ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Хартов Алексей Андреевич

Сложность аппроксимации гауссовских случайных полей большой параметрической размерности

Специальность 01.01.05 —
Теория вероятностей и математическая статистика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., проф. М. А. Лифшиц

Санкт-Петербург — 2014

Оглавление

Введение

В предлагаемой работе мы изучаем аппроксимационные свойства гауссовских случайных полей, зависящих от большого числа параметров.

Рассмотрим случайное поле $X(t)$, $t \in T$, чьи траектории можно рассматривать как элементы $(Q, \|\cdot\|_Q)$ – некоторого нормированного пространства функций, определенных на T. Теоретический и практический интерес (в частности для компьютерного моделирования) представляет аппроксимация поля X полями конечного ранга:

$$\widetilde{X}(t) = \sum_{m=1}^{n} \xi_m \psi_m(t), \qquad t \in T, \tag{1}$$

где ξ_m – случайные величины, $\psi_m(\cdot)$ – детерминированные функции, принадлежащие пространству Q. Обозначим $\mathcal{R}_n$ класс полей вида (1).

Возникает естественный вопрос: каким должно быть n, чтобы ошибка аппроксимации имела заданную малость? Здесь возможны две постановки – в среднем и по вероятности. Введем минимальную среднеквадратическую ошибку аппроксимации X полями ранга n:

$$e_n(X) := \inf_{\widetilde{X} \in \mathcal{R}_n} \left(\mathbb{E} \, \|X - \widetilde{X}\|_Q^2 \right)^{1/2}.$$

Сложностью аппроксимации в среднем называется величина

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : e_n(X)^2 \leqslant \varepsilon^2 \mathbb{E} \, ||X||_Q^2 \right\}. \tag{2}$$

Подчеркнем, что здесь речь идет об относительной точности, учитывающей «размер» случайного поля X.

Сложностью аппроксимации по вероятности называется величина

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta) := \min \Big\{ n \in \mathbb{N} : \inf_{\widetilde{X} \in \mathcal{R}_n} \mathbb{P} \Big(\|X - \widetilde{X}\|_Q^2 > \varepsilon^2 \mathbb{E} \, \|X\|_Q^2 \Big) \leq \delta \Big\}. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon \in (0, 1)$ называется порогом ошибки, а $\delta \in (0, 1)$ – уровнем значимости. Характеристики $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ являются главными объектами изучения в *теории информационной сложности* (*Information-Based Complexity*), оформившейся с выходом монографий [83]–[85].

Задачу исследования величин $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ мы будем решать в духе молодого направления теории информационной сложности —*теории многопараметрических задач*, основные положения и результаты которой сформулированы в недавно изданном фундаментальном трехтомнике Э. Новака и Х. Вожняковского «Tractability of Multivariate Problems»

[71]–[73]. Согласно этой теории, представляет интерес изучение случайных полей, зависящих от настолько большого числа параметров, что к самой размерности параметрического множества можно подойти асимптотически. Иными словами, мы будем рассматривать не одно поле X, а целую последовательность случайных полей $X_d(t)$, $t \in T_d \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с траекториями в нормированных пространствах $(Q_d, \|\cdot\|_{Q_d})$. Как правило, пары (Q_d, X_d), $d \in \mathbb{N}$, структурно связаны между собой, но, независимо от этого, для каждой из них можно рассматривать введенные выше характеристики сложности аппроксимации, обозначая их теперь $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$, и изучать их при растущей параметрической размерности d.

Сосредоточимся пока что на рассмотрении сложности аппроксимации в среднем. Сформулированная задача может решаться в следующем направлении. Мы изучаем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ как функцию двух независимых переменных d и ε, где параметрическая размерность d может быть сколь угодно большой, а порог ошибки ε — сколь угодно малым. Здесь в настоящее время центральную роль играет понятие *трактабильности* (см. глава 1). Говорят, что задача аппроксимации для последовательности $(X_d)_{d\in\mathbb{N}}$ является W-трактабильной (англ. *weak tractable*) в среднем, если рост $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$ или $\varepsilon \to 0$ медленнее экспоненциального одновременно как по d, так и по ε^{-1}. W-трактабильные задачи представляют на практике особый интерес, т.к. их реализация не требует больших вычислительных ресурсов. В этом семействе принято выделять следующие вложенные подклассы. Рассматриваемую задачу аппроксимации называют

- QP-*трактабильной* (англ. *quasi-polynomially tractable*) *в среднем*, если существуют константы $c > 0$ и $t \geqslant 0$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant c \exp\bigl\{t(1+\ln d)(1+\ln \varepsilon^{-1})\bigr\};$$

- P-*трактабильной*(англ. *polynomially tractable*) *в среднем*, если существуют константы $c > 0$, $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant c\, d^r \varepsilon^{-s};$$

- SP-*трактабильной* (англ. *strong polynomially tractable*) *в среднем*, если существуют константы $c > 0$ и $s \geqslant 0$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant c\, \varepsilon^{-s}.$$

Аналогично вводятся типы трактабильности для задач аппроксимации с вероятностной постановкой (см. [72] с. 298–300).

Наряду с указанным выше подходом, можно рассматривать сложность аппроксимации в несколько иной постановке, а именно, при сколь угодно малом, но фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$, и большом $d \in \mathbb{N}$. Фактически, здесь речь идет о нахождении асимптотик величин $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ при $d \to \infty$, что в некоторых важных случаях требует применения идей и методов решения, отличных от тех, что используются при рассмотрении трактабильности.

Задача изучения $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ при больших $d \in \mathbb{N}$ в той степени общности, в которой она сформулирована, пока изучена слабо. Однако для гильбертова случая $Q_d = L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$, к настоящему времени уже получены некоторые результаты. Далее мы сосредоточимся только на нем. Здесь случайное поле $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, как элемент пространства $L_2([0,1]^d)$ с нормой $\|\cdot\|_{2,d}$ с вероятностью 1 может быть представлено *разложением Кархунена-Лоэва*:

$$X_d(t) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \lambda_{d,m}^{1/2}\, \xi_{d,m}\, \psi_{d,m}(t), \quad t \in [0,1]^d, \tag{4}$$

где $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ — невозрастающая последовательность собственных чисел, $(\psi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ — соответствующая последовательность собственных функций корреляционного оператора поля X_d, $(\xi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ — независимые стандартные гауссовские случайные величины. Как известно (см. [76], с. 51), разложение (4) является в $L_2([0,1]^d)$ оптимальным, то есть

$$e_n(X_d)^2 = \mathbb{E}\,\|X_d - X_{d,n}\|_{2,d}^2,$$

где $X_{d,n}(t) := \sum_{m=1}^n \lambda_{d,m}^{1/2}\, \xi_{d,m}\, \psi_{d,m}(t),\ t \in [0,1]^d$. Здесь справедливы новые представления для сложности в среднем:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N}:\ \mathbb{E}\,\|X_d - X_{d,n}\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\, \mathbb{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2\bigr\},$$

и сложности по вероятности:

$$n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N}: \mathbb{P}\bigl(\|X_d - X_{d,n}\|_{2,d}^2 > \varepsilon^2\, \mathbb{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2\bigr) \leqslant \delta\bigr\}.$$

В контексте задач с большой параметрической размерностью особенно интересен случай, когда корреляционные функции $\mathcal{K}_d$ полей X_d, $d \in \mathbb{N}$, заданы следующим образом:

$$\mathcal{K}_d(t,s) := \prod_{j=1}^d \mathcal{K}^{(j)}(t_j, s_j), \quad t, s \in [0,1]^d, \tag{5}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_d)$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $\mathcal{K}^{(j)}$ — корреляционные функции некоторых однопараметрических процессов $X^{(j)}(t)$, $t \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$. Случайные поля с такой корреляционной структурой называют *тензорными* (см. [61]); в частности, говорят, что поле $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$ есть *тензорное произведение процессов* $X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}$. Если в формуле (5) все $\mathcal{K}^{(j)}$ одинаковы и равны корреляционной функции $\mathcal{K}$ некоторого процесса X, то X_d называют *тензорной степенью процесса* X. Класс случайных полей тензорного типа достаточно широк. Типичными его представителями служат *броуновский лист* — тензорная степень винеровского процесса, *броуновская «подушка»* — тензорная степень броуновского моста, тензорные произведения интегрированных гауссовских процессов с определенными степенями гладкости и т.д. (см. [57]).

Для тензорного произведения процессов $X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}$ с корреляционной функцией вида (5) собственные пары в разложении Кархунена–Лоэва (4) формируются следующим образом: $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ есть занумерованная в порядке невозрастания последовательность чисел $\prod_{j=1}^d \lambda_{k_j}^{(j)}$, а $(\psi_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$ — соответствующим образом индексированная последовательность собственных функций вида $\prod_{j=1}^{d}\psi_{k_j}^{(j)}(t_j)$, $t=(t_1,\dots t_d)\in[0,1]^d$, $k_j\in\mathbb{N}$, где для каждого $j\in\mathbb{N}$ последовательность $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$ обозначает собственные числа, а $(\psi_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$ — соответствующие собственные функции корреляционного оператора процесса $X^{(j)}$. Таким образом, для L_2-нормы задача оценки сложности аппроксимации во многом сводится к асимптотическому анализу упорядоченнного по невозрастанию массива произведений $\prod_{j=1}^{d}\lambda_{k_j}^{(j)}$ с растущим к бесконечности числом сомножителей.

К настоящему моменту известны необходимые и достаточные условия ранее перечисленных типов трактабильности в среднем в терминах серий $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$, $d\in\mathbb{N}$, (см. [50], [51], [62] и [71]) для последовательности общих случайных полей $(X_d)_{d\in\mathbb{N}}$ без предположения тензорной структуры. Кроме того, для тензорных полей X_d, $d\in\mathbb{N}$, с заданной последовательностью маргинальных корреляционных функций $\mathcal{K}^{(j)}$, $j\in\mathbb{N}$, в недавней статье [62] найдены критерии всех типов трактабильности в среднем в терминах последовательностей $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$ собственных чисел, отвечающих $\mathcal{K}^{(j)}$, $j\in\mathbb{N}$ (см. главу 1). Эти критерии применялись в статье [63] для тензорных произведений эйлеровских и винеровских интегрированных процессов с возрастающими степенями гладкости. Условия трактабильности по вероятности остаются пока неизученными.

Понятие трактабильности и перечисленные результаты, связанные с ней, приводятся в главе 1 настоящей работы. При этом предварительно в параграфе 1 делается обзор теории информационной сложности, а в параграфе 2 — теории многопараметрических задач. Кроме того, мы рассматриваем задачу L_2-аппроксимации в рамках этих теорий с более абстрактной точки зрения, где X_d является случайным элементом тензорного произведения сепарабельных гильбертовых пространств. Тензорные случайные поля подробно рассматриваются в пункте 1.2.3, а их примеры — в пункте 1.2.4.

Детальному изучению $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ при фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$, $d\to\infty$, и $\delta=\delta_{d,\varepsilon}$, возможно зависящем от ε и d, посвящены главы 2–5 диссертации. В главе 2 мы рассматриваем последовательность случайных полей X_d, $d\in\mathbb{N}$, без предположения тензорной корреляционной структуры. Все полученные результаты формулируются в терминах серий $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$, $d\in\mathbb{N}$. Перечислим их. В параграфе 1 найдены необходимые и достаточные условия ограниченности и также неограниченности сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при любом фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$ по параметрической размерности d (утверждения 2.1.3 и 2.1.4). Кроме того, представлен критерий стремления $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\to\infty$, $d\to\infty$, при произвольно фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$ (утверждение 2.1.2). В другом пункте этого же параграфа получен критерий для выполнения следующей асимптотики:

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{C}(q)\quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)=A_d+q(\varepsilon)B_d+o(B_d),\quad d\to\infty, \tag{6}$$

при заданной последовательности $(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{R}$, последовательности $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$, стремящейся к ∞, и при фиксированной невозрастающей функции $q\colon(0,1)\to\mathbb{R}$ с множеством точек непрерывности $\mathbf{C}(q)$ (теоремы 2.1.2–2.1.4). Основной смысл этого критерия таков: наличие у $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ асимптотики (6) равносильно слабой сходимости к некоторому вероятностному распределению определенным образом построенных скалярных спектральных мер на $(\lambda_{d,m})_{m\in\mathbb{N}}$,

$d \in \mathbb{N}$, причем компонента q связана с квантилью этого предельного распределения. Далее в параграфе 2 показано (теоремы 2.2.1 и 2.2.2), что при любом фиксированном $\varepsilon \in \mathbf{C}(q)$ сложность по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ имеет ту же логарифмическую асимптотику вида (6), что и $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, при $d \to \infty$ в достаточно широкой области варьирования $\delta = \delta_{d,\varepsilon} \in (0,1)$. При получении этих результатов доказан ряд вспомогательных оценок (леммы 2.2.1–2.2.3), которые по мнению автора могут быть полезными для малоизученных задач аппроксимации с вероятностной постановкой. Отметим, что теоремы и утверждения главы 2 широко используются в последующих главах.

Рассмотрим поведение сложности аппроксимации в среднем и по вероятности при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$ для тензорных случайных полей. Отметим, что первые результаты в данном направлении получены М. А. Лифшицем и Е. В. Туляковой в статье [64]. В ней авторами с помощью специального вероятностного подхода для тензорных степеней процессов найдены логарифмические асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ в случае, когда маргинальные собственные числа λ_i, $i \in \mathbb{N}$, имеют единичную кратность и удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln \frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty. \tag{7}$$

Несколько позже в статье [24] была сделана попытка уточнения логарифмической асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ из [64], но результаты [24], к сожалению, содержат значительные неточности. Других работ по асимптотическому анализу при $d \to \infty$ сложности аппроксимации в среднем тензорных полей автору не известно. Этому направлению посвящены главы 3 и 4 диссертации. Сделаем краткий обзор полученных результатов. В параграфе 1 главы 3, опираясь на утверждения из второй главы, мы приходим к любопытному факту: в зависимости от поведения $(\lambda_1^{(j)}/\Lambda^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ величина $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ может либо *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ стремится к ∞ при $d \to \infty$ либо *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ быть ограниченной по d. Там же приведены критерии для каждой из альтернативных ситуаций. В параграфе 2 главы 3 мы развиваем вероятностный подход, предложенный М. А. Лифшицем и Е. В. Туляковой. Это позволяет обобщить их результаты для тензорных степеней процессов на случай, когда маргинальные собственные числа λ_i, $i \in \mathbb{N}$, имеют произвольную кратность (теоремы 3.4.3 и 4.1.2). Кроме того, получены логарифмические асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ вида (6), в случае невыполнения (7) и при условии следующего регулярного убывания:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\right) = x^{-\alpha}\varphi(x), \quad \alpha \in (0,2], \tag{8}$$

где φ — медленно меняющаяся функция на ∞ (теоремы 3.4.4 и 4.1.4). Показана в некотором смысле необходимость условий (7) и (8) для асимптотик $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ вида (6) (теоремы 3.4.1, 3.4.4 и 4.1.3, 4.1.5). Отметим, что в этих случаях рост сложности в среднем и по вероятности является экспоненциальным и надэкспоненциальным при $d \to \infty$. Также изучен случай медленного изменения хвостов $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \mathbb{1}\big(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\big)$ (см. теоремы 3.4.5 и 4.1.6). Здесь рост сложностей имеет тип «экспонента в экспоненте».

Также в параграфе 5 главы 3 при небольшом усилении условия (7):

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^3 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty,$$

найдено точное асимптотические представление для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$ для тензорных степеней процессов (теоремы 3.5.2 и 3.5.4). Вид этой асимптотики зависит от арифметической структуры собственных чисел $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (см. параграф 3.5). В параграфе 2 главы 4 доказано, что вне зависимости от структуры $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ при любом фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$ в широкой области варьирования $\delta=\delta_{d,\varepsilon}$ справедлива эквивалентность $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\sim n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$ (теорема 4.2.1). Это подчеркивает близость результатов для постановок в среднем и по вероятности.

Помимо тензорных степеней процессов в главах 3 и 4 рассмотрены неоднородные тензорные произведения процессов. При естественных слабых предположениях на их последовательности собственных чисел $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$, получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы сложность в среднем и по вероятности имели логарифмические асимптотики вида (6) (теоремы 3.6.2 и теорема 4.3.2). При этом доказывается (следствие 4.3.1), что они для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ идентичны в достаточно широкой области варьирования $\delta=\delta_{d,\varepsilon}$. Также показано, что компонента q из (6) функционально связана с квантилями саморазложимых законов распределения (класс $\boldsymbol{L}$ безгранично делимых законов, см. теорему 3.6.1). Проведена редукция полученных условий в случае сильного доминирования нескольких первых собственных чисел в каждой из последовательностей $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\mathbb{N}}$, $j\in\mathbb{N}$.

В заключительной, пятой главе диссертации мы применяем критерии, полученные в главах 3 и 4, для конкретных примеров тензорных случайных полей. В параграфе 1 мы находим логарифмические асимптотики сложности в среднем и по вероятности для тензорных степеней процессов, у которых последовательность собственных чисел правильно изменяется:

$$\frac{\lambda_i}{\Lambda}\sim\frac{\beta}{i^{1+p_0}(\ln i)^{1+p_1}(\ln\ln i)^{1+p_2}},\quad i\to\infty,$$

где $\beta>0$, $p_0\geqslant 0$, а числа $p_1\in\mathbb{R}$ и $p_2\in\mathbb{R}$ подбираются так, чтобы $\Lambda:=\sum_{i\in\mathbb{N}}\lambda_i<\infty$. В параграфе 2 главы 5 мы получаем точные асимптотики сложности аппроксимации в среднем и по вероятности для броуновского листа и броуновской «подушки». Параграф 3 посвящен изучению логарифмических асимптотик сложности в среднем и по вероятности для тензорных произведений эйлеровских интегрированных процессов с возрастающей степенью гладкости. Эти результаты в некотором смысле уточняют и дополняют оценки QP-трактабильности, полученные в статье [63].

В **заключении** кратко перечислены основные результаты, полученные в настоящей диссертации.

Итак, на защиту выносятся следующие положения и результаты:

1. Найдены логарифмические асимптотики сложности аппроксимации тензорных степеней случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в постановках в среднем и по вероятности при специальных условиях на спектр маргинального

процесса. Доказано, что эти условия являются необходимыми для асимптотик заданного вида. Полученные теоремы применены к анализу сложности аппроксимации однородных тензорных случайных полей, спектры которых имеют регулярное изменение специального вида.

2. Получено точное асимптотическое представление сложности в среднем для тензорных степеней случайных процессов. Показано, что вид этого представления зависит от арифметической структуры последовательности собственных чисел маргинального процесса. Соответствующие теоремы применены к исследованию тензорных степеней винеровского процесса и броуновского моста.

3. Доказана эквивалентность сложности аппроксимации по вероятности и сложности аппроксимации в среднем для тензорных степеней случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в очень широкой области варьирования уровня значимости.

4. Найдены логарифмические асимптотические представления сложности аппроксимации для неоднородных тензорных произведений случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в постановках в среднем и по вероятности. Показана связь таких представлений с классом саморазложимых законов распределения. Полученные теоремы применены к исследованию растущих тензорных произведений эйлеровских интегрированных процессов.

Результаты диссертации докладывались на 43-й всероссийской школе-конференции «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 29 января – 5 февраля 2012 г.), на международной конференции «Вероятность и анализ» (Польша, Бедлево, 10–16 июня 2012 г.), на международной конференции «Теория вероятностей и ее приложения» (Москва, 26–30 июня 2012 г.), на международной конференции «Современная стохастика: теория и приложения III» (Украина, Киев, 10–14 сентября 2012 г.), на 4-ом Северном Треугольном семинаре (Финляндия, Хельсинки, 6–8 марта 2013 г.). Кроме того, были сделаны доклады по теме диссертации в Санкт-Петербурге на городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика И. А. Ибрагимова (март 2014 г.), на городском семинаре «Современная стохастика» (май 2011 г.) и на семинаре «Теория вероятностей» в Лаборатории им. П. Л. Чебышева (сентябрь 2013 г. и февраль 2014 г.).

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [28]–[30] журналов, рекомендованных ВАК, а также в тезисах [31], [58] и [59] докладов на конференциях.

Автор диссертации выражает искреннюю признательность своему научному руководителю Михаилу Анатольевичу Лифшицу, без которого настоящая диссертация не смогла бы увидеть свет. Приношу ему глубокую благодарность за внимание к данной работе, помощь, ценные наставления и советы, замечания и комментарии. Также диссертант благодарит весь коллектив кафедры теории вероятностей и математической статистики СПбГУ и особенно зав. кафедрой Якова Юрьевича Никитина за благоприятную научную атмосферу, неравнодушие и постоянную поддержку. Автор также признателен Междисциплинарной исследовательской лаборатории им. Чебышева за предоставление замечательных условий для завершения диссертационной работы.

Глава 1.

Основы теории многопараметрических задач аппроксимации

В данной главе мы приводим, следуя монографиям [70]–[73], краткий общий обзор теории информационной сложности, целью которого является описание многообразия задач этой теории, ее происхождения и мотивации. Кроме того, основные понятия теории информационной сложности составляют базу для дальнейшего рассмотрения ее современного направления — теории многопараметрических задач, непосредственно которым и посвящена данная работа. Здесь мы опишем специфику этого направления и понятие трактабильности, занимающее в нем центральное место, приведем известные результаты. Также мы сформулируем строгие постановки задач, которые будут рассматриваться нами в последующих главах.

1.1. Теория информационной сложности

1.1.1. Основные понятия и мотивация

Рассмотрим следующую задачу с достаточно общей постановкой. Пусть Q и H — некоторые нормированные пространства функций $f\colon D \to \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Требуется для каждой такой функции $f \in Q$, используя лишь конечное число значений функционалов от нее, в рамках заданного *порога ошибки* ε аппроксимировать в каком-то определенном смысле значение $\mathcal{S}f$ некоторого оператора $\mathcal{S}\colon Q \to H$. Здесь допустимо ограничиться рассмотрением функций f из некоторого подкласса пространства Q или выбирать их случайным образом в соответствии с некоторым вероятностным распределением на Q. Оператор $\mathcal{S}$ принято называть *оператором решения*. Его примером может служить многомерный интеграл:

$$\mathcal{S}f = \mathrm{INT}f := \int\limits_{[0,1]^d} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad d \in \mathbb{N},$$

где Q — какое-либо подпространство $L_1([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$, а $H = \mathbb{R}$. Другим примером является оператор вложения $\mathcal{S}f = \mathrm{APP}f := f$, где в качестве Q и H часто выбираются $C([0,1]^d)$ и $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$, соответственно.

Такого рода задачи приближенного вычисления $\mathcal{S}f$, $f \in Q$, мотивированы, например, следующей проблемой, возникающей во многих областях, таких как статистика, финансы, физика, химия и компьютерные науки. Пространство Q часто является бесконечномерным и значит функция f не может быть непосредственно введена в существующие электронные вычислительные системы. Мы можем использовать лишь конечную *информацию* $I_n(f)$ об $f \in Q$, то есть конечный набор вещественных чисел:

$$I_n(f) := (y_1(f), y_2(f), \dots, y_n(f)) \in \mathbb{R}^n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

где $y_i(f)$ суть, например, значения некоторых (необязательно линейных) функционалов от f. Непосредственное вычисление значений $y_i(f)$ является так называемой *информационной операцией* и производится некоторым «черным ящиком» (англ. *black box*, *oracle*), который можно представлять как отдельное вычислительное устройство. Важно отметить, что отображение $I_n\colon Q \to \mathbb{R}^n$ в общем случае неинъективно, что характеризует *частичность* информации $I_n(f)$ об $f \in Q$. Также информация $I_n(f)$ *имеет стоимость*, т.к. реализация одной информационной операции на практике требует определенных временных и вычислительных затрат. Кроме того, информация может обладать *неточностью* (см. [70], стр. 89).

В этих терминах задача аппроксимации значений оператора решения $\mathcal{S}$ в рамках порога ошибки ε сводится к поиску такой информации $I_n\colon Q \to \mathbb{R}^n$ с подходящим $n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ и такого отображения $\mathcal{A}_n\colon \mathbb{R}^n \to H$, чтобы значения оператора $\widetilde{\mathcal{S}}_n := \mathcal{A}_n \circ I_n$ отличались от значений $\mathcal{S}$ в некоторой метрике не более, чем на порог ε. Оператор $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ будем называть *аппроксимацией ранга* n оператора $\mathcal{S}$, а отображение $\mathcal{A}_n$ — *алгоритмом аппроксимации* $\widetilde{\mathcal{S}}_n$. Наименьший подходящий ранг $n = n(\varepsilon)$ называется *информационной сложностью* (англ. *information complexity*) всей задачи аппроксимации оператора $\mathcal{S}$. Именно эта характеристика является главным объектом исследования *теории информационной сложности* (англ. *Information-Based Complexity*), основные положения которой сформулированы в монографиях [83]–[85] и [69], хотя, конечно, постановки, созвучные данной теории, присутствовали и в более ранних работах, например, в [1], [25] и [79]. Подробную информацию по этим вопросам можно найти в [86].

Информационная и полная сложности

Рассмотрим вопрос о месте информационных операций во всем процессе приближенного вычисления значений оператора решения $\mathcal{S}$. Пусть на вход поступает функция $f \in Q$. Пусть $\widetilde{\mathcal{S}}_{n_{inf}} = \mathcal{A}_{n_{inf}} \circ I_{n_{inf}}$ — аппроксимация оператора $\mathcal{S}$ в рамках порога ε с подходящим рангом $n_{inf} = n_{inf}(\varepsilon) \geqslant n(\varepsilon)$, где $n(\varepsilon)$ — информационная сложность. Тогда на практике для приближенного вычисления $\mathcal{S}f$, $f \in Q$, нужно произвести n_{inf} информационных операций и получить вектор $I_{n_{inf}}(f)$. Далее через некоторое количество n_{ari} арифметических операций и n_{com} операций сравнения непосредственно высчитывается значение $\mathcal{A}_{n_{inf}} \circ I_{n_{inf}}(f)$. В итоге *полная стоимость* вычислительного процесса может быть представлена в виде:

$$n_{total} := c_{inf} n_{inf} + c_{ari} n_{ari} + c_{com} n_{com},$$

где коэффициенты c_{inf}, c_{ari}, c_{com} обозначают соответственно стоимости одной информационной, арифметической и сравнительной операции. Число $c_{inf}n_{inf}$ называют *информационной стоимостью*, а число $c_{ari}n_{ari} + c_{com}n_{com}$ — *комбинаторной стоимостью*. На практике часто оказывается, что комбинаторная стоимость мала по сравнению с информационной стоимостью. Это объясняется тем, что одна информационная операция (т.е. вычисление значения функции или функционала) может содержать существенно большое количество промежуточных вычислений, отнимая при этом значительные временные ресурсы, в то время как операции, составляющие комбинаторную стоимость, могут занимать доли секунд. Поэтому во многих случаях имеем приближенное равенство $n_{total} \approx c_{inf}n_{inf}$, где $n_{inf} \geqslant n(\varepsilon)$. Этим и обусловлена важность изучения информационной сложности $n(\varepsilon)$, как значимой составляющей полной стоимости вычислительной задачи. Подробное обсуждение данных вопросов можно найти в монографии [71].

1.1.2. Типы информации

Для того, чтобы в рамках описанной выше модели приближенно посчитать значение $\mathcal{S}f$, $f \in Q$, нам нужно знать некоторую информацию I_n вида (1.1) о функции f. Далее везде будем предполагать, что мы обладаем *неограниченной линейной информацией*. Это значит, что числа y_i в (1.1) могут являться значениями всевозможных линейных непрерывных функционалов из пространства Q^*, сопряженного к Q. Подробный обзор задач и результатов, связанных с так называемой *стандартной информацией*, где ограничиваются лишь значениями функций, т.е. $y_i = f(x_i)$, $f \in Q$, $x_i \in D$, может быть найден в [71]–[73].

Рассмотрим важные типы неограниченной линейной информации. Назовем информацию $I_n \colon Q \to \mathbb{R}^n$ *неадаптивной*, если существуют такие линейные функционалы $L_1, \ldots, L_n \in Q^*$, что для всех $f \in Q$ информация I_n имеет форму:

$$I_n(f) = \big(L_1(f), L_2(f), \ldots, L_n(f)\big). \tag{1.2}$$

Другими словами, одни и те же информационные операции производятся над каждой функцией $f \in Q$. Заметим, что здесь отображение I_n является линейным. Такая информация также называется *параллельной* т.к. на практике может быть получена с помощью параллельных вычислений.

Адаптивной мы будем называть информацию $I_n \colon Q \to \mathbb{R}^n$, если она представляется в виде:

$$I_n(f) = \big(L_1(f), L_2(f, y_1), \ldots, L_n(f, y_1, \ldots, y_{n-1})\big), \tag{1.3}$$

где $y_1 := L_1(f)$, $y_i := L_i(f, y_1, \ldots, y_{i-1})$, для $i = 2, \ldots, n$, причем $L_i(\cdot, y_1, \ldots, y_{i-1}) \in Q^*$, при фиксированных $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Здесь результат каждой следующей информационной операции может зависеть от значений предыдущих, что, в частности, приводит к нелинейности отображения I_n и затрудняет на практике применение параллельных вычислений. Тем не менее, в этом случае естественно ожидать, что за счет адаптации уменьшится количество необходимых информационных операций.

Отметим, что оба типа информации неявно содержат алгоритмическую составляющую. Но мы на этом не будем заострять наше внимание в силу сложившейся терминологии (см. [71]).

Чтобы несильно усложнять дальнейшее изложение, мы намеренно опускаем рассмотрение более сложных адаптивных построений, где позволяют и количеству информационных операций варьироваться в зависимости от функции f. На самом деле, данное допущение для нас не ограничивает общности, так как этот тип адаптации оказывается не продуктивным в классе задач, которые в конечном счете будут изучаться нами далее (см. [71], [83] и [90]). Такое более сложное построение информации, соответствующие постановки задач и случаи, где она существенно продуктивна, рассматриваются в [71] (Глава 4). Там же обсуждаются вопросы задания информации с помощью нелинейных функционалов.

1.1.3. Сложность в среднем и по вероятности

Ранее мы неформально описали понятие информационной сложности, как наименьшего возможного числа n информационных операций, требующихся для аппроксимации $\mathcal{S}$ некоторым оператором $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ в рамках порога ошибки ε. Существует несколько способов формального определения информационной сложности, приводящих к различным постановкам такой задачи аппроксимации. Остановимся только на двух из них: *в среднем* (англ. *average case setting*) и *по вероятности* (англ. *probabilistic setting*). Информационная сложность в этих постановках называется соответственно *сложностью аппроксимации в среднем* или *по вероятности* оператора $\mathcal{S}$ при заданном пороге ошибки. Также допускаются краткие названия: *сложность в среднем* и *сложность по вероятности*. Мы опускаем рассмотрение *минимаксной* постановки (англ. *worst case setting*), а также *рандомизированной* (англ. *randomized setting*) и *квантовой* (англ. *quantum setting*) постановок, которые описаны в монографиях [71] и [72].

Перейдем к строгим определениям сложности в среднем и по вероятности. Прежде введем необходимые обозначения. Пусть Q — сепарабельное банахово пространство функций, определенных на измеримом множестве $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$; H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_H$. На борелевских множествах пространства Q зададим гауссовскую меру μ с нулевым средним и некоторым корреляционным оператором (определения можно найти в [3], [18] или [61]). При этом для оператора решения $\mathcal{S}$ будем предполагать, что следующая величина конечна:

$$e(\mathcal{S},\mu) := \left(\int\limits_Q \|\mathcal{S}f\|_H^2 \mu(\mathrm{d}f)\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $\boldsymbol{I}_n$ — семейство всевозможных отображений $I_n\colon Q \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, вида (1.2) и (1.3); $\boldsymbol{A}_n$ — семейство всех измеримых отображений $\mathcal{A}_n\colon \mathbb{R}^n \to H$. Везде далее аппроксимация оператора $\mathcal{S}$ производится только операторами $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ из семейства

$$\widetilde{\boldsymbol{S}}_n := \{\mathcal{A}_n \circ I_n : I_n \in \boldsymbol{I}_n, \mathcal{A}_n \in \boldsymbol{A}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что каждый оператор $\widetilde{\mathcal{S}}_n \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_n$ измерим в силу измеримости соответствующих операторов I_n и $\mathcal{A}_n$.

Сложностью аппроксимации в среднем оператора $\mathcal{S}$ при заданном пороге ошибки $\varepsilon \in (0,1)$ будем называть величину:

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \exists\, \widetilde{\mathcal{S}}_n \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_n \quad e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n) \leqslant \varepsilon\, e(\mathcal{S},\mu)\bigr\}, \tag{1.4}$$

где

$$e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n) := \Bigl(\int\limits_Q \|\mathcal{S}f - \widetilde{\mathcal{S}}_n f\|_H^2 \mu(\mathrm{d}f)\Bigr)^{1/2}$$

имеет смысл ошибки в среднем при использовании аппроксимирующего оператора $\widetilde{\mathcal{S}}_n$.

Сложностью аппроксимации по вероятности оператора $\mathcal{S}$ при заданном пороге ошибки $\varepsilon \in (0,1)$ и *уровне значимости* $\delta \in (0,1)$, назовем следующую величину:

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) := \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \exists\, \widetilde{\mathcal{S}}_n \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_n \quad \mathrm{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n,\varepsilon) \leqslant \delta\bigr\}, \tag{1.5}$$

где

$$\mathrm{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n,\varepsilon) := \mu\bigl\{f \in Q : \|\mathcal{S}f - \widetilde{\mathcal{S}}_n f\|_H > \varepsilon\, e(\mathcal{S},\mu)\bigr\}. \tag{1.6}$$

Наличие в определениях (1.4) и (1.5) множителя $e(\mathcal{S},\mu)$ указывает на использование *критерия нормализованной ошибки*. Следует отметить, что в данных постановках можно рассматривать и другие критерии. Например, в соответствии с *критерием минимума абсолютной ошибки* сложности аппроксимации в среднем и по вероятности будут по-прежнему определяться формулами (1.4)–(1.6) с той лишь разницей, что число $e(\mathcal{S},\mu)$ заменяется на единицу. Однако далее нами всегда будет рассматриваться только критерий нормализованной ошибки, на других критериях мы более останавливаться не будем (см. [71]–[73] и также [98], стр. 268–269).

Изучение характеристик n^{avg} и n^{prob} в теории информационной сложности сопряжено с описанием аппроксимаций $\widetilde{\mathcal{S}}_n \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_n$, на которых заведомо достигаются те или иные значения $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$, $\varepsilon \in (0,1)$, $\delta \in (0,1)$. Основной интерес здесь представляют так называемые *оптимальные конечноранговые аппроксимации*.

Оптимальной n-ранговой аппроксимацией в среднем оператора $\mathcal{S}$ называется оператор $\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{avg}} \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_n$, удовлетворяющий соотношению

$$e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{avg}}) = \inf_{I_n' \in \boldsymbol{I}_n} \inf_{\mathcal{A}_n' \in \boldsymbol{A}_n} e^{\mathrm{avg}}(\mathcal{A}_n' \circ I_n').$$

При существовании такой аппроксимации $\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{avg}}$ будем иметь

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \min\bigl\{n \in \mathbb{N} :\ e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{avg}}) \leqslant \varepsilon\, e(\mathcal{S},\mu)\bigr\}, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{1.7}$$

Оптимальной n-ранговой аппроксимацией по вероятности оператора $\mathcal{S}$ называется оператор $\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{prob}} \in \widetilde{\boldsymbol{S}}_n$, удовлетворяющий соотношению

$$\mathrm{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{prob}},\varepsilon) = \inf_{I_n' \in \boldsymbol{I}_n} \inf_{\mathcal{A}_n' \in \boldsymbol{A}_n} \mathrm{Prob}(\mathcal{A}_n' \circ I_n',\varepsilon),$$

при любом $\varepsilon \in (0,1)$. Если такая аппроксимация $\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{prob}}$ существует, то получим

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = \min\bigl\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{prob}}, \varepsilon) \leqslant \delta\bigr\}, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad \delta \in (0,1). \tag{1.8}$$

В итоге, как следует из формул (1.7) и (1.8), задача нахождения $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ фактически сводится к поиску и описанию последовательностей оптимальных конечноранговых аппроксимаций $(\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{avg}})_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\widetilde{\mathcal{S}}_n^{\mathrm{prob}})_{n\in\mathbb{N}}$, что требует дополнительных предположений о структуре оператора решения $\mathcal{S}$. Естественным и важным случаем здесь является линейный, к которому мы приступаем далее.

1.1.4. Линейные задачи

Рассмотрим следующую *линейную задачу* теории информационной сложности. Пусть $\mathcal{S}\colon Q \to H$ — линейный ограниченный оператор, действующий из сепарабельного банахова пространства Q в сепарабельное гильбертово пространство H со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$. Пусть, как и ранее, μ — гауссовская мера, определенная на сигма-алгебре борелевских множеств пространства Q. Также предполагается, что μ имеет нулевое среднее и некоторый корреляционный оператор $K_\mu\colon Q^* \to Q$. Тогда, как несложно проверить, индуцированная мера $\nu := \mu\,\mathcal{S}^{-1}$ будет являться гауссовской мерой на борелевских множествах пространства H с нулевым средним и корреляционным оператором $K_\nu\colon H \to H$, равным $K_\nu = \mathcal{S}\,K_\mu\,\mathcal{S}^*$, где $\mathcal{S}^*\colon H \to Q^*$ — сопряженный оператор для $\mathcal{S}$ (мы отождествляем пространство H с его сопряжением H^*). Оператор K_ν является самосопряженным, неотрицательно определенным и ядерным. Введем индексное множество $\widetilde{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cap [1, \dim H + 1)$, которое при $\dim H = \infty$ совпадает с $\mathbb{N}$. Пусть $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ — невозрастающая последовательность собственных чисел K_ν, а $(\psi_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ — соответствующая последовательность ортонормированных собственных векторов оператора K_ν, т. е. $K_\nu\psi_i = \lambda_i\psi_i$, $i \in \widetilde{\mathbb{N}}$. Обозначим $\Lambda := \mathrm{tr}\,K_\nu$, при этом имеем

$$\Lambda = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i = \int\limits_H \|g\|^2 \nu(\mathrm{d}g) = \int\limits_Q \|\mathcal{S}f\|^2 \mu(\mathrm{d}f) = e(\mathcal{S},\mu)^2 < \infty. \tag{1.9}$$

В предположении линейности и ограниченности оператора решения $\mathcal{S}$ оптимальные конечноранговые аппроксимации в среднем и по вероятности обладают «хорошими» свойствами, а именно: имеют одинаковый вид в обеих постановках, являются линейными и могут быть построены, используя лишь неадаптивную информацию. Эти факты устанавливаются следующей фундаментальной теоремой теории информационной сложности.

Теорема 1.1.1. *Для любого $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ следующий оператор*

$$\widetilde{\mathcal{S}}_n f := \sum_{i=1}^n (\mathcal{S}f, \psi_i)_H\,\psi_i, \quad f \in Q, \tag{1.10}$$

является оптимальной n-ранговой аппроксимацией в среднем и по вероятности для оператора $\mathcal{S}$, причем

$$e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n) = \inf_{\mathcal{A}'_n \in \boldsymbol{A}_n} e^{\mathrm{avg}}(\mathcal{A}'_n \circ I_n),$$

и для любого $\varepsilon \in (0,1)$

$$\operatorname{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n, \varepsilon) = \inf_{\mathcal{A}'_n \in \boldsymbol{A}_n} \operatorname{Prob}(\mathcal{A}'_n \circ I_n, \varepsilon),$$

с неадаптивной информацией I_n *вида*

$$I_n(f) := (L_1(f), \ldots, L_n(f)),$$

где $L_i f := \lambda_i^{-1/2} (\mathcal{S}f, \psi_i)_H$, $i = 1, \ldots, n$.

Подробная информация об этой теореме и ее аналогах имеется в монографиях [76] и [84], а также в статьях [60], [74], [90] и [91].

Пусть $\widetilde{\mathcal{S}}_n$, $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$ — оптимальные конечноранговые аппроксимации, заданные по формуле (1.10). Тогда в соответствии с (1.7) и (1.8) будем иметь для сложности в среднем

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \min\bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}} :\, e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n) \leqslant \varepsilon\, e(\mathcal{S}, \mu)\bigr\}, \quad \varepsilon \in (0,1), \tag{1.11}$$

и для сложности по вероятности

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta) = \min\bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}} : \operatorname{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n, \varepsilon) \leqslant \delta\bigr\}, \quad \varepsilon \in (0,1), \quad \delta \in (0,1). \tag{1.12}$$

Вычислим величины $e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n)$ и $\operatorname{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n, \varepsilon)$ при $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$. По определению $e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n)$ имеем

$$e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n)^2 = \int\limits_Q \|\mathcal{S}f - \widetilde{\mathcal{S}}_n f\|_H^2 \mu(\mathrm{d}f) = \int\limits_Q \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} (\mathcal{S}f, \psi_i)_H^2 \mu(\mathrm{d}f).$$

Переходя к мере ν и используя определение корреляционного оператора K_ν, получим

$$e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n)^2 = \int\limits_H \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} (g, \psi_i)_H^2 \nu(\mathrm{d}g) = \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} (\psi_i, K_\nu \psi_i)_H = \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} \lambda_i.$$

Пусть задан порог ошибки $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда по определению $\operatorname{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n, \varepsilon)$, $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n, \varepsilon) &= \mu\bigl\{f \in Q : \|\mathcal{S}f - \widetilde{\mathcal{S}}_n f\|_H^2 > \varepsilon^2\, e(\mathcal{S}, \mu)^2\bigr\} \\ &= \mu\Bigl\{f \in Q : \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} (\mathcal{S}f, \psi_i)_H^2 > \varepsilon^2\, e(\mathcal{S}, \mu)^2\Bigr\}. \end{aligned}$$

Переходя к мере ν и принимая во внимание (1.9), получим следующую формулу:

$$\operatorname{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n, \varepsilon) = \nu\Bigl\{g \in H : \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} (g, \psi_i)_H^2 > \varepsilon^2 \Lambda\Bigr\}.$$

Подставим результаты данных выкладок в формулы (1.7) и (1.8). Для сложности в среднем при $\varepsilon \in (0,1)$ будем иметь

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \min\Bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}} :\, \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} \lambda_i \leqslant \varepsilon^2 \Lambda\Bigr\}.$$

Для сложности по вероятности при $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1)$ получим

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta) = \min\Bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}} : \nu\Bigl\{g \in H : \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}:\, i > n} (g, \psi_i)_H^2 > \varepsilon^2 \Lambda\Bigr\} \leqslant \delta\Bigr\}.$$

1.1.5. Стохастическая интерпретация линейных задач

Величины $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ имеют наглядную стохастическую интерпретацию. Пусть $\widetilde{\mathcal{S}}_n$, $n\in\mathbb{N}$ — оптимальные конечноранговые аппроксимации для оператора $\mathcal{S}$, заданные по формуле (1.10). На некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathscr{B},\mathbb{P})$ построим случайный элемент $X=X(\omega)$, $\omega\in\Omega$, принимающий значения в H в соответствии с гауссовским распределением ν. Также на $(\Omega,\mathscr{B},\mathbb{P})$ для каждого $n\in\widetilde{\mathbb{N}}$ определим случайный элемент $X_n=X_n(\omega):=\widetilde{\mathcal{S}}_n\mathcal{S}^{-1}X(\omega)$ со значениями в H. Из (1.10) для X_n имеем разложение

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}(X,\psi_i)_H\,\psi_i,\quad n\in\widetilde{\mathbb{N}},\tag{1.13}$$

которое является частичной суммой для $X=\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}(X,\psi_i)_H\,\psi_i$. По аналогии с $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ элемент X_n будем называть *оптимальной n-ранговой аппроксимацией* для X.

