \infty;$

(ii) $\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \displaystyle\sup_{d\in\mathbb{N}} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) < \infty.$

В параграфе 2 мы развиваем вероятностный подход, предложенный М. А. Лифшицем и Е. В. Туляковой в статье [7]. В параграфе 3 приводятся необходимые факты из теории правильно меняющихся функций, теории безгранично делимых законов распределения и классической теории предельных теорем теории вероятностей

В параграфе 4 изучаются логарифмические асимптотики сложности аппроксимации в среднем для тензорных степеней процессов. Здесь ключевую роль играют устойчивые распределения.

Теорема 1. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть невозрастающая функция $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Пусть для последовательности $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ выполнено:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty.$$

Тогда функция распределения $\mathcal{L}$ принадлежит классу устойчивых распределений.

Прежде чем сформулировать дальнейшие результаты, мы рассмотрим условия на $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, которые в них фигурируют.

Наиболее важный случай соответствует предположению о сходимости следующего ряда:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln \frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty. \tag{4}$$

Если это выполнено, то конечны следующие величины:

$$E := \sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln \frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \qquad \sigma^2 := \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\left|\ln \frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| - E\right)^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda}.$$

Рассматриваются также $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, не удовлетворяющие (4), но имеющие правильное изменение:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\right) = x^{-\alpha}\varphi(x), \qquad \alpha \in [0,2], \tag{5}$$

где φ — медленно меняющаяся функция (м. м. ф.) при $x \to \infty$.

Доказаны следующие теоремы, обобщающие результат М. А. Лифшица и Е. В. Туляковой об асимптотике сложности в среднем из статьи [7].

Теорема 2. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Чтобы для $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ была справедлива асимптотика:*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty,$$

необходимо и достаточно выполнение условия (4), где $\sigma^2 > 0$, или условия (5) при $\alpha = 2$, а также выполнение условий

$$B_d \sim B'_d, \qquad A_d = dE + o(B'_d), \quad d \to \infty.$$

Здесь Φ — функция распределения стандартного нормального закона, числа $B'_d := d^{1/2}\varphi_1(d)$, где м. м. ф. $\varphi_1(d) := ((2\bar{\varphi})^{-1/2})^*(d^{1/2})$, $\bar{\varphi}$ — функция де Хаана для φ, $(\,\cdot\,)^*$ — сопряжение де Бруина. При выполнении (4) можно полагать $B'_d := \sigma d^{1/2}$.

Теорема 3. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$, *а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$. *Чтобы для* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$, *при заданном* $\alpha \in (0,2)$ *была справедлива асимптотика:*

$$\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + S^{-1}_{\alpha,1,1,0}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d\to\infty,$$

необходимо и достаточно выполнение условия (5) *при заданном* α, *а также выполнение условий*

$$B_d \sim B'_d, \qquad A_d = A'_d + o(B'_d), \quad d\to\infty.$$

Здесь $S_{\alpha,1,1,0}$ *— функция распределения* α*-устойчивого закона с крайней правой асимметрией, числа* $B'_d := d^{1/\alpha}\varphi_2(d)$, *где м. м. ф.* $\varphi_2(d) := \psi^*_\alpha(d^{1/\alpha})$, $(\,\cdot\,)^*$ *— сопряжение де Бруина,* $\psi_\alpha(x) := (c_\alpha/\varphi(x))^{1/\alpha}$,

$$c_\alpha := \lim_{t\to\alpha} \tfrac{1-t}{\Gamma(2-t)\cos(\pi t/2)}.$$

Константы $A'_d = 0$ *при* $\alpha \in (0,1)$, $A'_d = dE$ *при* $\alpha \in (1,2)$, *а при* $\alpha = 1$

$$A'_d := d\,\bar\varphi(B'_d) - \boldsymbol{c}\cdot\frac{2}{\pi}\,B'_d,$$

где $\bar\varphi$ *— функция де Хаана для* φ, $\boldsymbol{c}$ *— константа Эйлера.*

Для случая медленного изменения хвостов спектра доказан следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *удовлетворяет условию* (5) *при* $\alpha = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *имеем*

$$\lim_{d\to\infty} d\,\varphi\big(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) = -\ln(1-\varepsilon^2).$$

Показывается, что при любом $\varepsilon \in (0,1)$ величина $\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ является быстро меняющейся функцией на ∞ по параметру $d \in \mathbb{N}$.