С помощью введенных случайных элементов X и X_n легко и наглядно переписываются формулы (1.11) и (1.12) для $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$. Величина $e(\mathcal{S},\mu)$ в силу (1.9) может быть записана в виде:

$$e(\mathcal{S},\mu)^2=\int\limits_H\|g\|_H^2\,\nu(\mathrm{d}g)=\mathbb{E}\,\|X\|_H^2.$$

Далее рассмотрим $e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n)$:

$$e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n)^2=\int\limits_Q\|\mathcal{S}f-\widetilde{\mathcal{S}}_nf\|_H^2\,\mu(\mathrm{d}f)=\int\limits_H\|g-\widetilde{\mathcal{S}}_n\mathcal{S}^{-1}g\|_H^2\,\nu(\mathrm{d}g).$$

Следовательно, по определению X_n получаем простую формулу:

$$e^{\mathrm{avg}}(\widetilde{\mathcal{S}}_n)^2=\mathbb{E}\,\|X-X_n\|_H^2.$$

Для $\mathrm{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n,\varepsilon)$ будем иметь

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(\widetilde{\mathcal{S}}_n,\varepsilon)&=\mu\bigl\{f\in Q:\|\mathcal{S}f-\widetilde{\mathcal{S}}_nf\|_H^2>\varepsilon^2\,e(\mathcal{S},\mu)^2\bigr\}\\&=\nu\bigl\{g\in H:\|g-\widetilde{\mathcal{S}}_n\mathcal{S}^{-1}g\|_H^2>\varepsilon^2\,e(\mathcal{S},\mu)^2\bigr\}\\&=\mathbb{P}\bigl(\|X-X_n\|_H^2>\varepsilon^2\,\mathbb{E}\,\|X\|_H^2\bigr).\end{aligned}$$

В итоге величины $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ допускают следующую стохастическую интерпретацию. Сложность в среднем при $\varepsilon\in(0,1)$:

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)=\min\bigl\{n\in\widetilde{\mathbb{N}}:\ \mathbb{E}\,\|X-X_n\|_H^2\leqslant\varepsilon^2\,\mathbb{E}\,\|X\|_H^2\bigr\}.\tag{1.14}$$

Сложность по вероятности при $\varepsilon\in(0,1)$ и $\delta\in(0,1)$:

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)=\min\bigl\{n\in\widetilde{\mathbb{N}}:\mathbb{P}\bigl(\|X-X_n\|_H^2>\varepsilon^2\,\mathbb{E}\,\|X\|_H^2\bigr)\leqslant\delta\bigr\}.\tag{1.15}$$

Очередным преимуществом вероятностного языка является наглядное приведение данных формул к более конкретному виду. Как известно, $\xi_i=\xi_i(\omega):=\lambda_i^{-1/2}(X(\omega),\psi_i)_H$, $\omega\in\Omega$,

$i \in \widetilde{\mathbb{N}}$, являются независимыми стандартными гауссовскими случайными величинами на $(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ (см. [7] с. 417). При этом для X с вероятностью единица справедливо следующее *разложение Кархунена-Лоэва* (см. [16], [22], [55], [55] и [66]):

$$X = \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i^{1/2} \xi_i \, \psi_i.$$

Тогда в силу (1.13) случайный элемент X_n, $n \in \widetilde{\mathbb{N}}$, с вероятностью единица представляется формулой:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{1/2} \xi_i \, \psi_i, \quad n \in \widetilde{\mathbb{N}}.$$

С помощью данных разложений легко вычислить:

$$\|X - X_n\|_H^2 = \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}} \colon i > n} \lambda_i \, \xi_i^2, \qquad \mathbb{E} \, \|X - X_n\|_H^2 = \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}} \colon i > n} \lambda_i,$$

и также

$$\mathbb{E} \, \|X\|_H^2 = \mathbb{E} \Big(\sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i \, \xi_i^2 \Big) = \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i = \Lambda.$$

Подставив полученное в формулы (1.14) и (1.15), будем иметь для сложности в среднем при $\varepsilon \in (0, 1)$

$$n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \min \Big\{ n \in \widetilde{\mathbb{N}} : \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}} \colon i > n} \lambda_i \leqslant \varepsilon^2 \Lambda \Big\}, \tag{1.16}$$

и для сложности по вероятности при $\varepsilon \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, 1)$:

$$n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta) = \min \Big\{ n \in \widetilde{\mathbb{N}} : \mathbb{P} \Big(\sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}} \colon i > n} \lambda_i \, \xi_i^2 > \varepsilon^2 \Lambda \Big) \leqslant \delta \Big\}. \tag{1.17}$$

Итак, формулы (1.16) и (1.17) дают окончательный ответ на вопрос о нахождении сложности аппроксимации оператора $\mathcal{S}$ в среднем и по вероятности при фиксированном пороге ошибки ε и уровне значимости δ.

Следующей естественной представляющей интерес задачей на данном пути является получение асимптотических формул для $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$ с различными условиями на внутреннюю структуру $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и регулярность поведения собственных чисел λ_i при $i \to \infty$. Некоторые содержательные результаты в этом направлении были получены в статье [64], но мы на них останавливаться не будем.

1.2. Многопараметрические задачи аппроксимации

В 90-х годах с появлением работ [99] и [100] в теории информационной сложности началось активное изучение *многопараметрических задач аппроксимации* (англ. *multivariate* *problems*), специфика которых состоит в следующем. Пусть для каждого $d \in \mathbb{N}$ задан оператор решения $\mathcal{S}_d$, действующий на некотором пространстве функций d переменных. Для каждого $\mathcal{S}_d$, $d \in \mathbb{N}$, мы можем определить информационную сложность в той или иной постановке. Тогда ее можно рассматривать не только как функцию от порога ошибки ε и уровня значимости δ (в вероятностной постановке), но и как функцию, имеющую дополнительный аргумент — *параметрическую размерность* $d \in \mathbb{N}$. Причем d может принимать сколь угодно большие значения, что представляет естественный интерес с теоретической и практической точек зрения. Изучение зависимости информационной сложности от порога ошибки $\varepsilon \in (0, 1)$, уровня значимости $\delta \in (0, 1)$ и параметрической размерности $d \in \mathbb{N}$ является центральным вопросом теории *многопараметрических задач аппроксимации* (см. [70]–[73] и [5]). Сразу приведем их формальную постановку в линейном случае.

1.2.1. Линейные задачи

Рассмотрим последовательность линейных ограниченных операторов решения:

$$\mathcal{S}_d \colon Q_d \to H_d, \quad d \in \mathbb{N},$$

где Q_d, $d \in \mathbb{N}$ — сепарабельные банаховы пространства функций, определенных соответственно на измеримых множествах $D_d \subset \mathbb{R}^d$; H_d, $d \in \mathbb{N}$, — сепарабельные гильбертовы пространства, снабженные соответственно нормами $\| \cdot \|_{H_d}$, $d \in \mathbb{N}$. Пусть при каждом $d \in \mathbb{N}$ на борелевских множествах пространства Q_d определена гауссовская мера μ_d с нулевым средним и корреляционным оператором K_{μ_d}. Пусть также $\nu_d := \mu_d \, \mathcal{S}_d^{-1}$, $d \in \mathbb{N}$, — индуцированные гауссовские меры на $(H_d)_{d \in \mathbb{N}}$ с нулевыми средними и корреляционными операторами $K_{\nu_d} = \mathcal{S}_d K_{\mu_d} \mathcal{S}_d^*$, $d \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{S}_d^* \colon H_d \to Q_d^*$ — оператор сопряженный к $\mathcal{S}_d$ (пространство H_d отождествляется со своим сопряжением H_d^*). Как правило, тройки $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d \rangle$, $d \in \mathbb{N}$, каким-то структурным образом связаны между собой, что придает задаче содержательный смысл. Но для сохранения наибольшей общности мы такого рода конкретизаций при рассмотрении многопараметрических линейных задач делать не будем. Пусть $\widetilde{\mathbb{N}}_d := \mathbb{N} \cap [1, \dim H_d + 1)$ — индексное множество, совпадающее с $\mathbb{N}$, если $\dim H_d = \infty$. Обозначим через $(\lambda_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ невозрастающую последовательность собственных чисел оператора K_{ν_d} и через $(\psi_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ — соответствующую последовательность собственных векторов K_{ν_d}, т. е.

$$K_{\nu_d} \psi_{d,m} = \lambda_{d,m} \psi_{d,m}, \quad m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

В силу ядерности оператора K_{ν_d} имеем

$$\Lambda_d := \operatorname{tr} K_{\nu_d} = \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \lambda_{d,m} < \infty, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Запишем для величин $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ аналоги формул (1.14) и (1.15). Для этого при каждом $d \in \mathbb{N}$ на некотором вероятностном пространстве $(\Omega_d, \mathscr{B}_d, \mathbb{P}_d)$ построим случайный элемент $X_d = X_d(\omega)$, $\omega \in \Omega_d$, принимающий значения в H_d в соответствии с гауссовским распределением ν_d. Тогда с вероятностью единица для X_d справедливо разложение Кархунена-Лоэва:

$$X_d = \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \lambda_{d,m}^{1/2} \, \xi_{d,m} \, \psi_{d,m}, \quad d \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

где $(\xi_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, — серии из независимых стандартных гауссовских случайных величин на $(\Omega_d, \mathscr{B}_d, \mathbb{P}_d)$. Для каждого $d \in \mathbb{N}$ оптимальная n-ранговая аппроксимация (в среднем и по вероятности) $X_{d,n}$ для X_d с вероятностью единица будет иметь разложение (см. теорему 1.1.1 и пункт 1.1.5):

$$X_{d,n} = \sum_{m=1}^{n} \lambda_{d,m}^{1/2} \, \xi_{d,m} \, \psi_{d,m}, \quad n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d, \quad d \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Отсюда по аналогии с (1.14) и (1.15) получим для сложности в среднем при $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \min\bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \, \mathbb{E}\, \|X_d - X_{d,n}\|_{H_d}^2 \leqslant \varepsilon^2 \, \mathbb{E}\, \|X_d\|_{H_d}^2 \bigr\}, \tag{1.20}$$

и для сложности по вероятности при $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1)$:

$$n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = \min\bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \mathbb{P}_d\bigl(\|X_d - X_{d,n}\|_{H_d}^2 > \varepsilon^2 \, \mathbb{E}\, \|X_d\|_{H_d}^2\bigr) \leqslant \delta \bigr\}. \tag{1.21}$$

Эти формулы приводятся к следующему виду (см. пункт 1.1.5). Сложность в среднем при $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \min\Bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ m > n}} \lambda_{d,m} \leqslant \varepsilon^2 \, \Lambda_d \Bigr\}. \tag{1.22}$$

Сложность по вероятности при $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1)$:

$$n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = \min\Bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \mathbb{P}_d\Bigl(\sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ m > n}} \lambda_{d,m} \, \xi_{d,m}^2 > \varepsilon^2 \, \Lambda_d\Bigr) \leqslant \delta \Bigr\}.$$

Все серии $(\xi_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$ (с сохранением независимости в каждой) без изменения значений $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ могут быть перенесены на одно вероятностное пространство с некоторой мерой $\mathbb{P}$, что приведет последнюю формулу к более предпочтительному (с точки зрения теории вероятностей) виду:

$$n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = \min\Bigl\{n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \mathbb{P}\Bigl(\sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ m > n}} \lambda_{d,m} \, \xi_{d,m}^2 > \varepsilon^2 \, \Lambda_d\Bigr) \leqslant \delta \Bigr\}, \tag{1.23}$$

для любых $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1)$.

Как несложно видеть, формулы (1.22) и (1.23) почти аналогичны (1.16) и (1.17), отличие состоит в выделении параметрической размерности d, по которой также изучается изменение $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$. Это безусловно придает многопараметрическим линейным задачам некоторую специфику по сравнению с обычными линейными задачами.

Если предположить какую-либо структурную взаимосвязь троек $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d\rangle$, $d \in \mathbb{N}$, то она некоторым образом будет отражаться на сериях $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, и, следовательно, на зависимости величин $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ от параметрической размерности d и других своих параметров. Однако формулы (1.22) и (1.23) даже при этих предположениях, как правило, ничего не говорят нам о характере такой зависимости. Это составляет проблематику многопараметрических линейных задач. Их цель заключается в поиске условий на последовательность собственных чисел $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, чтобы сложность аппроксимации в той или иной постановке изменялась «нужным образом»: имела предписанную мажоранту (зависящую от параметров сложности) или асимптотику при $d \to \infty$.

Трактабильность

Понятие *трактабильности* (англ. *tractability*[1]) дает классификацию задач аппроксимации, соответствующих всевозможным последовательностям $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d\rangle_{d\in\mathbb{N}}$, по характеру роста $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ или $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ как функций от независимых аргументов d, ε^{-1} и δ^{-1}, где каждый из них может принимать сколь угодно большие значения.

Будем говорить, что линейная задача, соответствующая $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d\rangle_{d\in\mathbb{N}}$, является W-*трактабильной* (англ. *weak tractable*) *в среднем*, если для нее выполнено условие:

$$\lim_{\substack{(d,\varepsilon)\in\mathbb{N}\times(0,1):\\ d+\varepsilon^{-1}\to\infty}} \frac{\ln_+ n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{d+\varepsilon^{-1}} = 0. \tag{1.24}$$

Линейная задача, соответствующая $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d\rangle_{d\in\mathbb{N}}$, W-*трактабильна по вероятности*, если для нее выполнено условие:

$$\lim_{\substack{(d,\varepsilon,\delta)\in\mathbb{N}\times(0,1)\times(0,1):\\ d+\varepsilon^{-1}+\delta^{-1}\to\infty}} \frac{\ln_+ n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)}{d+\varepsilon^{-1}+\delta^{-1}} = 0. \tag{1.25}$$

Другими словами, линейная задача W-трактабильна в той или иной постановке, когда соответствующая сложность аппроксимации не растет экспоненциально ни по какому из аргументов d, ε^{-1} и δ^{-1}. Если условие (1.24) (или (1.25)) нарушается, то такая линейная задача называется нетрактабильной в среднем (или по вероятности). В частности, экспоненциальный рост сложности по аргументу $d \in \mathbb{N}$ называется *проклятием размерности* (англ. *curse of dimensionality*, понятие восходит к Беллману, см. [36]).

В семействе всех W-трактабильных в среднем линейных задач принято выделять следующие вложенные подклассы. Линейную задачу, соответствующую последовательности троек $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d\rangle_{d\in\mathbb{N}}$, будем называть

- QP-*трактабильной* (англ. *quasi-polynomially tractable*) *в среднем*, если существуют константы $c > 0$ и $t \geqslant 0$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant c \exp\bigl\{t(1+\ln d)(1+\ln\varepsilon^{-1})\bigr\}; \tag{1.26}$$

[1]tractable — легко контролируемый

- P-*трактабильной*(англ. *polynomially tractable*) *в среднем*, если существуют константы $c > 0$, $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant c\, d^r\, \varepsilon^{-s}; \tag{1.27}$$

- SP-*трактабильной* (англ. *strong polynomially tractable*) *в среднем*, если существуют константы $c > 0$ и $s \geqslant 0$ такие, что

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant c\, \varepsilon^{-s}.$$

Совершенно аналогичная иерархия может быть введена и для постановки по вероятности (см. [72] с. 298–300).

Приведем известные критерии всех типов трактабильности в среднем для многопараметрических линейных задач. Мы сформулируем их в рамках одной теоремы (см. [50], [51], [62] и [71]).

Теорема 1.2.1. *Рассмотрим линейную тензорную задачу, соответствующую последовательности троек* $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d \rangle_{d\in\mathbb{N}}$.

Для W*-трактабильности достаточно*

$$\exists\, \tau \in (0,1) \quad \lim_{d\to\infty} \frac{1}{d} \ln \left(\sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} \right)^{\tau} \right)^{\frac{1}{\tau}} = 0.$$

Для QP*-трактабильности необходимо и достаточно*

$$\exists\, \gamma \in (0,1) \quad \sup_{d\in\mathbb{N}} \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} \right)^{1-\frac{\gamma}{\ln_+ d}} < \infty.$$

Для P*-трактабильности необходимо и достаточно*

$$\exists\, \tau \in (0,1) \quad \exists\, r \geqslant 0 \quad \sup_{d\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{d^r} \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} \right)^{\tau} \right\} < \infty.$$

Для SP*-трактабильности необходимо и достаточно*

$$\exists\, \tau \in (0,1) \quad \exists\, r \geqslant 0 \quad \sup_{d\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} \right)^{\tau} \right\} < \infty.$$

К настоящему моменту остаются неизученными критерии трактабильности в вероятностной постановке.

Асимптотический анализ сложности при возрастающей параметрической размерности

Рассмотрим величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ в несколько ином ключе, а именно, при сколь угодно малом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. Такая постановка представляет самостоятельный интерес, поскольку, как отмечается в [71], для некоторых приложений (например, финансовые вычисления) размерность d может достигать сотен и даже тысяч, а порог ε при этом выбирается отделимым от нуля некоторой константой, к примеру: $\varepsilon \geqslant 0,01$. Следует отметить, что, конечно, в такой постановке, например, к величине $n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)$ применимы оценки, полученные при доказательстве, той или иной трактабильности в случае выполнения соответствующих критериев. Однако эти неравенства в широком классе случаев могут оказаться грубыми. Так в главе 5 приводится пример QP-трактабильной задачи с исходными оценками вида (1.26), где на самом деле сложность $n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)$ при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ ограничена по d. Сделанное замечание придает изучению сложности аппроксимации при возрастающей параметрической размерности дополнительную мотивацию. Этим вопросам посвящена глава 2 настоящей работы.

1.2.2. Линейные тензорные задачи

Важным примером многопараметрических линейных задач являются так называемые *линейные тензорные задачи*, в которых корреляционный оператор имеет определенную тензорную структуру. К их рассмотрению мы приступаем в настоящем пункте.

Пусть $Q^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, — сепарабельные банаховы пространства вещественных функций одной переменной, заданных соответственно на измеримых множествах $D^{(j)} \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$; $H^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot\,,\cdot)_{(j)}$. Пусть задана последовательность линейных ограниченных операторов решения $\mathcal{S}^{(j)}\colon Q^{(j)} \to H^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$. На каждом $Q^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, определим некоторую гауссовскую меру $\mu^{(j)}$. Пусть $\nu^{(j)} := \mu^{(j)}(\mathcal{S}^{(j)})^{-1}$ — индуцированная гауссовская мера на $H^{(j)}$ с нулевым средним и некоторым корреляционным оператором $K^{(j)}\colon H^{(j)} \to H^{(j)}$ (мы как всегда отождествляем $H^{(j)}$ с $(H^{(j)})^*$). Введем для каждого $j \in \mathbb{N}$ индексное множество $\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} := \mathbb{N} \cap [1, \dim H^{(j)} + 1)$, равное $\mathbb{N}$, если $H^{(j)}$ — бесконечномерно. Пусть $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$ — невозрастающая последовательность собственных чисел, а $(\psi_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$ — соответствующая последовательность ортонормированных собственных векторов оператора $K^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, т. е.

$$K^{(j)}\psi_i^{(j)} = \lambda_i^{(j)}\psi_i^{(j)}, \quad i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Пусть для каждого натурального $d \geqslant 2$ пространство

$$Q_d := Q^{(1)} \check{\otimes}\, Q^{(2)} \check{\otimes} \ldots \check{\otimes}\, Q^{(d)}$$

является *инъективным тензорным произведением* пространств $Q^{(j)}$, $j = 1, \ldots, d$, т. е. пополнением соответствующего алгебраического тензорного произведения по инъективной кросснорме (см. [77], Глава 3). В случае $d = 2$ для элемента $u := \sum_{i=1}^n f_i^{(1)} \otimes f_i^{(2)}$ пространства $Q^{(1)} \otimes Q^{(2)}$ такая кросснорма задается равенством:

$$\|u\| = \sup\Big\{\Big|\sum_{i=1}^n L^{(j)}(f_i^{(1)})L^{(j)}(f_i^{(2)})\Big|\colon L^{(j)} \in (Q^{(j)})^*, \|L^{(j)}\|_{(Q^{(j)})^*} \leqslant 1, j \in \{1,2\}\Big\}.$$

Для каждого $d \in \mathbb{N}$ в качестве гауссовской меры μ_d (с нулевым средним) на Q_d возьмем *тензорное произведение гауссовских мер* $\mu^{(j)}$ (см. [41]):

$$\mu_d := \mu^{(1)}\check{\otimes} \ldots \check{\otimes}\mu^{(d)}.$$

Пусть $L_1^{(j)}$ и $L_2^{(j)}$ произвольные элементы пространства $(Q^{(j)})^*$, $j = 1, \ldots, d$, и положим

$$L_{d,1} := L_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes L_1^{(d)} \quad \text{и} \quad L_{d,2} := L_2^{(1)} \otimes \ldots \otimes L_2^{(d)},$$

Тогда мера μ_d имеет нулевое среднее и характеризуется следующим свойством:

$$\int\limits_{Q_d} L_{d,1}(f) L_{d,2}(f) \mu_d(\mathrm{d}f) = \prod_{j=1}^{d} \int\limits_{Q^{(j)}} L_1^{(j)}(f) L_2^{(j)}(f) \mu^{(j)}(\mathrm{d}f). \tag{1.28}$$

Доказательство существования и единственности такой гауссовской меры можно найти в статье [41].

Далее при каждом натуральном $d \geqslant 2$ определим пространство H_d как гильбертово тензорное произведение:

$$H_d := H^{(1)} \otimes H^{(2)} \otimes \ldots \otimes H^{(d)}.$$

Напомним, что H_d суть пополнение алгебраического тензорного произведения пространств $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(d)}$ по скалярному произведению $(\cdot\,,\cdot)_d$, заданному формулой:

$$(g_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes g_1^{(d)}, g_2^{(1)} \otimes \ldots \otimes g_2^{(d)})_{H_d} := \prod_{j=1}^{d} (g_1^{(j)}, g_2^{(j)})_{(j)},$$

для любых элементов $g_1^{(j)}$ и $g_2^{(j)}$ пространства $H^{(j)}$, $j = 1, \ldots, d$.

В качестве оператора решения $\mathcal{S}_d$ при каждом $d \in \mathbb{N}$ положим тензорное произведение операторов $\mathcal{S}^{(j)}$, $j = 1, \ldots, d$:

$$\mathcal{S}_d := \mathcal{S}^{(1)} \otimes \mathcal{S}^{(2)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{S}^{(d)} \colon Q_d \to H_d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Иными словами, если обозначить

$$f_d := f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(d)} \quad \text{и} \quad g_d := g^{(1)} \otimes \ldots \otimes g^{(d)},$$

где $f^{(j)} \in B^{(j)}$ и $g^{(j)} \in H^{(j)}$, то действие $\mathcal{S}_d$ описывается следующим образом:

$$\mathcal{S}_d(f^{(1)} \otimes \ldots \otimes f^{(d)}) = \mathcal{S}^{(1)} f^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{S}^{(d)} f^{(d)},$$

а для сопряженного оператора $\mathcal{S}_d^*$ имеем:

$$[\mathcal{S}_d^* g_d](f_d) = (g_d, \mathcal{S}_d f_d)_{H_d} = \prod_{j=1}^{d} (g^{(j)}, \mathcal{S}^{(j)} f^{(j)})_{(j)} = \prod_{j=1}^{d} \big[(\mathcal{S}^{(j)})^* g^{(j)}\big](f^{(j)}).$$

То есть каждый функционал $\mathcal{S}_d^* g_d$ является тензором:

$$\mathcal{S}_d^* g_d = \big[(\mathcal{S}^{(1)})^* g^{(1)}\big] \otimes \ldots \otimes \big[(\mathcal{S}^{(d)})^* g^{(d)}\big]. \tag{1.29}$$

Следовательно, для двух произвольных тензоров из пространства H_d:

$$g_{d,1} := g_1^{(1)} \otimes \ldots \otimes g_1^{(d)} \quad \text{и} \quad g_{d,2} := g_2^{(1)} \otimes \ldots \otimes g_2^{(d)}$$

будем иметь для $K_d := K_{\nu_d}$

$$\begin{aligned}(g_{d,1}, K_d\, g_{d,2})_{H_d} &= \int\limits_{H_d} (g_{d,1}, h)_d (g_{d,2}, h)_d\, \nu_d(\mathrm{d}h) \\ &= \int\limits_{Q_d} (g_{d,1}, \mathcal{S}_d f)_{H_d} \cdot (g_{d,2}, \mathcal{S}_d f)_{H_d}\, \mu_d(\mathrm{d}f) \\ &= \int\limits_{Q_d} [\mathcal{S}_d^* g_{d,1}](f) [\mathcal{S}_d^* g_{d,2}](f)\, \mu_d(\mathrm{d}f).\end{aligned}$$

Учитывая свойство (1.28) и формулу (1.29), можно записать

$$\begin{aligned}(g_{d,1}, K_d g_{d,2})_{H_d} &= \prod_{j=1}^{d} \int\limits_{Q^{(j)}} [(\mathcal{S}^{(j)})^* g_1^{(j)}](f) \cdot [(\mathcal{S}^{(j)})^* g_2^{(j)}](f)\, \mu^{(j)}(\mathrm{d}f) \\ &= \prod_{j=1}^{d} \int\limits_{Q^{(j)}} (g_1^{(j)}, \mathcal{S}^{(j)} f)_{(j)} \cdot (g_2^{(j)}, \mathcal{S}^{(j)} f)_{(j)}\, \mu^{(j)}(\mathrm{d}f) \\ &= \prod_{j=1}^{d} \int\limits_{H^{(j)}} (g_2^{(j)}, h)_{(j)} \cdot (g_2^{(j)}, h)_{(j)}\, \nu^{(j)}(\mathrm{d}h).\end{aligned}$$

В итоге имеем

$$(g_{d,1}, K_d g_{d,2})_{H_d} = \prod_{j=1}^{d} (g_1^{(j)}, K^{(j)} g_2^{(j)})_{(j)}.$$

Тогда корреляционный оператор K_d будет являться тензорным произведением корреляционных операторов $K^{(j)}$:

$$K_d = K^{(1)} \otimes K^{(2)} \otimes \ldots \otimes K^{(d)}.$$

Как несложно убедиться, собственные значения и векторы K_d соответственно имеют вид

$$\lambda_k := \lambda_{k_1}^{(1)} \cdot \lambda_{k_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k_d}^{(d)}, \qquad \psi_k := \psi_{k_1}^{(1)} \otimes \psi_{k_2}^{(2)} \otimes \ldots \otimes \psi_{k_d}^{(d)}, \tag{1.30}$$

где $k \in \widetilde{\mathbb{N}}(d) := \widetilde{\mathbb{N}}^{(1)} \times \widetilde{\mathbb{N}}^{(2)} \times \ldots \times \widetilde{\mathbb{N}}^{(d)}$ и $t \in [0,1]^d$.

Как и в общих линейных задачах, $(\lambda_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ будет обозначать занумерованную в порядке невозрастания последовательность из чисел λ_k, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}(d)$, $d \in \mathbb{N}$. При этом, если для любого $j = 1, \ldots, d$ имеем $\#(\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}) < \infty$, то индексное множество $\widetilde{\mathbb{N}}_d = \{1, \ldots, \prod_{j=1}^{d} \#(\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)})\}$, иначе $\widetilde{\mathbb{N}}_d = \mathbb{N}$. Заметим также, что след Λ_d оператора K_d при этом вычисляется по формуле:

$$\Lambda_d = \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \lambda_{d,m} = \sum_{k \in \widetilde{\mathbb{N}}(d)} \prod_{j=1}^{d} \lambda_{k_j}^{(j)} = \prod_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \lambda_i^{(j)} = \prod_{j=1}^{d} \Lambda^{(j)}. \tag{1.31}$$

Задачи изучения сложности аппроксимации (в среднем и по вероятности) значений операторов решения $\mathcal{S}_d$ с такой тензорной структурой, с так определенными пространствами Q_d и H_d и таким образом заданными мерами μ_d, где $d \in \mathbb{N}$, относятся к *линейным тензорным задачам.*

Если предположить равенство всех корреляционных операторов $K^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, то говорят, что рассматривается *линейная однородная тензорная задача*. Здесь корреляционный оператор K_d будет являться тензорной степенью оператора $K := K^{(1)}$, т.е. $K_d = K^{\otimes d}$. При рассмотрении такого однородного случая мы всегда будем упрощать обозначения для $\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} =: \widetilde{\mathbb{N}}$ и для маргинальных собственных пар $(\lambda_i^{(j)}, \psi_i^{(j)})_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} =: (\lambda_i, \psi_i)_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}}$, опуская в них верхний индекс $j \in \mathbb{N}$. Тогда собственные числа и векторы оператора K_d соответственно будут иметь вид:

$$\lambda_k := \lambda_{k_1} \cdot \lambda_{k_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_{k_d}, \qquad \psi_k := \psi_{k_1} \otimes \psi_{k_2} \otimes \ldots \otimes \psi_{k_d}, \tag{1.32}$$

где $k \in \widetilde{\mathbb{N}}(d) = \widetilde{\mathbb{N}}^d$ и $t \in [0,1]^d$. При этом, если $\#(\widetilde{\mathbb{N}}) < \infty$, то $\widetilde{\mathbb{N}}_d = \{1, \ldots, \#(\widetilde{\mathbb{N}})^d\}$, иначе $\widetilde{\mathbb{N}}_d = \mathbb{N}$. Также, для следа Λ_d оператора K_d, как очевидно выводится из (1.31), верно $\Lambda_d = \Lambda^d$. Линейные тензорные задачи, не являющиеся однородными, мы будем называть *неоднородными тензорными задачами*.

Для линейных тензорных задач, как и для общих линейных, вопрос об изучении зависимости от своих параметров сложностей $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$, описывающихся формулами (1.22) и (1.23), является вполне содержательным и совершенно нетривиальным. Однако здесь целью является поиск условий в терминах маргинальных последовательностей $(\lambda_i^{(j)})_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, обеспечивающих заданный характер изменения сложности аппроксимации $\mathcal{S}_d$ по $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и $\delta \in (0,1)$.

Трактабильность

Недавно в статье [62] были получены критерии трактабильности в постановке в среднем для линейных тензорных задач. Сформулируем эти результаты в рамках следующей теоремы.

Теорема 1.2.2. *Рассмотрим линейную тензорную задачу, соответствующую последовательности троек $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d \rangle_{d \in \mathbb{N}}$.*

Для W*-трактабильности достаточно:*

$$\exists\, \tau \in (0,1) \quad \lim_{d \to \infty} \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:\, i \geqslant 2} \left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right)^{\tau} = 0. \tag{1.33}$$

Для QP*-трактабильности необходимо и достаточно:*

$$\exists\, \tau \in (0,1) \quad \sup_{d \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \right)^{1 - \frac{\tau}{\ln_+ d}} < \infty.$$

Для P*-трактабильности необходимо и достаточно:*

$$\exists\, \tau \in (0,1) \quad \sup_{d \in \mathbb{N}} \frac{1}{\ln_+ d} \sum_{j=1}^{d} \ln\!\left(1 + \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:\, i \geqslant 2} \left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right)^{\tau} \right) < \infty.$$

Для SP-*трактабильности необходимо и достаточно:*

$$\exists\,\tau \in (0,1) \quad \sup_{d\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:\, i\geqslant 2} \left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right)^{\tau} < \infty.$$

Приведенные критерии применялись к линейным тензорным задачам аппроксимации, в которых меры μ_d, $d \in \mathbb{N}$, являлись тензорными произведениями мер, соответствующих корреляционных ядрам Коробова (см. [62]), а также по отдельности ядрам интегрированного эйлеровского и винеровского процессов.

Асимптотический анализ при возрастающей параметрической размерности

Поведение сложности в среднем и по вероятности при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$ для линейных однородных тензорных задач было впервые рассмотрено М. А. Лифшицем и Е. В. Туляковой в статье [64]. В ней (подробнее см. главу 3) авторами получены логарифмические асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ в случае, когда собственные числа λ_i, $i \in \widetilde{\mathbb{N}}$, имеют единичную кратность и удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty.$$

К настоящему моменту это является единственным результатом в данном направлении. Поэтому вопрос о дополнительном изучении линейных однородных и неоднородных тензорных задач при возрастающей параметрической размерности и фиксированном пороге ошибки остается открытым. Мы посвятим ему главы 3–5 диссертации.

1.2.3. Случайные поля тензорного типа

Рассмотрим следующий пример линейной тензорной задачи аппроксимации. Пусть каждое $Q^{(j)}$ является пространством $C([0,1])$ функций непрерывных на $[0,1]$ с классической sup-нормой. Тогда пространство Q_d можно отождествить с пространством $C([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$, функций непрерывных на $[0,1]^d$ (см. [77], Глава 3) с нормой

$$\|f\|_{Q_d} := \sup_{t\in[0,1]^d} |f(x)|, \quad f \in Q_d.$$

Предположим, что $H^{(j)} = L_2([0,1])$, $j \in \mathbb{N}$, тогда H_d отождествляется с $L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$ (см. [75]). Пусть каждый $\mathcal{S}^{(j)}\colon C([0,1]) \to L_2([0,1])$, $j \in \mathbb{N}$, является оператором вложения, т.е. $\mathcal{S}^{(j)}f = \mathrm{APP}f = f$, $f \in C([0,1])$, тогда и $\mathcal{S}_d\colon C([0,1]^d) \to L_2([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$, будет таковым: $\mathcal{S}_d f_d = \mathrm{APP}_d f_d := f_d$, $f_d \in C([0,1]^d)$, $d \in \mathbb{N}$.

Конкретное описание гауссовской меры на пространствах $C([0,1])$ и $C([0,1]^d)$ удобно осуществлять с помощью корреляционных функций. Пусть гауссовская мера $\mu^{(j)}$ имеет нулевое среднее и корреляционную функцию $\mathcal{K}^{(j)}$, задаваемую формулой:

$$\mathcal{K}^{(j)}(t_j,s_j) = \int\limits_{Q^{(j)}} f(t_j)f(s_j)\,\mu^{(j)}(\mathrm{d}f), \quad t_j,s_j \in [0,1], \quad j \in \mathbb{N}.$$

В соответствии с (1.28) гауссовская мера μ_d с нулевым средним будет иметь корреляционную функцию $\mathcal{K}_d$ следующего вида

$$\mathcal{K}_d(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}^{(j)}(t_j, s_j), \quad t, s \in [0,1]^d, \quad d \in \mathbb{N}, \tag{1.34}$$

где $t = (t_1, \ldots, t_d)$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$. В силу вложенности каждого оператора $\mathcal{S}_d$ функция $\mathcal{K}_d$ будет также выступать корреляционной функцией индуцированной гауссовской меры ν_d с нулевым средним. При этом, как известно, $\mathcal{K}_d$ является интегральным ядром корреляционного оператора K_d меры ν_d и связана с ним соотношением

$$K_d\, g(t) = \int\limits_{[0,1]^d} \mathcal{K}_d(t,s) g(s) \mathrm{d}s, \quad g \in L_2([0,1]^d), \quad t \in [0,1]^d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

В таких условиях вместо абстрактных случайных элементов X_d, распределенных в соответствии с мерами ν_d на пространствах H_d, $d \in \mathbb{N}$, можно рассматривать гауссовские случайные поля $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, $d \in \mathbb{N}$, (см. [35]) с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями (1.34). Случайные поля с такой корреляционной структурой называются *тензорными* (англ. *tensor product-type random fields*, см. [64] и [61]). Этот класс полей, как можно видеть, достаточно широк. Действительно, ведь мы имеем большую свободу в выборе маргинальных корреляционных функций $\mathcal{K}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, для построения функции $\mathcal{K}_d$. Если в формуле (1.34) все $\mathcal{K}^{(j)}$ одинаковы и, скажем, равны корреляционной функции $\mathcal{K}$ некоторого однопараметрического процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$, то случайное поле $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, называют тензорной степенью процесса $X(t)$, $t \in [0,1]$ и относят к *однородным тензорным полям*. Тензорные случайные поля, не являющиеся однородными, называют *неоднородными тензорными случайными полями*.

По аналогии с (1.18) при каждом d для случайного поля $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$, имеет место с вероятностью 1 *многопараметрическое разложение Кархунена-Лоэва*:

$$X_d(t) = \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \lambda_{d,m}^{1/2}\, \xi_{d,m}\, \psi_{d,m}(t), \quad t \in [0,1]^d, \tag{1.35}$$

где $(\xi_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, — серии из независимых стандартных гауссовских случайных величин; $(\lambda_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ как и ранее обозначает занумерованную в порядке невозрастания последовательность из чисел λ_k, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}(d)$, а $(\psi_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ — соответствующим образом индексированная последовательность собственных функций вида $\psi_k(t) := \prod_{j=1}^{d} \psi_{k_j}^{(j)}(t_j)$, $t = (t_1, \ldots t_d) \in [0,1]^d$, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}(d)$ (см. (1.32)). С каждой оптимальной аппроксимацией $X_{d,n}$ ранга $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$ для X_d, $d \in \mathbb{N}$, можно ассоциировать случайное поле $X_{d,n}(t)$, $t \in [0,1]^d$. В соответствии с (1.19) разложение этого поля с вероятностью 1 суть n-ая частичная сумма (1.35), отвечающая n максимальным собственным числам $\lambda_{d,m}$, $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$.

Сложность аппроксимации в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и сложность аппроксимации по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ оператора APP_d могут восприниматься в соответствии с формулами (1.20) и (1.21) как аппроксимационные характеристики случайного поля $X_d(t)$, $t \in [0,1]^d$. В рамках стохастической теории это придает дополнительную мотивацию в изучении при больших $d \in \mathbb{N}$ поведения $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$.

1.2.4. Примеры тензорных случайных полей

В данном пункте мы приведем определения и укажем корреляционную структуру некоторых гауссовских случайных полей тензорного типа, которые будут рассматриваться нами в главе 5 настоящей работы.

Броуновский лист

Наиболее известным примером случайного поля тензорного типа является *броуновский лист* или *поле Винера-Ченцова* (англ. *Brownian sheet, Wiener-Chentsov random field*). Данное гауссовское случайное поле с нулевым средним, являющееся тензорной степенью винеровского процесса (см. [32], [35], [61]). Корреляционная функция $\mathcal{K}_d$ этого поля при каждом $d \in \mathbb{N}$ задается формулой (1.34), где $\mathcal{K}^{(j)}(t_j, s_j) = \mathcal{K}^{\mathrm{W}}(t_j, s_j) := \min\{t_j, s_j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Собственные числа, отвечающие $\mathcal{K}^{\mathrm{W}}$, имеют вид (см. [7], стр. 279):

$$\lambda_i^{\mathrm{W}} = \frac{1}{\pi^2(i-1/2)^2}, \quad \psi_i^{\mathrm{W}}(t) = \sqrt{2}\sin\bigl(\pi(i-1/2)t\bigr), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Как известно, они соответствуют краевой задаче Штурма-Лиувилля:

$$\lambda\psi''(t) = \psi(t), \quad \psi(0) = \psi'(1) = 0.$$

Значение броуновского листа для современной теории вероятностей сложно переоценить. Будучи важным теоретическим объектом с интересными геометрическими свойствами, он играет центральную роль в теории стохастических уравнений в частных производных (см. [89]), а также лежит в основе многопараметрического стохастического исчисления Ито (см. [96], [97]).

Многопараметрический броуновский мост

Наряду с броуновским листом следующим важным примером однородного тензорного поля является *многопараметрический броуновский мост*, который также часто называют *броуновской «подушкой»* (англ. *Brownian pillow, Completely tucked Brownian sheet*). Под данным объектом понимают тензорную степень броуновского моста, т.е. гауссовское случайное поле с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией (1.34), где $\mathcal{K}^{(j)}(t_j, s_j) = \mathcal{K}^{\mathrm{Bb}}(t_j, s_j) = \min\{t_j, s_j\} - t_j s_j$, $j \in \mathbb{N}$. Собственные числа корреляционного оператора с ядром $\mathcal{K}^{\mathrm{Bb}}$, записываются следующим образом (см. [7], стр. 279):

$$\lambda_i^{\mathrm{Bb}} = \frac{1}{\pi^2 i^2}, \quad \psi_i^{\mathrm{Bb}}(t) = \sqrt{2}\sin(\pi i t), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Они соответствуют краевой задаче Штурма-Лиувилля следующего вида:

$$\lambda\psi''(t) = \psi(t), \quad \psi(0) = \psi(1) = 0.$$

Многопараметрический броуновский мост как и поле Винера-Ченцова является важным теоретическим объектом. Например, в статистике он возникает как предельное распределение эмпирического процесса (подробнее см. [38]).

Для броуновского листа и многопараметрического броуновского моста в параграфе 5.2 главы 5 мы находим точные асимптотики сложности аппроксимации в среднем и по вероятности.

Тензорная степень дробного броуновского движения

Дробным броуновским движением называют гауссовский процесс с нулевым средним и корреляционной функцией $\mathcal{K}^{\mathrm{fBm}}(t,s) = \frac{1}{2}(t^\gamma + s^\gamma + |t-s|^\gamma)$, $t, s \in [0,1]$, где *индекс Херста* $\gamma \in (0,2)$ (вырожденный случай $\gamma = 2$ исключается из рассмотрения). Если положить $\gamma = 1$, то мы придем к стандартному винеровскому процессу. Обзор важных свойств дробного броуновского движения можно найти в [61].

Рассмотрим корреляционную структуру данного процесса при $\gamma \in (0,1) \cup (1,2)$. Здесь в отличие от предыдущих примеров имеет место тот случай, когда явное аналитическое выражение для собственных пар $(\lambda_i^{\mathrm{fBm}}, \psi_i^{\mathrm{fBm}})_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}}$, отвечающих $\mathcal{K}^{\mathrm{fBm}}$, неизвестно. Однако, как это часто бывает, имеется (см. [39] и [67]) асимптотика собственного числа с большим индексом:

$$\lambda_i^{\mathrm{fBm}} \sim \frac{\Gamma(1+\gamma)\sin(\pi\gamma/2)}{(\pi i)^{1+\gamma}}, \quad i \to \infty.$$

Фактически, этой информации нам будет достаточно, чтобы указать (см. параграф 1 главы 5) логарифмическую асимптотику сложности аппроксимации в среднем и по вероятности для последовательности тензорных степеней дробных броуновских движений, т.е. однородных тензорных случайных полей с корреляционной функциями вида (1.34), где $\mathcal{K}^{(j)}(t_j, s_j) = \mathcal{K}^{\mathrm{fBm}}(t_j, s_j)$, $j \in \mathbb{N}$ (см. [57] и [67]).

Многопараметрический интегрированный процесс Эйлера

Рассмотрим гауссовский случайный процесс $X_r^{\mathrm{E}}(t)$, $t \in [0,1]$, с нулевым средним и корреляционной функцией следующего вида

$$\mathcal{K}_r^{\mathrm{E}}(t,s) := \int\limits_{[0,1]^r} \min\{t, x_1\} \min\{x_1, x_2\} \ldots \min\{x_r, s\} \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r, \tag{1.36}$$

где $t, s \in [0,1]$, $r \in \mathbb{N}$. Такой процесс, следуя [49], мы будем называть *интегрированным процессом Эйлера*. Это название обусловлено тем, что функция $\mathcal{K}_r$ может быть представлена в виде:

$$\mathcal{K}_r^{\mathrm{E}}(t,s) = \frac{(-1)^{r+1} 2^{2r}}{(2r+1)!} \left[E_{2r+1}\left(\frac{|t-s|}{2}\right) - E_{2r+1}\left(\frac{t+s}{2}\right) \right],$$

где E_n — полином Эйлера степени n:

$$E_0(x) \equiv 1, \quad E'_{n+1}(x) := (n+1)E_n(x), \quad E_n(0) = -E_n(1), \quad n \geqslant 1, \quad x \in [0,1].$$

Как можно заметить из (1.36), $\mathcal{K}_r^{\mathrm{E}}$ суть r-ое повторное ядро для $\mathcal{K}^{\mathrm{W}}$. Поэтому собственные числа и функции, отвечающие $\mathcal{K}_r^{\mathrm{E}}$, описываются соответственно формулами:

$$\lambda_i = \frac{1}{(\pi(i-1/2))^{2r+2}}, \quad \psi_i(t) = \sqrt{2}\sin\bigl(\pi(i-1/2)t\bigr), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Также интерес к интегрированному процессу Эйлера мотивирован тем, что он связан со стандартным винеровским процессом $W(t)$, $t \in [0,1]$, следующей схемой интегрирования:

$$X_r^{\mathrm{E}}(t) = (-1)^{a_1+\ldots+a_r} \int\limits_{a_r}^{t} \int\limits_{a_{r-1}}^{t_{r-1}} \ldots \int\limits_{0}^{t_2} \int\limits_{1}^{t_1} W(s)\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{r-1}, \quad t \in [0,1],$$

где $a_{2k-1} := 1$, $a_{2k} := 0$, $k \in \mathbb{N}$, т. е., в частности, X_r^{E} с вероятнстью 1 имеет непрерывно дифференцируемые траектории порядка $r \in \mathbb{N}$.

Эйлеровский интегрированный процесс и связанные с ним краевые задачи рассматривались работе [42], вероятности малых уклонений изучались в статьях [49] и [68].

Естественным многопараметрическим аналогом $X_r^{\mathrm{E}}(t)$, $t \in [0,1]$, является гауссовское поле с нулевым средним и корреляционной функцией (1.34) с $\mathcal{K}^{(j)}(t_j, s_j) := \mathcal{K}_{r_j}^{\mathrm{E}}(t_j, s_j)$, где $t_j, s_j \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$, а $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — некоторая последовательность натуральных чисел. Это случайное поле мы будем называть *многопараметрическим интегрированным процессом Эйлера.* Для последовательностей таких полей, соответствующих неоднородному случаю ($r_j \to \infty$, $j \to \infty$), в параграфе 3 главы 5 мы получаем логарифмические асимптотики сложности аппроксимации в среднем и по вероятности.

Глава 2.

Линейные задачи

В данной главе мы рассматриваем многопараметрические общие линейные задачи аппроксимации, соответствующие последовательностям $\langle \mathcal{S}_d; (Q_d, \mu_d); H_d \rangle_{d \in \mathbb{N}}$, построенным и подробно описанным в первой главе. При этом, как и ранее, $(\lambda_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ обозначает невозрастающую последовательность собственных чисел корреляционного оператора индуцированной гауссовской меры $\nu_d = \mathcal{S}_d^{-1} \mu_d$, $d \in \mathbb{N}$. Изучается поведение сложности аппроксимации в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ при фиксированном пороге ошибки $\varepsilon \in (0,1)$, параметрической размерности $d \to \infty$ и уровне значимости $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$, возможно зависящем от d и ε. Полученные здесь базовые результаты затем широко используются в последующих главах.

2.1. Сложность в среднем

2.1.1. Аппроксимационный порог и общие оценки сложности

Согласно замечаниям пункта 1.2.1 первой главы, сложность аппроксимации в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ в конечном счете выражается через собственные числа $(\lambda_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ с помощью следующих формул, действующих при всех $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \min\Big\{ n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ m > n}} \lambda_{d,m} \leqslant \varepsilon^2 \Lambda_d \Big\} \tag{2.1}$$

$$= \min\Big\{ n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ m \leqslant n}} \lambda_{d,m} \geqslant (1 - \varepsilon^2) \Lambda_d \Big\}. \tag{2.2}$$

Важную роль в дальнейшем изучении величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ играет *аппроксимационный порог* — собственное число с номером $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$:

$$\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \lambda_{d, n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}. \tag{2.3}$$

Другими словами, это самое малое из всех собственных чисел, включенных в аппроксимацию. Как мы увидим позже, именно аппроксимационный порог фактически определяет поведение $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при больших значениях $d \in \mathbb{N}$. Также $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ как спектральная характеристика представляет некоторый самостоятельный интерес.

Заметим, что для аппроксимационного порога $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$ справедливы формулы:

$$\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \max\Big\{x \in \mathbb{R} : \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}} :\, \lambda_{d,m} < x} \lambda_{d,m} \leqslant \varepsilon^2 \Lambda_d\Big\} \tag{2.4}$$

$$= \max\Big\{x \in \mathbb{R} : \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}} :\, \lambda_{d,m} \geqslant x} \lambda_{d,m} \geqslant (1-\varepsilon^2) \Lambda_d\Big\}. \tag{2.5}$$

В дальнейшем также будут полезны следующие эквивалентные (2.4) и (2.5) представления:

$$\left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| = \min\left\{y \in \mathbb{R} : \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} \mathbb{1}\left(\left|\ln \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right| > y\right) \leqslant \varepsilon^2\right\} \tag{2.6}$$

$$= \min\left\{y \in \mathbb{R} : \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} \mathbb{1}\left(\left|\ln \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right| \leqslant y\right) \geqslant 1 - \varepsilon^2\right\}. \tag{2.7}$$

Важно отметить, что $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ в общем случае отличается от значения *считающей функции* собственных чисел $\mathcal{N}_d(x) := \#\{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \lambda_{d,m} \geqslant x\}$, $x \in (0,\infty)$, в точке $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$. Это может происходить в точности тогда, когда $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имеет кратность большую единицы. Возникающее различие описывается *дефектом аппроксимационного порога* $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{D}_d(\varepsilon) := \Big(\sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ \lambda_{d,m} \geqslant \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m} - (1-\varepsilon^2)\Lambda_d \Big) \Big/ \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon), \tag{2.8}$$

определенным для любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$. В силу формулы (2.5) всегда имеем $\mathcal{D}_d(\varepsilon) \geqslant 0$. Связь дефекта с $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $\mathcal{N}_d\left(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\right)$ описывается следующим тождеством. Символом $\lfloor x \rfloor$ мы будем обозначать наибольшее целое, не превосходящее x.

Утверждение 2.1.1. *Для любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ верно равенство*

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{N}_d\left(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\right) - \big\lfloor \mathcal{D}_d(\varepsilon) \big\rfloor.$$

Доказательство утверждения 2.1.1. При каждом $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$ в силу определений $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ можно записать цепочку неравенств

$$\sum_{m=1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-1} \lambda_{d,m} < (1-\varepsilon^2)\Lambda_d \leqslant \sum_{m=1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \lambda_{d,m} \leqslant \sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ \lambda_{d,m} \geqslant \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m}.$$

Используя определения для $\mathcal{N}_d$ и формулы (2.5) для $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, выразим разность $\Delta_d(\varepsilon) := \mathcal{N}_d\left(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\right) - n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ с помощью формулы:

$$\Delta_d(\varepsilon) = \Big(\sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ \lambda_{d,m} \geqslant \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m} - \sum_{m=1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \lambda_{d,m} \Big) \Big/ \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon).$$

Из предыдущих неравенств и определения порога $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ получаем оценки:

$$\begin{aligned}
\Delta_d(\varepsilon) &> \Bigg(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}\geqslant\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m} - (1-\varepsilon^2)\Lambda_d - \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\Bigg)\Big/\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{D}_d(\varepsilon) - 1;\\
\Delta_d(\varepsilon) &\leqslant \Bigg(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}\geqslant\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m} - (1-\varepsilon^2)\Lambda_d\Bigg)\Big/\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{D}_d(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает в точности искомое равенство $\Delta_d(\varepsilon) = \lfloor\mathcal{D}_d(\varepsilon)\rfloor$. $\square$

Приведем некоторые полезные неравенства, связывающие порог $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и сложность в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$.

В силу невозрастания последовательности $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, определения (2.3) и формулы (2.2) для любых $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$ имеем:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m} \leqslant \frac{(1-\varepsilon^2)\Lambda_d + \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}.$$

В итоге получаем верхнюю оценку для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, выраженную через $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$:

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \forall d\in\mathbb{N}\quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant \frac{(1-\varepsilon^2)\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} + 1.$$

Более грубая версия данной оценки, но часто достаточная для приложений, описывается следующим неравенством:

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \forall d\in\mathbb{N}\quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant \frac{\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}, \tag{2.9}$$

и его логарифмическим аналогом

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \forall d\in\mathbb{N}\quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant \left|\ln\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right|. \tag{2.10}$$

Получим нижние оценки. Зафиксируем произвольные числа $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in(0,1)$ такие, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Тогда для любого $d\in\mathbb{N}$ имеем

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1) \geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1) - n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2) \geqslant \sum_{m=n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)+1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1)} \lambda_{d,m}/\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2).$$

При этом по формуле (2.2) получим:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)+1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1)} \lambda_{d,m} &= \sum_{m=1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1)} \lambda_{d,m} - \sum_{m=1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)} \lambda_{d,m}\\
&\geqslant (1-\varepsilon_1^2)\Lambda_d - \big((1-\varepsilon_2^2)\Lambda_d + \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)\big)\\
&= (\varepsilon_2^2-\varepsilon_1^2)\Lambda_d - \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2).
\end{aligned}$$

В итоге имеем:

$$\forall \varepsilon_1 \in (0,1) \quad \forall \varepsilon_2 \in (\varepsilon_1, 1) \quad d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1) \geqslant \frac{(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)} - 1. \tag{2.11}$$

Последнее неравенство можно записать в виде:

$$\ln(n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1) + 1) \geqslant \left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)}{\Lambda_d}\right| + \ln(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2).$$

Так как $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1) \geqslant 1$, то верно

$$\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1) \geqslant \left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)}{\Lambda_d}\right| + \ln(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) - \ln 2.$$

Итак, имеем следующую нижнюю оценку $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ для любых $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \in (0,1)$, $\varepsilon_2 \in (\varepsilon_1, 1)$:

$$\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_1) \geqslant \left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_2)}{\Lambda_d}\right| + \ln\bigl((\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)/2\bigr). \tag{2.12}$$

Полезны следующие варианты формулы (2.12). Для любых $d \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0,1)$, и для любого числа $c_1 < 1$ имеем

$$\left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| \leqslant \ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_1 \cdot \varepsilon) - \ln\bigl((1 - c_1^2)\varepsilon^2/2\bigr); \tag{2.13}$$

для любого $c_2 \in (1, 1/\varepsilon)$ получим

$$\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \geqslant \left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c_2 \cdot \varepsilon)}{\Lambda_d}\right| + \ln\bigl((c_2^2 - 1)\varepsilon^2/2\bigr). \tag{2.14}$$

Приведенные неравенства являются основополагающими при получении асимптотик сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$.

2.1.2. Ограниченность по параметрической размерности

Прежде чем осуществлять асимптотический анализ сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$, имеет смысл ответить на вопрос о том, при каких условиях на $(\lambda_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, величина $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ ограничена или неограничена по d при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$.

Следующее утверждение указывает необходимые и достаточные условия стремления величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ к ∞ при $d \to \infty$ в терминах первых собственных чисел $(\lambda_{d,1})_{d \in \mathbb{N}}$ и следов $(\Lambda_d)_{d \in \mathbb{N}}$.

Утверждение 2.1.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\displaystyle\lim_{d \to \infty} \frac{\lambda_{d,1}}{\Lambda_d} = 0;$

(ii) $\displaystyle\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \lim_{d \to \infty} \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d} = 0;$

(iii) $\displaystyle\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \lim_{d \to \infty} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \infty.$

Доказательство утверждения 2.1.2. $(i) \Leftarrow (ii)$. Пусть имеем (ii). Предположим, что существует подпоследовательность $\big(\lambda_{d_i,1}/\Lambda_{d_i}\big)_{i\in\mathbb{N}}$, такая что

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\lambda_{d_i,1}}{\Lambda_{d_i}} =: q > 0.$$

Выберем порог ε так, чтобы $1-\varepsilon^2 < q$. Тогда, используя формулу (2.5), получим $\lambda_{d_i}^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \lambda_{d_i,1} > (1-\varepsilon^2)\Lambda_{d_i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого места. Но это противоречит исходному предположению (ii).

$(i) \Rightarrow (iii)$. Для любого $\varepsilon \in (0,1)$ из формулы (2.2) для сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и следующей нижней оценки для нее

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\lambda_{d,1}} \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m} \geqslant \frac{(1-\varepsilon^2)\Lambda_d}{\lambda_{d,1}}, \tag{2.15}$$

вытекает стремление $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \to \infty$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Пусть при любом $\varepsilon \in (0,1)$ выполняется $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \to \infty$ при $d \to \infty$. Тогда в силу оценки (2.9) для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ имеем $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)/\Lambda_d \to 0$ при $d \to \infty$. $\square$

Следствием данного утверждения является критерий неограниченности по параметру d сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$.

Утверждение 2.1.3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\inf\limits_{d\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda_{d,1}}{\Lambda_d} = 0;$

(ii) $\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \inf\limits_{d\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d} = 0;$

(iii) $\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \sup\limits_{d\in\mathbb{N}} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \infty.$

Заметим, что из данного утверждения вытекает, что противоположное к (i) условие $\inf_{d\in\mathbb{N}}\big(\lambda_{d,1}/\Lambda_d\big) > 0$ и эквивалентное ему условие

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,1}} < \infty, \tag{2.16}$$

необходимы для $\inf_{d\in\mathbb{N}}\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)/\Lambda_d\big) > 0$ или $\sup_{d\in\mathbb{N}} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) < \infty$ при произвольном фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$. Однако в общем случае они не являются достаточными: для некоторых ε сложность $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ может быть ограничена по $d \in \mathbb{N}$, а для некоторых — нет. Несложно построить соответствующий пример:

$$\lambda_{d,1} := 1/2, \quad \lambda_{d,m} := 1/(2d), \quad 2 \leqslant m \leqslant d+1, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Действительно, для любого $d \in \mathbb{N}$ имеем $\Lambda_d = 1$ и $\lambda_{d,1}/\Lambda_d = 1/2$ при этом для любого $\varepsilon \in [1/\sqrt{2}, 1)$ $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = 1$, а при $\varepsilon \in (0, 1/\sqrt{2})$ получаем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \to \infty$.

Приведем критерий ограниченности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ по параметрической размерности d при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$.

Утверждение 2.1.4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(*i*) $\lim\limits_{t\to 0}\sup\limits_{d\in\mathbb{N}}\sum\limits_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}\dfrac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\,\mathbb{1}\left(\dfrac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}<t\right)=0;$

(*ii*) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \inf\limits_{d\in\mathbb{N}}\dfrac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda_d}>0;$

(*iii*) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \sup\limits_{d\in\mathbb{N}} n_d^{\rm avg}(\varepsilon)<\infty.$

Доказательство утверждения 2.1.4. (*i*) $\Leftrightarrow$ (*ii*). Условие (*i*) означает, что для любого $\varepsilon\in(0,1)$ существует такое число T_ε, что для всех $d\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\,\mathbb{1}\left(\left|\ln\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right|>T_\varepsilon\right)\leqslant\varepsilon^2.$$

В силу формулы (2.6) это эквивалентно тому, что для любого $d\in\mathbb{N}$ справедливо

$$\left|\ln\frac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right|\leqslant T_\varepsilon,$$

откуда получаем искомую равносильность с (*ii*).

(*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*). Для любого $\varepsilon\in(0,1)$ и любого $d\in\mathbb{N}$ из неравенства (2.9) с очевидностью имеем оценку $\ln n_d^{\rm avg}(\varepsilon)\leqslant\left|\ln(\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)/\Lambda_d)\right|$, из которой вытекает импликация (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Докажем обратную импликацию. Зафиксируем произвольный порог $\varepsilon\in(0,1)$. Применим неравенство (2.13) с произвольным фиксированным $c<1$. Тогда с учетом (*iii*) для любого $d\in\mathbb{N}$ имеем

$$\left|\ln\frac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right|\leqslant\ln\bigl(\sup_{d\in\mathbb{N}}n_d^{\rm avg}(c\cdot\varepsilon)\bigr)-\ln\bigl((1-c^2)\varepsilon^2/2\bigr).$$

Отсюда получаем выполнение (*ii*). $\square$

Отметим важный случай, когда условие $\inf_{d\in\mathbb{N}}\bigl(\lambda_{d,1}/\Lambda_d\bigr)>0$ является не только необходимым, но и достаточным для ограниченности $n_d^{\rm avg}(\varepsilon)$ по d при любом фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $\widetilde{\mathbb{N}}_d\subseteq\widetilde{\mathbb{N}}_{d+1}$ *для любого* $d\in\mathbb{N}$. *Пусть для всех* $d\in\mathbb{N}$, *начиная с некоторого места, и всех* $m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d$ *выполнено условие:*

$$\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,1}}\leqslant\frac{\lambda_{d+1,m}}{\lambda_{d+1,1}}. \tag{2.17}$$

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(*i*) $\inf\limits_{d\in\mathbb{N}}\dfrac{\lambda_{d,1}}{\Lambda_d}>0;$

(*ii*) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \inf\limits_{d\in\mathbb{N}}\dfrac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda_d}>0;$

(*iii*) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \sup\limits_{d\in\mathbb{N}} n_d^{\rm avg}(\varepsilon)<\infty.$

Доказательство теоремы 2.1.1. В силу утверждения 2.1.4 достаточно доказать эквивалентность $(i) \Leftrightarrow (iii)$. Как отмечалось ранее, импликация $(i) \Leftarrow (iii)$ следует из утверждения 2.1.3. Докажем $(i) \Rightarrow (iii)$. Обозначим $\hat{\lambda}_{d,m} := \lambda_{d,m}/\lambda_{d,1}$ при $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$ и $\hat{\lambda}_{d,m} := 0$ при $m \in \mathbb{N} \setminus \widetilde{\mathbb{N}}_d$. В частности, $\hat{\lambda}_{d,1} = 1$ и $\hat{\lambda}_{d,m} \leqslant 1$, $m \in \mathbb{N}$. По предположению (i) будем иметь:

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \big(\Lambda_d/\lambda_{d,1}\big) = \sup_{d\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \hat{\lambda}_{d,m} < \infty. \tag{2.18}$$

Зафиксируем произвольное число $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_\infty := \cup_{d\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathbb{N}}_d$ и сколь угодно малое число $h > 0$. Для произвольного натурального $m \leqslant n$ найдется $d_{h,m} \in \mathbb{N}$, что *при всех* $d \geqslant d_{h,m}$ (в силу (2.17)) выполнено

$$\hat{\lambda}_{d,m} > \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m} - h/n.$$

Тогда для любого $d \geqslant \max\limits_{1\leqslant m\leqslant n} d_{h,m} =: d_n$ будем иметь

$$\sum_{m=1}^{n} \hat{\lambda}_{d,m} > \sum_{m=1}^{n} \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m} - h.$$

Следовательно, приходим в точности к равенству:

$$\sup_{d\geqslant d_n} \sum_{m=1}^{n} \hat{\lambda}_{d,m} = \sum_{m=1}^{n} \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m}.$$

Из (2.18) получаем, что для любого $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_\infty$ выполнено неравенство

$$\sum_{m=1}^{n} \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m} \leqslant \sup_{d\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \hat{\lambda}_{d,m} < \infty,$$

из которого следует

$$\sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_\infty} \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m} < \infty. \tag{2.19}$$

Предположим теперь, что для некоторого $\varepsilon_* \in (0,1)$ и некоторой последовательности $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ такой, что $d_i \to \infty$ при $i \to \infty$, имеем $n^{\mathrm{avg}}_{d_i}(\varepsilon_*) \to \infty$, при $i \to \infty$. Здесь имеем $\widetilde{\mathbb{N}}_\infty = \mathbb{N}$. По формуле (2.1) сложности $n^{\mathrm{avg}}_{d_i}(\varepsilon_*)$ для любого $i \in \mathbb{N}$ верно неравенство:

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_{d_i}:\\ m\geqslant n^{\mathrm{avg}}_{d_i}(\varepsilon_*)}} \lambda_{d_i,m} > \varepsilon_*^2 \Lambda_{d_i}.$$

В то же время, ввиду (2.19), при всех $i \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_{d_i}:\\ m\geqslant n^{\mathrm{avg}}_{d_i}(\varepsilon_*)}} \hat{\lambda}_{d_i,m} \leqslant \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ m\geqslant n^{\mathrm{avg}}_{d_i}(\varepsilon_*)}} \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m} < \infty.$$

В итоге, с одной стороны, для любого $i \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ m\geqslant n^{\mathrm{avg}}_{d_i}(\varepsilon_*)}} \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m} > \varepsilon_*^2 \cdot \frac{\Lambda_{d_i}}{\lambda_{d_i,1}} \geqslant \varepsilon_*^2.$$

С другой стороны, в силу (2.19), равенства $\widetilde{\mathbb{N}}_\infty = \mathbb{N}$ и предположения $n_{d_i}^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_*) \to \infty$, при $i \to \infty$ должны иметь:

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{\substack{m\in\mathbb{N}:\\ m\geqslant n_{d_i}^{\mathrm{avg}}(\varepsilon_*)}} \sup_{d\in\mathbb{N}} \hat{\lambda}_{d,m} = 0.$$

Из полученного противоречия вытекает справедливость (iii). $\square$

2.1.3. Скалярные спектральные меры

В настоящем пункте мы рассмотрим специальные распределения на сериях $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, с помощью которых удобно характеризовать поведение $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$.

Пусть $(W_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность случайных величин, построенных на некотором вероятностном пространстве с мерой $\mathbb{P}$ и имеющих следующие распределения:

$$\mathbb{P}\left(W_d = \left|\ln \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right|\right) = \#\{k \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \lambda_{d,k} = \lambda_{d,m}\} \cdot \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}, \quad d \in \mathbb{N}. \tag{2.20}$$

О связи величин W_d, $d \in \mathbb{N}$, здесь мы ничего не предполагаем.

С аналитической точки зрения распределение (2.20) является специальным образом преобразованной счетно-аддитивной скалярной спектральной мерой (см. [2] с. 194) корреляционного оператора K_d. Покажем это. Пусть $\mathscr{B}([0,1])$ — стандартная борелевская сигма-алгебра на $[0,1]$, а $\mathscr{P}(H_d)$ — множество всех ортогональных проекторов в пространстве H_d. Спектральная мера $\Pi_d\colon \mathscr{B}([0,1]) \to \mathscr{P}(H_d)$ для оператора K_d, $d \in \mathbb{N}$ будет иметь вид:

$$\Pi_d(B) = \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} P_{d,m}\, \mathbb{1}(\lambda_{d,m}/\Lambda_d \in B), \quad B \in \mathscr{B}([0,1]),$$

где $P_{d,m}$ — проектор на линейную оболочку $\psi_{d,m}$, $\mathbb{1}(\lambda_{d,m}/\Lambda_d \in \cdot\,)$ — дираковская мера в $\lambda_{d,m}/\Lambda_d$. В свою очередь спектральная мера Π_d порождает целое семейство конечных счетно-аддитивных скалярных мер $\big\{\Pi_{d,g} : g \in H_d\big\}$ на $\mathscr{B}([0,1])$, имеющих вид

$$\Pi_{d,g}(B) := \|\Pi_d(B)g\|_2^2, \quad g \in H_d.$$

В частности, если в качестве g принять

$$g_d := \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \big(\lambda_{d,m}/\Lambda_d\big)^{1/2} \psi_{d,m},$$

то будем иметь

$$\Pi_{d,g_d}(B) = \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} (\lambda_{d,m}/\Lambda_d)\, \mathbb{1}\big(\lambda_{d,m}/\Lambda_d \in B\big).$$

Теперь несложно видеть

$$\mathbb{P}\big(W_d \in B\big) = \Pi_{d,g_d}\big(\exp\{-B\}\big), \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

где $\exp\{-B\} := \{y \in \mathbb{R} : y = e^{-x},\, x \in B\}$.

Пусть задана последовательность $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ чисел из $\mathbb{R}$ и последовательность $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ строго положительных чисел. Рассмотрим при каждом $d \in \mathbb{N}$ функцию $F_d^{\langle A,B\rangle} : \mathbb{R} \to [0,1]$, заданную следующей формулой:

$$F_d^{\langle A,B\rangle}(x) := \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\, \mathbb{1}\left(\frac{\left|\ln \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right| - A_d}{B_d} \leqslant x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Несложно видеть, что $F_d^{\langle A,B\rangle}$ является функцией распределения на $\mathbb{R}$ случайной величины W_d центрированной и нормированной соответственно константами A_d и B_d:

$$F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{W_d - A_d}{B_d} \leqslant x\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Для хвоста $F_d^{\langle A,B\rangle}$ далее будем использовать обозначение $\overline{F}_d^{\langle A,B\rangle}(x) := 1 - F_d^{\langle A,B\rangle}(x)$.

Как мы покажем в следующих пунктах, предельное распределение у последовательности $(F_d^{\langle A,B\rangle})_{d\in\mathbb{N}}$ определяет асимптотику $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$.

2.1.4. Логарифмические асимптотики

В данном пункте мы приступаем к асимптотическому анализу сложности мнопараметрических линейных задач в постановке в среднем. Здесь нас будет интересовать поведение величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, при произвольном фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. Нашей целью является нахождение необходимых и достаточных условий на $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, при которых сложность в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имела бы следующее асимптотическое представление

$$\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty.$$

где $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — положительная последовательность, стремящаяся к ∞, а компонента $q(\varepsilon)$ зависит только от ε и представляет собой некоторую невозрастающую функцию на $(0,1)$. Для формулировки результатов нам потребуются дополнительные вспомогательные обозначения.

Символ $\mathbf{C}(f)$ обозначает множество точек непрерывности данной функции f. Для любой функции распределения F под символом F^{-1} мы всегда будем понимать обобщенную обратную функцию:

$$F^{-1}(p) := \inf\bigl\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geqslant p\bigr\}, \quad p \in (0,1), \tag{2.23}$$

которая также называется *квантильной функцией* (к. ф.) для F. Также условимся для любой функции распределения F символами $\operatorname{lext} F$ и $\operatorname{rext} F$ обозначать, следуя [17], границы ее точек роста:

$$\operatorname{lext} F := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}, \quad \operatorname{rext} F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}.$$

При этом, конечно, вполне допускается $\operatorname{lext} F = -\infty$ и $\operatorname{rext} F = \infty$.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$*, а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$*. Пусть невозрастающая функция* $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ *и функция распределения* $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$*, для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *удовлетворяют равенству* $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\forall x \in \mathbf{C}(\mathcal{L}) \quad F_d^{\langle A,B\rangle}(x) \to \mathcal{L}(x), \quad d \to \infty;$

(ii) $\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \left|\ln \dfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty;$

(iii) $\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty.$

Данная теорема показывает, что логарифмическая асимптотика сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$ совпадает с логарифмической асимптотикой отношения аппроксимационного порога $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ к следу Λ_d, подчеркивая, наряду с утверждениями пункта 2.1.2, тесную связь между этими характеристиками. Но это наблюдение имеет, по-видимому, лишь теоретический интерес, и вряд ли оно может восприниматься как, например, удобный критерий для получения той или иной асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$. Как раз этим целям и служит условие (i) приведенной теоремы, сводя задачу асимптотического анализа сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ к получению предельных теорем для последовательности распределений $(F_d^{\langle A,B\rangle})_{d\in\mathbb{N}}$.

Доказательство теоремы 2.1.2. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Несложно увидеть, что каждая $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, является функцией распределения на $\mathbb{R}$. В такой интерпретации условие (i) означает слабую сходимость $(F_d^{\langle A,B\rangle})_{d\in\mathbb{N}}$ к $\mathcal{L}$ при $d \to \infty$, которая, как известно (см. [88], стр. 305), равносильна сходимости $(F_d^{\langle A,B\rangle})^{-1}(t) \to \mathcal{L}^{-1}(t)$ при $d \to \infty$ в каждой точке непрерывности $\mathcal{L}^{-1}$. По теореме о непрерывности композиции функций справедлива эквивалентность:

$$\varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \Leftrightarrow \quad 1-\varepsilon^2 \in \mathbf{C}(\mathcal{L}^{-1}).$$

Поэтому (i) равносильно следующему условию

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad (F_d^{\langle A,B\rangle})^{-1}(1-\varepsilon^2) \to \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2), \quad d \to \infty.$$

При этом для любого $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$ верно равенство

$$(F_d^{\langle A,B\rangle})^{-1}(1-\varepsilon^2) = \frac{\left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| - A_d}{B_d}.$$

Действительно, используя формулу (2.7), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| - A_d}{B_d} &= \min\left\{\frac{y-A_d}{B_d} \in \mathbb{R} : \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\mathbb{1}\left(\left|\ln\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right| \leqslant y\right) \geqslant 1-\varepsilon^2\right\} \\
&= \min\left\{\frac{y-A_d}{B_d} \in \mathbb{R} : F_d^{\langle A,B\rangle}\left(\frac{y-A_d}{B_d}\right) \geqslant 1-\varepsilon^2\right\} \\
&= \min\left\{z \in \mathbb{R} : F_d^{\langle A,B\rangle}(z) \geqslant 1-\varepsilon^2\right\} = (F_d^{\langle A,B\rangle})^{-1}(1-\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Получаем, что условие (i) эквивалентно предельному соотношению:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \lim_{d\to\infty} \frac{\left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| - A_d}{B_d} = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2),$$

которое суть (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Зафиксируем произвольный порог $\varepsilon \in \mathbf{C}(q)$ и сколь угодно малое число $h > 0$. В соответствии с (ii) и неравенством (2.10) при больших $d \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant A_d + q(\varepsilon)B_d + hB_d.$$

Функция q по условию является невозрастающей, следовательно, она имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Тогда можно найти такое число $c_h^+ > 1$, что $c_h^+ \cdot \varepsilon < 1$, $c_h^+ \cdot \varepsilon$ — точка непрерывности q и при этом $q(c_h^+ \cdot \varepsilon) - q(\varepsilon) \geqslant -h$. Из неравенства (2.14) при больших d вытекает

$$\begin{aligned} \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) &\geqslant A_d + q(c_h^+ \cdot \varepsilon)B_d - hB_d + \ln\bigl((1-(c_h^+)^2)\varepsilon^2/2\bigr), \\ &\geqslant A_d + q(\varepsilon)B_d - 2hB_d + \ln\bigl((1-(c_h^+)^2)\varepsilon^2/2\bigr). \end{aligned}$$

Так как $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$, то неравенство

$$\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \geqslant A_d + q(\varepsilon)B_d - 3hB_d,$$

выполнится при достаточно больших d. В силу того, что число $h > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, приходим к (iii).

Докажем обратную импликацию $(ii) \Leftarrow (iii)$. В соответствии с (iii) и неравенством (2.10) при больших $d \in \mathbb{N}$ будем иметь

$$\left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| \geqslant A_d + q(\varepsilon)B_d - hB_d.$$

Теперь найдем такое число $c_h^- < 1$, что $c_h^- \cdot \varepsilon$ — точка непрерывности q, для которой выполнено $q(c_h^- \cdot \varepsilon) - q(\varepsilon) \leqslant h$. Применим неравенство (2.13) при больших d:

$$\begin{aligned} \bigl|\ln(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)/\Lambda_d)\bigr| &\leqslant \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon \cdot c_h^-) - \ln\bigl((1-(c_h^-)^2)\varepsilon^2/2\bigr) \\ &\leqslant A_d + q(c_h^- \cdot \varepsilon)B_d + hB_d - \ln\bigl((1-(c_h^-)^2)\varepsilon^2/2\bigr) \\ &\leqslant A_d + q(\varepsilon)B_d + 2hB_d - \ln\bigl((1-(c_h^-)^2)\varepsilon^2/2\bigr). \end{aligned}$$

Учитывая, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$, следующее неравенство достигнется при достаточно больших d

$$\left|\ln \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| \leqslant A_d + q(\varepsilon)B_d + 3hB_d.$$

В силу того, что число $h > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, приходим к (ii). $\square$

Для нахождения элементов множества $\mathbf{C}(q)$ из теоремы 2.1.2 может быть полезна следующая элементарная лемма.

Лемма 2.1.1. *Пусть функция распределения F строго возрастает в окрестности некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$, тогда квантильная функция F^{-1} непрерывна в любой точке $p \in (0,1)$, удовлетворяющей равенству $F^{-1}(p) = x_0$.*

Доказательство леммы 2.1.1. Пусть данная функция распределения F строго возрастает в некотором интервале $(F^{-1}(p)-z_0, F^{-1}(p)+z_0)$, $z_0>0$. Тогда для любого $z>0$ имеем

$$F(F^{-1}(p)-z) < F(F^{-1}(p)-0) \leqslant p \leqslant F(F^{-1}(p)+0) < F(F^{-1}(p)+z).$$

Следовательно, найдется $h_z>0$, что для любого $h\in(0,h_z)$ имеем $F(F^{-1}(p)+z)>p+h$ и $F(F^{-1}(p)-z)<p-h$. Значит, по определению к. ф. F^{-1} верно $F^{-1}(p)+z\geqslant F^{-1}(p+h)$ и $F^{-1}(p)-z\leqslant F^{-1}(p-h)$, что и доказывает для F^{-1} непрерывность в точке p. $\square$

Замечание 2.1.1. *В лемме 2.1.1 обратное утверждение в общем случае неверно.*

Для подтверждения данного замечания приведем пример. Пусть F является кусочно постоянной функцией распределения и s некоторая точка ее скачка. Тогда к. ф. F^{-1} постоянна на интервале $(F(s-), F(s))$ и значит непрерывна в любой его внутренней точке p, причем $F^{-1}(p)=s$. Тем не менее, функция F не является строго возрастающей в окрестности s.

Рассмотрим важные частные случаи теоремы 2.1.2. Если в ней для функции распределения положить $\mathcal{L}(x):=\mathbb{1}(x\geqslant 0)$, то $q(\varepsilon)\equiv 0$, $\varepsilon\in(0,1)$. Значит, $\mathbf{C}(\mathcal{L})=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\mathbf{C}(q)=(0,1)$. Тогда с учетом теоремы 2.1.2 будем иметь следующее следствие.

Теорема 2.1.3. *Пусть $A=(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B=(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d\to\infty$ при $d\to\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\forall x>0\quad F_d^{\langle A,B\rangle}(-x)+\overline{F}_d^{\langle A,B\rangle}(x)\to 0,\quad d\to\infty;$

(ii) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \left|\ln\dfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| = A_d+o(B_d),\quad d\to\infty;$

(iii) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)=A_d+o(B_d),\quad d\to\infty.$

Заметим, что при $A_d\sim B_d$, $d\to\infty$, в (ii) и (iii) равенства могут быть заменены на соответствующие эквивалентности.

Теперь рассмотрим более тонкий случай, когда функция $\mathcal{L}$ является строго возрастающей на непустом интервале $(\operatorname{lext}\mathcal{L}, \operatorname{rext}\mathcal{L})$.

Теорема 2.1.4. *Пусть $A=(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B=(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d\to\infty$ при $d\to\infty$. Пусть невозрастающая функция $q\colon(0,1)\to\mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}\colon\mathbb{R}\to[0,1]$, строго возрастающая на непустом интервале $(\operatorname{lext}\mathcal{L}, \operatorname{rext}\mathcal{L})$, для любого $\varepsilon\in(0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon)=\mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\forall x\in\mathbf{C}(\mathcal{L})\quad F_d^{\langle A,B\rangle}(x)\to\mathcal{L}(x),\quad d\to\infty;$

(ii) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \left|\ln\dfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\right| = A_d+q(\varepsilon)B_d+o(B_d),\quad d\to\infty;$

(*iii*) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \ln n_d^{\rm avg}(\varepsilon)=A_d+q(\varepsilon)B_d+o(B_d),\quad d\to\infty.$

Изменения, которые вносит в теорему 2.1.2 дополнительное условие о строгом возрастании $\mathcal{L}$, заключаются в замене $\mathbf{C}(q)$ на весь интервал $(0,1)$. Это корректно в силу следующей элементарной леммы.

Лемма 2.1.2. *Если функция распределения F строго возрастает на непустом интервале $(\operatorname{lext}F,\operatorname{rext}F)$, то к.ф. F^{-1} непрерывна на $(0,1)$.*

Доказательство леммы 2.1.2. Зафиксируем произвольное $p\in(0,1)$. Если мы имеем $F^{-1}(p)\in(\operatorname{lext}F,\operatorname{rext}F)$, то по лемме 2.1.1 число p — точка непрерывности F^{-1}. Если же $F^{-1}(p)\notin(\operatorname{lext}F,\operatorname{rext}F)$, то число $F^{-1}(p)$ равно одной из величин $\operatorname{lext}F$ либо $\operatorname{rext}F$, причем эта величина должна быть конечна. Заметим, что в таких случаях $F(\operatorname{lext}F-0)=0$ и $F(\operatorname{rext}F+0)=1$. Тогда для любого $z>0$ в силу строго возрастания F на $(\operatorname{lext}F,\operatorname{rext}F)$ и того, что $p\in(0,1)$, будем иметь

$$F(F^{-1}(p)-z)<p<F(F^{-1}(p)+z),$$

в независимости от того $F^{-1}(p)=\operatorname{lext}F$ или же $F^{-1}(p)=\operatorname{rext}F$. Следовательно, найдется такое $h_z>0$, что для любого $h\in(0,h_z)$ справедливо $F(F^{-1}(p)+z)>p+h$ и $F(F^{-1}(p)-z)<p-h$. Значит, по определению к. ф. F^{-1} верно $F^{-1}(p)+z\geqslant F^{-1}(p+h)$ и $F^{-1}(p)-z\leqslant F^{-1}(p-h)$. Это доказывает непрерывность F^{-1} в точке p. $\square$

2.2. Сложность по вероятности

В настоящем параграфе мы приступаем к изучению сложности по вероятности многопараметрических линейных задач. Эта характеристика была определена в пункте 1.2.1 первой главы. Напомним, что для нее справедливы следующие представления при $d\in\mathbb{N}$, $\varepsilon\in(0,1)$ и $\delta\in(0,1)$:

$$\begin{aligned} n_d^{\rm prob}(\varepsilon,\delta) &= \min\Big\{n\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\mathbb{P}\Big(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}}\lambda_{d,m}\,\xi_{d,m}^2>\varepsilon^2\,\Lambda_d\Big)\leqslant\delta\Big\} && (2.24)\\ &= \min\Big\{n\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\mathbb{P}\Big(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}}\lambda_{d,m}\,\xi_{d,m}^2\leqslant\varepsilon^2\,\Lambda_d\Big)\geqslant 1-\delta\Big\}, && (2.25)\end{aligned}$$

где $(\xi_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d\in\mathbb{N}$ — серии из независимых стандартных гауссовских случайных величин.

В работах [54], [90]–[92] отмечается тесная связь между постановками в среднем и по вероятности для линейных задач теории информационной сложности. В рамках многопараметрической задачи, которая рассматривается нами, эта связь также имеет место и выражается, как будет показано позже, в асимптотических представлениях для величин $n_d^{\rm avg}(\varepsilon)$ и $n_d^{\rm prob}(\varepsilon,\delta)$ при $d\to\infty$.

2.2.1. Вспомогательные утверждения

Приведем некоторые полезные вспомогательные неравенства, которые будут нами использоваться вдальнейшем. Следующая ниже лемма 2.2.1 дает оценки для вероятностей, фигурирующих в формулах (2.24) и (2.25). Прежде чем ее сформулировать, отметим, что изучение вероятностей вида

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k^2 > x\Big), \quad x > 0, \quad a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant \ldots \geqslant 0, \tag{2.26}$$

где ξ_k, $k \in \mathbb{N}$ — независимые (не обязательно стандартные) гауссовские случайные величины, не раз привлекали интерес специалистов теории вероятностей. Здесь следует выделить результаты В. М. Золотарева [10] и Гефдинга [6], а также их некоторые обобщения: [15], [26], [53] и [65]. В приведенных работах изучается точная асимптотика при $x \to \infty$ вероятностей вида (2.26) с фиксированной последовательностью $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Однако в формуле (2.24) мы имеем дело с другой ситуацией: последовательность $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, и уровень $\varepsilon^2\Lambda_d$ в общем случае меняются в зависимости от d, другими словами, перед нами схема серий квадратичных форм от независимых гауссовских случайных величин. Это, в свою очередь, не позволяет получать оценки для вероятности из (2.24) прямым применением результатов из перечисленных статей и, значит, требует специального рассмотрения.

Итак, в следующей лемме 2.2.1 мы фактически получаем экспоненциальные оценки чебышевского типа для вероятностей из формул (2.24) и (2.24) с произвольным уровнем усечения последовательности $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$.