В параграфе 5 главы 3 при небольшом усилении условия (4):

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^3 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty, \tag{6}$$

найдено точное асимптотические представление для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$ для тензорных степеней процессов. Вид этой асимптотики зависит от арифметической структуры собственных чисел $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Последовательность $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ назовем *экспоненциальной*, если найдутся такие числа a и $b>0$, что выполнено

$$\left\{\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| : i \in \mathbb{N}^{(j)}\right\} \subseteq \{a + b\nu : \nu \in \mathbb{Z}\}.$$

Параметры a и b будем называть соответственно *сдвигом* и *шагом* экспоненциальной последовательности $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Всегда будем полагать, что a и b выбраны так, что шаг b максимально возможный.

Теорема 5. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (6), причем $\sigma^2 > 0$, и не является экспоненциальной. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ имеем*

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \sim \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \cdot \exp\left\{Ed + q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma\right\}, \quad d \to \infty.$$

где

$$q_{\varepsilon,1} := \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2), \qquad q_{\varepsilon,2} := \frac{q_{\varepsilon,1}^2 - 1}{6\sigma^3} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| - E\right)^3 \frac{\lambda_i}{\Lambda}. \tag{7}$$

Теорема 6. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (6), причем $\sigma^2 > 0$, и является экспоненциальной с некоторым максимальным шагом $b > 0$ и сдвигом $a \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ будем иметь при $d \to \infty$*

$$\begin{aligned} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \quad &= \quad \left(\frac{b}{1-e^{-b}} + b(\Delta_{d,\varepsilon} + 1/2) + o(d^{-1/2})\right) \cdot \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \\ &\quad \cdot \exp\left\{Ed + q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma + b\Delta_{d,\varepsilon}\right\}, \end{aligned}$$

величины $q_{\varepsilon,1}$ и $q_{\varepsilon,2}$ выбираются из (7), а $\Delta_{d,\varepsilon}$ удовлетворяет соотношениям

$$-1/2 \leqslant \varliminf_{d\to\infty} \Delta_{d,\varepsilon} \leqslant \varlimsup_{d\to\infty} \Delta_{d,\varepsilon} \leqslant 1/2.$$

В параграфе 6 изучаются логарифмические асимптотики сложности аппроксимации в среднем для неоднородных тензорных случайных полей. Мы ограничиваемся наиболее типичной ситуацией, когда последовательности $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют следующему условию:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 1. \tag{8}$$

Отметим, что асимптотический анализ проводится лишь при расходимости ряда (см. утверждение 1):

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \infty. \tag{9}$$

Здесь ключевую роль играют саморазложимые распределения (класс $\boldsymbol{L}$ безгранично делимых законов распределения).

Теорема 7. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть* *невозрастающая функция* $q\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ *и функция распределения* $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}\to[0,1]$, *для любого* $\varepsilon\in(0,1)$ *удовлетворяют равенству* $q(\varepsilon)=\mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. *Пусть для* $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$, *выполнены условия* (8) *и* (9). *Если имеет место асимптотика*

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{C}(q)\quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)=A_d+q(\varepsilon)B_d+o(B_d),\quad d\to\infty, \tag{10}$$

то функция распределения $\mathcal{L}$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{L}$ *с нулевой спектральной функция Леви на отрицательной полуоси.*

В параграфе 6 сформулированы необходимые и достаточные условия для того, чтобы $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имела асимптотику вида (10). Приведем здесь этот результат в наиболее простой форме, когда дополнительно выполнено условие сильного доминирования первых двух собственных чисел в последовательностях $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in\mathbb{N}:i>2}\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}<\infty. \tag{11}$$