Для любых $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$ и $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$ введем обозначения:

$$P_{d,\varepsilon}(n) := \mathbb{P}\Big(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \lambda_{d,m}\,\xi_{d,m}^2 > \varepsilon^2\,\Lambda_d\Big), \qquad \overline{P}_{d,\varepsilon}(n) := 1 - P_{d,\varepsilon}(n). \tag{2.27}$$

и также

$$r_{d,\varepsilon}(n) := \varepsilon^2 - \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}, \qquad \omega_d(n) := \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda_d\,\lambda_{d,n}}. \tag{2.28}$$

Лемма 2.2.1. *Для любых $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$ и $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$ выполнены следующие неравенства:*

$$\ln P_{d,\varepsilon}(n) \;\leqslant\; -\ln\sqrt{e/2}\cdot r_{d,\varepsilon}(n)\cdot \min\Big\{\frac{r_{d,\varepsilon}(n)}{\omega_d(n)}, 1\Big\}\cdot\frac{\Lambda_d}{\lambda_{d,n}}, \quad n \geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon), \tag{2.29}$$

$$\ln \overline{P}_{d,\varepsilon}(n) \;\leqslant\; -\frac{1}{4}\cdot\frac{r_{d,\varepsilon}(n)^2}{\omega_d(n)}\cdot\frac{\Lambda_d}{\lambda_{d,n}}, \quad n < n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon). \tag{2.30}$$

Доказательство леммы 2.2.1. Пусть $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$ и $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$. Если $n+1 \notin \widetilde{\mathbb{N}}_d$, т.е. $n = n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \max\widetilde{\mathbb{N}}_d < \infty$, то $P_{d,\varepsilon}(n) = 0$, и, значит, неравенство (2.29) формально выполнено. Далее мы предпологаем, что $n+1 \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$. Для $P_{d,\varepsilon}(n)$ удобно использовать следующую запись:

$$P_{d,\varepsilon}(n) = \mathbb{P}\Bigg(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\,(\xi_{d,m}^2 - 1) > r_{d,\varepsilon}(n)\,\frac{\Lambda_d}{\lambda_{d,n}}\Bigg).$$

Чтобы оценить вероятность $P_{d,\varepsilon}(n)$, мы воспользуемся экспоненциальным неравенством Чебышева. Для этого мы вычислим преобразование Лапласа для суммы, фигурирующей в $P_{d,\varepsilon}(n)$. В силу независимости $\xi_{d,m}$, $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$, имеем

$$\mathbb{E}\,\exp\Bigg\{\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\,(\xi_{d,m}^2-1)\Bigg\} = \prod_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \mathbb{E}\,\exp\Bigg\{\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\,(\xi_{d,m}^2-1)\Bigg\}. \tag{2.31}$$

Здесь каждый множитель может быть явно вычислен:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\exp\Bigg\{\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\,(\xi_{d,m}^2-1)\Bigg\} &= \frac{\exp\Big\{-\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\Big\}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\Bigg\{-\Big(1-2\gamma\,\tfrac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\Big)\,\frac{x^2}{2}\Bigg\}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\exp\Big\{-\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\Big\}}{\Big(1-2\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\Big)^{1/2}}\,.\end{aligned}$$

В силу сходимости ряда $\sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}\lambda_{d,m}$ и ограниченности снизу величин $\xi_{d,m}^2-1$, $m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d$ произведение в (2.31) будет сходится при любых $\gamma<1/2$. Далее введем функцию:

$$\begin{aligned}H_{d,\varepsilon}(\gamma;n) &:= \gamma\,r_{d,\varepsilon}(n)-\frac{\lambda_{d,n}}{\Lambda_d}\cdot\ln\mathbb{E}\,\exp\Bigg\{\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}}\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\,(\xi_{d,m}^2-1)\Bigg\}\\ &= \gamma\,r_{d,\varepsilon}(n)-\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}}\Bigg(-\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}-\frac{\lambda_{d,n}}{\Lambda_d}\cdot\frac{1}{2}\ln\Bigg(1-2\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\Bigg)\Bigg).\end{aligned}$$

Если $n\geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, то $r_{d,\varepsilon}(n)\geqslant 0$. В этом случае классическая экспоненциальная оценка Чебышева для $P_{d,\varepsilon}(n)$ имеет вид:

$$\ln P_{d,\varepsilon}(n)\leqslant-\frac{\Lambda_d}{\lambda_{d,n}}\sup_{\gamma\geqslant0}H_{d,\varepsilon}(\gamma;n). \tag{2.32}$$

Если же $n<n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, то $r_{d,\varepsilon}(n)<0$. Здесь справедлив левосторонний аналог экспоненциальной оценки Чебышева

$$\ln\overline{P}_{d,\varepsilon}(n)\leqslant-\frac{\Lambda_d}{\lambda_{d,n}}\sup_{\gamma<0}H_{d,\varepsilon}(\gamma;n). \tag{2.33}$$

Рассмотрим следующий ряд из выражения для $H_{d,\varepsilon}(\gamma;n)$:

$$\begin{aligned}L_d(\gamma;n) &:= \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}}\Bigg(-\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}-\frac{\lambda_{d,n}}{\Lambda_d}\cdot\frac{1}{2}\ln\Bigg(1-2\gamma\,\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\Bigg)\Bigg)\\ &= \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}}\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2\gamma)^k}{k}\frac{\lambda_{d,m}^k}{\Lambda_d\,\lambda_{d,n}^{k-1}}.\end{aligned}$$

С учетом того, что $\lambda_{d,m}\leqslant\lambda_{d,n}$, $m>n$, при $\gamma\in[0,1/2)$ верна оценка

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2\gamma)^k}{k}\frac{\lambda_{d,m}^k}{\Lambda_d\,\lambda_{d,n}^{k-1}}\leqslant\frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda_d\,\lambda_{d,n}}\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(2\gamma)^k}{k}.$$

Следовательно, при $\gamma \in [0, 1/2)$ имеем

$$\begin{aligned} L_d(\gamma; n) &\leqslant \omega_d(n) \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2\gamma)^k}{k} \\ &= \omega_d(n)\Big(-\gamma - \tfrac{1}{2}\ln(1-2\gamma)\Big). \end{aligned}$$

При отрицательных γ оценим $L_d(\gamma; n)$ с помощью неравенства $\ln(1+t) \geqslant t - t^2/2$, $t \geqslant 0$:

$$L_d(\gamma; n) = \sum_{\substack{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d: \\ m > n}} \left(-\gamma \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} - \frac{\lambda_{d,n}}{\Lambda_d} \cdot \frac{1}{2} \ln\left(1 - 2\gamma \frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n}}\right)\right) \leqslant \omega_d(n)\gamma^2.$$

Возвратимся к функции $H_{d,\varepsilon}(\gamma; n) = \gamma\, r_{d,\varepsilon}(n) - L_{d,\varepsilon}(\gamma; n)$. При $\gamma \in [0, 1/2)$ она удовлетворяет неравенству

$$H_{d,\varepsilon}(\gamma; n) \geqslant \gamma\, r_{d,\varepsilon}(n) - \omega_d(n)\Big(-\gamma - \tfrac{1}{2}\ln(1-2\gamma)\Big), \tag{2.34}$$

а при $\gamma < 0$ неравенству

$$H_{d,\varepsilon}(\gamma; n) \geqslant \gamma\, r_{d,\varepsilon}(n) - \omega_d(n)\, \gamma^2. \tag{2.35}$$

Если $n \geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, т.е. $r_{d,\varepsilon}(n) \geqslant 0$, то максимум правой части неравенства (2.34) достигается в точке

$$\gamma_{d,+} := \frac{1}{2} \cdot \frac{r_{d,\varepsilon}(n)}{r_{d,\varepsilon}(n) + \omega_d(n)} \in [0, 1/2).$$

Если же $n < n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, т.е. $r_{d,\varepsilon}(n) < 0$, то для правой части неравенства (2.35) максимум будет в точке

$$\gamma_{d,-} := -\frac{|r_{d,\varepsilon}(n)|}{2\, \omega_d(n)} < 0.$$

В итоге при $n \geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ справедливо неравенство:

$$\begin{aligned} \sup_{\gamma \geqslant 0} H_{d,\varepsilon}(\gamma; n) &\geqslant \gamma_{d,+}\, r_{d,\varepsilon}(n) - \omega_d(n)\Big(-\gamma_{d,+} - \tfrac{1}{2}\ln(1-2\gamma_{d,+})\Big) \\ &= \frac{r_{d,\varepsilon}(n)}{2}\left(1 - \frac{\omega_d(n)}{r_{d,\varepsilon}(n)} \ln\left(1 + \frac{r_{d,\varepsilon}(n)}{\omega_d(n)}\right)\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $g(t) := 1 - t^{-1}\ln(1+t)$, $t > 0$. При $t \geqslant 1$ выполнено $g(t) \geqslant 1 - \ln 2 = \ln(e/2)$. При $t \in [0, 1)$, используя элементарное неравенство $\ln(1+t) \leqslant t - \ln(e/2)t^2$, находим $g(t) \geqslant \ln(e/2)t$. Значит, для любого $t \geqslant 0$ справедливо $g(t) \geqslant \ln(e/2)\min\{t, 1\}$. Из данных замечаний вытекает следующая оценка:

$$\sup_{\gamma \geqslant 0} H_{d,\varepsilon}(\gamma; n) \geqslant \frac{r_{d,\varepsilon}(n)}{2} \cdot \ln(e/2) \cdot \min\left\{\frac{r_{d,\varepsilon}(n)}{\omega_d(n)}, 1\right\}.$$

В случае $n < n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ будем иметь

$$\sup_{\gamma < 0} H_{d,\varepsilon}(\gamma; n) \geqslant \gamma_{d,-}\, r_{d,\varepsilon}(n) - \omega_d(n)\gamma_{d,-}^2 = \frac{r_{d,\varepsilon}(n)^2}{4\, \omega_d(n)}.$$

Полученные оценки совместно с (2.32) и (2.33) дают искомые неравенства для $P_{d,\varepsilon}(n)$ и $\overline{P}_{d,\varepsilon}(n)$. $\square$

Из полученной леммы вытекают полезные следствия.

Лемма 2.2.2. *Для любых* $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$ *и* $c \in (0,1]$ *выполнено*

$$\ln P_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr) \leqslant -\ln\sqrt{e/2}\,(1-c^2)^2\varepsilon^2 \cdot n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon).$$

Доказательство леммы 2.2.2. Выберем произвольные $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$ и $c \leqslant 1$. Из определений $n_d^{\text{avg}}(\cdot)$ и $\lambda_d^{\text{avg}}(\cdot)$ имеем $r_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr) \geqslant \varepsilon^2(1-c^2)$ и также

$$\omega_d\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr) = \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda_d\,\lambda_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)} \leqslant \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} \leqslant (c\,\varepsilon)^2.$$

Следовательно, с учетом $c \in (0,1]$, верны неравенства

$$\frac{r_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)}{\omega_d\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)} \geqslant \frac{1-c^2}{c^2}, \quad \min\left\{\frac{r_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)}{\omega_d\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)}, 1\right\} \geqslant 1-c^2.$$

Также, используя определение (2.3) и неравенство (2.9), замечаем:

$$\frac{\Lambda_d}{\lambda_{d,n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}} = \frac{\Lambda_d}{\lambda_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)} \geqslant n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon).$$

Полученные оценки совместно с леммой 2.2.1 (где принимается $\varepsilon' = c\,\varepsilon$) приводят к доказываемой оценке для $\ln P_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)$. $\square$

Лемма 2.2.3. *Для любых* $\varepsilon \in (0,1)$, $d \in \mathbb{N}$ *и* $c \in (1, 1/\varepsilon)$, *таких, что* $n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon) < n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)$, *выполнено неравенство*

$$\ln \overline{P}_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr) \leqslant -\frac{(c^2-1)^2\varepsilon^2}{4c^2} \cdot n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon) + \frac{1}{2}.$$

Доказательство леммы 2.2.3. Выберем произвольные ε, d и c как в условии леммы. Из определений $n_d^{\text{avg}}(\cdot)$ и $\lambda_d^{\text{avg}}(\cdot)$ имеем

$$\omega_d\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr) = \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda_d\,\lambda_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)} \leqslant (c\,\varepsilon)^2.$$

Далее заметим, что в силу условия $n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon) < n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)$ верно

$$\bigl|r_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)\bigr| = \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} - \varepsilon^2 > 0.$$

Тогда можно найти такое число $\theta_{d,\varepsilon} \in (0,1]$, что выполнено неравенство:

$$\bigl|r_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)\bigr| \geqslant c^2\varepsilon^2 - \theta_{d,\varepsilon}\,\frac{\lambda_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}{\Lambda_d} - \varepsilon^2 > 0.$$

Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} r_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)\bigr)^2 \ &\geqslant\ \varepsilon^4\left((c^2-1) - \theta_{d,\varepsilon}\,\frac{\lambda_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}{\varepsilon^2\Lambda_d}\right)^2 \\ &\geqslant\ \varepsilon^4\left((c^2-1)^2 - 2(c^2-1)\,\frac{\lambda_d^{\text{avg}}(c\,\varepsilon)}{\varepsilon^2\Lambda_d}\right). \end{aligned}$$

Полученные замечания вместе с леммой 2.2.1 при $n = n_d^{\mathrm{avg}}(c\,\varepsilon)$ дают искомую оценку:

$$\begin{aligned}
\ln \overline{P}_{d,\varepsilon}(n) &\leqslant -\frac{1}{4(c\,\varepsilon)^2}\cdot\varepsilon^4\left((c^2-1)^2 - 2(c^2-1)\,\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c\,\varepsilon)}{\varepsilon^2\Lambda_d}\right)\cdot\frac{\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c\,\varepsilon)}\\
&= -\frac{(c^2-1)^2}{4c^2}\cdot\frac{\varepsilon^2\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c\,\varepsilon)} + \frac{c^2-1}{2c^2}\\
&\leqslant -\frac{(c^2-1)^2\varepsilon^2}{4c^2}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c\,\varepsilon) + \frac{1}{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

2.2.2. Логарифмические асимптотики

В данном пункте мы приступаем к асимптотическому анализу сложности по вероятности. По аналогии с постановкой в среднем мы будем рассматривать изменение $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ при фиксированном пороге $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. Уровень значимости δ может зависеть от выбора ε и варьироваться в определенных пределах в зависимости от d, при этом покрывается случай, когда δ фиксирован. Опираясь на результаты предыдущего пункта, мы покажем, что в наиболее важных случаях асимптотика при $d \to \infty$ сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ совпадает с асимптотикой $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ в достаточно широкой области изменения $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$.

Пусть функции распределения $F_d^{\langle A,B\rangle}(x)$, $d \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, определяются по формуле (2.21) при заданных последовательностях $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ и $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$. В пункте 2.1.4 показано, что слабая сходимость $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, к некоторой функции распределения является необходимым и достаточным условием для того, чтобы сложность в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имела асимптотику специального вида (см. теорему 2.1.2). Как оказывается, для сложности по вероятности предположение о слабой сходимости $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, также является определяющим. Сформулируем соответствующие результаты. Для наглядности мы разделяем утверждения о необходимости и о достаточности на следующие две теоремы.

Теорема 2.2.1. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть невозрастающая функция $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Пусть $\lim\limits_{d\to\infty}\big(\lambda_{d,1}/\Lambda_d\big) = 0$, и также выполнено*

$$\forall x \in \mathbf{C}(\mathcal{L}) \quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathcal{L}(x). \tag{2.36}$$

Тогда для любого $\varepsilon \in \mathbf{C}(q)$ и для произвольной последовательности $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющей условиям

$$\varlimsup_{d\to\infty}\frac{\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon), \qquad \varlimsup_{d\to\infty}\frac{\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon), \tag{2.37}$$

будем иметь

$$\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{2.38}$$

Доказательство теоремы 2.2.1. Из предположения $\lim\limits_{d\to\infty}\bigl(\lambda_{d,1}/\Lambda_d\bigr)=0$ по утверждению 2.1.2 для любого $\varepsilon\in(0,1)$ имеем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\to\infty$, $d\to\infty$. Кроме того, в соответствии с условием (2.36) теорема 2.1.2 дает асимптотику для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$:

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{C}(q)\quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)=A_d+q(\varepsilon)B_d+o(B_d),\quad d\to\infty. \tag{2.39}$$

Зафиксируем $\varepsilon\in\mathbf{C}(q)$, последовательность $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую (2.37), и произвольное положительное число b_ε, для которого выполнено:

$$b_\varepsilon\leqslant q(\varepsilon)-\varlimsup_{d\to\infty}\frac{\ln|\ln\min\{\delta_{d,\varepsilon},1-\delta_{d,\varepsilon}\}|-A_d}{B_d}\in(0,\infty].$$

Зафиксируем сколь угодно малое число $h>0$. Далее найдем такое число $c_{h,1}<1$, что $c_{h,1}\,\varepsilon$ — точка непрерывности q и кроме того $q(c_{h,1}\,\varepsilon)-q(\varepsilon)\leqslant h$. В силу леммы 2.2.2 верна оценка:

$$\ln P_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,1}\,\varepsilon)\bigr)\leqslant -C_{\varepsilon,h,1}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,1}\,\varepsilon),$$

где принято $C_{\varepsilon,h,1}:=\ln\sqrt{e/2}\,\bigl(1-c_{h,1}^2\bigr)^2\varepsilon^2>0$. Когда размерность d достаточно большая, мы будем иметь

$$\begin{aligned}\ln P_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,1}\,\varepsilon)\bigr) &\leqslant -C_{\varepsilon,h,1}\cdot\exp\bigl\{A_d+q(c_{h,1}\,\varepsilon)B_d-b_\varepsilon B_d/4\bigr\}\\ &\leqslant -C_{\varepsilon,h,1}\cdot\exp\bigl\{A_d+q(\varepsilon)B_d-2b_\varepsilon B_d/4\bigr\}\\ &\leqslant -\exp\bigl\{A_d+q(\varepsilon)B_d-3b_\varepsilon B_d/4\bigr\}.\end{aligned}$$

Последняя оценка достигается за счет стремления $B_d\to\infty$, $d\to\infty$. Тем самым, при достаточно больших $d\in\mathbb{N}$ мы приходим к неравенству $\ln P_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,1}\,\varepsilon)\bigr)\leqslant\ln\delta_{d,\varepsilon}$, а значит, и к соотношению $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,1}\,\varepsilon)$. Тогда при больших d будем иметь:

$$\begin{aligned}\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) &\leqslant A_d+q(c_{h,1}\,\varepsilon)B_d+hB_d\\ &\leqslant A_d+q(\varepsilon)B_d+2hB_d.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Далее найдем такое число $c_{h,2}\in(1,1/\varepsilon)$, что $q(\varepsilon)-q(c_{h,2}\,\varepsilon)\leqslant h$. Используя определение $n_d^{\mathrm{avg}}(\cdot)$, заметим:

$$\begin{aligned}n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)+1 &\geqslant \frac{\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)}\sum_{m=n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\\ &= \frac{\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c_h^+\varepsilon)}\left(\sum_{m=1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}-\sum_{m=1}^{n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)-1}\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right)\\ &> \frac{\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)}\Bigl((1-\varepsilon^2)-(1-c_{h,2}^2\,\varepsilon^2)\Bigr)\\ &= \frac{\varepsilon^2\Lambda_d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)}\bigl(c_{h,2}^2-1\bigr).\end{aligned}$$

Из условия $\lim\limits_{d\to\infty}\bigl(\lambda_{d,1}/\Lambda_d\bigr)=0$ по утверждению 2.1.2 вытекает $\lim\limits_{d\to\infty}\bigl(\Lambda_d/\lambda_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)\bigr)=\infty$, и, следовательно, $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)\to\infty$ при $d\to\infty$. Тогда, очевидно, начиная с некоторого значения d, будет выполнятся строгое неравенство $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) > n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)$. При этих d по лемме 2.2.3 верна оценка:

$$\ln \overline{P}_{d,\varepsilon}\big(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)\big) \leqslant -C_{\varepsilon,h,2}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon) + \frac{1}{2},$$

где обозначено $C_{\varepsilon,h,2} := \big(c_{h,2}^2 - 1\big)^2\varepsilon^2/(4c_{h,2}^2)$. Если число d достаточно большое, то мы будем иметь:

$$\begin{aligned}
\ln \overline{P}_{d,\varepsilon}\big(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)\big) &\leqslant -\frac{C_{\varepsilon,h,2}}{2}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)\\
&\leqslant -\frac{C_{\varepsilon,h,2}}{2}\cdot \exp\{A_d + q(c_{h,2}\,\varepsilon)B_d - b_\varepsilon B_d/4\}\\
&\leqslant -\frac{C_{\varepsilon,h,2}}{2}\cdot \exp\{A_d + q(\varepsilon)B_d - 2b_\varepsilon B_d/4\}\\
&< -\exp\{A_d + q(\varepsilon)B_d - 3b_\varepsilon B_d/4\}.
\end{aligned}$$

Последняя из приведенных оценок получается за счет $B_d \to \infty$, $d \to \infty$.

В итоге при достаточно больших значениях $d \in \mathbb{N}$ мы приходим к следующему неравенству $\ln \overline{P}_{d,\varepsilon}\big(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)\big) < \ln(1-\delta_{d,\varepsilon})$, из которого имеем $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) > n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}\,\varepsilon)$. Тогда при больших d получаем

$$\begin{aligned}
\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) &> A_d + q(c_{h,2}\,\varepsilon)B_d - hB_d\\
&> A_d + q(\varepsilon)B_d - 2hB_d.
\end{aligned}$$

Вместе с (2.40) это дает искомую асимптотику для $\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})$. $\square$

Теорема 2.2.2. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть невозрастающая функция $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Пусть $\lim\limits_{d\to\infty}\big(\lambda_{d,1}/\Lambda_d\big) = 0$, и для некоторого фиксированного $\delta \in (0,1)$ имеем*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{2.41}$$

Тогда выполняется (2.36) *и асимптотика* (2.41) *распространяется на $\delta = \delta_{d,\varepsilon} \in (0,1)$, удовлетворяющие* (2.37).

Доказательство теоремы 2.2.2. Пусть имеет место предположение (2.41) для некоторого фиксированного $\delta \in (0,1)$. Выберем произвольный порог $\varepsilon \in \mathbf{C}(q)$ и сколь угодно малое число $h > 0$. Далее найдем такое $c_{h,1} \in (1, 1/\varepsilon)$, что $c_{h,1}\,\varepsilon$ — точка непрерывности q и при этом $q(\varepsilon) - q(c_{h,1}\,\varepsilon) \leqslant h$. Обозначим $\varepsilon_{h,1} := c_{h,1}\,\varepsilon$. Лемма 2.2.2 дает оценку:

$$\begin{aligned}
\ln P_{d,\varepsilon_{h,1}}\big(n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) &= \ln P_{d,\varepsilon_{h,1}}\big(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,1}^{-1}\varepsilon_{h,1})\big)\\
&\leqslant -C_{\varepsilon,h,1}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,1}^{-1}\,\varepsilon_{h,1})\\
&= -C_{\varepsilon,h,1}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

где $C_{\varepsilon,h,1} := \ln\sqrt{e/2}\,(1-c_{h,1}^{-2})^2\varepsilon_{h,1}^2 > 0$. В силу условия $\lim\limits_{d\to\infty}\bigl(\lambda_{d,1}/\Lambda_d\bigr) = 0$ имеем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\to\infty$, $d\to\infty$. Значит, при достаточно больших значениях d будет справедливо:

$$\ln P_{d,\varepsilon_{h,1}}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\bigr) \leqslant \ln\delta.$$

Это в свою очередь означает, что при больших d выполнено неравенство $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon_{h,1},\delta) \leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, а значит, и оценка

$$\begin{aligned}
\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) &\geqslant A_d + q(\varepsilon_{h,1})B_d - hB_d\\
&= A_d + q(c_{h,1}\varepsilon)B_d - hB_d\\
&\geqslant A_d + q(\varepsilon)B_d - 2hB_d.
\end{aligned}\tag{2.42}$$

Далее найдем такое число $c_{h,2} < 1$, что $c_{h,2}\,\varepsilon$ — точка непрерывности q и при этом $q(c_{h,2}\,\varepsilon) - q(\varepsilon) \leqslant h$. Обозначим $\varepsilon_{h,2} := c_{h,2}\,\varepsilon$. Из леммы 2.2.3 имеем оценку:

$$\begin{aligned}
\ln\overline{P}_{d,\varepsilon_{h,2}}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\bigr) &= \ln\overline{P}_{d,\varepsilon_{h,2}}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}^{-1}\,\varepsilon_{h,2})\bigr)\\
&\leqslant -C_{\varepsilon,h,2}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,2}^{-1}\,\varepsilon_{h,2}) + \frac{1}{2}\\
&= -C_{\varepsilon,h,2}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

где обозначено $C_{\varepsilon,h,2} := \bigl(c_{h,2}^2 - 1\bigr)^2\varepsilon_{h,2}^2/(4c_{h,2}^2) > 0$. Из стремления величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ к ∞ находим, что при всех значениях d, начиная с некоторого места, будет справедливо

$$\ln\overline{P}_{d,\varepsilon_{h,2}}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\bigr) < \ln(1-\delta).$$

При таких d выполнено неравенство $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon_{h,2},\delta) > n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и вытекающая из него оценка

$$\begin{aligned}
\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) &< A_d + q(\varepsilon_{h,2})B_d + hB_d\\
&= A_d + q(c_{h,2}\,\varepsilon)B_d + hB_d\\
&\leqslant A_d + q(\varepsilon)B_d + 2hB_d.
\end{aligned}$$

В итоге, с учетом (2.42) это дает асимптотику для $\ln n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon\in\mathbf{C}(q)$. Отсюда по теореме 2.1.2 вытекает соотношение (2.36), при котором в силу теоремы 2.2.1 асимптотика $\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ верна и для $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$, удовлетворяющих (2.37). $\square$

Глава 3.

Линейные тензорные задачи в постановке в среднем

В настоящей главе мы приступаем к рассмотрению многопараметрических линейных тензорных задач аппроксимации в среднем, полное формальное описание которых приведено в пункте 1.2.2 первой главы. Как и для общих линейных задач, ключевую роль здесь играют последовательности собственных $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d\in\mathbb{N}$. Однако теперь они имеют специальную мультипликативную структуру, а именно, представляют собой упорядоченные по невозрастанию наборы собственных чисел вида (1.30). Сложность аппроксимации в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, описываемая формулами (2.1) и (2.2), изучается при сколь угодно малом фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$ и большом $d\in\mathbb{N}$. Результаты будут считаться законченными, если они выражены в терминах маргинальных последовательностей $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j\in\mathbb{N}$.

3.1. Ограниченность сложности по параметрической размерности

По аналогии с предыдущей главой мы сначала рассмотрим вопрос ограниченности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ по d при любом фиксированном $\ell\in(0,1)$. Приведенные ниже утверждения во многом опираются на результаты пункта 2.1.2.

Утверждение 3.1.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\displaystyle\lim_{d\to\infty}\prod_{j=1}^{d}\frac{\lambda_1^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}=0;$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\Lambda^{(j)}-\lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>1}\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}=\infty;$

(iii) $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \dfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d}\to 0,\quad d\to\infty;$

$(iiii)$ $\forall\varepsilon\in(0,1)\quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\to\infty,\quad d\to\infty.$

Доказательство утверждения 3.1.1. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Условие (i) эквивалентно расходимости следующего произведения

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_i^{(j)}} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right), \tag{3.1}$$

что, в свою очередь, в силу неотрицательности $\left(\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}\right)/\lambda_1^{(j)}$ при каждом $j \in \mathbb{N}$, равносильно расходимости ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i > 1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}. \tag{3.2}$$

$(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iiii)$. В силу упорядоченности каждой из $(\lambda_{d,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$, $d \in \mathbb{N}$, и $(\lambda_i^{(j)})_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, несложно заметить

$$\frac{\lambda_{d,1}}{\Lambda_d} = \max_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d} = \prod_{j=1}^{d} \max_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} = \prod_{j=1}^{d} \frac{\lambda_1^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}. \tag{3.3}$$

Поэтому искомые эквивалентности являются просто следствием утверждения 2.1.2. $\square$

Утверждение 3.1.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\lim\limits_{d \to \infty} \prod_{j=1}^{d} \frac{\lambda_1^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} > 0;$

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i > 1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < \infty;$

(iii) $\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \inf\limits_{d \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda_d} > 0;$

$(iiii)$ $\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \sup\limits_{d \in \mathbb{N}} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) < \infty.$

Доказательство утверждения 3.1.2. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Условие (i) эквивалентно сходимости произведения (3.1). При этом последнее равносильно сходимости ряда (3.2) ввиду неотрицательности $\left(\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}\right)/\lambda_1^{(j)}$ при каждом $j \in \mathbb{N}$.

$(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iiii)$. Эти эквивалентности следуют с учетом (3.3) из теоремы 2.1.1. Проверим выполнение ее условий. Включение $\widetilde{\mathbb{N}}_d \subseteq \widetilde{\mathbb{N}}_{d+1}$, $d \in \mathbb{N}$, справедливо в силу мультипликативной структуры собственных чисел. Неравенство (2.17), которое в соответствии с (3.3) принимает вид $\lambda_{d,m}\lambda_1^{(d+1)} \leqslant \lambda_{d+1,m}$, справедливо при любых $d \in \mathbb{N}$ и $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_{d+1}$, так как $(\lambda_{d,m}\lambda_1^{(d+1)})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d}$ является подпоследовательностью $(\lambda_{d+1,m})_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_{d+1}}$. $\square$

Заметим, что условия (i) в приведенных утверждениях 3.1.1 и 3.1.2 являются взаимоисключающими в силу монотонности последовательности $\prod_{j=1}^{d} \frac{\lambda_1^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}$ по $d \in \mathbb{N}$. Поэтому для линейных тензорных задач сложность в среднем может либо *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ стремится к ∞ при $d \to \infty$ либо *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ быть ограниченной по d, хотя эти ситуации с формально логической точки зрения не являются противоположными.

3.2. Скалярные спектральные меры

Теперь мы рассмотрим специальные вероятностные распределения на последовательностях $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, и выясним их связь с ранее определенными мерами на $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$. Это позволит нам с помощью уже доказанных в главе 2 теорем получать тонкие спектральные свойства при больших $d \in \mathbb{N}$.

При каждом $j \in \mathbb{N}$ любое собственное число $\lambda_i^{(j)}, i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}$, в силу ядерности корреляционного оператора $K^{(j)}$ обладает конечной кратностью, что дает возможность определить *функцию кратности* $\kappa^{(j)}(v) := \#\{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} : \lambda_i^{(j)} = v\}$. Пусть $\big(U^{(j)}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых случайных величин со следующими специальными распределениями на некотором вероятностном пространстве с мерой $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\bigg(U^{(j)} = \bigg|\ln\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\bigg|\bigg) = \kappa_i^{(j)} \cdot \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}, \quad i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

где $\kappa_i^{(j)} := \kappa^{(j)}(\lambda_i^{(j)})$ — кратность собственного числа $\lambda_i^{(j)}$. Выделим множество $\mathcal{V}^{(j)} := \{\lambda_i^{(j)} : i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}\}$ значений последовательности $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$. Тогда (3.4) можно переписать в виде:

$$\mathbb{P}\bigg(U^{(j)} = \bigg|\ln\frac{v}{\Lambda^{(j)}}\bigg|\bigg) = \kappa^{(j)}(v) \cdot \frac{v}{\Lambda^{(j)}}, \quad v \in \mathcal{V}^{(j)}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

В однородном случае величины $\big(U^{(j)}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ будут одинаково распределены, и определения (3.4) и (3.5) примут более простой вид:

$$\mathbb{P}\bigg(U^{(j)} = \bigg|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\bigg|\bigg) = \kappa_i \cdot \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad i \in \widetilde{\mathbb{N}}, \tag{3.6}$$

где $\kappa_i := \kappa(\lambda_i)$ — кратность собственного числа λ_i;

$$\mathbb{P}\bigg(U^{(j)} = \bigg|\ln\frac{v}{\Lambda}\bigg|\bigg) = \kappa(v) \cdot \frac{v}{\Lambda}, \quad v \in \mathcal{V}, \tag{3.7}$$

где $\mathcal{V} := \{\lambda_i : i \in \widetilde{\mathbb{N}}\}$ — множество значений $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$.

Аналогично тому, как это сделано в пункте 2.1.3, можно показать, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ распределение (3.4) является специальным образом преобразованной счетно-аддитивной скалярной спектральной мерой корреляционного оператора $K^{(j)}$.

Основная лемма

Ключевую роль описываемого вероятностного подхода играет следующая лемма, объясняющая цель введения случайных величин $\big(U^{(j)}\big)_{j\in\mathbb{N}}$.

Лемма 3.2.1. *Пусть* $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *— независимые случайные величины с распределениями* (3.4). *Для любых* $d \in \mathbb{N}$ *и* $x \in \mathbb{R}$ *верно тождество*

$$\sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\, \mathbb{1}\bigg(\bigg|\ln\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\bigg| \leqslant x\bigg) = \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} \leqslant x\Big).$$

Доказательство леммы 3.2.1. Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$ и $x \in (0,1]$. Перейдем от одномерного индексного множества $\widetilde{\mathbb{N}}_d$ к многомерному $\widetilde{\mathbb{N}}(d)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\,\mathbb{1}\left(\left|\ln\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right| \leqslant x\right) &= \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}(d)} \prod_{j=1}^{d} \frac{\lambda_{k_j}^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \cdot \mathbb{1}\left(\left|\ln\prod_{j=1}^{d}\frac{\lambda_{k_j}^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right| \leqslant x\right)\\
&= \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}(d)} \prod_{j=1}^{d} \frac{\lambda_{k_j}^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \cdot \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{\lambda_{k_j}^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right| \leqslant x\right)\\
&= \sum_{v\in\mathcal{V}(d)} \left(\prod_{j=1}^{d} \kappa^{(j)}(v^{(j)})\,\frac{v^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right) \cdot \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{v^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right| \leqslant x\right),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{V}(d) := \mathcal{V}^{(1)}\times\ldots\times\mathcal{V}^{(d)}$ и $v = (v^{(1)},\ldots,v^{(d)})$. Используя определение (3.5) для независимых $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$, получим

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\,\mathbb{1}\left(\left|\ln\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\right| \leqslant x\right) &= \sum_{v\in\mathcal{V}(d)} \prod_{j=1}^{d} \mathbb{P}\left(U^{(j)} = \left|\ln\frac{v^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right|\right)\\
&\qquad\cdot \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{v^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right| \leqslant x\right)\\
&= \sum_{v\in\mathcal{V}(d)} \mathbb{P}\left(U^{(j)} = \left|\ln\frac{v^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right|,\ j=\overline{1,d}\right)\\
&\qquad\cdot \mathbb{1}\left(\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{v^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right| \leqslant x\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} \leqslant x\right). \quad \square
\end{aligned}$$

Следует отметить, что впервые лемма 3.2.1 была получена Лифшицем М. А. и Туляковой Е. В. в статье [64] для однородного случая, когда все собственные числа λ_i имеют единичную кратность. Здесь же данная лемма доказана в общем случае, когда для каждого $\lambda_i^{(j)}$ допускается произвольная конечная кратность $\kappa_i^{(j)}$ (конечно, в условиях ядерности каждого $K^{(j)}$).

Пусть случайные величины $(W_d)_{d\in\mathbb{N}}$ построены по формуле (2.20). Тогда, как несложно видеть, имеем $W_d = \sum_{j=1}^{d} U^{(j)}$ по распределению при каждом $d \in \mathbb{N}$. Далее, если $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — положительная последовательность, то, в силу (2.22), функции $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d\in\mathbb{N}$, определяемые по следующей формуле (идентичной (2.21)):

$$F_d^{\langle A,B\rangle}(x) := \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda_d}\,\mathbb{1}\left(\frac{|\ln(\lambda_{d,m}/\Lambda_d)| - A_d}{B_d} \leqslant x\right), \quad x\in\mathbb{R}, \quad d\in\mathbb{N}, \tag{3.8}$$

в вероятностной интерпретации суть функции распределения центрированных и нормированных сумм независимых случайных величин $U^{(j)}$, $j\in\mathbb{N}$:

$$F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} - A_d}{B_d} \leqslant x\right), \quad d\in\mathbb{N}, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Как показано в главе 2, последовательность $(F_d^{\langle A,B\rangle})_{d\in\mathbb{N}}$, в свою очередь, отвечает за поведение $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ (и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$) при больших $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon^{-1}\in(1,\infty)$. Это полезное замечание открывает нам путь к применению аппарата классических предельных теорем теории вероятностей для изучения роста сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при больших значениях ее параметров.

3.3. Вспомогательные факты

3.3.1. Правильно меняющиеся функции

Теория правильно меняющиеся функций играют важную роль в нашем последующем изложении. Поэтому в этом пункте мы представим основные определения из этой теории, а также приведем некоторые утверждения, которые будут нами в дальнейшем использоваться.

Определение 3.3.1. *Положительная измеримая на некотором луче $[T,\infty)$, $T>0$, функция φ называется медленно меняющейся, кратко м.м.ф., (англ. slowly varying function), если для нее выполнено предельное соотношение:*

$$\forall c>0 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(cx)}{\varphi(x)}=1.$$

Определение 3.3.2. *Положительная измеримая на некотором луче $[T,\infty)$, $T>0$, функция f называется правильно меняющейся функцией, кратко п.м.ф., (англ. regularly varying function) с индексом $\rho\in\mathbb{R}$, если она удовлетворяет соотношению:*

$$\forall c>0 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=c^{\rho}.$$

Определение 3.3.3. *Положительная измеримая на некотором луче $[T,\infty)$, $T>0$, функция f называется быстро меняющейся функцией на ∞, кратко б.м.ф., (англ. rapidly varying function), если она удовлетворяет соотношению:*

$$\forall c>0 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(cx)}{f(x)}=\begin{cases}0, & c\in(0,1),\\ 1, & c=1,\\ \infty, & c>1.\end{cases}$$

Тем самым, любая м.м.ф. является п.м.ф. с индексом $\rho=0$, и любая б.м.ф. формально является п.м.ф. с индексом $\rho=\infty$.

Подробное изложение свойств м.м.ф., п.м.ф. и б.м.ф. можно найти в книгах [23] и [37], которым мы и следуем далее.

Полезной является следующая лемма (см. [37]).

Лемма 3.3.1. *Пусть φ является м.м.ф., тогда для любого $p>0$*

$$\int\limits_x^{\infty}\frac{\varphi(t)\,\mathrm{d}t}{t^{1+p}}\sim\frac{\varphi(x)}{p\,x^{p}},\quad x\to\infty.$$

Сформулируем лемму об асимптотическом обращении п.м.ф.

Лемма 3.3.2. *Пусть f, измеримая на некотором луче $[T, \infty)$, $T > 0$, является п.м.ф. с индексом $\tau > 0$, тогда существует п.м.ф. g с индексом $1/\tau$ такая, что выполнено*

$$f(g(x)) \sim g(f(x)) \sim x, \quad x \to \infty.$$

Здесь функция g определяется единственным образом с точностью до асимптотической эквивалентности. Одной из версий g является

$$f^{-1}(x) := \inf\{y \in [T, \infty) : f(y) > x\}.$$

Функцию g принято называть *асимптотической инверсией* для f. Приведенную лемму с доказательством можно найти в книге [37] (с. 28–29).

Лемма 3.3.3. *Пусть φ является м.м.ф., тогда с точностью до асимптотической эквивалентности существует такая м.м.ф. φ^*, что выполнены все следующие соотношения*

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)\varphi^*(x\varphi(x)) = 1,$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi^*(x)\varphi(x\varphi^*(x)) = 1,$
3. $\varphi^{**}(x) \sim \varphi(x), \quad x \to \infty.$

Эту лемму с доказательством можно найти в ранее упомянутых книгах [23] и [37]. Однако она впервые была получена де Бруином в статье [40], поэтому функцию φ^*, фигурирующую в ней называют *сопряжением де Бруина* для φ. Важность введения φ^* объясняется следующей леммой.

Лемма 3.3.4. *Пусть $f(x) \sim x^\tau \varphi(x)^\tau$, $\tau > 0$, φ — м.м.ф. при $x \to \infty$. Тогда асимптотическая инверсия g (в смысле леммы 3.3.2) для функции f удовлетворяет соотношению*

$$g(x) \sim x^{1/\tau}\varphi^*(x^{1/\tau}), \quad x \to \infty,$$

где φ^* сопряжение де Бруина для φ.

При выполнении *критерия Бекеши* (см. [37] с. 78–79) сопряжение де Бруина φ^* для φ асимптотически выражается в терминах самой функции φ. Мы приведем этот критерий в слегка упрощенной форме.

Лемма 3.3.5. *Если для м.м.ф. φ выполнено условие:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x/\varphi(x))} = 1, \tag{3.10}$$

то будем иметь эквивалентность:

$$\varphi^*(x) \sim \frac{1}{\varphi(x)}, \quad x \to \infty, \tag{3.11}$$

где φ^* сопряжение де Бруина для φ.

В частности, данная лемма может быть применена к двум важным частным случаям, когда $\varphi(x) \equiv c > 0$, и когда φ представляет собой произведение «всевозможных» логарифмов. Это доказывает следующее утверждение.

Утверждение 3.3.1. *Пусть м.м.ф. φ удовлетворяет соотношению*

$$\varphi(x) \sim c \cdot \prod_{k=1}^{n} (\ln_{(k)} x)^{\mu_k}, \quad x \to \infty, \tag{3.12}$$

где $\ln_{(k)}$ обозначает k-кратный натуральный логарифм, $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$, а числа $\mu_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$ (случай $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$ не исключается). Тогда для φ выполнится соотношение (3.11).

Доказательство утверждения 3.3.1. Проверим условие (3.10) для заданной функции φ. Составим отношение:

$$\frac{\varphi(x/\varphi(x))}{\varphi(x)} \sim \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\ln_{(k)}(x/\varphi(x))}{\ln_{(k)} x} \right)^{\mu_k}, \quad x \to \infty.$$

Если $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$, то (3.11) очевидно выполнено. Пусть $\mu_k \neq 0$ при некотором $k \in \{1, \ldots, n\}$. Если $k = 1$, то, используя асимптотическое равенство $\varphi(x) = x^{o(1)}$, $x \to \infty$, получим

$$\frac{\ln(x/\varphi(x))}{\ln x} = \frac{\ln x - \ln \varphi(x)}{\ln x} = 1 + o(1), \quad x \to \infty.$$

Если $k > 1$ и известно, что $\ln_{(k-1)}(x/\varphi(x))/\ln_{(k-1)} x \to 1$, $x \to \infty$, то будем иметь

$$\frac{\ln_{(k)}(x/\varphi(x))}{\ln_{(k)} x} = \frac{\ln \ln_{(k-1)}(x/\varphi(x))}{\ln \ln_{(k-1)} x} = \frac{\ln \ln_{(k-1)} x + o(1)}{\ln \ln_{(k-1)} x} \to 1, \quad x \to \infty.$$

В итоге имеем выполнение (3.10), а значит для заданной φ выполнен критерий Бекеши, т.е. соотношение (3.11). $\square$

Приведем утверждение, связанное с обращением м.м.ф.

Лемма 3.3.6. *Пусть φ — неубывающая неограниченная положительная на $[T, \infty)$, $T \in \mathbb{R}$, медленно меняющаяся функция. Тогда функция φ^{-1}, определяемая по формуле*

$$\varphi^{-1}(y) := \inf\bigl\{x \in [T, \infty) : \varphi(x) \geqslant y\bigr\}, \quad y \geqslant \varphi(T),$$

является быстро меняющейся функцией на ∞.

Также для нас будет полезна следующая лемма.

Лемма 3.3.7. *Пусть м.м.ф. φ является локально интегрируемой на $[0, \infty)$. Тогда функция $\bar{\varphi}$, определяемая равенством $\bar{\varphi}(x) := \int_0^x (\varphi(t)/t) \mathrm{d}t$, является м.м.ф., и также выполнено $\bar{\varphi}(x)/\varphi(x) \to \infty$, $x \to \infty$.*

Функцию $\bar{\varphi}$ будем называть *функцией де Хаана* для φ. Доказательство леммы можно найти в [37] (см. с. 26–27).

3.3.2. Классические предельные теоремы для сумм независимых случайных величин

Пусть на некотором вероятностном пространстве с мерой $\mathbb{P}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ задана серия из независимых случайных величин:

$$Y_{n,1}, Y_{n,2}, \ldots, Y_{n,k_n}. \tag{3.13}$$

Рассматриваются следующие суммы:

$$\sum_{j=1}^{k_n} Y_{n,j} - a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.14}$$

где $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — некоторая последовательность из $\mathbb{R}$.

Под классическими предельными теоремами теории вероятностей принято понимать предельные теоремы о слабой сходимости сумм вида (3.14), при дополнительном *условии равномерной предельной малости*:

$$\forall x > 0 \quad \max_{1\leqslant j\leqslant k_n} \mathbb{P}\big(|Y_{n,j}| \geqslant x\big) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.15}$$

В настоящем пункте мы дадим сжатый обзор этих фундаментальных теорем и некоторых сопутствующих утверждений. При этом мы будем руководствоваться известными монографиями [8], [14] и [21].

Сходимость к безгранично делимым распределениям

Для полноты изложения мы начнем с определения безгранично делимого распределения (англ. *infinitely divisible law*).

Определение 3.3.4. *Распределение с характеристической функцией f называется безгранично делимым, если для любого числа $n \in \mathbb{N}$ существует характеристическая функция f_n такая, что $f(t) = (f_n(t))^n$.*

Пусть $\boldsymbol{I}$ обозначает все множество безгранично делимых законов. Как известно, характеристическая функция любого распределения из $\boldsymbol{I}$ может быть представлена с помощью *формулы Леви*:

$$f_{(\mu,\sigma^2,L)}(t) = \exp\left\{ i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{|x|>0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mathrm{d}L(x) \right\}, \tag{3.16}$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geqslant 0$, функция L (*спектральная функция Леви*) не убывает на каждом из интервалов $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to-\infty} L(x) = \lim_{x\to\infty} L(x) = 0,$$

$$\forall \tau > 0 \quad \int\limits_{0<|x|<\tau} x^2 \mathrm{d}L(x) < \infty.$$

Фундаментальным фактом теории безгранично делимых распределений является следующая теорема (см. [21]).

Теорема 3.3.1. *Пусть при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *заданы серии* (3.13) *из независимых случайных величин, удовлетворяющих* (3.15), *и последовательность* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *из* $\mathbb{R}$. *Множество распределений предельных для распределений сумм* (3.14) *совпадает с множеством безгранично делимых распределений.*

Сформулируем известную теорему о сходимости к заданному безгранично делимому распределению (см. [8], [14], [21]).

Теорема 3.3.2. *Пусть при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *заданы серии* (3.13) *из независимых случайных величин, удовлетворяющих* (3.15), *и последовательность* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *из* $\mathbb{R}$. *Для слабой сходимости распределений сумм* (3.14) *к безганично делимому распределению с представлением Леви* (3.16) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\text{(A)} \qquad \forall x \in \mathbf{C}(L) \quad \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{P}(Y_{n,j} < x) \cdot \mathbb{1}(x<0) - \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{P}(Y_{n,j} > x) \cdot \mathbb{1}(x>0) \to L(x);$$

$$\text{(B)} \qquad \forall \tau > 0 : \pm\tau \in \mathbf{C}(L) \quad a_n - \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{E}\, Y_{n,j}\mathbb{1}(|Y_{n,j}| \leqslant \tau) \to -\mu + \int\limits_{|x|\geqslant\tau} \frac{x\, \mathrm{d}L(x)}{1+x^2} - \int\limits_{0<|x|<\tau} \frac{x^3\, \mathrm{d}L(x)}{1+x^2}, \quad n \to \infty;$$

$$\text{(C)} \qquad \lim_{\tau\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{D}\, Y_{n,j}\mathbb{1}(|Y_{n,j}| \leqslant \tau) = \lim_{x\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbb{D}\, Y_{n,j}\mathbb{1}(|Y_{n,j}| \leqslant \tau) = \sigma^2.$$

В заключение данного подпункта мы приведем без доказательства одну полезную для нас лемму (см. [21], стр. 103).

Лемма 3.3.8. *Пусть при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *заданы серии* (3.13) *из независимых случайных величин, удовлетворяющих* (3.15). *Тогда*

$$\forall \tau > 0, \quad \forall p > 0 \quad \max_{j=1,\dots,k_n} \mathbb{E}\, |Y_{n,j}|^p \mathbb{1}(|Y_{n,j}| \leqslant \tau) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Сходимость к саморазложимым распределениям

Важный подкласс множества безгранично делимых законов составляют саморазложимые распределения (англ. *self-decomposable laws*).

Определение 3.3.5. *Распределение с характеристической функцией* f *саморазложимо, если для любого числа* $\alpha \in (0,1)$ *существует характеристическая функция* f_α, *такая, что для любого* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство* $f(t) = f(\alpha t) f_\alpha(t)$.

Все множество саморазложимых распределений называют классом $\boldsymbol{L}$. Как известно, $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{I}$ (см. [21]).

Заданное безгранично делимое распределение является саморазложимым в точности тогда, когда его спектральная функция Леви L обладает уже перечисленными свойствами и кроме того является непрерывной в любой точке $x \neq 0$, имеет левую и правую производные, а функция $x \mapsto xL'(x)$ не возрастает, здесь L' — левая либо правая производные (см. [8] и [21]).

Известно, что любая невырожденная функция распределения из класса $\boldsymbol{L}$ является абсолютно непрерывной (см. [11] и [95]) и унимодальной (окончательно доказано в [101], см. также [94]). Специальные аналитические свойства класса $\boldsymbol{L}$ систематически изучены в статье [81]. Подробнее о саморазложимых распределениях можно узнать в монографиях [8], [21], [80] и [82].

Приведем два полезных для нас свойства саморазложимых распределений.

Замечание 3.3.1. *Пусть $\mathcal{L}$ — невырожденная функция распределения из класса $\boldsymbol{L}$, тогда $\mathcal{L}$ строго возрастает на* $(\operatorname{lext} \mathcal{L}, \operatorname{rext} \mathcal{L})$.

Действительно, предположим, что существует интервал $(x_1, x_2) \subset (\operatorname{lext} \mathcal{L}, \operatorname{rext} \mathcal{L})$, на котором $\mathcal{L} \equiv c$, $c \in (0, 1)$. В силу унимодальности $\mathcal{L}$, существует такое число $m_{\mathcal{L}}$, что $\mathcal{L}$ выпукла (вниз) на $(-\infty, m_{\mathcal{L}})$ и вогнута на $(m_{\mathcal{L}}, \infty)$. Тогда либо $\mathcal{L}$ выпукла на $(\operatorname{lext} F, x_3)$ либо вогнута на $(x_4, \operatorname{rext} F)$, где x_3 и x_4 некоторые точки из (x_1, x_2). Следовательно, всегда на одном из интервалов $(\operatorname{lext} \mathcal{L}, x_1)$ или $(x_2, \operatorname{rext} \mathcal{L})$ имеем $\mathcal{L} \equiv c$, что с учетом определений величин $\operatorname{lext} \mathcal{L}$ и $\operatorname{rext} \mathcal{L}$ противоречит непрерывности $\mathcal{L}$.

Замечание 3.3.2. *Пусть $\mathcal{L} \in \boldsymbol{L}$, тогда $\mathcal{L}^{-1}$ непрерывна на* $(0, 1)$.

Если $\mathcal{L}$ вырождено, $\mathcal{L}(x) = \mathbb{1}(x \geqslant \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, то $\mathcal{L}^{-1}(p) = 0$ при всех $p \in (0, 1)$. Здесь функция $\mathcal{L}^{-1}$, очевидно, непрерывна. Если же распределение $\mathcal{L} \in \boldsymbol{L}$ невырождено, то непрерывность $\mathcal{L}^{-1}$ следует из предыдущего замечания 3.3.1 и леммы 2.1.2.

Важность класса $\boldsymbol{L}$ объясняется следующей теоремой.

Теорема 3.3.3. *Пусть $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность из независимых случайных величин, $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, $B = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — положительная последовательность. Пусть величины Y_j, $j \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условию*

$$\forall x > 0 \quad \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathbb{P}\big(|Y_j| \geqslant x B_n\big) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.17}$$

Тогда класс $\boldsymbol{L}$ совпадает со множеством функций распределения, которые могут быть предельными для сумм

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j - A_n}{B_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Замечание 3.3.3. *Если* (3.18) *при выполнении* (3.17) *слабо сходятся к невырожденному распределению из $\boldsymbol{L}$, то будем иметь $B_n \to \infty$, $B_{n+1}/B_n \to 1$, и $(A_{n+1} - A_n)/B_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство этого замечания можно найти в [21] (стр. 118–119).

Сходимость (3.18) к слабому пределу не нарушится, если $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ заменить на любую эквивалентную ей последовательность. Это следует из следующей леммы, с более общим утверждением.

Лемма 3.3.9. *Пусть $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — положительная последовательность. Пусть функции распределения G_n слабо сходятся к невырожденной функции распределения G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) Если $G_n(b_n x + a_n)$ слабо сходятся к невырожденной функции распределения H, то $H(x) = G(bx + a)$, где $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(ii) Если $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, то $G_n(b_n x + a_n)$ слабо сходится к $G(bx + a)$.

В формуле (3.18) мы имеем дело с частным случаем сумм вида (3.14) с равномерно предельно малыми слагаемыми, где при каждом $n \in \mathbb{N}$ принято $k_n := n$, $a_n := A_n/B_n$, и $Y_{n,j} := Y_j/B_n$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, критерий сходимости к заданному саморазложимому распределению примет следующий вид.

Теорема 3.3.4. *Пусть $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность из независимых случайных величин, $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, $B = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — положительная последовательность. Для слабой сходимости распределений сумм* (3.18) *к саморазложимому распределению с представлением Леви* (3.16) *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

$$\text{(A)} \qquad \forall x \neq 0 \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(Y_j < xB_n)\cdot \mathbb{1}(x<0) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(Y_j > xB_n)\cdot \mathbb{1}(x>0) \to L(x);$$

$$\text{(B)} \qquad \forall \tau > 0 \quad \frac{1}{B_n}\Big(A_n - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\, Y_j \mathbb{1}(|Y_j| \leqslant \tau B_n)\Big) \to -\mu + \int\limits_{|x|\geqslant\tau} \frac{x\,\mathrm{d}L(x)}{1+x^2} - \int\limits_{0<|x|<\tau} \frac{x^3\,\mathrm{d}L(x)}{1+x^2}, \quad n\to\infty;$$

$$\text{(C)} \qquad \lim_{\tau\to 0}\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{D}\, Y_j \mathbb{1}(|Y_j|\leqslant \tau B_n) = \lim_{\tau\to 0}\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{D}\, Y_j \mathbb{1}(|Y_j|\leqslant \tau B_n) = \sigma^2.$$

Сходимость к устойчивым распределениям

Начнем с определения устойчивого закона (англ. *stable law*).

Определение 3.3.6. *Распределение с характеристической функцией f является устойчивым, если для любых положительных чисел a_1 и a_2 найдутся числа $a_3 > 0$ и $b \in \mathbb{R}$, такие, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство $f(a_1 t)\, f(a_2 t) = e^{ibt} f(a_3 t)$.*

Семейство устойчивых распределений будем обозначать символом $\boldsymbol{S}$. Из данного определения и определения 3.3.5 несложно видеть, что каждое устойчивое распределение является саморазложимым, т.е. $\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{L}$.

Как хорошо известно, класс $\boldsymbol{S}$ состоит из вырожденных распределений, семейства нормальных распределений и негауссовских α-устойчивых распределений. Обратимся к рассмотрению невырожденных представителей класса $\boldsymbol{S}$ и заодно введем систему необходимых обозначений.

Нормальное распределение с математическим ожиданием $\mu \in \mathbb{R}$ и дисперсией $s^2 > 0$ мы будем обозначать стандартным образом:

$$\Phi_{\mu,s^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2s^2}} \mathrm{d}y. \tag{3.19}$$

При этом, как и принято, под Φ мы будем понимать стандартное нормальное распределение $\Phi_{0,1}$, т.е.

$$\Phi_{\mu,s^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{s}\right). \tag{3.20}$$

Характеристическая функция для Φ_{μ,s^2} в соответствии с формулой (3.16) может быть записана в виде $f_{(\mu,s^2,0)}$, где спектральная функция Леви тождественно равна нулю.

Для функций распределения устойчивых законов, не являющиеся вырожденными или нормальными, примем обозначение $S_{\alpha,r,\beta,\gamma}$, $\alpha \in (0,2)$, $r > 0$, $\beta \in [-1,1]$, $\gamma \in \mathbb{R}$, где параметризация осуществляется в соответствии с A-формой записи их характеристических функций (см. [43] с. 10):

$$f_{S_{\alpha,r,\beta,\gamma}}(t) := \exp\bigl\{i\gamma t - r|t|^{\alpha}(1 - i\beta\,\mathrm{sign}(t)\,\omega(t,\alpha))\bigr\}, \tag{3.21}$$

где

$$\omega(t,\alpha) := \begin{cases} \mathrm{tg}(\pi\alpha/2), & \alpha \in (0,1)\cup(1,2), \\ -(2/\pi)\ln|t|, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Из данной формулы несложно заметить:

$$S_{\alpha,1,\beta,0}\left(\frac{x-\gamma_1}{r^{1/\alpha}}\right) = S_{\alpha,r,\beta,\gamma}(x). \tag{3.22}$$

где $\gamma_1 := \gamma$ при $\alpha \in (0,1)\cup(1,2)$, и $\gamma_1 := \gamma + \frac{2r\beta}{\pi}\ln r$ при $\alpha = 1$.

Для таких распределений α называется *характеристическим показателем*. Числа γ и r называются параметрами *сдвига* и *масштаба*, а β — *асимметрией* устойчивого закона. Если $\beta = 1$ или $\beta = -1$, то говорят, что данное устойчивое распределение имеет соответственно *крайнюю правую* либо *крайнюю левую асимметрию*.

Характеристическая функция для $S_{\alpha,r,\beta,\gamma}$ по формуле (3.16) запишется как $f_{(\mu,0,L)}$ со следующей спектральной функцией Леви:

$$L(x) = c^-|x|^{-\alpha}\mathbb{1}(x<0) - c^+|x|^{-\alpha}\mathbb{1}(x>0), \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

и параметром сдвига $\mu = \gamma + \alpha(c^+ - c^-)I_\alpha$, где

$$I_\alpha = \begin{cases} \int\limits_{+0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^2)}, & \alpha \in (0,1); \\ \int\limits_{+0}^{\infty} \left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\sin x}{x^2}\right) \mathrm{d}x, & \alpha = 1; \\ \int\limits_{+0}^{\infty} \left(\frac{1}{x^\alpha(1+x^2)} - \frac{1}{x^\alpha}\right) \mathrm{d}x, & \alpha \in (1,2). \end{cases}$$

Коэффициенты $c^+ \geqslant 0$ и $c^- \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству $c^- + c^+ > 0$ и выражаются из равенств (см. [12]):

$$\beta = \frac{c^+ - c^-}{c^+ + c^-}, \qquad r = \frac{c^+ + c^-}{c_\alpha},$$

где

$$c_\alpha := \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}, & \alpha \in (0,1) \cup (1,2), \\ 2/\pi, & \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.23}$$

(3.24)

Примером негауссовского устойчивого распределения служит *закон Леви* $S_{1/2,1,1,0}$ (см. [13] и [87]), с функцией распределения $S_{1/2,1,1,0}(x) := 2\big(1 - \Phi\big(x^{-1/2}\big)\big)$.

Аналитические свойства негауссовских устойчивых законов подробно рассмотрены в монографии [12], предельные теоремы о сходимости к устойчивым законам — в книге [43], общий обзор основных свойств можно найти в классических монографиях [8], [14], а также в [16], [27] и [78], однако при этом необходимо учитывать статью [52].

Следующая теорема подчеркивает важное значение устойчивых распределений (см. [21], с. 124).

Теорема 3.3.5. *Пусть $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность из независимых одинаково распределенных случайных величин, $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, $B = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — положительная последовательность. Тогда класс $\boldsymbol{S}$ совпадает со множеством функций распределения, которые могут быть предельными для сумм*

$$\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - A_n}{B_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Сформулируем критерий сходимости к нормальному закону (см. [14]).

Теорема 3.3.6. *Пусть $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность из независимых одинаково распределенных случайных величин. Для существования таких последовательностей $A_n \in \mathbb{R}$ и $B_n > 0$, что распределения сумм $\big(\sum_{j=1}^n Y_j - A_n\big)/B_n$ слабо сходятся к стандартному нормальному распределению, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих двух условий:*

(*i*) $0 < \mathbb{D}\, Y_1 < \infty$,

(*ii*) $\mathbb{P}(|Y_1| > x) = x^{-2}\varphi(x)$,

где φ *— м.м.ф. при* $x \to \infty$. *Для констант* A_n, $n \in \mathbb{N}$ *можно принять* $A_n = n\,\mathbb{E}\,Y_1$, *а числа* B_n *выбирается из соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,\mathbb{D}\,Y_1 \mathbb{1}(|Y_1| < B_n)}{(B_n)^2} = 1.$$

В частности, при (*i*) *можно полагать* $B_n = \sqrt{n\mathbb{D}\,Y_1}$.

Приведем критерий сходимости к заданному негауссовскому α-устойчивому закону (см. [78] и [93]), который нетривиальным образом выводится из теоремы 3.3.4.

Теорема 3.3.7. *Пусть* $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из независимых одинаково распределенных случайных величин. Для существования таких последовательностей* $A_n \in \mathbb{R}$ *и* $B_n > 0$, *что распределения сумм* $\left(\sum_{j=1}^n Y_j - A_n\right)/B_n$ *слабо сходятся к устойчивому закону* $S_{\alpha,1,\beta,0}$, $\alpha \in (0, 2)$, *необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:*

1) $\mathbb{P}(|Y_1| > x) = x^{-\alpha}\varphi(x)$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathbb{P}(Y_1 > x)}{\mathbb{P}(|Y_1| > x)} = \dfrac{1+\beta}{2}$,

где φ *— м.м.ф. при* $x \to \infty$. *Константы* B_n *выбираются из соотношения*

$$\lim_{d\to\infty} n\,\mathbb{P}(|Y_1| > B_n) = c_\alpha,$$

а в качестве констант A_n *можно принять:*

$$A_n = \begin{cases} 0, & \alpha \in (0,1); \\ nB_n\,\mathbb{E}\,\sin(Y_1/B_n), & \alpha = 1; \\ n\,\mathbb{E}\,Y_1, & \alpha \in (1,2). \end{cases}$$

Теорема Дарлинга

Рассмотрим случай, когда общая функция распределения последовательности $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ из независимых одинаково распределенных случайных величин имеет медленно меняющийся хвост, т.е. $\mathbb{P}(|Y_1| > x) = \varphi(x)$, где φ — м.м.ф. на ∞. В такой ситуации, как известно (см. [27] стр. 382), последовательность распределений следующих сумм

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_k} Y_j - A_k}{B_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

не может иметь невырожденного слабого предела ни при каких $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Тем не менее, в этом случае справедлива *предельная теорема Дарлинга* (см. [47]). Сформулируем ее только для неотрицательных случайных величин.

Теорема 3.3.8. *Пусть $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность из независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин такая, что $\mathbb{P}(Y_1 > x) = \varphi(x)$, где φ — м.м.ф. на ∞. Тогда для любого $x > 0$*

$$\lim_{d\to\infty} \mathbb{P}\biggl(d\cdot\varphi\Bigl(\sum_{i=1}^{d} Y_i\Bigr) \leqslant x\biggr) = 1 - e^{-x}.$$

Возможная разрывность функции φ вызывает некоторые трудности, связанные, например, с ее обращением. Этой проблемы можно избежать, если использовать следующую версию теоремы Дарлинга, предложенную С. В. Нагаевым и В. И. Вахтелем в статье [20].

Теорема 3.3.9. *Пусть $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность из независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин такая, что $\mathbb{P}(Y_1 > x) = \varphi(x)$, где φ — м.м.ф. на ∞. Тогда для любого $x > 0$*

$$\lim_{d\to\infty} \mathbb{P}\biggl(d\cdot\tilde{\varphi}\Bigl(\sum_{i=1}^{d} Y_i\Bigr) \leqslant x\biggr) = 1 - e^{-x},$$

где $\tilde{\varphi}(y) := 1 - \mathbb{E}\, e^{-Y_1/y}$, $y > 0$.

В приведенной теореме функция $\tilde{\varphi}$ непрерывна, строго убывает и кроме того, согласно тауберовой теореме (см. [27], с. 503, формула (5.22)), на бесконечности она эквивалентна φ, т.е. $\tilde{\varphi}(x) \sim \varphi(x)$, $x \to \infty$.

Некоторые уточнения сходимости к нормальному закону

Рассмотрим $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность из независимых случайных величин с общей невырожденной функцией распределения. Если $0 < \mathbb{D}\, Y_1 < \infty$, то по теореме 3.3.6 суммы

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j - n\mathbb{E}\, Y_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\, Y_1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при $n \to \infty$ сходятся к стандартному нормальному распределению.

Как известно, при дополнительном предположении о конечности третьего момента величины Y_1 можно записать асимптотическое представление функции распределения приведенных сумм, уточняющее данную сходимость. Однако вид этого представления будет зависеть от наличия решетчатой структуры Y_1. Напомним, что случайная величина Y имеет *решетчатое распределение*, если $Y \in \{a + kb : k \in \mathbb{Z}\}$ с вероятностью 1, где $a \in \mathbb{R}$ и $b > 0$. В этом случае числа a и b называется соответственно сдвигом и шагом распределения Y. Максимально возможный шаг называется *максимальным шагом* распределения Y. Вероятностные распределения, не являющиеся решетчатыми, называются *нерешетчатыми распределениями*.

Для нерешетчатых распределений асимптотическое представление имеет следующий вид (Теорема 21 §7 Главы V в [21]).

Теорема 3.3.10. *Пусть* $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — *последовательность из независимых случайных величин, имеющих одинаковое невырожденное нерешетчатое распределение. Пусть* $\mathbb{E}\,|Y_1|^3 < \infty$. *Тогда*

$$\mathbb{P}\biggl(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mathbb{E}\,Y_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\,Y_1}} \leqslant x\biggr) = \Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{n^{1/2}} + o(n^{-1/2}), \quad n\to\infty,$$

равномерно относительно $x\in\mathbb{R}$. *Здесь функция* Q_1 *определена по формуле:*

$$Q_1(x) := \frac{\Phi'(x)(1-x^2)\mathbb{E}\,(Y_1-\mathbb{E}\,Y_1)^3}{6\,(\mathbb{D}\,Y_1)^{3/2}}. \tag{3.26}$$

В решетчатом случае имеет место следующий аналог теоремы 3.3.10 (Теорема 3 Главы IV в [48]).

Теорема 3.3.11. *Пусть* $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — *последовательность из независимых случайных величин, имеющих одинаковое невырожденное решетчатое распределение с некоторым максимальным шагом* $b>0$ *и сдвигом* $a\in\mathbb{R}$. *Пусть* $\mathbb{E}\,|Y_1|^3<\infty$. *Тогда*

$$\mathbb{P}\biggl(\frac{\sum_{j=1}^n Y_j - n\mathbb{E}\,Y_1}{\sqrt{n\mathbb{D}\,Y_1}} \leqslant x\biggr) = \Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{n^{1/2}} + \frac{S_n(x)\Phi'(x)}{n^{1/2}} + o(n^{-1/2}), \quad n\to\infty,$$

равномерно относительно $x\in\mathbb{R}$. *Здесь* $Q_1(x)$ *определяется по формуле* (3.26), *а функция* S_n — *следующими формулами:*

$$S_n(x) := \frac{b}{\sqrt{\mathbb{D}\,Y_1}}\,S\biggl(\frac{x\sqrt{n\mathbb{D}\,Y_1} - a_E n}{b}\biggr), \qquad S(x) := \lfloor x\rfloor - x + \frac{1}{2}, \qquad a_E := a - \mathbb{E}\,Y_1.$$

3.4. Логарифмические асимптотики сложности в однородных задачах

Теперь подробнее остановимся на однородных линейных тензорных задачах. Если $\lambda_1=\Lambda$, то очевидно для любых $\varepsilon\in(0,1)$ и $d\in\mathbb{N}$ имеем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)=1$. Рассмотрим невырожденный случай, когда $\lambda_1<\Lambda$. Здесь по определению $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ верна оценка:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{\lambda_{d,1}} \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \lambda_{d,m} \geqslant (1-\varepsilon^2)\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,1}}.$$

В силу того, что $\lambda_{d,1}=\lambda_1^d$, получим:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \geqslant (1-\varepsilon^2)\cdot\biggl(\frac{\Lambda}{\lambda_1}\biggr)^d.$$

Отсюда видно, что для каждой невырожденной однородной линейной тензорной задачи имеет место эффект «проклятия размерности». Тем не менее, ввиду ассоциированности данных задач с изучением аппроксимационных свойств тензорных случайных полей, асимптотический анализ однородного случая представляет определенный интерес.

Для однородных линейных тензорных задач ключевую роль играют устойчивые распределения, которые описаны в пункте 3.3.2. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3.4.1. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть невозрастающая функция $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Пусть для последовательности $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ выполнено:*

$$\forall\varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{3.27}$$

Тогда функция распределения $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\boldsymbol{S}$. Если функция $\mathcal{L}$ не является вырожденной или нормальной, то она принадлежит семейству $S_{\alpha,r,1,\gamma}$, $\alpha \in (0,2)$, $r > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, с крайней правой асимметрией.

Доказательство теоремы 3.4.1. Предположим, что выполнено условие (3.27). Тогда по теореме 2.1.2 оно эквивалентно условию

$$\forall x \in \mathbf{C}(\mathcal{L}) \quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathcal{L}(x), \tag{3.28}$$

где $F_d^{\langle A,B\rangle}(x)$, $d \in \mathbb{N}$, как и ранее, определяются по формуле (3.8) и являются, ввиду (3.9), функциями распределения центрированных и нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $U^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$. По теореме 3.3.5 в качестве слабого предела для $(F_d^{\langle A,B\rangle})_{d\in\mathbb{N}}$ могут выступать только функции распределения устойчивых законов.

Пусть функция распределения $\mathcal{L}$ не является вырожденной или нормальной. Тогда в силу неотрицательности величин $U^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$ (по определению (3.6)) коэффициент c^- спектральной функции Леви предельного закона $\mathcal{L}$ равен нулю (см. замечание на с. 30–31 в [12]). Это и дает крайнюю правую асимметрию для $\mathcal{L}$. $\square$

Сформулируем необходимые и достаточные условия для того, чтобы сложность в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имела асимптотическое поведение вида (3.27). Ввиду теоремы 3.4.1, не умаляя общности, мы ограничимся критериями, где функция q является квантилью некоторого невырожденного устойчивого распределения. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты мы рассмотрим условия на $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$, которые в них фигурируют.

Наиболее важный случай соответствует предположению о сходимости следующего ряда:

$$\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty. \tag{3.29}$$

Если это выполнено, то конечны следующие величины:

$$E \;:=\; \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \tag{3.30}$$

$$\sigma^2 \;:=\; \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left(\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| - E\right)^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda}. \tag{3.31}$$

Как мы увидим позже из примеров, условию (3.29) удовлетворяют широкий класс корреляционных операторов.

Рассматриваются также $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$, имеющие правильное изменение:

$$\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\right) = x^{-\alpha}\varphi(x), \qquad \alpha \geqslant 0, \tag{3.32}$$

где φ — м.м.ф. при $x \to \infty$. Если (3.32) выполнено при некотором $\alpha > 2$, то будет справедливым условие (3.29).

Итак, сформулируем следующий результат.

Теорема 3.4.2. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Чтобы для $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ была справедлива асимптотика:*

$$\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) = A_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty, \tag{3.33}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (3.29), *где $\sigma^2 > 0$, или условия* (3.32) *при $\alpha = 2$, а также выполнение условий*

$$B_d \sim B'_d, \qquad A_d = dE + o(B'_d), \quad d \to \infty, \tag{3.34}$$

где числа B'_d выбирается из соотношения

$$\lim_{d\to\infty} \frac{d}{(B'_d)^2}\left[\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda}\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} \geqslant e^{-B'_d}\right) - \left(\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| \frac{\lambda_i}{\Lambda}\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} \geqslant e^{-B'_d}\right)\right)^2\right] = 1.$$

В частности, при (3.29) *можно полагать $B'_d := \sigma d^{1/2}$.*

Данная теорема дает важное утверждение об асимптотике сложности в среднем $n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)$ для широкого класса однородных тензорных задач. Сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 3.4.3. *Пусть последовательность $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет условию* (3.29), *причем $\sigma^2 > 0$. Тогда справедлива асимптотика:*

$$\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) = Ed + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)\sigma d^{1/2} + o(d^{1/2}), \quad d \to \infty. \tag{3.35}$$

Данная теорема была получена М. А. Лифшицем и Е. В. Туляковой в работе [64]. Заметим, однако, что ее доказательство в [64] проведено только для последовательности $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ с единичной кратностью каждого элемента, в то время как здесь это ограничение отсутствует.

Проанализируем асимптотику последовательности $(B'_d)_{d\in\mathbb{N}}$ в теореме 3.4.2 в случае, когда имеет место (3.32) при $\alpha = 2$. Для любого $x \in \mathbb{R}$ обозначим

$$F(x) := \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \frac{\lambda_i}{\Lambda}\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} \geqslant e^{-x}\right), \qquad \overline{F}(x) := 1 - F(x), \tag{3.36}$$

при этом $F(x) = 0$, $x < 0$. В новых обозначениях условие (3.32) при $\alpha = 2$ перепишется в виде $\overline{F}(x) = x^{-2}\varphi(x)$, при этом невыполнение (3.29) означает, что

$$\int\limits_0^\infty x^2 \mathrm{d}F(x) = \infty.$$

Тогда по замечанию из [14] (с. 97 формула (2.6.14)) справедливо

$$\Big(\int\limits_0^z x\mathrm{d}F(x)\Big)^2 = o\Big(\int\limits_0^z x^2\mathrm{d}F(x)\Big), \quad z \to \infty.$$

Следовательно, соотношение для B'_d, $d \in \mathbb{N}$, из теоремы 3.4.2 эквивалентно следующему

$$\lim_{d\to\infty} \frac{d}{(B'_d)^2} \int\limits_0^{B'_d} x^2 \mathrm{d}F(x) = 1.$$

Далее рассмотрим интеграл:

$$I_d := \int\limits_0^{B'_d} x^2\mathrm{d}F(x) = -(B'_d)^2 \cdot \overline{F}(B'_d) + \int\limits_0^{B'_d} 2x\overline{F}(x)\mathrm{d}x = -\varphi(B'_d) + 2\int\limits_0^{B'_d} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Тогда по лемме 3.3.7 будем иметь

$$I_d = -\varphi(B'_d) + 2\bar{\varphi}(B'_d) \sim 2\bar{\varphi}(B'_d), \quad d \to \infty,$$

где м.м.ф. $\bar{\varphi}$ — функция де Хаана для φ.

Условие на B'_d, $d \in \mathbb{N}$, примет теперь вид $(B'_d)^2/(2\bar{\varphi}(B'_d)) \sim d$, $d \to \infty$. Перепишем последнее соотношение в виде $(B'_d)^2 \cdot ((2\bar{\varphi})^{-1/2})^2(B'_d) \sim d$, $d \to \infty$. Используя лемму 3.3.4, в итоге получим

$$B'_d \sim d^{1/2} \cdot ((2\bar{\varphi})^{-1/2})^*(d^{1/2}), \quad d \to \infty,$$

где $(\,\cdot\,)^*$ — сопряжение де Бруина, т.е. в частности, $B'_d = d^{1/2}\varphi_1(d)$, где φ_1 — м.м.ф.

Из приведенных рассмотрений можно сделать следующий вывод. При выполнении условия (3.29) или условия (3.32) с $\alpha = 2$ главным членом асимптотики (3.33) для величины $\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ является $A_d := Ed$, $E > 0$, что обеспечивает *экспоненциальный* рост сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, в то время как $B_d \sim B'_d$ с соответствующим остатком вносит в данную асимптотику *субэкспоненциальный* вклад.

Доказательство теоремы 3.4.2. Функция Φ непрерывна и строго возрастает на $\mathbb{R}$ (см. (3.19)). Поэтому условие (3.33) по теореме 2.1.4 равносильно:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \Phi(x). \tag{3.37}$$

где $F_d^{\langle A,B\rangle}(x)$ определяется формулой (3.8).

Построим независимые одинаково распределенные случайные величины $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ в соответствии с (3.6). Функции $F_d^{\langle A,B\rangle}$ с вероятностной точки зрения есть функции распределения центрированных и нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $U^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$ (см. формулу (3.9)). Заметим, что условие (3.29) в вероятностной интерпретации означает конечность второго момента для $U^{(1)}$:

$$\mathbb{E}\,(U^{(1)})^2 = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^2 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty.$$

В то же время, (3.32) при $\alpha = 2$ можно записать в виде $\mathbb{P}(U^{(1)} > x) = x^{-2}\varphi(x)$. При этом, в силу $U^{(1)} \geqslant 0$, $j \in \mathbb{N}$, имеем $\mathbb{P}(U^{(1)} \leqslant -x) = 0$ для любого $x > 0$. Следовательно, по теореме 3.3.6 выполнение условия (3.29) или (3.32) при $\alpha = 2$ достаточно для сходимости (учитывая, что $E = \mathbb{E}\,U^{(1)} < \infty$, см. (3.6)):

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} - dE}{B'_d} \leqslant x\right) \to \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.38}$$

где числа B'_d, $d \in \mathbb{N}$ выбраны как в условии доказываемой теоремы. Далее заметим,

$$F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} - A_d}{B_d} \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} - dE}{B'_d} \leqslant \frac{B_d}{B'_d}\,x + \frac{A_d - dE}{B'_d}\right).$$

Тогда в силу условий на A_d и B_d, используя утверждение (ii) леммы 3.3.9, получим (3.37).

Пусть теперь исходно справедлива сходимость (3.37). Тогда по теореме 3.3.6 выполнено либо условие (3.29), либо (3.32) при $\alpha = 2$. При этом также имеет место (3.38). Следовательно, по утверждению (i) леммы 3.3.9 будем иметь (3.34). □

Следующая теорема дает логарифмическую асимптотику $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ для собственных чисел с правильным изменением (3.32) при $\alpha \in (0, 2)$.

Теорема 3.4.4. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Чтобы для $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$, при заданном $\alpha \in (0, 2)$ была справедлива асимптотика:*

$$\forall\varepsilon \in (0, 1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + S^{-1}_{\alpha,1,1,0}(1 - \varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty, \tag{3.39}$$

необходимо и достаточно выполнение условия (3.32) *при заданном α, а также выполнение условий*

$$B_d \sim B'_d, \qquad A_d = A'_d + o(B'_d), \quad d \to \infty. \tag{3.40}$$

Числа B'_d выбирается из соотношения

$$\lim_{d\to\infty}\left(d \cdot \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \frac{\lambda_i}{\Lambda}\, \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-B'_d}\right)\right) = c_\alpha, \tag{3.41}$$

где константы c_α определяется по формуле (3.23). *Константы $A'_d = 0$ при $\alpha \in (0, 1)$, $A'_d = dE$ при $\alpha \in (1, 2)$, а при $\alpha = 1$*

$$A'_d = dB'_d \cdot \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \sin\left(\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| / B'_d\right) \frac{\lambda_i}{\Lambda}. \tag{3.42}$$

Выясним характер изменения констант B'_d при $\alpha \in (0,2)$ и констант A'_d, $d \in \mathbb{N}$, в случае $\alpha = 1$ в приведенной теореме.

Пусть выполнено условие (3.32) при некотором $\alpha \in (0,2)$. Тогда асимптотическое соотношение (3.41) для $(B'_d)_{d\in\mathbb{N}}$ можно переписать в виде $(B'_d)^\alpha \cdot \psi_\alpha(B'_d)^\alpha \sim d$, $d \to \infty$, где $\psi_\alpha(x) := (c_\alpha/\varphi(x))^{1/\alpha}$, $x > 0$ — вспомогательная м.м.ф. Используя лемму 3.3.4, получим

$$B'_d \sim d^{1/\alpha} \cdot \psi^*_\alpha(d^{1/\alpha}), \quad d \to \infty, \tag{3.43}$$

где м.м.ф. ψ^*_α — сопряжение де Бруина для ψ_α. Заметим

$$\frac{\psi_\alpha(x/\psi_\alpha(x))}{\psi_\alpha(x)} = \frac{\varphi(x)^{1/\alpha}}{\varphi(x/\psi_\alpha(x))^{1/\alpha}} \sim \frac{\varphi(x)^{1/\alpha}}{\varphi(x\varphi(x)^{1/\alpha})^{1/\alpha}}, \quad x \to \infty.$$

Поэтому, если предположить

$$\frac{\varphi(x)^{1/\alpha}}{\varphi(x\varphi(x)^{1/\alpha})^{1/\alpha}} \to 1, \quad x \to \infty, \tag{3.44}$$

то по критерию Бекеши будем иметь $\psi^*_\alpha(x) \sim 1/\psi_\alpha(x)$, $x \to \infty$, и, как следствие, получим

$$B'_d \sim d^{1/\alpha} \cdot \left(\frac{\varphi(d^{1/\alpha})}{c_\alpha}\right)^{1/\alpha}, \quad d \to \infty, \tag{3.45}$$

где множитель после $d^{1/\alpha}$ является м.м.ф.

Рассмотрим поведение A'_d при $d \to \infty$ в теореме (3.4.4), когда $\alpha = 1$. Будем пользоваться обозначениями (3.36). Здесь мы имеем $\overline{F}(x) = x^{-1}\varphi(x)$, $x \geqslant 0$. Представим формулу (3.42) в следующем виде

$$A'_d = dB'_d \int\limits_0^\infty \sin(x/B'_d)\mathrm{d}F(x).$$

Рассмотрим интеграл:

$$I_d := \int\limits_0^\infty \sin(x/B'_d)\mathrm{d}F(x) = \int\limits_0^\infty \sin y\,\mathrm{d}F(yB'_d) = \int\limits_0^\infty \overline{F}(yB'_d)\cos y\mathrm{d}y = I_{d,1} + I_{d,2}.$$

где

$$I_{d,1} := \int\limits_0^\infty \overline{F}(yB'_d)g(y)\mathrm{d}y, \qquad I_{d,2} := \int\limits_0^1 \overline{F}(yB'_d)\mathrm{d}y.$$

Здесь функция g имеет вид

$$g(y) := \begin{cases} \cos y - 1, & y \in [0,1], \\ \cos y, & y > 1. \end{cases}$$

Для $I_{d,1}$ верна асимптотика

$$I_{d,1} = \int\limits_0^\infty \overline{F}(yB'_d)g(y)\mathrm{d}y \sim \overline{F}(B'_d)\int\limits_0^\infty \frac{g(y)}{y}\mathrm{d}y, \quad d \to \infty,$$

где обоснование эквивалентности во избежание громоздких технических подробностей опущено, оно приведено в книге [4] (с. 91–92). Значение последнего интеграла может быть найдено в [9] (интеграл 3.782, с. 446):

$$\int\limits_0^\infty \frac{g(y)}{y}\,\mathrm{d}y = -\mathbf{c},$$

где $\mathbf{c} \approx 0,5772$ — константа Эйлера. В итоге получаем $I_{d,1} \sim -\mathbf{c}\cdot\dfrac{\varphi(B'_d)}{B'_d}$ при $d\to\infty$.

Для $I_{d,2}$ будем иметь

$$I_{d,2} = \frac{1}{B'_d}\int\limits_0^{B'_d} \overline{F}(x)\mathrm{d}x = \frac{\bar{\varphi}(B'_d)}{B'_d},$$

где м.м.ф. $\bar{\varphi}$ — функция де Хаана для φ.

В итоге для A'_d имеем

$$A'_d = dB'_d\cdot I_d = dB'_d(I_{d,1}+I_{d,2}) = d\cdot\bar{\varphi}(B'_d) - \mathbf{c}\cdot d\cdot\varphi(B'_d) + o(d\cdot\varphi(B'_d)),\quad d\to\infty.$$

В силу того, что константы B'_d для $\alpha=1$ выбираются из соотношения

$$\lim_{d\to\infty}\frac{d\,\varphi(B'_d)}{B'_d} = c_1 = 2/\pi,$$

будем иметь

$$A'_d = d\,\bar{\varphi}(B'_d) - \mathbf{c}\cdot\frac{2}{\pi}\,B'_d + o(B'_d),\quad d\to\infty, \tag{3.46}$$

где

$$d\,\bar{\varphi}(B'_d) = d\,\varphi(B'_d)\cdot\frac{\bar{\varphi}(B'_d)}{\varphi(B'_d)} \sim B'_d\cdot\frac{2\,\bar{\varphi}(B'_d)}{\pi\,\varphi(B'_d)},\quad d\to\infty. \tag{3.47}$$

По лемме 3.3.7 верно $\bar{\varphi}(B'_d)/\varphi(B'_d)\to\infty$, $d\to\infty$, из чего следует $B'_d = o(A'_d)$, $d\to\infty$.

Теперь мы можем сделать анализ роста $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$. При выполнении условия (3.32) с $\alpha\in(0,1)$ главным членом асимптотики (3.39) для величины $\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ является $S^{-1}_{\alpha,1,1,0}(1-\varepsilon^2)B_d$, где $B_d\sim B'_d$, $d\to\infty$. Наличие множителя $d^{1/\alpha}$ в формулах (3.43) и (3.45) для констант B_d обеспечивает *надэкспоненциальный* рост сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$. В случае $\alpha\in[1,2)$, главным членом в асимптотике (3.39) будет являться $A_d = A'_d + o(B'_d)$, причем при $\alpha=1$ оно еще может (см. (3.46)) давать надэкспоненциальный рост. Для $\alpha\in(1,2)$ сложность $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ возрастает при $d\to\infty$ экспоненциально за счет $A_d := Ed$ с субэкспоненциальной поправкой содержащей множители B_d.

Доказательство теоремы 3.4.4. Функция распределения $S_{\alpha,1,1,0}\in\boldsymbol{L}$, а значит, как отмечалось в пункте 3.3.2, она абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ и строго возрастает на промежутке $(\operatorname{lext} S_{\alpha,1,1,0}, \operatorname{rext} S_{\alpha,1,1,0})$. Тогда условие (3.39) по теореме 2.1.2 равносильно сходимости:

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = S_{\alpha,1,1,0}(x), \tag{3.48}$$

где $F_d^{\langle A,B\rangle}(x)$ определяется формулой (3.8).

Пусть, как и ранее, $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением (3.6). В соответствии с формулой (3.9) функции $F_d^{\langle A,B\rangle}$ суть функции распределения центрированных и нормированных сумм случайных величин $U^{(j)}$, $j\in\mathbb{N}$.

Условие (3.32) при $\alpha\in(0,2)$ можно записать в виде $\mathbb{P}(U^{(1)}>x)=x^{-\alpha}\varphi(x)$. Заметим, что $\mathbb{P}(U^{(1)}\leqslant -x)=0$ для любого $x>0$, т.к. $U^{(j)}\geqslant 0$, $j\in\mathbb{N}$. Следовательно, по теореме 3.3.7 выполнение условия (3.32) при заданном α достаточно для слабой сходимости:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^d U^{(j)}-A'_d}{B'_d}\leqslant x\right)\to S_{\alpha,1,1,0}(x),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{3.49}$$

где числа A'_d и B'_d, $d\in\mathbb{N}$ такие же, как и в условии доказываемой теоремы.

Далее заметим,

$$F_d^{\langle A,B\rangle}(x)=\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^d U^{(j)}-A_d}{B_d}\leqslant x\right)=\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^d U^{(j)}-A'_d}{B'_d}\leqslant \frac{B_d}{B'_d}\,x+\frac{A_d-A'_d}{B'_d}\right).$$

Тогда в силу условий на A_d и B_d, используя утверждение (ii) леммы 3.3.9, получим (3.48).

Пусть сходимость (3.48) верна при некотором $\alpha\in(0,2)$. Тогда по теореме 3.3.7 при этом α выполнено условие (3.32). Также имеет место (3.49). Следовательно, по утверждению (i) леммы 3.3.9 будем иметь (3.40). $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда условие (3.32) выполнено при $\alpha=0$. Следующая теорема характеризует поведение аппроксимационного порога $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d\to\infty$ и фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$.