Теорема 8. *Пусть* $A=(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$, *а* $B=(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d\to\infty$ *при* $d\to\infty$. *Пусть функция распределения* $\mathcal{L}\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{L}$ *с триплетом* (μ,s^2,L), *где* $L(x)=0$ *при* $x\in(-\infty,0)$. *Пусть невозрастающая функция* $q\colon(0,1)\to\mathbb{R}$ *и функция распределения* $\mathcal{L}$ *для любого* $\varepsilon\in(0,1)$ *удовлетворяют равенству* $q(\varepsilon)=\mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. *Чтобы для* $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$, *удовлетворяющих* (8), (9) *и* (11), *была справедлива асимптотика:*

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)=A_d+q(\varepsilon)B_d+o(B_d),\quad d\to\infty,$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\text{(A)}\qquad \forall x>0\quad \sum_{j=1}^{d}\frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}<e^{-xB_d}\right)\to -L(x);$$

$$\text{(B)}\qquad \lim_{d\to\infty}\frac{1}{B_d}\left(\hat{A}_d-\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|\frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right)=-\mu-\int\limits_{(0,\infty)}\frac{x^3\,\mathrm{d}L(x)}{1+x^2};$$

$$\text{(C)}\qquad \lim_{\tau\to0}\varliminf_{d\to\infty}\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}M_2^{(j)}(\tau B_d)=\lim_{\tau\to0}\varlimsup_{d\to\infty}\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}M_2^{(j)}(\tau B_d)=s^2,$$

где

$$\begin{aligned}\hat{A}_d \quad &:= \quad A_d - \sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}, \quad d \in \mathbb{N}, \\ M_2^{(j)}(\tau B_d) \quad &:= \quad \left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2 \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right), \quad j \in \mathbb{N}, \quad d \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Глава 4 диссертации посвящена асимптотическому анализу сложности аппроксимации по вероятности. В параграфе 1 изучаются логарифмические асимптотики для тензорных степеней процессов. Здесь, как и в постановке в среднем, ключевую роль играют устойчивые распределения.

Теорема 9. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$, *а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$. *Пусть невозрастающая функция* $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ *и функция распределения* $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *удовлетворяют равенству* $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *выполнено* $\lambda_1 < \Lambda$ *и при некотором фиксированном* $\delta \in (0,1)$ *имеет место асимптотика:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty.$$

Тогда функция распределения $\mathcal{L}$ *принадлежит классу устойчивых законов распределения.*

Следующие теоремы обобщают и дополняют результат М. А. Лифшица и Е. В. Туляковой из статьи [7] об асимптотике сложности по вероятности.

Теорема 10. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *выполнено условие* (4), *с* $\sigma^2 > 0$, *или условие* (5) *при* $\alpha = 2$. *Пусть константы* B_d, $d \in \mathbb{N}$, *удовлетворяют условиям теоремы* 2. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и для произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$, *удовлетворяющей условиям:*

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})| - Ed}{B_d} < q(\varepsilon), \qquad \varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}| - Ed}{B_d} < q(\varepsilon),$$

имеем

$$\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) = Ed + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{12}$$

Теорема 11. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *выполнено условие* (5) *при* $\alpha \in (0,2)$. *Пусть константы* A_d *и* B_d, $d \in \mathbb{N}$, *удовлетворяют условиям теоремы* 3. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$, *удовлетворяющей условиям:*

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon), \qquad \varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon),$$

имеем

$$\ln n_d^{\rm prob}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) = A_d + S^{-1}_{\alpha,1,1,0}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d\to\infty, \tag{13}$$

Кроме того, в параграфе 1 главы 4 доказана необходимость условий (4) и (5) при $\alpha\in(0,2]$ для асимптотик (12) и (13). В этом же параграфе рассмотрен случай, когда собственные числа удовлетворяют условию (5) при $\alpha=0$.

Теорема 12. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *выполнено условие* (5) *при* $\alpha=0$. *Тогда для любого* $\varepsilon\in(0,1)$ *и для произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$, *удовлетворяющей условиям:*

$$\varliminf_{d\to\infty}\frac{d\,\varphi\bigl(\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})|\bigr)}{|\ln(1-\varepsilon^2)|}>1, \qquad \varliminf_{d\to\infty}\frac{d\,\varphi\bigl(\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}|\bigr)}{|\ln(1-\varepsilon^2)|}\geqslant 1,$$

имеем

$$\lim_{d\to\infty} d\,\varphi\bigl(\ln n_d^{\rm prob}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\bigr) = -\ln(1-\varepsilon^2).$$

В параграфе 2 главы 4 рассматривается задача о точных асимптотиках сложности аппроксимации по вероятности для тензорных степеней процессов. Получена следующая теорема, особенно подчеркивающая близость результатов для постановок в среднем и по вероятности.

Теорема 13. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *выполнено условие* (6), *причем* $\sigma>0$. *Тогда для любого* $\varepsilon\in(0,1)$ *и произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$, *такой что*

$$\lim_{d\to\infty}\frac{|\ln\bigl(\min\{\delta_{d,\varepsilon},1-\delta_{d,\varepsilon}\}\bigr)|}{d^{-1/2}\exp\{Ed+q_{\varepsilon,1}d^{1/2}\}}=0,$$

имеем

$$n_d^{\rm prob}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\sim n_d^{\rm avg}(\varepsilon), \quad d\to\infty.$$

Помимо однородных тензорных произведений процессов в главе 4 рассмотрены неоднородные тензорные произведения. При условиях (8) и (9) на их последовательности собственных чисел $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$, получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы сложность по вероятности имела логарифмические асимптотики вида

$$\ln n_d^{\rm prob}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d\to\infty.$$

При этом доказывается, что они для $n_d^{\rm avg}(\varepsilon)$ и $n_d^{\rm prob}(\varepsilon,\delta)$ идентичны в достаточно широкой области варьирования $\delta=\delta_{d,\varepsilon}$. Также показано, что компонента q функционально связана с квантилями саморазложимых законов распределения. Эти результаты аналогичны теоремам 10 и 11.

В **главе 5** диссертации мы применяем критерии, полученные в главах 3 и 4, для конкретных примеров тензорных случайных полей. В параграфе 1 мы находим логарифмические асимптотики сложности в среднем и по вероятности для тензорных степеней процессов, у которых последовательность собственных чисел правильно изменяется в соответствии с асимптотикой:

$$\frac{\lambda_i}{\Lambda} \sim \frac{\beta}{i^{1+p_0}(\ln i)^{1+p_1}(\ln\ln i)^{1+p_2}}, \quad i \to \infty,$$

где $\beta > 0$, $p_0 \geqslant 0$, а числа $p_1 \in \mathbb{R}$ и $p_2 \in \mathbb{R}$ подбираются так, чтобы $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i < \infty$. В параграфе 2 мы получаем точные асимптотики сложности аппроксимации в среднем и по вероятности для броуновского листа и броуновской «подушки».

Параграф 3 главы 5 посвящен изучению логарифмических асимптотик сложности в среднем и по вероятности для тензорных произведений эйлеровских интегрированных процессов с возрастающей степенью гладкости. Рассмотрен случай, когда отношение первых двух собственных чисел процессов ведет себя регулярно по $j \in \mathbb{N}$ в соответствии со следующей асимптотикой:

$$\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 3^{-2(r_j+1)} \sim \frac{\beta}{j(\ln j)^p}, \quad j \to \infty. \tag{14}$$

где $\beta > 0$ и $p \in \mathbb{R}$.

Показано, что при $p > 1$ справедливо $\sup_{d\in\mathbb{N}} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) < \infty$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$. Для случая $p = 1$ получен следующий результат.

Утверждение 3. *Пусть выполнено условие* (14) *при* $p = 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)\ln d + o(\ln d), \quad d \to \infty,$$

где $\mathcal{L}$ *— саморазложимый закон распределения с триплетом* (μ, s^2, L), *в котором* $\mu = \beta\pi/4$, $s^2 = 0$ *и* $L(x) = \beta \ln x\, \mathbb{1}(x \in (0,1))$.