Теорема 3.4.5. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет условию* (3.32) *при $\alpha=0$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,1)$ будем иметь*

$$\lim_{d\to\infty} d\,\varphi\bigl(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\bigr)=\lim_{d\to\infty} d\,\varphi\Bigl(\bigl|\ln\tfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\bigr|\Bigr)=-\ln(1-\varepsilon^2). \tag{3.50}$$

Следствие 3.4.1. *При любом $\varepsilon\in(0,1)$ величины $\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $\bigl|\ln\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\bigr|$ являются быстро меняющимися функциями на ∞ по параметру $d\in\mathbb{N}$.*

Доказательство теоремы 3.4.5 Сначала докажем сходимость:

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad \lim_{d\to\infty} d\,\varphi\Bigl(\bigl|\ln\tfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\bigr|\Bigr)=-\ln(1-\varepsilon^2). \tag{3.51}$$

Определим независимые случайные величины $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ по формуле (3.6). Выполнение условия (3.32) при $\alpha=0$ с некоторой м.м.ф. φ в вероятностной интерпретации есть не что иное, как медленное изменение на бесконечности правого хвоста распределения величины $U^{(1)}$:

$$\mathbb{P}(U^{(1)}>x)=\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}\frac{\lambda_i}{\Lambda}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}<e^{-x}\right)=\varphi(x),\quad x>0.$$

Введем функцию $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(x) := 1 - \mathbb{E}\,\exp\{-U^{(1)}/x\} = 1 - \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}\left(\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right)^{1+1/x}, \quad x > 0. \tag{3.52}$$

По замечанию к теореме 3.3.9 функция $\tilde{\varphi}$ непрерывна, строго убывает и удовлетворяет соотношению:

$$\tilde{\varphi}(x) \sim \varphi(x), \quad x \to \infty. \tag{3.53}$$

Также определим следующим образом функции F_d, $d \in \mathbb{N}$:

$$F_d(x) := \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\,\mathbb{1}\left(-d\cdot\tilde{\varphi}\left(\left|\ln\tfrac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right|\right) \leqslant x\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.54}$$

По лемме 3.2.1 каждая F_d, $d \in \mathbb{N}$, является функцией распределения:

$$F_d(x) = \mathbb{P}\left(-d\cdot\tilde{\varphi}\Big(\sum_{j=1}^{d} U^{(j)}\Big) \leqslant x\right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.55}$$

Тогда в соответствии с теоремой 3.3.9 для любого $x < 0$ будем иметь:

$$F_d(x) = 1 - \mathbb{P}\left(d\,\tilde{\varphi}\Big(\sum_{j=1}^{d} U^{(j)}\Big) < -x\right) \to e^x, \quad d \to \infty.$$

То есть F_d слабо сходится к экспоненциальному закону на отрицательной полуоси. Из слабой сходимости вытекает (см., например, [33] с. 484–485) сходимость соответствующих квантильных функций $F_d^{-1}(q) \to \ln q$, $d \to \infty$, для любой точки $q \in (0,1)$. В частности:

$$\lim_{d\to\infty} F_d^{-1}(1-\varepsilon^2) = \ln(1-\varepsilon^2).$$

Теперь заметим, что при любых фиксированных $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$ верно:

$$F_d^{-1}(1-\varepsilon^2) = -d\cdot\tilde{\varphi}\left(\left|\ln\tfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right|\right),$$

где $F^{-1}(p) := \min\big\{x \in \mathbb{R} : F_d(x) \geqslant p\big\}$, $p \in (0,1)$. Действительно, по определению $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned}
d\cdot\tilde{\varphi}\left(\left|\ln\tfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right|\right) &= d\cdot\tilde{\varphi}\left(\min\Big\{x\in\mathbb{R} : \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\,\mathbb{1}\left(\left|\ln\tfrac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right| \leqslant x\right) \geqslant 1-\varepsilon^2\Big\}\right) \\
&= d\cdot\tilde{\varphi}\left(\min\Big\{x\in\mathbb{R} : \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\,\mathbb{1}\left(d\cdot\tilde{\varphi}\left(\left|\ln\tfrac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right|\right) \geqslant d\cdot\tilde{\varphi}(x)\right) \geqslant 1-\varepsilon^2\Big\}\right) \\
&= -\min\left\{y\in\mathbb{R} : F_d(y) \geqslant 1-\varepsilon^2\right\} \\
&= -F_d^{-1}(1-\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

В итоге для любого $\varepsilon \in (0,1)$ верно предельное соотношение:

$$\lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\left(\left|\ln\tfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right|\right) = -\ln(1-\varepsilon^2).$$

В силу строгого убывания $\tilde{\varphi}$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ справедливо $\left|\ln \frac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right| \to \infty$, $d \to \infty$. Из эквивалентности (3.53) вытекает (3.51).

Докажем оставшееся равенство в (3.50). За счет убывания функции $\tilde{\varphi}$ и формулы (2.10) будем иметь

$$\lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\big(\ln n_d^{\rm avg}(\varepsilon)\big) \geqslant \lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\Big(\left|\ln \tfrac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right|\Big) = -\ln(1-\varepsilon^2).$$

Пусть h сколь угодно малое положительное число. Зафиксируем $c_h \in (1, 1/\varepsilon)$ такое, что $\ln(1-c_h^2\varepsilon^2)/\ln(1-\varepsilon^2) < e^h$. Далее воспользуемся неравенством (2.14) при $c_2 = c_h$, стремлением $\left|\ln \frac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right| \to \infty$, $d \to \infty$, и медленным изменением $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\big(\ln n_d^{\rm avg}(\varepsilon)\big) &\leqslant \lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\Big(\left|\ln \tfrac{\lambda_d^{\rm avg}(c_h\varepsilon)}{\Lambda^d}\right| + \ln\big((c_h^2-1)\varepsilon^2/2\big)\Big)\\
&= \lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\Big(\left|\ln \tfrac{\lambda_d^{\rm avg}(c_h\varepsilon)}{\Lambda^d}\right|\Big)\\
&= -\ln(1-c_h^2\varepsilon^2)\\
&\leqslant -\ln(1-\varepsilon^2)e^h.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем $\lim\limits_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\big(\ln n_d^{\rm avg}(\varepsilon)\big) = -\ln(1-\varepsilon^2)$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$. С учетом эквивалентного поведения функций φ и $\tilde{\varphi}$ на ∞ получаем оставшееся равенство в (3.50). $\square$

Доказательство следствия 3.4.1 Мы сделаем проверку данного следствия только для $\ln n_d^{\rm avg}(\varepsilon)$, для $\left|\ln \frac{\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right|$ это делается совершенно аналогично. Докажем от противного. Зафиксируем произвольное число $c \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Предположим, что для некоторой подпоследовательности $(d_i)_{i\in\mathbb{N}}$, стремящейся к ∞ при $i \to \infty$, выполнено

$$\frac{\ln n_{cd_i}^{\rm avg}(\varepsilon)}{\ln n_{d_i}^{\rm avg}(\varepsilon)} \to p \in (0,\infty). \tag{3.56}$$

Тогда, с одной стороны, по теореме 3.4.5 имеем

$$\lim_{i\to\infty} cd_i\,\varphi\big(\ln n_{cd_i}^{\rm avg}(\varepsilon)\big) = -\ln(1-\varepsilon^2).$$

С другой стороны, φ — м.м.ф., что с учетом (3.56) дает

$$\lim_{i\to\infty} cd_i\,\varphi\big(n_{cd_i}^{\rm avg}(\varepsilon)\big) = \lim_{i\to\infty} cd_i\,\varphi\big(\ln n_{d_i}^{\rm avg}(\varepsilon)\big) = -c\ln(1-\varepsilon^2).$$

Полученное противоречие приводит к справедливости следствия 3.4.1. $\square$

3.5. Точные асимптотические представления сложности в однородных задачах

В предыдущем пункте получены логарифмические асимптотики при $d \to \infty$ для спектрального порога $\lambda_d^{\rm avg}(\varepsilon)$ и сложности аппроксимации в среднем $n_d^{\rm avg}(\varepsilon)$. Представляет естественный интерес задача уточнения этих асимптотик.

Рассмотрим однородную линейную тензорную задачу аппроксимации. Если предположить сходимость следующего ряда для $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$:

$$\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^3 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty, \tag{3.57}$$

то становится возможным получение точных асимптотик.

Будем говорить, что последовательность $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ является *экспоненциальной*, если найдутся такие числа a и $b > 0$, что выполнено

$$\left\{\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| : i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}\right\} \subseteq \{a + b\nu : \nu \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.58}$$

Параметры a и b будем называть соответственно *сдвигом* и *шагом* экспоненциальной последовательности $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$. Всегда будем полагать, что a и b выбраны так, что шаг b максимально возможный. Экспоненциальная последовательность $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$, хотя по структуре и схожа с простой геометрической прогрессией, тем не менее, каждый ее элемент λ_i может иметь произвольную конечную кратность.

Если последовательность $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ не удовлетворяет условию (3.58) ни при каких числах a и $b > 0$, то будем говорить, что она не является экспоненциальной или является *неэкспоненциальной.*

Асимптотический анализ спектральных характеристик $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ для экспоненциальных и неэкспоненциальных последовательностей собственных чисел существенно различается, поэтому мы будем отдельно рассматривать каждый из этих случаев.

3.5.1. Неэкспоненциальный случай

Уточненная асимптотика для спектрального порога $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$ и фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3.5.1. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет условию (3.57), причем $\sigma^2 > 0$, и является неэкспоненциальной. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ будем иметь*

$$\left|\ln\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right| = Ed + q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma + o(1), \quad d \to \infty,$$

где

$$q_{\varepsilon,1} := \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2), \qquad q_{\varepsilon,2} := \frac{q_{\varepsilon,1}^2 - 1}{6\sigma^3} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left(\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| - E\right)^3 \frac{\lambda_i}{\Lambda}. \tag{3.59}$$

Доказательство теоремы 3.5.1. Выбираем произвольный порог ошибки $\varepsilon \in (0, 1)$. Для краткости введем обозначение

$$\theta_d(\varepsilon) := \frac{\left|\ln\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right| - Ed}{\sigma d^{1/2}}. \tag{3.60}$$

Также примем

$$F_d(x) := \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\, \mathbb{1}\left(\frac{|\ln(\lambda_{d,m}/\Lambda^d)| - dE}{\sigma d^{1/2}} \leqslant x\right). \tag{3.61}$$

Используя лемму 3.2.1, замечаем

$$F_d(x) = \mathbb{P}\biggl(\frac{\sum_{j=1}^d U^{(j)} - dE}{\sigma d^{1/2}} \leqslant x\biggr), \tag{3.62}$$

где $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением (3.4). Тот факт, что $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ не является экспоненциальной, означает, что $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ по своей дискретной структуре являются *нерешетчатыми* случайными величинами. В свою очередь, условие (3.57) означает для них конечность третьего абсолютного момента:

$$\mathbb{E}\,|U^{(1)}|^3 = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right|^3 \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty. \tag{3.63}$$

Тогда по теореме 3.3.10 функция F_d допускает следующее асимптотическое представление:

$$F_d(x) = \Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty, \tag{3.64}$$

равномерно относительно $x\in\mathbb{R}$. Здесь

$$Q_1(x) := \Phi'(x)\,\frac{1-x^2}{6\sigma^3}\,\mathbb{E}\,(U^{(1)}-E)^3, \tag{3.65}$$

где Φ' — плотность стандартного нормального закона.

Условие (3.57) влечет (3.29). По предположению $\sigma^2>0$, тогда, пользуясь теоремой 3.4.3 и теоремой 2.1.4, будем иметь $\lim\limits_{d\to\infty}\theta_d(\varepsilon) = q_{\varepsilon,1}$, где обозначено $q_{\varepsilon,1} := \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$.

Далее, для любого фиксированного $c\in\mathbb{R}$, применяя (3.64), запишем при $d\to\infty$

$$\begin{aligned} F_d\left(q_{\varepsilon,1}+\frac{c}{d^{1/2}}\right) &= \Phi\left(q_{\varepsilon,1}+\frac{c}{d^{1/2}}\right) + \frac{Q_1\left(q_{\varepsilon,1}+\frac{c}{d^{1/2}}\right)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) \\ &= \Phi(q_{\varepsilon,1}) + \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})c}{d^{1/2}} + \frac{Q_1(q_{\varepsilon,1})}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}). \end{aligned}$$

Пусть

$$q_{\varepsilon,2} := -\frac{Q_1(q_{\varepsilon,1})}{\Phi'(q_{\varepsilon,1})} = \frac{q_{\varepsilon,1}^2-1}{6\sigma^3}\,\mathbb{E}\,(U^{(1)}-E)^3 = \frac{q_{\varepsilon,1}^2-1}{6\sigma^3}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}\left(\left|\ln\frac{\lambda_i}{\Lambda}\right| - E\right)^3\frac{\lambda_i}{\Lambda}. \tag{3.66}$$

Фиксируем произвольно малое число $h\neq 0$ из окрестности нуля. Полагая $c = q_{\varepsilon,2}+h$, при больших d получим

$$F_d\biggl(q_{\varepsilon,1}+\frac{q_{\varepsilon,2}+h}{d^{1/2}}\biggr) - \Phi(q_{\varepsilon,1}) = \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})h}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}). \tag{3.67}$$

Отметим, что из определения $\theta_d(\varepsilon)$ и формулы (2.7) вытекает

$$\theta_d(\varepsilon) = \min\left\{x\in\mathbb{R} : F_d(x) \geqslant \Phi(q_{\varepsilon,1}) = 1-\varepsilon^2\right\}. \tag{3.68}$$

Тогда при достаточно больших d будем иметь

$$q_{\varepsilon,1} + \frac{q_{\varepsilon,2}-|h|}{d^{1/2}} < \theta_d(\varepsilon) \leqslant q_{\varepsilon,1} + \frac{q_{\varepsilon,2}+|h|}{d^{1/2}}.$$

В итоге получаем искомую асимптотику

$$\theta_d(\varepsilon) = q_{\varepsilon,1} + \frac{q_{\varepsilon,2}}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty. \quad \square \tag{3.69}$$

Докажем следующую полезную вспомогательную лемму.

Лемма 3.5.1. *Пусть* $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ *удовлетворяет условию* (3.57), *причем* $\sigma^2 > 0$, *и является неэкспоненциальной. Тогда для любой последовательности* $(u_d)_{d\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющей условию*

$$\lim_{d\to\infty} \frac{|\ln u_d| - Ed}{\sigma d^{1/2}} = q \in \mathbb{R},$$

при любом $\gamma > 0$ *справедливо*

$$u_d^{\gamma} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1-\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} \geqslant u_d\right) \;\sim\; \frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty, \tag{3.70}$$

$$u_d^{-\gamma} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1+\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} < u_d\right) \;\sim\; \frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty. \tag{3.71}$$

Доказательство леммы 3.5.1. Докажем формулу (3.70). Сначала заметим

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{+}_{d,\gamma} \;&:=\; \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1-\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} \geqslant u_d\right) \\
&=\; \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}} e^{\gamma|\ln(\lambda_{d,m}/\Lambda^d)|} \cdot \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\, \mathbb{1}\left(\left|\ln \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right| \leqslant |\ln u_d|\right).
\end{aligned}$$

С помощью леммы 3.2.1 запишем последнее выражение в терминах случайных величин $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{+}_{d,\gamma} \;&=\; \mathbb{E}\left(\exp\Big\{\gamma \sum_{j=1}^{d} U^{(j)}\Big\} \mathbb{1}\Big(\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} \leqslant |\ln u_d|\Big)\right) \\
&=\; u_d^{-\gamma}\, \mathbb{E}\, \exp\Big\{\gamma\Big(\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} - |\ln u_d|\Big)\Big\} \mathbb{1}\Big(\sum_{j=1}^{d} U^{(j)} \leqslant |\ln u_d|\Big)
\end{aligned}$$

Пусть F_d, $d \in \mathbb{N}$, определены по формуле (3.61). Введем обозначение:

$$\theta_d := \frac{|\ln u_d| - Ed}{\sigma d^{1/2}}. \tag{3.72}$$

Тогда можно записать:

$$\mathcal{T}^{+}_{d,\gamma} = u_d^{-\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\, \mathrm{d}F_d(x).$$

Представляя F_d равномерным разложением (3.64), получим при $d \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
u_d^\gamma \mathcal{T}_{d,\gamma}^+ &= \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}\left(\Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{d^{1/2}}\right) + o(d^{-1/2}), \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} \dots \,\mathrm{d}\Phi(x) + \frac{1}{d^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} \dots \,\mathrm{d}Q_1(x) + o(d^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Как несложно видеть (см. формулу (3.65)), производная функции Q_1 существует и ограничена на $\mathbb{R}$, поэтому в последнем выражении вторым интегралом можно пренебречь:

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{1}{d^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}Q_1(x) \right| &\leqslant \frac{1}{d^{1/2}} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |Q_1'(x)| \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\gamma\sigma d} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}} |Q_1'(x)| \\
&= o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.
\end{aligned}
$$

Далее рассмотрим интеграл:

$$
\int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}\Phi(x) = \int\limits_{\theta_d - \frac{1}{d^{1/4}}}^{\theta_d} \dots \,\mathrm{d}\Phi(x) + \int\limits_{-\infty}^{\theta_d - \frac{1}{d^{1/4}}} \dots \,\mathrm{d}\Phi(x). \tag{3.73}
$$

Оценим второе слагаемое:

$$
\int\limits_{-\infty}^{\theta_d - \frac{1}{d^{1/4}}} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}\Phi(x) \leqslant e^{-\gamma\sigma d^{1/4}} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d - \frac{1}{d^{1/4}}} \mathrm{d}\Phi(x) = o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.
$$

Найдем асимптотику первого слагаемого в (3.73), используя ограниченность $\Phi'(x)$ на $\mathbb{R}$ и теорему о среднем значении определенного интеграла:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\theta_d - \frac{1}{d^{1/4}}}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}\Phi(x) &= \Phi'(\zeta_d) \int\limits_{\theta_d - \frac{1}{d^{1/4}}}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\Phi'(\zeta_d)}{\gamma\sigma d^{1/2}} \left(1 - e^{-\gamma\sigma d^{1/4}}\right),
\end{aligned}
$$

где $\zeta_d \in \left[\theta_d, \theta_d - d^{-1/4}\right]$, т.е. $\zeta_d \to q$, $d \to \infty$. Следовательно, имеем

$$
\int\limits_{\theta_d - \frac{1}{d^{1/4}}}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}\Phi(x) = \frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad , d \to \infty.
$$

В итоге получена следующая асимптотика:

$$
u_d^\gamma \mathcal{T}_{d,\gamma}^+ \sim \frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty.
$$

Теперь приступим к доказательству формулы (3.71). Замечаем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^-_{d,\gamma} \quad &:= \quad \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1+\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} < u_d\right) \\
&= \quad \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}} e^{-\gamma|\ln(\lambda_{d,m}/\Lambda^d)|}\cdot\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\,\mathbb{1}\left(\left|\ln\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right| > |\ln u_d|\right).
\end{aligned}
$$

С помощью леммы 3.2.1 запишем последнее выражение на вероятностном языке с помощью случайных величин $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}^-_{d,\gamma} \quad &= \quad \mathbb{E}\left(\exp\Big\{-\gamma\sum_{j=1}^{d}U^{(j)}\Big\}\mathbb{1}\Big(\sum_{j=1}^{d}U^{(j)} > |\ln u_d|\Big)\right) \\
&= \quad u_d^{\gamma}\,\mathbb{E}\,\exp\Big\{-\gamma\Big(\sum_{j=1}^{d}U^{(j)} - |\ln u_d|\Big)\Big\}\mathbb{1}\Big(\sum_{j=1}^{d}U^{(j)} > |\ln u_d|\Big).
\end{aligned}
$$

По аналогии с $\mathcal{T}^+_{d,\gamma}$, представим $\mathcal{T}^-_{d,\gamma}$ в следующем виде:

$$
\mathcal{T}^-_{d,\gamma} = u_d^{\gamma}\int_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\,\mathrm{d}F_d(x).
$$

Разложим F_d по формуле (3.64) при $d\to\infty$, получим:

$$
\begin{aligned}
u_d^{-\gamma}\,\mathcal{T}^-_{d,\gamma} \quad &= \quad \int_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\Phi(x)+\frac{Q_1(x)}{d^{1/2}}\right) + o(d^{-1/2}), \\
&= \quad \int_{\theta_d}^{\infty}\ldots\,\mathrm{d}\Phi(x) + \frac{1}{d^{1/2}}\int_{\theta_d}^{\infty}\ldots\,\mathrm{d}Q_1(x) + o(d^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Второй интеграл пренебрежимо мал:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{d^{1/2}}\int_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}Q_1(x)\right| \quad &\leqslant \quad \frac{1}{d^{1/2}}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|Q_1'(x)|\int_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}x \\
&= \quad \frac{1}{\gamma\sigma d}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}|Q_1'(x)| \\
&= \quad o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.
\end{aligned}
$$

Далее рассмотрим интеграл:

$$
\int_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\Phi(x) \quad = \quad -\int_{-\infty}^{-\theta_d} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(-t-\theta_d)}\mathrm{d}\Phi(-t) \tag{3.74}
$$

$$
= \quad \int_{-\infty}^{-\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(t+\theta_d)}\mathrm{d}\Phi(t) \tag{3.75}
$$

Последний переход вытекает из равенства $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Совершая аналогичные действия как и при доказательстве (3.70), приходим к следующей асимптотике с учетом четности функции Φ':

$$u_d^{-\gamma}\,\mathcal{T}^{-}_{d,\gamma} \sim \frac{\Phi'(-q)}{\gamma\sigma d^{1/2}} = \frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty. \quad \square$$

Сформулируем теорему о точной асимптотике величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$.

Теорема 3.5.2. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет условию (3.57), причем $\sigma^2 > 0$, и не является экспоненциальной. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ будем иметь*

$$\begin{aligned} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \ &\sim\ \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \\ &\sim\ \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \cdot \exp\left\{Ed + q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma\right\}, \quad d \to \infty. \end{aligned}$$

величины $q_{\varepsilon,1}$ и $q_{\varepsilon,2}$ выбираются из (3.59).

Доказательство теоремы 3.5.2. Выберем произвольный порог $\varepsilon \in (0,1)$. Примем для $\theta_d(\varepsilon)$ и F_d обозначения (3.60) и (3.61), соответственно. По утверждению 2.1.1 для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имеем представление:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) - \big\lfloor \mathcal{D}_d(\varepsilon)\big\rfloor.$$

Найдем асимптотику величины $\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big)$. Сначала заметим

$$\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) = \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} \geqslant \frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right).$$

В соответствии с теоремой 3.5.1 имеем $\lim\limits_{d\to\infty} \theta_d(\varepsilon) = q_{\varepsilon,1}$. Тогда, применяя формулу (3.70) с $\gamma = 1$, получим асимптотику:

$$\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) \sim \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}, \quad d \to \infty.$$

Найдем вклад дефекта $\mathcal{D}_d(\varepsilon)$ в асимптотику $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$. Опять воспользуемся вероятностным представлением с учетом определений F_d, $\theta_d(\varepsilon)$ и $q_{\varepsilon,1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d(\varepsilon) \ &=\ \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}\Big(\sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \lambda_{d,m}\mathbb{1}\big(\lambda_{d,m} \geqslant \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) - (1-\varepsilon^2)\Big) \\ &=\ \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \cdot \big(F_d(\theta_d(\varepsilon)) - \Phi(q_{\varepsilon,1})\big). \end{aligned}$$

Из формул (3.67) и (3.69) находим $F_d(\theta_d(\varepsilon)) - \Phi(q_{\varepsilon,1}) = o(d^{-1/2})$, $d \to \infty$. В результате получим:

$$\mathcal{D}_d(\varepsilon) = o(d^{-1/2}) \cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}, \quad d \to \infty.$$

Совмещая асимптотики величин $\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big)$ и $\mathcal{D}_d(\varepsilon)$, в итоге с учетом теоремы 3.5.1 приходим к искомым точным асимптотикам $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$. $\square$

3.5.2. Экспоненциальный случай

В этом пункте мы сосредоточимся на рассмотрении экспоненциальных последовательностей $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$. Для них уточненная логарифмическая асимптотика $\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)/\Lambda^d$ имеет следующий вид.

Теорема 3.5.3. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет условию (3.57), причем $\sigma^2>0$, и является экспоненциальной с некоторым максимальным шагом $b>0$ и сдвигом $a\in\mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,1)$ будем иметь*

$$\left|\ln\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\right| = Ed + q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma + b\Delta_{d,\varepsilon},\quad d\to\infty, \tag{3.76}$$

где величины $q_{\varepsilon,1}$ и $q_{\varepsilon,2}$ выбираются из (3.59), а $\Delta_{d,\varepsilon}$ удовлетворяет соотношениям

$$-1/2\leqslant \varliminf_{d\to\infty}\Delta_{d,\varepsilon}\leqslant \varlimsup_{d\to\infty}\Delta_{d,\varepsilon}\leqslant 1/2.$$

Доказательство теоремы 3.5.3. Выбираем произвольный $\varepsilon\in(0,1)$. Примем для $\theta_d(\varepsilon)$ и F_d обозначения (3.60) и (3.61), соответственно. Условие экспоненциальности для $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ означает, что дискретные величины $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ по своей структуре являются *решетчатыми* случайными величинами со значениями на $\{a+b\nu:\nu\in\mathbb{Z}\}$, где $b>0$ по предположению является *максимальным шагом* для $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$. В свою очередь, из условия (3.57) для этих величин вытекает (3.63). Тогда по теореме 3.3.11 функция F_d допускает следующее асимптотическое представление:

$$F_d(x)=\Phi(x)+\frac{Q_1(x)}{d^{1/2}}+\frac{S_d(x)\,\Phi'(x)}{d^{1/2}}+o(d^{1/2}),\quad d\to\infty, \tag{3.77}$$

равномерно относительно $x\in\mathbb{R}$. Здесь $Q_1(x)$ определяется по (3.65), а дискретная компонента S_d — следующими формулами:

$$S_d(x):=\frac{b}{\sigma}\,S\biggl(\frac{x\sigma d^{1/2}-a_E d}{b}\biggr),\qquad S(x):=\lfloor x\rfloor - x+\frac{1}{2},\qquad a_E:=a-E.$$

Предварительно отметим несколько свойств функции S_d. Обозначим

$$D_d:=\Bigl\{\frac{a_E d+b\nu}{\sigma d^{1/2}}:\nu\in\mathbb{Z}\Bigr\}. \tag{3.78}$$

Также примем $\rho_d:=b/(2\sigma d^{1/2})$. Функция S_d является $2\rho_d$–периодической, терпит разрыв слева в каждой точке из D_d. Несложно заметить, если $\tau\in D_d$, то

$$S_d(x)=\begin{cases}(\tau-x-\rho_d)\,d^{1/2}, & x\in(\tau-\rho_d,\tau);\\ (\tau-x+\rho_d)\,d^{1/2}, & x\in[\tau,\tau+\rho_d];\end{cases} \tag{3.79}$$

причем при каждом d

$$S_d(\tau)-S_d(\tau-0)=2\rho_d\,d^{1/2}=b/\sigma. \tag{3.80}$$

Обозначим

$$F_d^*(x) := F_d(x) - \frac{S_d(x)\,\Phi'(x)}{d^{1/2}}, \quad \theta_d^*(\varepsilon) := \min\{x \in \mathbb{R} : F_d^*(x) \geqslant 1-\varepsilon^2\}.$$

Из (3.77) ясно, что F_d^* имеет следующее представление идентичное (3.64) для F_d (где величины $(U^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ являлись нерешетчатыми):

$$F_d^*(x) = \Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty,$$

равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Поэтому по аналогии с тем, как это реализовано в доказательстве теоремы 3.5.1, будем иметь для $\theta_d^*(\varepsilon)$:

$$\theta_d^*(\varepsilon) = q_{\varepsilon,1} + \frac{q_{\varepsilon,2}}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty, \tag{3.81}$$

где $q_{\varepsilon,1}$ и $q_{\varepsilon,2}$ определяются из (3.59).

Теперь докажем, что $\theta_d^*(\varepsilon) \in \big(\theta_d(\varepsilon) - \rho_d, \theta_d(\varepsilon) + \rho_d\big]$. Действительно, из формулы (3.68) для $\theta_d(\varepsilon)$ и непрерывности справа F_d вытекает

$$F_d(\theta_d(\varepsilon) - 0) < \Phi(q_\varepsilon) \leqslant F_d(\theta_d(\varepsilon)) = F_d(\theta_d(\varepsilon) + 0),$$

где $F_d(\theta_d(\varepsilon) \pm 0) = F_d(\theta_d(\varepsilon) \pm \rho_d)$, так как соседние с $\theta_d(\varepsilon)$ скачки могут быть лишь в точках $\theta_d(\varepsilon) \pm 2\rho_d$. Но из (3.79) находим, что $S_d(\theta_d(\varepsilon) \pm \rho_d) = 0$, то есть $F_d(\theta_d(\varepsilon) \pm \rho_d) = F_d^*(\theta_d(\varepsilon) \pm \rho_d)$. Тогда из получившегося неравенства

$$F_d^*(\theta_d(\varepsilon) - \rho_d) < \Phi(q_\varepsilon) \leqslant F_d^*(\theta_d(\varepsilon) + \rho_d)$$

по определению $\theta_d^*(\varepsilon)$ следует

$$\theta_d^*(\varepsilon) \in (\theta_d(\varepsilon) - \rho_d, \theta_{d,\varepsilon} + \rho_d].$$

Отсюда с учетом (3.81) вытекает искомая асимптотика для $\theta_d(\varepsilon)$ при $d \to \infty$. □

Докажем аналог леммы 3.5.1 для экспоненциальных последовательностей $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$.

Лемма 3.5.2. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет условию (3.57), причем $\sigma^2 > 0$, и является экспоненциальной с некоторым максимальным шагом $b > 0$ и сдвигом $a \in \mathbb{R}$ Тогда для любой последовательности $(u_d)_{d\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющей условиям*

$$\frac{|\ln u_d| - Ed}{\sigma d^{1/2}} \in \Big\{\frac{(a-E)d + b\nu}{\sigma d^{1/2}} : \nu \in \mathbb{Z}\Big\}, \qquad \lim_{d\to\infty} \frac{|\ln u_d| - Ed}{\sigma d^{1/2}} = q \in \mathbb{R},$$

при любом $\gamma > 0$ справедливо

$$u_d^{\gamma} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1-\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} \geqslant u_d\right) \;\sim\; \frac{b}{1-e^{-\gamma b}} \cdot \frac{\Phi'(q)}{\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty, \tag{3.82}$$

$$u_d^{-\gamma} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1+\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} < u_d\right) \;\sim\; \frac{b}{e^{\gamma b}-1} \cdot \frac{\Phi'(q)}{\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty. \tag{3.83}$$

Доказательство леммы 3.5.2. Сначала докажем формулу (3.82). Обозначим

$$\mathcal{T}^{+}_{d,\gamma} \;:=\; \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1-\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} \geqslant u_d\right).$$

В соответствии с доказательством леммы 3.5.1 величина $\mathcal{T}^{+}_{d,\gamma}$ при любом $d\in\mathbb{N}$ записывается в виде следующего интеграла Римана-Стилтьеса:

$$\mathcal{T}^{+}_{d,\gamma} = u_d^{-\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\,\mathrm{d}F_d(x).$$

Представляя F_d равномерным разложением (3.77), при $d\to\infty$, получим

$$\begin{aligned} u_d^{\gamma}\,\mathcal{T}^{+}_{d,\gamma} \;&=\; \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\Phi(x)+\frac{Q_1(x)}{d^{1/2}}\right) \\ &\quad+\int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\frac{S_d(x)}{d^{1/2}}\,\Phi'(x)\right)+o(d^{-1/2}). \end{aligned}$$

Несложно убедиться (см. доказательство леммы 3.5.1), что первый интеграл имеет следующую асимптотику при $d\to\infty$

$$\widetilde{J}_{d,\gamma} := \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\Phi(x)+\frac{Q_1(x)}{d^{1/2}}\right) \sim \frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}} \quad d\to\infty.$$

Обратимся ко второму интегралу:

$$\bar{J}_{d,\gamma} := \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\frac{S_d(x)}{d^{1/2}}\,\Phi'(x)\right) = \bar{J}^{(1)}_{d,\gamma}+\bar{J}^{(2)}_{d,\gamma}+\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}^{(1)}_{d,\gamma} \;&:=\; \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\left(\frac{S_d'(x)}{d^{1/2}}\,\Phi'(x)\right)\mathrm{d}x, \\ \bar{J}^{(2)}_{d,\gamma} \;&:=\; \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\left(\frac{S_d(x)}{d^{1/2}}\,\Phi''(x)\right)\mathrm{d}x, \\ \bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} \;&:=\; \sum_{\substack{\tau\in D_d:\\ \tau\leqslant\theta_d}} \big(S_d(\tau)-S_d(\tau-0)\big)\,\frac{\Phi'(\tau)}{d^{1/2}}\,e^{\gamma\sigma d^{1/2}(\tau-\theta_d)}, \end{aligned}$$

а множество D_d определяется формулой (3.78).

Рассмотрим интеграл $\bar{J}^{(1)}_{d,\gamma}$. Используя представление (3.79) функции S_d, для точек из $\mathbb{R}\setminus D_d$ имеем $S_d'(v)=-d^{1/2}$. Значит:

$$\bar{J}^{(1)}_{d,\gamma} = -\int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\Phi(x).$$

Асимптотика получившегося интеграла (с точностью до знака) найдена при доказательстве леммы 3.5.1 (см. (3.73)). Она имеет вид:

$$\bar{J}^{(1)}_{d,\gamma} \sim -\frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty.$$

Далее убедимся, что $\bar{J}^{(2)}_d(\varepsilon) = o(d^{-1/2})$, $d \to \infty$. Действительно, в силу ограниченности функций S_d и Φ'' на $\mathbb{R}$ получаем:

$$\begin{aligned}
\left|\bar{J}^{(2)}_{d,\gamma}\right| &\leqslant \frac{1}{d^{1/2}} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|S_d(x)\,\Phi''(x)\right| \int\limits_{-\infty}^{\theta_d} e^{\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\gamma\sigma d} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|S_d(x)\,\Phi''(x)\right| \\
&= o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.
\end{aligned}$$

Рассмотрим ряд $\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma}$. Из (3.80) имеем

$$\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} = \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{\substack{\tau\in D_d:\\ \tau\leqslant\theta_d}} \Phi'(\tau)\; e^{\gamma\sigma d^{1/2}(\tau-\theta_d)}.$$

Так как $\theta_d \in D_d$, тогда

$$\exists\,\nu_d \in \mathbb{Z} \quad \theta_d = \frac{a_E d + b\,\nu_d}{\sigma d^{1/2}}. \tag{3.84}$$

Далее запишем

$$\begin{aligned}
\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} &= \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu_d} \Phi'\left(\theta_d - \frac{b(\nu_d-\nu)}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma b(\nu_d-\nu)} \\
&= \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi'\left(\theta_d - \frac{bk}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma bk}.
\end{aligned}$$

Полученный ряд сходится равномерно по d, поэтому возможен почленный переход к пределу при $d \to \infty$, т.е.

$$\begin{aligned}
\lim_{d\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \Phi'\left(\theta_d - \frac{bk}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma bk} &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{d\to\infty} \Phi'\left(\theta_d - \frac{bk}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma bk} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Phi'(q)\, e^{-\gamma bk} = \frac{\Phi'(q)}{1-e^{-\gamma b}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} = \frac{\Phi'(q)}{1-e^{-\gamma b}} \cdot \frac{b}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.$$

Получаем полное разложение для $\bar{J}_{d,\gamma}$

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{d,\gamma} &= \bar{J}^{(1)}_{d,\gamma} + \bar{J}^{(2)}_{d,\gamma} + \bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} \\
&= -\frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}} + \frac{\Phi'(q)}{1-e^{-\gamma b}} \cdot \frac{b}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, верна следующая асимптотика при $d \to \infty$:

$$\begin{aligned} u_d^{\gamma}\,\mathcal{T}_{d,\gamma}^{+} &= \widetilde{J}_{d,\gamma} + \bar{J}_{d,\gamma} + o(d^{-1/2}) \\ &= \frac{\Phi'(q)}{1-e^{-\gamma b}} \cdot \frac{b}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}). \end{aligned}$$

Теперь докажем формулу (3.83). Пусть

$$\mathcal{T}_{d,\gamma}^{-} := \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right)^{1+\gamma} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} > u_d\right).$$

Из доказательства леммы 3.5.1 заимствуем интегральное представление для $\mathcal{T}_{d,\gamma}^{-}$ при любом $d \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{T}_{d,\gamma}^{-} = u_d^{\gamma} \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\,\mathrm{d}F_d(x).$$

Раскладывая F_d по формуле (3.77) при $d \to \infty$ с учетом равномерности, получаем

$$\begin{aligned} u_d^{-\gamma}\,\mathcal{T}_{d,\gamma}^{+} &= \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{d^{1/2}}\right) \\ &\quad + \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\frac{S_d(x)}{d^{1/2}}\,\Phi'(x)\right) + o(d^{-1/2}). \end{aligned}$$

Первый интеграл имеет следующую асимптотику при $d \to \infty$ (см. доказательство леммы 3.5.1):

$$\widetilde{J}_{d,\gamma} := \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{d^{1/2}}\right) \sim \frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}} \quad d \to \infty.$$

Второй интеграл:

$$\bar{J}_{d,\gamma} := \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\mathrm{d}\left(\frac{S_d(x)}{d^{1/2}}\,\Phi'(x)\right) = \bar{J}_{d,\gamma}^{(1)} + \bar{J}_{d,\gamma}^{(2)} + \bar{J}_{d,\gamma}^{(3)},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}_{d,\gamma}^{(1)} &:= \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \left(\frac{S_d'(x)}{d^{1/2}}\,\Phi'(x)\right) \mathrm{d}x, \\ \bar{J}_{d,\gamma}^{(2)} &:= \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \left(\frac{S_d(x)}{d^{1/2}}\,\Phi''(x)\right) \mathrm{d}x, \\ \bar{J}_{d,\gamma}^{(3)} &:= \sum_{\substack{\tau \in D_d:\\ \tau > \theta_d}} \big(S_d(\tau) - S_d(\tau - 0)\big)\,\frac{\Phi'(\tau)}{d^{1/2}}\,e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(\tau-\theta_d)}, \end{aligned}$$

а множество D_d определяется формулой (3.78).

Рассмотрим $\bar{J}^{(1)}_{d,\gamma}$. Используя представление (3.79) функции S_d, для точек из $\mathbb{R}\setminus D_d$ имеем $S'_d(v) = -d^{1/2}$. Значит,

$$\bar{J}^{(1)}_{d,\gamma} = -\int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)} \mathrm{d}\Phi(x).$$

Асимптотика получившегося интеграла (с точностью до знака) найдена при доказательстве леммы 3.5.1 (см. (3.74)), т.е. имеем:

$$\bar{J}^{(1)}_{d,\gamma} \sim -\frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}}, \quad d\to\infty.$$

Докажем, что $\bar{J}^{(2)}_d(\varepsilon) = o(d^{-1/2})$, $d\to\infty$. Действительно, с учетом ограниченности функций S_d и Φ'' на $\mathbb{R}$ получаем:

$$\begin{aligned}
\left|\bar{J}^{(2)}_{d,\gamma}\right| &\leqslant \frac{1}{d^{1/2}}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|S_d(x)\,\Phi''(x)\right| \int\limits_{\theta_d}^{\infty} e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(x-\theta_d)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\gamma\sigma d}\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|S_d(x)\,\Phi''(x)\right| \\
&= o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.
\end{aligned}$$

Рассмотрим ряд $\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma}$. В силу (3.80), имеем

$$\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} = \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{\substack{\tau\in D_d:\\ \tau>\theta_d}} \Phi'(\tau)\; e^{-\gamma\sigma d^{1/2}(\tau-\theta_d)}.$$

С учетом (3.84) имеем

$$\begin{aligned}
\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} &= \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{\nu=\nu_d+1}^{\infty} \Phi'\left(\theta_d + \frac{b(\nu-\nu_d)}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma b(\nu-\nu_d)} \\
&= \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \Phi'\left(\theta_d + \frac{bk}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma bk}.
\end{aligned}$$

Этот ряд сходится равномерно по d. Делаем почленный переход к пределу при $d\to\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{d\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \Phi'\left(\theta_d + \frac{bk}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma bk} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{d\to\infty} \Phi'\left(\theta_d + \frac{bk}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-\gamma bk} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi'(q)\, e^{-\gamma bk} = \frac{\Phi'(q)}{e^{\gamma b}-1}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} = \frac{\Phi'(q)}{e^{\gamma b}-1}\cdot\frac{b}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.$$

Имеем разложение для $\bar{J}_{d,\gamma}$

$$\begin{aligned}
\bar{J}_{d,\gamma} &= \bar{J}^{(1)}_{d,\gamma} + \bar{J}^{(2)}_{d,\gamma} + \bar{J}^{(3)}_{d,\gamma} \\
&= -\frac{\Phi'(q)}{\gamma\sigma d^{1/2}} + \frac{\Phi'(q)}{e^{\gamma b}-1}\cdot\frac{b}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.
\end{aligned}$$

В итоге получили асимптотику:

$$\begin{aligned} u_d^{-\gamma}\,\mathcal{T}_{d,\gamma}^{-} &= \widetilde{J}_{d,\gamma} + \bar{J}_{d,\gamma} + o(d^{-1/2}) \\ &= \frac{\Phi'(q)}{e^{\gamma b}-1}\cdot\frac{b}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}). \quad \square \end{aligned}$$

Справедлив следующий результат о точной асимптотике для сложности аппроксимации $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ в экспоненциальном случае.

Теорема 3.5.4. *Пусть $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет условию (3.57) и является экспоненциальной с некоторым максимальным шагом $b>0$ и сдвигом $a\in\mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,1)$ будем иметь при $d\to\infty$*

$$\begin{aligned} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) &= \left(\frac{b}{1-e^{-b}} + b(\Delta_{d,\varepsilon}+1/2) + o(d^{-1/2})\right)\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \\ &= \left(\frac{b}{1-e^{-b}} + b(\Delta_{d,\varepsilon}+1/2) + o(d^{-1/2})\right)\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \\ &\quad\cdot\exp\left\{Ed + q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma + b\Delta_{d,\varepsilon}\right\}, \end{aligned}$$

величины $q_{\varepsilon,1}$ и $q_{\varepsilon,2}$ выбираются из (3.59), $\Delta_{d,\varepsilon}$ — из (3.76).

Доказательство теоремы 3.5.4. Выберем произвольный порог $\varepsilon\in(0,1)$. Для $\theta_d(\varepsilon)$ и F_d опять принимаем обозначения (3.60) и (3.61), соответственно. Также воспользуемся обозначениями для $q_{\varepsilon,1}$ и $q_{\varepsilon,2}$ из формулы (3.59). По утверждению 2.1.1 для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ имеем представление:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) - \big\lfloor \mathcal{D}_d(\varepsilon)\big\rfloor.$$

В соответствии с теоремой 3.5.3 имеем $\lim\limits_{d\to\infty}\theta_d(\varepsilon) = q_{\varepsilon,1}$, причем $\theta_d(\varepsilon)\in D_d$ (см. (3.78)). Тогда применяя формулу (3.82) с $\gamma=1$, получим асимптотику:

$$\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) \sim \frac{b}{1-e^{-b}}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)},\quad d\to\infty.$$

Найдем асимптотику дефекта $\mathcal{D}_d(\varepsilon)$. В соответствии с доказательством теоремы 3.5.2 величина $\mathcal{D}_d(\varepsilon)$ при любых $d\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon\in(0,1)$ имеет следующее представление:

$$\mathcal{D}_d(\varepsilon) = \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}\cdot\big(F_d(\theta_d(\varepsilon)) - \Phi(q_{\varepsilon,1})\big).$$

Рассмотрим разность $F_d(\theta_d(\varepsilon)) - \Phi(q_{\varepsilon,1})$. Представляя F_d равномерным разложением (3.77), запишем

$$\begin{aligned} F_d(\theta_d(\varepsilon)) - \Phi(q_{\varepsilon,1}) &= \Phi(\theta_d(\varepsilon)) - \Phi(q_{\varepsilon,1}) + \frac{Q_1(\theta_d(\varepsilon))}{d^{1/2}} \\ &\quad + \frac{S_d(\theta_d(\varepsilon))\,\Phi'(\theta_d(\varepsilon))}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}),\quad d\to\infty. \end{aligned}$$

Из (3.79) находим $S_d(\theta_d(\varepsilon)) = b/(2\sigma)$. Далее, используя представление (3.76) для $\theta_d(\varepsilon)$ и определение (3.66) величины $q_{\varepsilon,2}$, получим при $d \to \infty$:

$$\begin{aligned} F_d(\theta_d(\varepsilon)) - \Phi(q_{\varepsilon,1}) &= \Phi'(q_{\varepsilon,1})\big(\theta_d(\varepsilon) - q_{\varepsilon,1}\big) + \frac{Q_1(q_{\varepsilon,1})}{d^{1/2}} + \frac{b\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{2\sigma d^{1/2}} + o(-d^{1/2}) \\ &= \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})\, q_{\varepsilon,2}}{d^{1/2}} + \frac{Q_1(q_{\varepsilon,1})}{d^{1/2}} + b(\Delta_{d,\varepsilon} + 1/2) \cdot \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) \\ &= b(\Delta_{d,\varepsilon} + 1/2) \cdot \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}). \end{aligned}$$

В итоге имеем при $d \to \infty$:

$$\mathcal{D}_d(\varepsilon) = \left(b(\Delta_{d,\varepsilon} + 1/2) \cdot \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) \right) \cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}.$$

Итак, совмещая асимптотики величин $\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big)$ и $\mathcal{D}_d(\varepsilon)$, с учетом теоремы 3.5.3 получаем искомые точные асимптотические представления величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$. $\square$

3.6. Логарифмические асимптотики сложности в неоднородных задачах

При рассмотрении линейных неоднородных тензорных задач мы ограничимся наиболее типичной ситуацией, когда последовательности $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют следующему условию:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 1, \tag{3.85}$$

которое можно переписать в виде:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \lim_{j\to\infty} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i>1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 0. \tag{3.86}$$

Суммы по пустому множеству здесь и далее полагаются равными нулю. Отметим, что имеет смысл проводить асимптотический анализ лишь при условии расходимости ряда:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i>1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \infty. \tag{3.87}$$

Действительно, ведь иначе по утверждению 3.1.2 величина $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ будет ограниченной по d.

Важную роль в асимптотическом анализе линейных неоднородных тензорных задач играют саморазложимые распределения, описанные в параграфе 3.3.2. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, мы докажем следующую важную лемму.

Лемма 3.6.1. *Пусть последовательности* $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, *удовлетворяют* (3.85). *Тогда для любой последовательности* $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *такой, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$, *справедливо:*

$$\forall x > 0 \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d} \right) \to 0, \quad d \to \infty. \tag{3.88}$$

Доказательство леммы 3.6.1. Для краткости обозначим

$$T_x(j,d) := \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_1^{(j)}}{\lambda_i^{(j)}} > e^{xB_d}\right).$$

Заметим, что для любых $x>0$ и $d\in\mathbb{N}$ выполнено

$$T_x(j,d) \leqslant \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Отсюда в силу условия (3.86), эквивалентного (3.85), корректна оценка

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} T_x(j,d) \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < \infty.$$

Предположим, что (3.88) не выполнено. Тогда найдется такое число $x_0>0$ и такая подпоследовательность $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$, что имеет место сходимость

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} T_{x_0}(j,d_k) \to p, \quad k\to\infty.$$

где p — некоторое положительное число. Найдем такой индекс $j_p\in\mathbb{N}$, что

$$\forall j\geqslant j_p \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \leqslant p/2. \tag{3.89}$$

Также пусть $k\in\mathbb{N}$ настолько большое, что одновременно выполнено

$$\sup_{j=1,\ldots,j_p} T_{x_0}(j,d_k) < p/3, \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} T_{x_0}(j,d_k) > p/2.$$

Тогда мы будем иметь

$$p/2 < \sup_{j\geqslant j_p} T_{x_0}(j,d_k) \leqslant \sup_{j\geqslant j_p} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>1} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}},$$

что очевидно противоречит (3.89). $\square$

Теорема 3.6.1. *Пусть $A=(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B=(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d\to\infty$ при $d\to\infty$. Пусть невозрастающая функция $q\colon(0,1)\to\mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}\colon\mathbb{R}\to[0,1]$, для любого $\varepsilon\in(0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon)=\mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Пусть для $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j\in\mathbb{N}$, выполнено условие (3.85). Если имеет место асимптотика*

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d\to\infty, \tag{3.90}$$

то функция распределения $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\boldsymbol{L}$. Спектральная функция Леви для $\mathcal{L}$ будет нулевой на отрицательной полуоси. Если $\mathcal{L}$ невырождена, то константы A_d и B_d, $d\in\mathbb{N}$, удовлетворяют соотношениям $B_{d+1}/B_d\to 1$ и $(A_{d+1}-A_d)/B_d\to 0$ при $d\to\infty$.

Доказательство теоремы 3.6.1. Пусть выполнено асимптотическое представление (3.90). Тогда в силу теоремы 2.1.2 оно равносильно условию:

$$\forall x \in \mathbf{C}(\mathcal{L}) \quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathcal{L}(x), \tag{3.91}$$

где функции $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, определяются формулой (3.8). В то же время $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, в соответствии с (3.9) могут быть представлены в виде:

$$F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathbb{P}\biggl(\frac{\sum_{j=1}^d \hat{U}^{(j)} - \hat{A}_d}{B_d} \leqslant x\biggr), \quad d \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.92}$$

где независимые случайные величины $\hat{U}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, определены по формуле:

$$\hat{U}^{(j)} := U^{(j)} - \ln(\Lambda^{(j)}/\lambda_1^{(j)}), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{3.93}$$

а центрирующие постоянные $(\hat{A}_d)_{d\in\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$\hat{A}_d := A_d - \sum_{j=1}^d \ln(\Lambda^{(j)}/\lambda_1^{(j)}), \quad d \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что $\hat{U}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, являются неотрицательными и принимают значение в нуле с положительной вероятностью.

Для любого $x > 0$ в силу $\lambda_1^{(j)} \leqslant \Lambda^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, имеем оценку

$$\begin{aligned}\max_{j=1\ldots d} \mathbb{P}(\hat{U}^{(j)} > xB_d) &= \max_{j=1\ldots d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\biggl(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\biggr)\\ &\leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\biggl(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\biggr).\end{aligned} \tag{3.94}$$

Из нее по лемме 3.6.1 с учетом условия (3.85) вытекает выполнение *условия равномерной предельной малости* для величин $\hat{U}^{(j)}/B_d$, $j = 1, \ldots, d$. Тогда по теореме 3.3.3 в качестве слабого предела для $F_d^{\langle A,B\rangle}$ могут выступать только функции распределения из класса $\boldsymbol{L}$, т.е. $\mathcal{L} \in \boldsymbol{L}$. Пусть L — спектральная функция Леви распределения $\mathcal{L}$. По теореме 3.3.4 имеем:

$$\forall x < 0 \quad \sum_{j=1}^d \mathbb{P}(\hat{U}^{(j)} < xB_d) \to L(x), \quad d \to \infty.$$

Но при любом $d \in \mathbb{N}$ каждое слагаемое в последней сумме равно нулю, следовательно $L(x) = 0$ при $x < 0$.

По замечанию 3.3.3 имеем $B_{d+1}/B_d \to 1$, и также $(A_{d+1} - A_d)/B_d \to 0$ при $d \to \infty$. □

3.6.1. Общий критерий

Сформулируем необходимые и достаточные условия для того, чтобы $n_d^{\text{avg}}(\varepsilon)$ имела асимтотику вида (3.90). Теорема 3.6.1 позволяет ограничится только тем случаем, когда функция q является квантилью некоторого саморазложимого распределения с нулевой спектральной функцией Леви на отрицательной полуоси. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема 3.6.2. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть функция распределения $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ принадлежит классу $\boldsymbol{L}$ с представлением Леви (3.16), где $L(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$. Пусть невозрастающая функция $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Чтобы для $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих (3.85) и (3.87), была справедлива асимптотика:*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon) B_d + o(B_d), \quad d \to \infty, \tag{3.95}$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\text{(A)} \qquad \forall x > 0 \quad \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d} \right) \to -L(x);$$

$$\text{(B)} \qquad \forall \tau > 0 \quad \frac{1}{B_d}\left[\hat{A}_d - \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left| \ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d} \right) \right] \to -\mu - \int\limits_{(0,\tau)} \frac{x^3 \, \mathrm{d}L(x)}{1+x^2} + \int\limits_{[\tau,\infty)} \frac{x \, \mathrm{d}L(x)}{1+x^2}, \quad d \to \infty;$$

$$\text{(C)} \qquad \lim_{\tau\to 0} \varliminf_{d\to\infty} \frac{1}{B_d^2} \sum_{j=1}^{d} M_2^{(j)}(\tau B_d) = \lim_{\tau\to 0} \varlimsup_{d\to\infty} \frac{1}{B_d^2} \sum_{j=1}^{d} M_2^{(j)}(\tau B_d) = \sigma^2,$$

где

$$\hat{A}_d \;:=\; A_d - \sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}, \quad d \in \mathbb{N}, \tag{3.96}$$

$$M_2^{(j)}(\tau B_d) \;:=\; \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left| \ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right|^2 \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d} \right), \quad j \in \mathbb{N}, \quad \tau > 0, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы 3.6.2. Пусть $\mathcal{L}$ — заданный саморазложимый закон с представлением (3.16), в котором $L(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$. В силу замечания 3.3.2 функция q непрерывна на $(0,1)$, т.е. $\mathbf{C}(q) = (0,1)$. Тогда условие (3.95) по теореме 2.1.2 равносильно сходимости:

$$\forall x \in \mathbf{C}(\mathcal{L}) \quad F_d^{\langle A,B\rangle}(x) \to \mathcal{L}(x), \quad d \to \infty, \tag{3.97}$$

где $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, определяются формулой (3.8). Для этих функций справедливо вероятностное представление (3.92) с независимыми случайными величинами $\hat{U}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, и центрирующими константами $\hat{A}_d$, $d \in \mathbb{N}$, определенными соответственно по формулам (3.93) и (3.96). Условие (3.85) обеспечивает справедливость соотношения (3.88) леммы 3.6.1. При этом, как показано при доказательстве теоремы 3.6.1, величины $\hat{U}^{(j)}/B_d$, $j = 1, \ldots, d$, удовлетворяют условию равномерной предельной малости:

$$\forall x > 0 \quad \max_{j=1\ldots d} \mathbb{P}(\hat{U}^{(j)} > xB_d) \to 0, \quad d \to \infty.$$

Следовательно, (3.97) равносильно тому, что для $\hat{U}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, справедливы условия (A) – (C) теоремы 3.3.4, где полагается $Y_j := \hat{U}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, а в качестве центрирующих и нормирующих последовательностей выбираются соответственно $(\hat{A}_d)_{d\in\mathbb{N}}$ и $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$.

Условия (A) и (B) доказываемой теоремы суть переписанные в терминах $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, соответственно условия (A) и (B) теоремы 3.3.4.

Запишем условие (C) теоремы 3.3.4 в терминах $\hat{U}^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, с учетом неотрицательности последних:

$$\lim_{\tau\to 0}\varliminf_{d\to\infty}\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d) = \lim_{\tau\to 0}\varlimsup_{d\to\infty}\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d) = \sigma^2. \qquad (3.98)$$

Покажем, что оно эквивалентно условию (C) данной теоремы.

Зафиксируем произвольное число $\tau > 0$. Оценим $\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d)$, $j \in \mathbb{N}$. С одной стороны, имеем

$$\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d) \leqslant \mathbb{E}\left(\hat{U}^{(j)}\right)^2\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d).$$

С другой стороны, пользуясь известным неравенством $\mathbb{P}(Y=0)\cdot\mathbb{E}\,Y^2 \leqslant \mathbb{D}\,Y$, справедливым для произвольной случайной величины Y, заметим

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d) &\geqslant \mathbb{P}(\hat{U}^{(j)}=0)\cdot\mathbb{E}\left(\hat{U}^{(j)}\right)^2\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d)\\ &\geqslant \frac{\lambda_1^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\cdot\mathbb{E}\left(\hat{U}^{(j)}\right)^2\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d).\end{aligned}$$

В соответствии с леммой 3.3.8 верно

$$\max_{j=1,\ldots,d}\mathbb{E}\left(\hat{U}^{(j)}/B_d\right)^2\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d)\to 0, \quad d\to\infty. \qquad (3.99)$$

Значит, найдется такая последовательность $(j_{d,\tau})_{d\in\mathbb{N}}$, достаточно медленно стремящаяся к ∞, что $j_{d,\tau} = o(d)$, $d\to\infty$, и также

$$\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d) = \frac{1}{B_d^2}\sum_{j=j_{d,\tau}}^{d}\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant x B_d) + o(1), \quad d\to\infty.$$

где с учетом условия (3.85), (3.99) и полученных оценок на $\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d)$ при $d\to\infty$ справедливо

$$\begin{aligned}\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=j_{d,\tau}}^{d}\mathbb{D}\,\hat{U}^{(j)}\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d) &\sim \frac{1}{B_d^2}\sum_{j=j_{d,\tau}}^{d}\mathbb{E}\left(\hat{U}^{(j)}\right)^2\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d)\\ &= \frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\mathbb{E}\left(\hat{U}^{(j)}\right)^2\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d) + o(1).\end{aligned}$$

Осталось заметить, что величины $M_2^{(j)}(\tau B_d)$ из условия (C) доказываемой теоремы в терминах $\hat{U}^{(j)}$ в точности записываются в виде:

$$M_2^{(j)}(\tau B_d) = \mathbb{E}\left(\hat{U}^{(j)}\right)^2\mathbb{1}(\hat{U}^{(j)}\leqslant \tau B_d).$$

В итоге мы получили, что (3.98) эквивалентно условию (C) данной теоремы. Этим доказательство завершено. $\square$

3.6.2. Критерий с сильным доминированием

Часто при рассмотрении линейных неоднородных тензорных задач возникает ситуация, когда фактически лишь несколько собственных чисел формируют асимптотку для сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, в то время как все остальные играют второстепенную роль. Примером этому, как мы увидим в главе 5, служит аппроксимация при $d \to \infty$ многопараметрического эйлеровского интегрированного процесса. Более конкретно, если мы сделаем наряду с (3.87) следующее предположение:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : N \geqslant 2 \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} : i > N} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < \infty. \tag{3.100}$$

то условия предыдущей теоремы несколько упрощаются за счет исчезновения в фигурирующих суммах собственных чисел $\lambda_i^{(j)}$ с индексами $i > N$.

Теорема 3.6.3. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть функция распределения $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ принадлежит классу $\boldsymbol{L}$ с представлением Леви* (3.16)*, где $L(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$. Пусть невозрастающая функция $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. Чтобы для $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих* (3.85), (3.87) *и* (3.100) *при некотором $N \geqslant 2$, была справедлива асимптотика:*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon) B_d + o(B_d), \quad d \to \infty, \tag{3.101}$$

необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\text{(A)} \qquad \forall x > 0 \quad \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} : i \leqslant N} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\right) \to -L(x);$$

$$\text{(B)} \qquad \lim_{d\to\infty} \frac{1}{B_d}\left(\hat{A}_d - \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} : i \leqslant N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right) = -\mu - \int\limits_{(0,\infty)} \frac{x^3\, \mathrm{d}L(x)}{1+x^2};$$

$$\text{(C)} \qquad \lim_{\tau\to 0} \varliminf_{d\to\infty} \frac{1}{B_d^2} \sum_{j=1}^{d} M_2^{(j)}(\tau B_d) = \lim_{\tau\to 0} \varlimsup_{d\to\infty} \frac{1}{B_d^2} \sum_{j=1}^{d} M_2^{(j)}(\tau B_d) = \sigma^2,$$

где

$$\hat{A}_d \;:=\; A_d - \sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}, \quad d \in \mathbb{N}, \tag{3.102}$$

$$M_2^{(j)}(\tau B_d) \;:=\; \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} : i \leqslant N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2 \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right), \quad j \in \mathbb{N}, \quad \tau > 0, \quad d \in \mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы 3.6.3. Требуется показать, что при (3.85) и (3.100) условия (A)–(C) теоремы 3.6.2 равносильны условиям (A)–(C) доказываемой теоремы.

Зафиксируем произвольное число $x > 0$. Рассмотрим суммы из условия (A) теоремы 3.6.2:

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\right) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)} : i \leqslant N} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\right) + R_{d,x}^{(1)}, \tag{3.103}$$

где

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{d,x} &:= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \frac{\lambda^{(j)}_i}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1} < e^{-xB_d}\right) \\ &= \sum_{j=j^{(1)}_{d,x}}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \frac{\lambda^{(j)}_i}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1} < e^{-xB_d}\right) + o(1), \quad d\to\infty. \end{aligned}$$

Здесь последовательность $(j^{(1)}_{d,x})_{d\in\mathbb{N}}$ выбрана так, что $j^{(1)}_{d,x}\to\infty$, $j^{(1)}_{d,x}=o(d)$, $d\to\infty$, и кроме того

$$j^{(1)}_{d,x}\cdot\sup_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda^{(j)}_i}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1} < e^{-xB_d}\right) \to 0, \quad d\to\infty.$$

В соответствии с леммой 3.6.1 такая последовательность $(j^{(1)}_{d,x})_{d\in\mathbb{N}}$ существует.

Заметим, что для любого $d\in\mathbb{N}$ верна оценка:

$$\sum_{j=j^{(1)}_{d,x}}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \frac{\lambda^{(j)}_i}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1} < e^{-xB_d}\right) \leqslant \sum_{j=j^{(1)}_{d,x}}^{\infty} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1}.$$

Здесь правая часть в силу предположения (3.100) и $j^{(1)}_{d,x}\to\infty$, $d\to\infty$, есть бесконечно малая величина при $d\to\infty$. Следовательно, в (3.103) имеем $R^{(1)}_{d,x}=o(1)$, $d\to\infty$. Отсюда в итоге вытекает эквивалентность условия (A) теоремы 3.6.2 и условия (A) данной теоремы.

Попутно заметим, что при условии (A) теоремы 3.6.3 следующая величина конечна:

$$\Theta_B := \sup_{d\in\mathbb{N}}\left\{\frac{1}{B_d}\max_{j=1,\ldots,d}\max_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i\leqslant N}\left|\ln\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1}\right|\right\} < \infty. \tag{3.104}$$

В противном случае нашлась бы подпоследовательность $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\frac{1}{B_{d_k}}\max_{j=1,\ldots,d_k}\max_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i\leqslant N}\left|\ln\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1}\right| \to\infty, \quad k\to\infty.$$

Это привело бы к противоречию с (A) (т.к. $-L(x)<\infty$ для всех $x>0$) в силу следующей оценки, справедливой при больших $k\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i\leqslant N} \frac{\lambda^{(j)}_i}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1} < e^{-xB_{d_k}}\right) \geqslant \frac{1}{B_{d_k}}\max_{j=1,\ldots,d_k}\max_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i\leqslant N}\left|\ln\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1}\right|.$$

Покажем справедливость предельного соотношения:

$$\forall\tau>0 \quad \max_{j=1,\ldots,d}\frac{1}{B_d}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}\left|\ln\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1}\right|\frac{\lambda^{(j)}_i}{\Lambda^{(j)}}\mathbb{1}\left(\frac{\lambda^{(j)}_i}{\lambda^{(j)}_1}\geqslant e^{-\tau B_d}\right)\to 0, \quad d\to\infty. \tag{3.105}$$

Пусть τ и h — произвольные положительные числа, причем $h < \tau$.

$$\begin{aligned}
\max_{j=1,\ldots,d} \frac{1}{B_d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right. &\geqslant \left. e^{-\tau B_d}\right) \\
&\leqslant \max_{j=1,\ldots,d} \frac{1}{B_d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-hB_d}\right) \\
&\quad + \max_{j=1,\ldots,d} \frac{1}{B_d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} > e^{-hB_d}\right) \\
&\leqslant h + \tau \max_{j=1,\ldots,d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} > e^{-hB_d}\right).
\end{aligned}$$

Здесь h может быть взято сколь угодно малым, а оставшаяся сумма стремится к нулю в силу леммы 3.6.1. Отсюда вытекает (3.105).

Для каждого $\tau > 0$ мы будем выбирать последовательность $(j_{d,\tau}^{(2)})_{d\in\mathbb{N}}$ так, чтобы $j_{d,\tau}^{(2)} \to \infty$, $j_{d,\tau}^{(2)} = o(d)$, $d \to \infty$, и помимо этого

$$j_{d,\tau}^{(2)} \cdot \max_{j=1,\ldots,d} \frac{1}{B_d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right) \to 0, \quad d \to \infty. \tag{3.106}$$

Рассмотрим при фиксированном $\tau > 0$ следующие суммы, присутствующие в условии (B) теоремы 3.6.2:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B_d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right)& \\
= \frac{1}{B_d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i\leqslant N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right) + R_{d,\tau}^{(2)}&
\end{aligned} \tag{3.107}$$

где

$$\begin{aligned}
R_{d,\tau}^{(2)} &:= \frac{1}{B_d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right) \\
&= \frac{1}{B_d} \sum_{j=j_{d,\tau}^{(2)}}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right) + o(1), \quad d \to \infty.
\end{aligned}$$

Последнее асимптотическое равенство получено с учетом (3.106). Оценим в нем повторный ряд:

$$\frac{1}{B_d} \sum_{j=j_{d,\tau}^{(2)}}^{d} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right) \leqslant \sum_{j=j_{d,\tau}^{(2)}}^{\infty} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}.$$

Правая часть приведенного неравенства в силу предположения (3.100) и $j_{d,\tau}^{(2)} \to \infty$, $d \to \infty$, стремится к нулю при $d \to \infty$ как остаток сходящего ряда. Поэтому в равенстве (3.107) имеем

$R^{(2)}_{d,\tau} = o(1)$, $d \to \infty$. В итоге условие (B) теоремы 3.6.2 эквивалентно следующему условию:

$$\forall \tau > 0 \quad \frac{1}{B_d}\left[\hat{A}_d - \sum_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i \leqslant N} \left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right)\right] \to$$
$$-\mu - \int\limits_{(0,\tau)} \frac{x^3 \, \mathrm{d}L(x)}{1+x^2} + \int\limits_{[\tau,\infty)} \frac{x \, \mathrm{d}L(x)}{1+x^2}, \quad d \to \infty. \tag{3.108}$$

Покажем, что условие (A) данной теоремы влечет:

$$\forall \tau > 0 \quad \frac{1}{B_d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i \leqslant N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-\tau B_d}\right) \to \int\limits_{[\tau,\infty)} x \, \mathrm{d}L(x), \ d \to \infty. \tag{3.109}$$

Введем последовательность функций $(L_d)_{d\in\mathbb{N}}$, определенных по формуле:

$$L_d(x) := -\sum_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i \leqslant N} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\right), \quad d \in \mathbb{N}, \quad x > 0.$$

Условие (A) при таком обозначении записывается как $\forall x > 0 \;\; L_d(x) \to L(x)$. Также по формуле (3.104) всегда имеем $L_d(\Theta_B) = 0$ для любого $x \in [\Theta_B, \infty)$, причем по определению $\Theta_B > 0$. Отсюда с учетом общих свойств функции Леви L вытекает, что и $L(x) = 0$ для $x \in [\Theta_B, \infty)$. Тогда при $\tau \in [\Theta_B, \infty)$ соотношение (3.109) очевидно выполнено. Рассмотрим случай $\tau < \Theta_B$. Запишем следующие суммы в виде интеграла Римана-Стилтьеса:

$$\frac{1}{B_d} \sum_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i \leqslant N} \left|\ln \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-\tau B_d}\right) = \int\limits_{(\tau,\Theta_B)} x \, \mathrm{d}L_d(x).$$

Представим его в следующем виде:

$$\int\limits_{\tau}^{\Theta_B} x \, \mathrm{d}L_d(x) = \int\limits_{\tau}^{\Theta_B} x \, \mathrm{d}L(x) + \int\limits_{\tau}^{\Theta_B} x \, \mathrm{d}(L_d(x) - L(x)).$$

Покажем, что последний интеграл стремится к нулю при $d \to \infty$. Используем интегрирование по частям:

$$\int\limits_{\tau}^{\Theta_B} x \, \mathrm{d}(L_d(x) - L(x)) = x(L_d(x) - L(x))\Big|_{\tau}^{\Theta_B} + \int\limits_{\tau}^{\Theta_B} \big(L(x) - L_d(x)\big) \, \mathrm{d}x.$$

Подставляя соответствующие пределы, убеждаемся, что первое слагаемое стремится к нулю. Для второго слагаемого верна оценка:

$$\left|\int\limits_{\tau}^{\Theta_B} (L(x) - L_d(x)) \, \mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_{\tau}^{\Theta_B} |L(x) - L_d(x)| \, \mathrm{d}x.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости последний интеграл стремится к нулю при $d \to \infty$. В итоге (3.109) доказано.

Далее почленно вычтем из равенства (3.108) равенство (3.109): получаем в точности условие (B) доказываемой теоремы. В итоге заключаем, что при (A) данной теоремы (и его следствии (3.109)) соотношения (3.108) и (B) эквивалентны.

Рассмотрим суммы из условия (C) теоремы 3.6.2 при некотором $\tau > 0$:

$$\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}\left|\ln\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\geqslant e^{-\tau B_d}\right)$$
$$=\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i\leqslant N}\left|\ln\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\geqslant e^{-\tau B_d}\right)+R_{d,\tau}^{(3)}+R_{d,\tau}^{(4)}. \quad (3.110)$$

Здесь величины $R_{d,\tau}^{(3)}$ и $R_{d,\tau}^{(4)}$ определяются и оцениваются следующим образом.

$$\begin{aligned}
R_{d,\tau}^{(3)} &:= \frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{j_{d,\tau}^{(2)}-1}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N}\left|\ln\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\geqslant e^{-\tau B_d}\right)\\
&\leqslant \frac{x}{B_d}\sum_{j=1}^{j_{d,\tau}^{(2)}-1}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N}\left|\ln\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\geqslant e^{-\tau B_d}\right)\\
&\leqslant \tau\cdot j_{d,\tau}^{(2)}\cdot\max_{j=1,\dots,d}\frac{1}{B_d}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}\left|\ln\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\geqslant e^{-\tau B_d}\right).
\end{aligned}$$

В силу выбора $(j_{d,\tau}^{(2)})_d\in\mathbb{N}$, из формулы (3.106) имеем $R_{d,\tau}^{(3)}\to 0$, $d\to\infty$.

$$\begin{aligned}
R_{d,\tau}^{(4)} &:= \frac{1}{B_d^2}\sum_{j=j_{d,\tau}^{(2)}}^{d}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N}\left|\ln\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\geqslant e^{-\tau B_d}\right)\\
&\leqslant \sum_{j=j_{d,\tau}^{(2)}}^{\infty}\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}:i>N}\frac{\lambda_i^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}.
\end{aligned}$$

Здесь последний повторный ряд является остаточным членом сходящегося ряда. Поэтому в силу $j_{d,\tau}^{(2)}\to\infty$ имеем $R_{d,\tau}^{(4)}\to 0$, $d\to\infty$.

В итоге получаем, что условие (C) теоремы 3.6.2 равносильно условию (C) данной теоремы, что и завершает доказательство. □

Глава 4.

Линейные тензорные задачи в постановке по вероятности

В настоящей главе мы рассматриваем многопараметрические линейные тензорные задачи аппроксимации в вероятностной постановке (см. пункт 1.2.2). Главным объектом нашего внимания здесь является сложность по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$, имеющая представления (2.24) и (2.25). Как и для постановки в среднем, мы будем искать асимптотики величины $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ при $d \to \infty$, когда $\varepsilon \in (0, 1)$ фиксирован, а $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$ может зависеть от d и ε.

4.1. Логарифмические асимптотики сложности в однородных задачах

Асимптотический анализ сложности в среднем для линейных однородных тензорных задач был осуществлен в предыдущей главе. Здесь мы аналогичным образом, существенно опираясь на теоремы главы 2, проделаем его для сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$.

В вырожденном случае, когда $\lambda_1 = \Lambda$, для любых $\varepsilon \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1)$ и $d \in \mathbb{N}$, очевидно имеем $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta) = 1$. В невырожденной ситуации, $\lambda_1 < \Lambda$, как и для сложности в среднем, устойчивые распределения играют ключевую роль. Об этом свидетельствует следующая теорема.

Теорема 4.1.1. *Пусть $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — последовательность из $\mathbb{R}$, а $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ — такая последовательность, что $B_d \to \infty$ при $d \to \infty$. Пусть невозрастающая функция $q\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ и функция распределения $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ удовлетворяют равенству $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1 - \varepsilon^2)$. Пусть для $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ выполнено $\lambda_1 < \Lambda$ и при некотором фиксированном $\delta \in (0, 1)$ имеет место асимптотика:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{4.1}$$

Тогда функция распределения $\mathcal{L}$ принадлежит классу $\boldsymbol{S}$. Если функция $\mathcal{L}$ не является вырожденной или нормальной, то она принадлежит семейству $S_{\alpha,r,1,\gamma}$, $\alpha \in (0, 2)$, $r > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$, с крайней правой асимметрией.

Доказательство теоремы 4.1.1. Из предположения $\lambda_1 < \Lambda$ с очевидностью имеем

$$\frac{\lambda_{d,1}}{\Lambda_d} = \left(\frac{\lambda_1}{\Lambda}\right)^d \to 0, \quad d \to \infty. \tag{4.2}$$

Это позволяет воспользоваться теоремой 2.2.2 для $n_d^{\text{prob}}(\varepsilon, \delta)$ с заданной асимптотикой (4.1) при некотором $\delta \in (0,1)$ и произвольном $\varepsilon \in (0,1)$. Как результат мы получаем сходимость:

$$\forall x \in \mathbf{C}(\mathcal{L}) \quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathcal{L}(x),$$

где $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, определяются по формуле (3.8) и представляют собой функции распределения центрированных и нормированных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $U^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$ (см. (3.9)). По теореме 3.3.5 слабыми пределами для $(F_d^{\langle A,B\rangle})_{d\in\mathbb{N}}$ могут выступать только функции распределения устойчивых законов.

Далее рассуждения совершенно аналогичны тем, которые были сделаны в доказательстве теоремы 3.4.1. $\square$.

Сформулируем необходимые и достаточные условия асимптотического представления вида (4.1) для сложности по вероятности $n_d^{\text{prob}}(\varepsilon, \delta)$. В силу предыдущей теоремы, мы ограничимся случаями, где функция q является квантилью некоторого устойчивого распределения, при этом вырожденные распределения нами исключаются из рассмотрения.

Теорема 4.1.2. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ *выполнено условие* (3.29)*, с* $\sigma^2 > 0$*, или условие* (3.32) *при* $\alpha = 2$*. Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и для произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$*, удовлетворяющей условиям:*

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})| - Ed}{B_d} < q(\varepsilon), \qquad \varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}| - Ed}{B_d} < q(\varepsilon), \tag{4.3}$$

будем иметь

$$\ln n_d^{\text{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) = Ed + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{4.4}$$

Здесь константы B_d*,* $d \in \mathbb{N}$*, выбираются так же, как в теореме* 3.4.2*. В частности, при* (3.29) *можно положить* $B_d := \sigma d^{1/2}$*.*

Данная теорема является обобщением теоремы М. А. Лифшица и Е. В. Туляковой из статьи [64]. В этой работе получена асимптотика (4.4) только для последовательностей $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ с единичной кратностью каждого элемента при условии (3.29) с $\sigma^2 > 0$ ($B_d = \sigma d^{1/2}$, $d \in \mathbb{N}$). В теореме 4.1.2 кратность каждого числа λ_i может быть произвольной. В [64] область допустимого варьирования уровня значимости является по сравнению с (4.3) более узкой, а именно, $\delta_{d,\varepsilon} \in (0, 1/2)$ и также:

$$\lim_{d\to\infty} \frac{|\ln\delta_{d,\varepsilon}|}{\exp\{Ed + q(\varepsilon)\sigma d^{1/2}\}} = 0.$$

В теореме (4.1.2) эта область расширяется как в сторону нуля, так и в сторону единицы.

Доказательство теоремы 4.1.2. При выполнении (3.29), с $\sigma^2 > 0$, или условия (3.32) при $\alpha = 2$ как показано при доказательстве теоремы 3.4.2 имеет место сходимость

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \Phi(x). \tag{4.5}$$

где $F_d^{\langle A,B\rangle}(x)$ определяется формулой (3.8), $A_d = Ed$, $d \in \mathbb{N}$, а константы B_d, $d \in \mathbb{N}$, выбираются согласно теореме 3.4.2.

Из условия $\sigma^2 > 0$ вытекает $\lambda_1 < \Lambda$, а значит имеем (4.2). Далее применение теоремы 2.2.1 завершает доказательство. Справедливость (4.4) *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ вытекает из непрерывности функции $\varepsilon \to \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)$ на $(0,1)$. $\square$

Сформулируем необходимые условия асимптотического представления (4.1).

Теорема 4.1.3. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$*, а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$*. Пусть для некоторого фиксированного* $\delta \in (0,1)$ *имеем*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = A_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{4.6}$$

Тогда выполнено либо (3.29)*, с* $\sigma^2 > 0$*, либо условие* (3.32) *при* $\alpha = 2$*, константы* A_d *и* B_d*,* $d \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют* (3.34)*, а асимптотика* (4.6) *распространяется на* $\delta = \delta_{d,\varepsilon} \in (0,1)$ *из* (4.3).

Доказательство теоремы 4.1.3. Несложно видеть, что из (4.6) вытекает $\lambda_1 < \Lambda$, а, значит, и (4.2). Далее из теоремы 2.2.2 имеем сходимость (4.5) с заданными константами A_d и B_d, $d \in \mathbb{N}$. Из полученной сходимости, как показано в доказательстве теоремы 3.4.2, последовательность $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ должна удовлетворять либо условию (3.29), с $\sigma^2 > 0$, либо условию (3.32) при $\alpha = 2$, а константы A_d и B_d — условиям (3.34). Отсюда с учетом теоремы 4.1.2 видно, что асимптотика $\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ распространяется и на $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$, удовлетворяющие (4.3). $\square$

Следующая теорема дает логарифмическую асимптотику $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ для собственных чисел, удовлетворяющих условию (3.32) при $\alpha \in (0,2)$.

Теорема 4.1.4. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ *выполнено условие* (3.32) *при* $\alpha \in (0,2)$ *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$*, удовлетворяющей условиям*

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon), \qquad \varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln \delta_{d,\varepsilon}| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon), \tag{4.7}$$

будем иметь

$$\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) = A_d + S^{-1}_{\alpha,1,1,0}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty, \tag{4.8}$$

где константы A_d *и* B_d*,* $d \in \mathbb{N}$*, удовлетворяют условиям теоремы* 3.4.4.

Приведем необходимые условия для асимптотики (4.8).

Теорема 4.1.5. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$, *а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$. *Пусть для некоторого фиксированного* $\delta \in (0,1)$ *имеем*

$$\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = A_d + S_{\alpha,1,1,0}^{-1}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{4.9}$$

Тогда выполнено условие (3.32) *при* $\alpha \in (0,2)$, *константы* A_d *и* B_d, $d \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют* (3.40) *и асимптотика* (4.9) *распространяется на* $\delta = \delta_{d,\varepsilon} \in (0,1)$ *из* (4.7).

Доказательства двух последних теорем мы опускаем, т.к. они совершенно аналогичны доказательствам теорем 4.1.2 и 4.1.3, с той лишь разницей, что вместо Φ в них фигурирует $S_{\alpha,1,1,0}$ и вместо теоремы 3.4.2 используется теорема 3.4.4.

Приступим к рассмотрению случая, когда собственные числа удовлетворяют условию (3.32) при $\alpha = 0$.

Теорема 4.1.6. *Пусть для* $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ *выполнено условие* (3.32) *при* $\alpha = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и для произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$, *удовлетворяющей условиям*

$$\varliminf_{d\to\infty} \frac{d\,\varphi\big(\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})|\big)}{|\ln(1-\varepsilon^2)|} > 1, \qquad \varliminf_{d\to\infty} \frac{d\,\varphi\big(\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}|\big)}{|\ln(1-\varepsilon^2)|} \geqslant 1, \tag{4.10}$$

будем иметь

$$\lim_{d\to\infty} d\,\varphi\big(\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\big) = -\ln(1-\varepsilon^2). \tag{4.11}$$

Доказательство теоремы 4.1.6. Выполнение для $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ условия (3.32) влечет по теореме 3.4.5 сходимость

$$\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \lim_{d\to\infty} d\,\varphi\big(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big) = -\ln(1-\varepsilon^2).$$

Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$, последовательность $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую (4.10), и сколь угодно малое число $h > 0$. Возьмем такое число $c_{\varepsilon,h}^- < 1$, что

$$\Delta_{\varepsilon,h}^- := \frac{\ln\big(1-(c_{\varepsilon,h}^-)^2\varepsilon^2\big)}{\ln(1-\varepsilon^2)} > e^{-h}.$$

В силу леммы 2.2.2 верна оценка:

$$\ln P_{d,\varepsilon}\big(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^-\,\varepsilon)\big) \leqslant -C_{\varepsilon,h}^- \cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^-\,\varepsilon).$$

где $C_{\varepsilon,h}^- := \ln\sqrt{e/2}\,\big(1-(c_{\varepsilon,h}^-)^2\big)^2\varepsilon^2 > 0$. Когда число d достаточно большое, мы будем иметь с учетом $\Delta_{\varepsilon,h}^- < 1$:

$$\begin{aligned}
\ln P_{d,\varepsilon}\big(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^-\,\varepsilon)\big) &\leqslant -C_{\varepsilon,h}^- \cdot \exp\big\{\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^-\,\varepsilon)\big\}\\
&= -C_{\varepsilon,h}^- \cdot \exp\big\{\tilde\varphi^{-1}(\tilde\varphi(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^-\,\varepsilon)))\big\}\\
&\leqslant -\exp\bigg\{\tilde\varphi^{-1}\bigg(\frac{\tilde\varphi(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^-\,\varepsilon))}{(\Delta_{\varepsilon,h}^-)^{1/2}}\bigg)\bigg\}.
\end{aligned}$$

где последняя оценка достигается за счет того, что $\tilde{\varphi}^{-1}(1/x)$, $x \in \mathbb{R}$ — б.м.ф. при $x \to \infty$. Заметим, что

$$\lim_{d\to\infty} \frac{d\,\tilde{\varphi}(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{-}\,\varepsilon))}{-\ln(1-\varepsilon^2)(\Delta_{\varepsilon,h}^{-})^{1/2}} = \frac{\ln\bigl(1-(c_{\varepsilon,h}^{-})^2\varepsilon^2\bigr)}{\ln(1-\varepsilon^2)(\Delta_{\varepsilon,h}^{-})^{1/2}} = (\Delta_{\varepsilon,h}^{-})^{1/2}.$$

В то же время при больших $d \in \mathbb{N}$ в силу условий на $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ и $\Delta_{\varepsilon,h}^{-} < 1$ имеем:

$$\frac{d\,\tilde{\varphi}(\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}|)}{-\ln(1-\varepsilon^2)} > (\Delta_{\varepsilon,h}^{-})^{1/2}.$$

Следовательно, при достаточно больших $d \in \mathbb{N}$ мы приходим к

$$\ln P_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{-}\,\varepsilon)\bigr) \leqslant \ln\delta_{d,\varepsilon},$$

а значит и к соотношению $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) \leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,\varepsilon}^{-}\varepsilon)$. Тогда при больших d будем иметь

$$\begin{aligned}
\varliminf_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\bigl(\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\bigr) &\geqslant \varliminf_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}\bigl(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,\varepsilon}^{-}\varepsilon)\bigr)\\
&= -\ln\bigl(1-(c_{\varepsilon,h}^{-})^2\varepsilon^2\bigr)\\
&> -\ln(1-\varepsilon^2)e^{-h}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Найдем такое число $c_{\varepsilon,h}^{+} > 1$, что

$$\Delta_{\varepsilon,h}^{+} := \frac{\ln\bigl(1-(c_{\varepsilon,h}^{+})^2\varepsilon^2\bigr)}{\ln(1-\varepsilon^2)} < e^h.$$

Из теоремы 3.4.5 видно, что для любого $\varepsilon' \in (0,1)$ $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon') \to \infty$, и, начиная с некоторого значения d, будет выполнятся строгое неравенство $n^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) > n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{+}\varepsilon)$. При этих d по лемме 2.2.3 верна оценка:

$$\ln\overline{P}_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{+}\,\varepsilon)\bigr) \leqslant -C_{\varepsilon,h}^{+}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{+}\,\varepsilon) + \frac{1}{2}.$$

где $C_{\varepsilon,h}^{+} := \bigl((c_{\varepsilon,h}^{+})^2-1\bigr)^2\varepsilon^2/(4(c_{\varepsilon,h}^{+})^2)$. Если число d достаточно большое, то мы будем иметь

$$\begin{aligned}
\ln\overline{P}_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_h^{+}\,\varepsilon)\bigr) &\leqslant -\frac{C_{\varepsilon,h}^{+}}{2}\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(c_h^{+}\,\varepsilon)\\
&= -\frac{C_{\varepsilon,h}^{+}}{2}\cdot\exp\bigl\{\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\varphi}(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{-}\,\varepsilon)))\bigr\}\\
&\leqslant -\exp\bigl\{\tilde{\varphi}^{-1}\bigl((\Delta_{\varepsilon,h}^{+})^{1/2}\tilde{\varphi}(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{-}\,\varepsilon))\bigr)\bigr\}.
\end{aligned}$$

Последняя из приведенных оценок получается за счет того, что $\tilde{\varphi}^{-1}(1/x)$, $x \in \mathbb{R}$ — б.м.ф. при $x \to \infty$. Заметим, что

$$\lim_{d\to\infty} \frac{d\,(\Delta_{\varepsilon,h}^{+})^{1/2}\tilde{\varphi}(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{-}\,\varepsilon))}{-\ln(1-\varepsilon^2)} = \frac{(\Delta_{\varepsilon,h}^{+})^{1/2}\ln\bigl(1-(c_{\varepsilon,h}^{+})^2\varepsilon^2\bigr)}{\ln(1-\varepsilon^2)} = (\Delta_{\varepsilon,h}^{+})^{3/2}.$$

В то же время при больших $d \in \mathbb{N}$ в силу условий на $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ и выбора $c_{\varepsilon,h}^{+}$ имеем:

$$\frac{d\,\tilde{\varphi}(\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})|)}{-\ln(1-\varepsilon^2)} > (\Delta_{\varepsilon,h}^{+})^{3/2}.$$

В итоге при достаточно больших $d \in \mathbb{N}$ мы приходим к неравенству

$$\ln P_{d,\varepsilon}\bigl(n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{+}\,\varepsilon)\bigr) > \ln(1-\delta_{d,\varepsilon}),$$

из которого имеем $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) > n_d^{\mathrm{avg}}(c_{\varepsilon,h}^{+}\,\varepsilon)$. Тогда при больших d получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}(\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})) &\leqslant \lim_{d\to\infty} d\,\tilde{\varphi}(\ln n_d^{\mathrm{avg}}(c_{h,\varepsilon}^{+}\varepsilon)) \\
&= -\ln\bigl(1-(c_{\varepsilon,h}^{+})^2\varepsilon^2\bigr) \\
&< -\ln(1-\varepsilon^2)e^h.
\end{aligned}$$

Вместе с (4.12) это дает искомое предельное соотношение для $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})$. □

4.2. Точные асимптотические представления сложности в однородных задачах

В данном пункте мы найдем точную асимптотику $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ для линейных однородных тензорных задач при условии (3.57). Точный асимптотический анализ сложности аппроксимации в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ был сделан в предыдущей главе. Там требовался раздельный подход к случаям, когда последовательность $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ являлась экспоненциальной или нет. С помощью следующей теоремы мы покажем, что для обоих случаев справедлива эквивалентность $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) \sim n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, $d\to\infty$, при любом фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$ и при δ из некоторой широкой области интервала $(0,1)$, зависящей от d. Здесь, как и ранее, будем пользоваться обозначениями (3.30) и (3.31).