В случае $p < 1$ при дополнительном усилении условия (14):

$$\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 3^{-2(r_j+1)} = \frac{\beta}{j(\ln j)^p} \cdot \left[1 + o\Big((\ln j)^{-\frac{1-p}{2}}\Big)\right], \quad j \to \infty, \tag{15}$$

вычислена следующая асимптотика.

Утверждение 4. *Пусть выполнено условие* (15) *при* $p < 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда имеем асимптотику*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A'_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B'_d + o(B'_d), \quad d \to \infty,$$

где

$$A'_d \;:=\; c^{(1)}_{p,\beta}(\ln d)^{2-p} + c^{(2)}_{p,\beta}(\ln\ln d)(\ln d)^{1-p} + c^{(3)}_{p,\beta}(\ln d)^{1-p},$$
$$B'_d \;:=\; c^{(4)}_{p,\beta}(\ln d)^{\frac{3-p}{2}}.$$

Здесь коэффициенты определяются по формулам:

$$c^{(1)}_{p,\beta} := \tfrac{\beta}{2-p}, \quad c^{(2)}_{p,\beta} := \tfrac{\beta p}{(1-p)}, \quad c^{(3)}_{p,\beta} := \tfrac{\beta(1-2p)}{(1-p)^2} - \tfrac{\beta\ln\beta}{1-p}, \quad c^{(4)}_{p,\beta} := \left(\tfrac{\beta}{3-p}\right)^{1/2}.$$

Также показано, что логарифмические асимптотики $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ и $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ совпадают в достаточно широкой области варьирования $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$.

Приведенные утверждения параграфа 3 в некотором смысле уточняют и дополняют результаты о трактабильности, полученные в статье [6].

Список литературы

[1] R. J. Adler, J. Taylor, *Random Fields and Geometry*, Springer, New York, 2007.

[2] A. Karol, A. Nazarov, Ya. Nikitin, *Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **360** (2008), no. 3, 1443–1474.

[3] T. Kühn, W. Linde, *Optimal series representations of fractional Brownian sheets*, Bernoulli, **8** (2002), no. 5, 669–696.

[4] M. A. Lifshits, *Lectures on Gaussian Processes*, Springer, New York, 2012.

[5] M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *Average case tractability of non-homogeneous tensor product problems*, J. Complexity, **28** (2012), no. 5–6, 539–561.

[6] M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes*, Probab. Math. Stat., **32** (2012), no. 1, 131–165.

[7] M. A. Lifshits, E. V. Tulyakova, *Curse of dimensionality in approximation of random fields*, Probab. Math. Stat., **26** (2006), no. 1, 97–112.

[8] K. Ritter, *Average-case Analysis of Numerical Problems*, Lecture Notes in Math. No 1733, Springer, Berlin, 2000.

[9] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wózniakowski, *Information, Uncertainty, Complexity*, Addison-Wasley, Reading MA, 1983.

[10] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wózniakowski, *Information-Based Complexity*, Academic Press, New York, 1988.

[11] J. F. Traub, H. Wózniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, NewYork, 1980.

[12] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information*, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zürich, 2008.

[13] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals*, EMS Tracts Math. 12, EMS, Zürich, 2010.

[14] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators*, EMS Tracts Math. 18, EMS, Zürich, 2012.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК:

[П1] А. А. Хартов, *Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **396** (2011), 233–256.

[П2] А. А. Хартов, *Аппроксимация по вероятности тензорных случайных полей возрастающей параметрической размерности*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **412** (2013), 252–273.

[П3] А. А. Хартов, *Сложность аппроксимации случайных полей тензорного типа с тяжелым спектром*, Вестник СПбГУ, Сер. 1 Матем., Мех., Астр., (2013), №2, 64–67.

Другие публикации:

[П4] А. А. Хартов, *Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности*, Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики», УроРАН, Институт математики и механики, Екатеринбург, (2012), 296–298.

[П5] A. A. Khartov, *Approximation in probability of tensor product-type random fields of increasing parametric dimension*, Abstracts of International Conference «Probability Theory and Its Applications», Moscow, 2012, 108–109.

[П6] A. A. Khartov, *Approximation complexity of tensor product-type random fields with heavy spectrum*, Abstracts of International conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III», Kyiv, 2012, 21–22.