Теорема 4.2.1. *Пусть для $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ выполнено условие (3.57), причем $\sigma>0$. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,1)$ и произвольной последовательности $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ из $(0,1)$ такой, что*

$$\lim_{d\to\infty}\frac{|\ln\bigl(\min\{\delta_{d,\varepsilon},1-\delta_{d,\varepsilon}\}\bigr)|}{d^{-1/2}\exp\{Ed+q_{\varepsilon,1}d^{1/2}\}} = 0, \tag{4.13}$$

будем иметь

$$n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) \sim n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon), \quad d\to\infty. \tag{4.14}$$

Доказательство теоремы 4.2.1. Зафиксируем произвольный порог $\varepsilon\in(0,1)$ и последовательность $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющую условию теоремы. Далее выберем сколь угодно малое число $h>0$. Нам нужно показать, что для всех d, начиная с некоторого места, справедливо неравенство

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-h} \leqslant n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) \leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{h}. \tag{4.15}$$

При этом, конечно, из теоремы 3.4.3 мы изначально знаем, что $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\to\infty$, $d\to\infty$.

Как следует из (3.5.2) и (3.5.4) точная асимптотика $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ зависит от экспоненциальности спектра $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$. Чтобы это учитывать мы введем следующие специальные параметры. Пусть

b_λ равен шагу последовательности $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$, если она экспоненциальна, и нулю, если — нет. Введем также величину:

$$C_\lambda := \lim_{t\to b_\lambda} \frac{t}{1-e^{-t}}.$$

Очевидно, $C_\lambda = b/(1-e^{-b})$, если $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ экспоненциальна с показателем b, и $C_\lambda = 1$ иначе. Тем самым, всегда $C_\lambda \geqslant 1$. Заметим, что из теорем 3.5.2 и 3.5.4 вытекают следующие оценки при больших d:

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant (2C_\lambda + b_\lambda)\cdot \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}, \tag{4.16}$$

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \geqslant \frac{C_\lambda}{2}\cdot \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}. \tag{4.17}$$

Кроме того, справедлив также и развернутый аналог (4.17):

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \geqslant \frac{C_\lambda}{2}\cdot \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}} \cdot \exp\left\{Ed + q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma - b_\lambda/2\right\}. \tag{4.18}$$

Обозначим:

$$n_{d,h}^{+}(\varepsilon) := \lfloor n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{h}\rfloor, \qquad n_{d,h}^{-}(\varepsilon) := \lceil n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-h}\rceil,$$

и также

$$\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon) := \lambda_{d,n_{d,h}^{+}(\varepsilon)}, \qquad \lambda_{d,h}^{-}(\varepsilon) := \lambda_{d,n_{d,h}^{-}(\varepsilon)},$$

где $\lfloor x\rfloor := \max\{n\in\mathbb{N} : n \leqslant x\}$ и $\lceil x\rceil := \min\{n\in\mathbb{N} : n\geqslant x\}$. Легко видеть, что

$$\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon) \leqslant \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon), \qquad \lambda_{d,h}^{-}(\varepsilon) \geqslant \lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon). \tag{4.19}$$

Далее мы будем использовать обозначения (2.27) и (2.28). Докажем, что при всех достаточно больших d выполнится неравенство $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) \leqslant n_{d,h}^{+}(\varepsilon)$. Для этого мы покажем (см. (2.24)), что $P_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)) \leqslant \delta_{d,\varepsilon}$ при всех больших d. Оценим величину $\ln P_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^{+}(\varepsilon))$ с помощью неравенства (2.29) леммы 2.2.1:

$$\ln P_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)) \leqslant -\ln\sqrt{e/2}\cdot r_{d,\varepsilon}\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)\cdot \min\left\{\frac{r_{d,\varepsilon}\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)}{\omega_d\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)}, 1\right\}\cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}. \tag{4.20}$$

Рассмотрим множитель $r_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^{+}(\varepsilon))$. Оценим его снизу, используя определение $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
r_{d,\varepsilon}\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big) &= \varepsilon^2 - \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,h}^{+}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\\
&= \varepsilon^2 - \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} + \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)<m\leqslant n_{d,h}^{+}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\\
&\geqslant \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)<m\leqslant n_{d,h}^{+}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\\
&\geqslant \big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon) - n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\big)\cdot \frac{\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}{\Lambda^d}.
\end{aligned}$$

В силу того, что $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\to\infty$, $d\to\infty$, заключаем

$$r_{d,\varepsilon}\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)\geqslant (e^{h/2}-1)\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\cdot\frac{\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}{\Lambda^d},\tag{4.21}$$

при всех достаточно больших d.

Далее обратимся к величине $\omega_d\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)$. Представим ее в следующем виде, используя считающую функцию $\mathcal{N}_d(x)=\#\{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\lambda_{d,m}\geqslant x\}$:

$$\begin{aligned}\omega_d\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big) &= \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,h}^{+}(\varepsilon)}}\frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d\,\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}\\ &= \big(\mathcal{N}_d(\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon))-n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)\cdot\frac{\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}{\Lambda^d}+\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}}\frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d\,\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Здесь возникновение разности в скобках обусловлено различием условий суммирования $m>n_{d,h}^{+}(\varepsilon)$ и $\lambda_{d,m}<\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)=\lambda_{d,n_{d,h}^{+}(\varepsilon)}$ по $m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d$, которое может проявляется, когда кратность собственного числа $\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)$ больше единицы. Тем не менее, имеем оценку:

$$\omega_d\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)\ \leqslant\ \mathcal{N}_d(\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon))\cdot\frac{\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}{\Lambda^d}+\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}}\frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d\,\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}\,.\tag{4.22}$$

Пусть $\bar b_\lambda:=b_\lambda+\mathbb{1}(b_\lambda=0)>0$. Используя формулы (3.70) и (3.82) лемм 3.5.1 и 3.5.2 при $\gamma=1$, получаем следующую асимптотику при любом фиксированном $z\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-z\bar b_\lambda}\big)\sim C_\lambda\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}\cdot e^{z\bar b_\lambda},\quad d\to\infty.\tag{4.23}$$

Найдем такое положительное целое $z=k_h^{+}$, чтобы $(2C_\lambda+b_\lambda)e^h<C_\lambda e^{k_h^{+}\bar b_\lambda}$. Тогда при всех достаточно больших d с учетом (4.16) и (4.23) выполнятся неравенства:

$$n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^h\leqslant(2C_\lambda+b_\lambda)\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}\cdot e^h<\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-k_h^{+}\bar b_\lambda}\big).$$

Отсюда имеем

$$\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)\geqslant\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-k_h^{+}\bar b_\lambda},\tag{4.24}$$

и также

$$\mathcal{N}_d\big(\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big)\leqslant\mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-k_h^{+}\bar b_\lambda}\big).$$

Используем последние два неравенства и (4.19) для оценки правой части в (4.22):

$$\begin{aligned}\omega_d\big(n_{d,h}^{+}(\varepsilon)\big) &\leqslant \mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-k_h^{+}\bar b_\lambda}\big)\cdot\frac{\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}{\Lambda^d}+e^{k_h^{+}\bar b_\lambda}\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_{d,h}^{+}(\varepsilon)}}\frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d\,\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}\\ &\leqslant \mathcal{N}_d\big(\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-k_h^{+}\bar b_\lambda}\big)\cdot\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}+e^{k_h^{+}\bar b_\lambda}\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}}\frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d\,\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Для ряда во втором слагаемом имеем асимптотику

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d\,\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \sim C_\lambda e^{-b_\lambda}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}},\quad d\to\infty,$$

которая вытекает из формул (3.71) и (3.83) лемм 3.5.1 и 3.5.2, если положить $\gamma=1$. Отсюда с учетом (4.23) при больших d получим

$$\begin{aligned}\omega_d\big(n_{d,h}^+(\varepsilon)\big) &\leqslant 2C_\lambda\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot e^{k\bar b_\lambda}+2C_\lambda e^{-b_\lambda}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\\ &\leqslant 2C_\lambda(e^{k_h^+\bar b_\lambda}+1)\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\end{aligned}$$

Теперь последовательно будем применять формулы (4.21), (4.24) и (4.17) для оценки отношения:

$$\begin{aligned}\frac{r_{d,\varepsilon}\big(n_{d,h}^+(\varepsilon)\big)}{\omega_d\big(n_{d,h}^+(\varepsilon)\big)} &\geqslant \frac{(e^{h/2}-1)\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\cdot\dfrac{\lambda_{d,h}^+(\varepsilon)}{\Lambda^d}}{2C_\lambda(e^{k_h^+\bar b_\lambda}+1)\cdot\dfrac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}}\\ &\geqslant \frac{(e^{h/2}-1)\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\cdot\dfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\cdot e^{-k_h^+\bar b_\lambda}}{2C_\lambda(e^{k_h^+\bar b_\lambda}+1)\cdot\dfrac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}}\\ &\geqslant \frac{(e^{h/2}-1)\cdot\dfrac{C_\lambda}{2}\cdot\dfrac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot e^{-k_h^+\bar b_\lambda}}{2C_\lambda(1+e^{k_h^+\bar b_\lambda})\cdot\dfrac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}}\geqslant\frac{(e^{h/2}-1)}{4(e^{k_h^+\bar b_\lambda}+1)^2}.\end{aligned}$$

Последнее неравенство и оценку (4.21) применяем в неравенстве (4.20):

$$\ln P_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^+(\varepsilon))\leqslant -K_1(h,b_\lambda)\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon),$$

где

$$K_1(h,b_\lambda):=\ln\sqrt{e/2}\cdot(e^{h/2}-1)\cdot\min\left\{\frac{(e^{h/2}-1)}{4(e^{k_h^+\bar b_\lambda}+1)^2},1\right\}>0.$$

Далее из (4.18) при больших d получаем:

$$\begin{aligned}\ln P_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^+(\varepsilon)) &\leqslant -K_1(h,b_\lambda)\cdot\frac{C_\lambda}{2}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot\exp\big\{Ed+q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2}+q_{\varepsilon,2}\sigma-b_\lambda/2\big\}\\ &= -\frac{K_1(h,b_\lambda)C_\lambda\Phi'(q_{\varepsilon,1})e^{q_{\varepsilon,2}\sigma}}{2\sigma e^{b_\lambda/2}}\cdot\frac{\exp\big\{Ed+q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2}\big\}}{d^{1/2}}.\end{aligned}$$

По условию (4.13) при всех достаточно больших d будем иметь $P_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^+(\varepsilon))\leqslant\delta_{d,\varepsilon}$, что (см. (2.24)) и приводит к $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\leqslant n_{d,h}^+(\varepsilon)\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^h$.

Теперь почти аналогично предыдущему докажем, что при всех d, начиная с некоторого места, выполнено $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})\geqslant n_{d,h}^-(\varepsilon)$. Для этого достаточно показать (см. (2.24)), что $\overline{P}_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^-(\varepsilon))\leqslant 1-\delta_{d,\varepsilon}$ при всех больших d. Чтобы оценить величину $\ln\overline{P}_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^-(\varepsilon))$, мы воспользуемся неравенством (2.30) леммы 2.2.1:

$$\ln\overline{P}_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^-(\varepsilon))\leqslant-\frac{1}{4}\cdot\frac{r_{d,\varepsilon}\big(n_{d,h}^-(\varepsilon)\big)^2}{\omega_d\big(n_{d,h}^-(\varepsilon)\big)}\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,h}^-(\varepsilon)}.\tag{4.25}$$

Рассмотрим множитель $|r_{d,\varepsilon}(n^-_{d,h}(\varepsilon))|$. Оценим его снизу, используя определение $n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
|r_{d,\varepsilon}\big(n^-_{d,h}(\varepsilon)\big)| &= \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n^-_{d,h}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} - \varepsilon^2\\
&= \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ n^-_{d,h}(\varepsilon)<m<n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} + \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m\geqslant n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} - \varepsilon^2\\
&\geqslant \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ n^-_{d,h}(\varepsilon)<m<n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\\
&\geqslant \big(n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon) - n^-_{d,h}(\varepsilon) - 1\big)\cdot \frac{\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)}{\Lambda^d}.
\end{aligned}$$

В силу того, что $n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)\to\infty$, $d\to\infty$, при всех достаточно больших d выполнится неравенство

$$r_{d,\varepsilon}\big(n^-_{d,h}(\varepsilon)\big) \geqslant (1-e^{-h/2})\cdot n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)\cdot \frac{\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)}{\Lambda^d}. \tag{4.26}$$

Далее обратимся к величине $\omega_d(n^-_{d,h}(\varepsilon))$. Аналогично замечаниям, приводящим к (4.22), имеем:

$$\begin{aligned}
\omega_d\big(n^-_{d,h}(\varepsilon)\big) &= \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n^-_{d,h}(\varepsilon)}} \frac{\lambda^2_{d,m}}{\Lambda^d\,\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}\\
&= \big(\mathcal{N}_d(\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)) - n^-_{d,h}(\varepsilon)\big)\cdot\frac{\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}{\Lambda^d} + \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}} \frac{\lambda^2_{d,m}}{\Lambda^d\,\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}\\
&\leqslant \mathcal{N}_d(\lambda^-_{d,h}(\varepsilon))\cdot\frac{\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}{\Lambda^d} + \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}} \frac{\lambda^2_{d,m}}{\Lambda^d\,\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}\,.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Найдем такое положительное целое k^-_h, чтобы $C_\lambda e^{-h}/2 > C_\lambda e^{-k^-_h \bar{b}_\lambda}$. Тогда при всех достаточно больших d с учетом (4.17) и (4.23) (при $z=-k^-_h$) выполнятся неравенства

$$n^-_{d,h}(\varepsilon) \geqslant n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{-h} \geqslant \frac{C_\lambda}{2}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)}\cdot e^{-h} > \mathcal{N}_d\big(\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}\big).$$

Отсюда имеем

$$\lambda^-_{d,h}(\varepsilon) < \lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}. \tag{4.28}$$

Применим последнее неравенство, а также (4.19), для оценки правой части в (4.27):

$$\begin{aligned}
\omega_d\big(n^+_{d,h}(\varepsilon)\big) &< \mathcal{N}_d\big(\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)\big)\cdot\frac{\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}}{\Lambda^d} + \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}}} \frac{\lambda^2_{d,m}}{\Lambda^d\,\lambda^-_{d,h}(\varepsilon)}\\
&\leqslant \mathcal{N}_d\big(\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)\big)\cdot\frac{\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}}{\Lambda^d} + e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}}} \frac{\lambda^2_{d,m}}{\Lambda^d\,\lambda^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)e^{k^-_h\bar{b}_\lambda}}.
\end{aligned}$$

Ряд во втором слагаемом имеет асимптотику (формулы (3.71) и (3.83) при $\gamma = 1$):

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}}} \frac{\lambda_{d,m}^2}{\Lambda^d\,\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}} \sim C_\lambda e^{-b_\lambda}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}},\quad d\to\infty,$$

Отсюда с учетом (4.23) при больших d получим

$$\begin{aligned} \omega_d\big(n_{d,h}^-(\varepsilon)\big) &< 2C_\lambda\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot e^{k_h^-\bar{b}_\lambda} + 2C_\lambda e^{-b_\lambda}\cdot e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\\ &\leqslant 4C_\lambda e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}. \end{aligned}$$

Далее с помощью формул (4.21) и (4.17) оценим отношение:

$$\begin{aligned} \frac{|r_{d,\varepsilon}\big(n_{d,h}^-(\varepsilon)\big)|}{\omega_d\big(n_{d,h}^-(\varepsilon)\big)} &> \frac{(1-e^{-h/2})\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\cdot\dfrac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}}{4C_\lambda e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}\cdot\dfrac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}}\\ &\geqslant \frac{(1-e^{-h/2})\cdot\dfrac{C_\lambda}{2}\cdot\dfrac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}}{4C_\lambda e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}\cdot\dfrac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}} = \frac{1-e^{-h/2}}{8\,e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}}\,. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, формулы (4.21) и (4.28) используем для оценки правой части в (4.25):

$$\begin{aligned} \ln\overline{P}_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^-(\varepsilon)) &< -\frac{1}{4}\cdot(1-e^{-h/2})\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\cdot\frac{\lambda_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}{\Lambda^d}\cdot\frac{1-e^{-h/2}}{8\,e^{k_h^-\bar{b}_\lambda}}\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,h}^-(\varepsilon)}\\ &\leqslant -K_2(h,b_\lambda)\cdot n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon), \end{aligned}$$

где

$$K_2(h,b_\lambda) := \frac{(1-e^{-h/2})^2}{32\,e^{2k_h^-\bar{b}_\lambda}} > 0.$$

Далее из (4.18) при больших d получаем:

$$\begin{aligned} \ln\overline{P}_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^-(\varepsilon)) &< -K_2(h,b_\lambda)\cdot\frac{C_\lambda}{2}\cdot\frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma d^{1/2}}\cdot\exp\big\{Ed+q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2}+q_{\varepsilon,2}\sigma-b_\lambda/2\big\}\\ &= -\frac{K_2(h,b_\lambda)C_\lambda\Phi'(q_{\varepsilon,1})e^{q_{\varepsilon,2}\sigma}}{2\sigma e^{b_\lambda/2}}\cdot\frac{\exp\big\{Ed+q_{\varepsilon,1}\sigma d^{1/2}\big\}}{d^{1/2}}. \end{aligned}$$

По условию (4.13) при всех достаточно больших d будем иметь неравенство

$$\overline{P}_{d,\varepsilon}(n_{d,h}^+(\varepsilon)) < 1-\delta_{d,\varepsilon},$$

которое в силу (2.25) влечет $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) > n_{d,h}^-(\varepsilon) > n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-h}$.

В итоге, при всех достаточно больших значениях d имеем двойное неравенство (4.15) для любого сколь угодно малого фиксированного $h>0$. Это приводит к искомой асимптотике (4.14). $\square$

4.3. Логарифмические асимптотики сложности в неоднородных задачах

Мы приступаем к асимптотическому анализу сложности по вероятности в неоднородном тензорном случае. Ограничимся как и для постановки в среднем только рассмотрением ситуации, когда выполнены условия (3.85) и (3.87).

Теорема 4.3.1. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$, *а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$. *Пусть невозрастающая функция* $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ *и функция распределения* $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$, *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *удовлетворяют равенству* $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. *Пусть для* $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, *выполнено условие* (3.85) *и* (3.87). *Если при некотором* $\delta \in (0,1)$ *имеет место асимптотика*

$$\forall\varepsilon \in \mathbf{C}(q) \quad \ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{4.29}$$

то функция распределения $\mathcal{L}$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{L}$. *Спектральная функция Леви для* $\mathcal{L}$ *будет нулевой на отрицательной полуоси.*

Доказательство теоремы 4.3.1. Условие (3.87) по утверждению 3.1.1 дает стремление

$$\frac{\lambda_{d,1}}{\Lambda_d} = \prod_{j=1}^{d} \frac{\lambda_1^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \to 0, \quad d \to \infty. \tag{4.30}$$

Воспользуемся теоремой 2.2.2 для $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta)$ с заданной асимптотикой (4.29) при некотором $\delta \in (0,1)$ и произвольном $\varepsilon \in (0,1)$. Получаем сходимость

$$\forall x \in \mathbf{C}(\mathcal{L}) \quad \lim_{d\to\infty} F_d^{\langle A,B\rangle}(x) = \mathcal{L}(x), \tag{4.31}$$

где $F_d^{\langle A,B\rangle}$, $d \in \mathbb{N}$, определяются по формуле (3.8) и представляют собой функции распределения центрированных и нормированных сумм независимых случайных величин $U^{(j)}$, $j \in \mathbb{N}$ (см. (3.9)). По теореме 3.3.3 слабыми пределами для $(F_d^{\langle A,B\rangle})_{d\in\mathbb{N}}$ могут выступать только функции распределения саморазложимых законов. Далее следуют рассуждения совершенно аналогичные тем, которые присутствуют в доказательстве теоремы 3.6.1. □.

Сформулируем необходимые и достаточные условия для асимптотического представления (4.29). Ограничиваемся случаем, когда компонента $q(\varepsilon)$ является квантилью некоторого саморазложимого закона.

Теорема 4.3.2. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$, *а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$. *Пусть функция распределения* $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{L}$ *с представлением Леви* (3.16), *где* $L(x) = 0$ *при* $x \in (-\infty, 0)$. *Пусть невозрастающая функция* $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ *и функция распределения* $\mathcal{L}$, *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *удовлетворяют равенству* $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. *Пусть для* $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих*

(3.85) *и* (3.87), *выполнены условия* (A) – (C) *теоремы* 3.6.2. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и для произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$, *удовлетворяющей условиям*

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon), \qquad \varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln \delta_{d,\varepsilon}| - A_d}{B_d} < q(\varepsilon), \tag{4.32}$$

будем иметь

$$\ln n_d^{\text{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{4.33}$$

Из теорем 3.6.2 и 4.3.2 вытекает следующее удобное для приложений следствие.

Следствие 4.3.1. *Пусть последовательности* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *и* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$, *функции* $\mathcal{L}$ *и* q *такие, как в теореме* 4.3.2. *Пусть* $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$ *удовлетворяют* (3.85) *и* (3.87). *Пусть также*

$$\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty,$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ *и для произвольной последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ *из* $(0,1)$, *удовлетворяющей условиям* (4.32) *будем иметь:*

$$\ln n_d^{\text{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) = \ln n_d^{\text{avg}}(\varepsilon) + o(B_d), \quad d \to \infty.$$

Доказательство теоремы 4.3.2. Из условий на $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, вытекает сходимость (4.31) (см. доказательство теоремы 3.6.2), где A_d и B_d, $d \in \mathbb{N}$, выбираются в соответствии с теоремой 3.6.2. Условие (3.87) дает по утверждению 3.1.1 соотношение (4.30). Далее, применяя теорему 2.2.1, завершаем доказательство. Справедливость представления (4.4) *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ вытекает из непрерывности функции q на $(0,1)$ как к.ф. саморазложимого закона (см. замечание 3.3.2). $\square$

Теорема 4.3.3. *Пусть* $A = (A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— последовательность из* $\mathbb{R}$, *а* $B = (B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ *— такая последовательность, что* $B_d \to \infty$ *при* $d \to \infty$. *Пусть невырожденная функция распределения* $\mathcal{L}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{L}$ *с представлением Леви* (3.16), *где* $L(x) = 0$ *при* $x \in (-\infty, 0)$. *Пусть невозрастающая функция* $q\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ *и функция распределения* $\mathcal{L}$, *для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *удовлетворяют равенству* $q(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)$. *Пусть для* $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, *выполнено* (3.85) *и* (3.87), *и для некоторого фиксированного* $\delta \in (0,1)$ *имеем*

$$\forall\varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\text{prob}}(\varepsilon, \delta) = A_d + q(\varepsilon)B_d + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{4.34}$$

Тогда выполнены условия (A) – (C) *теоремы* 3.6.2 *и асимптотика* (4.34) *распространяется на* $\delta = \delta_{d,\varepsilon} \in (0,1)$ *из* (4.32).

Доказательство теоремы 4.3.3. Условие (3.87) по утверждению 3.1.1 дает (4.30). Далее из теоремы 2.2.2 имеем сходимость (4.31) с заданными константами A_d и B_d, $d \in \mathbb{N}$. Из полученной сходимости, как показано в доказательстве теоремы 3.6.2, следует, что последовательности $(\lambda_i^{(j)})_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$, с константами A_d и B_d должны удовлетворять условиям (A) – (C) теоремы 3.6.2. Отсюда с учетом теоремы 4.3.2 видно, что асимптотика $\ln n_d^{\text{prob}}(\varepsilon, \delta)$ распространяется и на $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$, удовлетворяющие (4.32). $\square$

Глава 5.

Приложения к тензорным случайным полям

В предыдущих главах мы осуществили асимптотический анализ сложности аппроксимации в постановках в среднем и по вероятности для линейных тензорных задач. В настоящей главе мы будем применять полученные критерии к тензорным случайным полям. Однако отметим, что при этом мы не ставим себе целью изучение всех естественных случаев, где эти критерии потенциально применимы. В то же время, мы продемонстрируем на интересных и показательных примерах всю продуктивность результатов, полученных в главах 2–4.

5.1. Однородные случайные поля с регулярным спектром

Рассмотрим последовательность однородных тензорных случайных полей с корреляционными функциями вида (1.34), где $\mathcal{K}^{(j)} = \mathcal{K}$, $j \in \mathbb{N}$. Предположим, что собственные числа λ_i, $i \in \mathbb{N}$, корреляционного оператора, отвечающего $\mathcal{K}$, имеют следующую асимптотику:

$$\frac{\lambda_i}{\Lambda} \sim \frac{\beta}{i^{1+p_0}(\ln i)^{1+p_1}(\ln\ln i)^{1+p_2}}, \quad i \to \infty, \tag{5.1}$$

где $\beta > 0$, $p_0 \geqslant 0$, а числа $p_1 \in \mathbb{R}$ и $p_2 \in \mathbb{R}$ подбираются так, чтобы $\Lambda := \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i < \infty$. Часто бывает, что явные аналитические выражения для λ_i, $i \in \mathbb{N}$, мы не знаем, как, например, в случае дробного броуновского движения. Однако все же будем предполагать, что мы можем вычислять всевозможные спектральные характеристики, составленные из λ_i, $i \in \mathbb{N}$, со сколь угодно большой точностью (информационная операция, см. введение). В настоящем параграфе нас будут интересовать логарифмические асимптотики при $d \to \infty$ сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta)$ для случайных полей с таким спектром при различных значениях показателей p_0, p_1 и p_2.

Случаи $p_0 > 0$, $p_1 \in \mathbb{R}$, $p_2 \in \mathbb{R}$ или $p_0 = 0$, $p_1 > 2$, $p_2 \in \mathbb{R}$ или $p_0 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 > 0$

В этих ситуациях, как несложно проверить, ряд в условии (3.29) будет сходиться (причем из (5.1) для характеристик E и σ^2, определенных по формулам (3.30) и (3.31), очевидно имеем

$E > 0$ и $\sigma^2 > 0$). Следовательно, сложность в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ в соответствии с теоремой 3.4.3 имеет асимптотическое представление (3.35). Логарифмическая асимптотика для сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon})$ по теореме 4.1.2 имеет такую же форму в достаточно широкой области (4.3) уровня значимости $\delta = \delta_{d,\varepsilon}$ при $B_d = \sigma d^{1/2}$, $d \in \mathbb{N}$.

Сделанные замечания, в частности, справедливы для тензорных степеней процесса дробного броуновского движения (см. пункт 1.2.4), т.к. здесь мы можем положить $p_0 = \gamma$, $p_1 = p_2 = -1$ и $\beta\,\Lambda = \Gamma(1+\gamma)\sin(\pi\gamma/2)/\pi^{1+\gamma}$.

Прежде чем рассматривать остальные случаи для p_0, p_1 и p_2, мы найдем асимптотику сумм $\sum_{i\geqslant n} \lambda_i/\Lambda$ при $n \to \infty$, для ситуации, когда $p_0 = 0$, $p_1 > 0$ и $p_2 \in \mathbb{R}$. В соответствии с предположением (5.1) при $n \to \infty$ имеем:

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geqslant n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \;&\sim\; \sum_{i\geqslant n} \frac{\beta}{i\,(\ln i)^{1+p_1}(\ln\ln i)^{1+p_2}} \\
&\sim\; \int\limits_n^\infty \frac{\beta\,\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)^{1+p_1}(\ln\ln t)^{1+p_2}} \\
&=\; \int\limits_{\ln n}^\infty \frac{\beta\,\mathrm{d}z}{z^{1+p_1}(\ln z)^{1+p_2}}.
\end{aligned}$$

По лемме 3.3.1 получаем

$$\sum_{i\geqslant n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \;\sim\; \frac{\beta}{p_1(\ln n)^{p_1}(\ln\ln n)^{1+p_2}}, \quad n \to \infty.$$

Пусть $i_x := \min\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i/\Lambda < e^{-x}\}$. Тогда

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_i}{\Lambda}\,\mathbb{1}\Big(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\Big) = \sum_{i\geqslant i_x} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \sim \frac{\beta}{p_1(\ln i_x)^{p_1}(\ln\ln i_x)^{1+p_2}}, \quad x \to \infty.$$

Найдем с помощью леммы 3.3.4 и утверждения 3.3.1 асимптотику i_x при $x \to \infty$:

$$\begin{aligned}
i_x \;&\sim\; e^x\big(\beta^{-1}(\ln)^{1+p_1}(\ln\ln)^{1+p_2}\big)^*(e^x) \\
&\sim\; \frac{\beta\,e^x}{(\ln e^x)^{1+p_1}(\ln\ln e^x)^{1+p_2}} \\
&=\; \frac{\beta\,e^x}{x^{1+p_1}(\ln x)^{1+p_2}}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Отсюда, в частности, имеем $\ln i_x \sim x$ и $\ln\ln i_x \sim \ln x$, $x \to \infty$. В итоге получаем:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_i}{\Lambda}\,\mathbb{1}\Big(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\Big) = x^{-p_1}\,\varphi(x), \qquad \varphi(x) \sim \frac{\beta}{p_1(\ln x)^{1+p_2}}, \quad x \to \infty. \tag{5.3}$$

Случай $p_0 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 \leqslant 0$

В этой ситуации условие (3.29) не выполнено. Однако, как видно из (5.3), справедливо (3.32) при $\alpha = 2$. Здесь логарифмическая асимптотика сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ по теореме 3.4.2 имеет вид (3.33) с $A_d := Ed$ и $B_d := d^{1/2}\cdot((2\bar\varphi)^{-1/2})^*(d^{1/2})$, где $\bar\varphi$ — функция де Хаана для φ (см. замечания после теоремы 3.4.2). Асимптотика для сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon})$ имеет такую же форму, как и для сложности в среднем (теорема 4.1.2) с уровнем значимости $\delta_{d,\varepsilon}$ из области (4.3). Найдем явный вид асимптотики B_d при $d \to \infty$. Для этого нужно выяснить асимптотику $\bar{\varphi}$ на ∞:

$$\bar{\varphi}(x) = \int_0^x \frac{\varphi(t)}{t} \mathrm{d}t \sim \int_2^x \frac{\varphi(t)}{t} \mathrm{d}t \sim \int_2^x \frac{\beta \, \mathrm{d}t}{p_1 t (\ln t)^{1+p_2}} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{\beta \, \mathrm{d}z}{p_1 z^{1+p_2}}. \tag{5.4}$$

При $p_2 < 0$ получаем

$$\bar{\varphi}(x) \sim \frac{\beta}{p_1(-p_2)} (\ln x)^{-p_2}, \quad x \to \infty.$$

Тогда по лемме 3.3.4 и утверждению 3.3.1 будем иметь при $x \to \infty$:

$$((2\bar{\varphi})^{-1/2})^*(x) \sim \sqrt{2}\, \bar{\varphi}(x)^{1/2} \sim \left(\frac{2\beta}{p_1(-p_2)} \right)^{1/2} (\ln x)^{-p_2/2}$$

Подставляя эту асимптотику в выражение для констант B_d, получим:

$$B_d \sim \left(\frac{\beta \, 2^{1+p_2}}{p_1(-p_2)} \right)^{1/2} \cdot d^{1/2} \cdot (\ln d)^{-p_2/2}, \quad d \to \infty.$$

При $p_2 = 0$ будем иметь

$$\bar{\varphi}(x) \sim \frac{\beta}{p_1} \ln \ln x, \quad x \to \infty.$$

Тогда из леммы 3.3.4 и утверждения 3.3.1 следует

$$((2\bar{\varphi})^{-1/2})^*(x) \sim \sqrt{2}\, \bar{\varphi}(x)^{1/2} \sim \left(\tfrac{2\beta}{p_1} \ln \ln x \right)^{1/2}, \quad x \to \infty.$$

Здесь для констант B_d получаем асимптотику:

$$B_d \sim \left(\tfrac{2\beta}{p_1} \right)^{1/2} \cdot d^{1/2} \cdot (\ln \ln d^{1/2})^{1/2}, \quad d \to \infty.$$

Случай $p_0 = 0$, $p_1 \in (0, 2)$, $p_2 \in \mathbb{R}$

С учетом (5.3) логарифмические асимптотики для $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon})$ описываются формулами (3.39) и (4.8) теорем 3.4.4 и 4.1.5 соответственно. Здесь константы B_d выбираются по формуле (3.45) с $\alpha = p_1$ (см. комментарии к теореме 3.4.4):

$$B_d := d^{1/p_1} \cdot \left(\frac{\varphi(d^{1/p_1})}{c_{p_1}} \right)^{1/p_1}, \quad d \in \mathbb{N}.$$

В силу (5.3) получаем для них асимптотику:

$$B_d \sim \left(\tfrac{\beta}{p_1^{2+p_2} c_{p_1}} \right)^{1/p_1} \cdot \frac{d^{1/p_1}}{(\ln d)^{(1+p_2)/p_1}}, \quad d \to \infty.$$

Константы A_d, $d \in \mathbb{N}$, выбираются следующим образом (см. теорему 3.4.4). Полагаем $A_d := 0$ при $p_1 \in (0, 1)$, $A_d := Ed$ при $p_1 \in (1, 2)$, а в случае $p_1 = 1$ — по формуле (3.46):

$$A_d := d\, \bar{\varphi}(B_d) - \mathbf{c} \cdot \frac{2}{\pi} B_d, \quad d \in \mathbb{N}.$$

причем $A_d \sim d\,\bar{\varphi}(B_d)$, $d \to \infty$ (см. комментарии к теореме 3.4.4). Найдем асимптотику A_d. Для этого рассмотрим величину

$$\bar{\varphi}(B_d) = \int\limits_0^{B_d} \frac{\varphi(t)}{t} \mathrm{d}t.$$

Если $p_2 > 0$, то при $d \to \infty$ этот интеграл стремится к константе E и тогда $A_d \sim dE$, $d \to \infty$. В случае $p_2 \leqslant 0$ интеграл расходится и справедлива эквивалентность (5.4):

$$\bar{\varphi}(B_d) \sim \int\limits_{\ln 2}^{\ln B_d} \frac{\beta}{z^{1+p_2}} \mathrm{d}z.$$

Следовательно, с учетом того, что $\ln B_d \sim \ln d$, $d \to \infty$, при $p_2 < 0$ имеем

$$A_d \sim \tfrac{\beta}{(-p_2)} \cdot d \cdot (\ln d)^{-p_2}, \quad d \to \infty.$$

Если же $p_2 = 0$, то справедлива асимптотика:

$$A_d \sim \beta \cdot d \cdot \ln\ln d, \quad d \to \infty.$$

Случай $p_0 = 0$, $p_1 = 0$, $p_2 > 0$

Для данного случая найдем асимптотику сумм $\sum_{i \geqslant n} \lambda_i/\Lambda$ при $n \to \infty$. В соответствии с предположением (5.1) имеем при $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geqslant n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} &\sim \sum_{i \geqslant n} \frac{\beta}{i\,(\ln i)(\ln\ln i)^{1+p_2}} \\ &\sim \int\limits_n^{\infty} \frac{\beta\,\mathrm{d}t}{t\,(\ln t)(\ln\ln t)^{1+p_2}} \\ &= \int\limits_{\ln n}^{\infty} \frac{\beta\,\mathrm{d}z}{z(\ln z)^{1+p_2}} \\ &= \int\limits_{\ln\ln n}^{\infty} \frac{\beta\,\mathrm{d}y}{y^{1+p_2}} = \frac{\beta}{p_2(\ln\ln n)^{p_2}}. \end{aligned}$$

Пусть $i_x := \min\{i \in \mathbb{N} : \lambda_i/\Lambda < e^{-x}\}$. Тогда

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \mathbb{1}\Big(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\Big) = \sum_{i \geqslant i_x} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \sim \frac{\beta}{p_2(\ln\ln i_x)^{p_2}}, \quad x \to \infty.$$

Индекс i_x в соответствии с (5.2) имеет асимптотику:

$$i_x \sim \frac{\beta\, e^x}{x(\ln x)^{1+p_2}}, \quad x \to \infty. \tag{5.5}$$

В итоге имеем:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_i}{\Lambda} \mathbb{1}\Big(\frac{\lambda_i}{\Lambda} < e^{-x}\Big) = \varphi(x), \qquad \varphi(x) \sim \frac{\beta}{p_2(\ln x)^{p_2}}, \quad x \to \infty. \tag{5.6}$$

В силу теорем 3.4.5 и 4.1.6 сложность в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ и сложность по вероятности $n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon})$ удовлетворяют соответственно соотношениям (3.50) и (4.11), которые можно переписать в следующей форме:

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \ \sim \ \ln\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) \ \sim \ \left(\frac{\beta d}{p_2|\ln(1-\varepsilon^2)|}\right)^{1/p_2}, \quad d \to \infty,$$

где уровень значимости $\delta_{d,\varepsilon}$, $d \in \mathbb{N}$ может варьироваться в экстремально широкой области:

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln\ln|\ln(1-\delta_{d,\varepsilon})|}{\left(\frac{\beta d}{p_2|\ln(1-\varepsilon^2)|}\right)^{1/p_2}} < 1, \qquad \varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln\ln|\ln\delta_{d,\varepsilon}|}{\left(\frac{\beta d}{p_2|\ln(1-\varepsilon^2)|}\right)^{1/p_2}} \leqslant 1. \tag{5.7}$$

В итоге мы видим, что сложности здесь растут как «экспонента в экспоненте».

5.2. Броуновский лист и многопараметрический броуновский мост

Пусть при каждом $d \in \mathbb{N}$ задан броуновский лист $X_d(t)$, $t \in [0,1]$, (см. пункт 1.2.4) с корреляционной функцией

$$\mathcal{K}_d(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \min\{t_j, s_j\}, \quad t, s \in [0,1]^d, \quad d \in \mathbb{N},$$

где $t = (t_1, \ldots, t_d)$ и $s = (s_1, \ldots, s_d)$.

Исследуем точное асимптотическое поведение сложности в среднем и по вероятности для последовательности полей $X_d(t)$, $d \in \mathbb{N}$, опираясь на результаты глав 3 и 4. Для этого мы должны проанализировать последовательность собственных чисел корреляционного оператора винеровского процесса, из которого тензорно составляются поля X_d. Пусть $(\lambda_i^{\mathrm{W}})_{i\in\mathbb{N}}$ обозначает последовательность собственных чисел стандартного винеровского процесса. Как отмечено в пункте 1.2.4, λ_i^{W} имеют имеют явное аналитическое выражение:

$$\lambda_i^{\mathrm{W}} = \frac{1}{\pi^2(i-1/2))^2}.$$

Проверим, что для $(\lambda_i^{\mathrm{W}})_{i\in\mathbb{N}}$ выполнены все условия теоремы 3.5.2. Пусть $\Lambda^{\mathrm{W}} := \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i^{\mathrm{W}}$, простым вычислением убеждаемся, что $\Lambda^{\mathrm{W}} = 1/2$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln\frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}\right|^3 \frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln\Bigl(\pi^2(i-1/2)^2/2\Bigr)\right|^3 \frac{2}{\pi^2(i-1/2)^2}.$$

Легко видеть, что он является сходящимся, отсюда имеем выполнение условия (3.57) теоремы 3.5.2. Заметим также, что в соответствии с определениями из параграфа 3.5 $(\lambda_i^{\mathrm{W}})_{i\in\mathbb{N}}$ является неэкспоненциальной. Действительно, это вытекает из следующей сходимости:

$$\left|\ln\frac{\lambda_{i+1}^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}\right| - \left|\ln\frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}\right| = \ln\frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\lambda_{i+1}^{\mathrm{W}}} = 2\ln\left(\frac{i-1/2}{i+1/2}\right) \to 0, \quad i \to \infty.$$

Определим

$$E^{\mathrm{W}} := \sum_{i\in\mathbb{N}} \left|\ln \frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}\right| \frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}, \quad \sigma^{\mathrm{W}} := \left(\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left(\left|\ln \frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}\right| - E^{\mathrm{W}}\right)^2 \frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}\right)^{1/2}.$$

Используя теорему 3.5.2, находим точную асимптотику сложности в среднем для X_d^{Bs}:

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \sim \frac{\Phi'(q_{\varepsilon,1})}{\sigma^{\mathrm{W}} d^{1/2}} \cdot \exp\left\{E^{\mathrm{W}} d + q_{\varepsilon,1}\sigma^{\mathrm{W}} d^{1/2} + q_{\varepsilon,2}\sigma^{\mathrm{W}}\right\}, \quad d\to\infty.$$

где

$$q_{\varepsilon,1} := \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2), \qquad q_{\varepsilon,2} := \frac{q_{\varepsilon,1}^2 - 1}{6(\sigma^{\mathrm{W}})^3} \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \left(\left|\ln \frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}\right| - E^{\mathrm{W}}\right)^3 \frac{\lambda_i^{\mathrm{W}}}{\Lambda^{\mathrm{W}}}.$$

Для вычисления точной асимптотики сложности по вероятности мы воспользуемся теоремой 4.2.1. Тогда для любого $\varepsilon\in(0,1)$ и произвольной последовательности $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$ из $(0,1)$ такой, что

$$\lim_{d\to\infty} \frac{|\ln\bigl(\min\{\delta_{d,\varepsilon}, 1-\delta_{d,\varepsilon}\}\bigr)|}{d^{-1/2}\exp\{E^{\mathrm{W}} d + q_{\varepsilon,1}\sigma^{\mathrm{W}} d^{1/2}\}} = 0,$$

будем иметь

$$\forall\varepsilon\in(0,1)\quad n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon}) \sim n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon), \quad d\to\infty.$$

Асимптотический анализ для многопараметрического броуновского моста совершенно аналогичен тому, как это только что проделано для поля Винера-Ченцова: последовательность $(\lambda_i^{\mathrm{Bb}})_{i\in\mathbb{N}}$ также не является экспоненциальной и удовлетворяет (3.57).

5.3. Многопараметрический эйлеровский интегрированный процесс

Пусть при каждом d задан многопараметрический эйлеровский интегрированный процесс $X_d(t)$, $t\in[0,1]^d$ с нулевым средним и корреляционной функцией следующего вида:

$$\mathcal{K}_d(t,s) = \prod_{j=1}^{d} \mathcal{K}^{(j)}(t_j,s_j), \quad t,s\in[0,1]^d, \quad d\in\mathbb{N},$$

где $t=(t_1,\ldots,t_d)$ и $s=(s_1,\ldots,s_d)$, $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — неотрицательная неубывающая последовательность целых чисел, корреляционные функции $\mathcal{K}^{(j)} = \mathcal{K}_{r_j}^{E}$, $j\in\mathbb{N}$, определяются по формуле (1.36). Собственные числа, соответствующие каждой $\mathcal{K}^{(j)}$, как указано в пункте 1.2.4 введения, имеют вид

$$\lambda_i^{(j)} = \frac{1}{(\pi(i-1/2))^{2r_j+2}}, \quad i\in\mathbb{N}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

Для полей X_d, $d\in\mathbb{N}$, в статье [63] найдены критерии W-, QP-, P-, SP-трактабильности. Сформулируем эти результаты в рамках следующей теоремы.

Теорема 5.3.1. *Рассмотрим задачу аппроксимации многопараметрического эйлеровского интегрированного процесса.*

Для W*-трактабильности необходимо и достаточно*

$$\lim_{j\to\infty} r_j = \infty. \tag{5.8}$$

Если (5.8) *не выполнено, то для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *величина* $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ *растет экспоненциально по* d.

Для QP*-трактабильности необходимо и достаточно*

$$\sup_{d\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln_+ d} \sum_{j=1}^{d} (1+r_j)\, 3^{-2r_j} < \infty, \tag{5.9}$$

где $\ln_+ d = \max\{1, \ln d\}$.

Для P*-трактабильности необходимо и достаточно*

$$\exists\, \tau \in (0,1) \quad \sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2\tau r_j} < \infty,$$

что эквивалентно условию

$$\varliminf_{j\to\infty} \frac{r_j}{\ln j} > \frac{1}{2\ln 3}.$$

Задача SP*-трактабильна тогда и только тогда, когда она* P*-трактабильна.*

Данная теорема в зависимости от типа трактабильности задачи аппроксимации предоставляет мажоранту для сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ как функции двух независимых переменных $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \in \mathbb{N}$. Мы будем изучать поведение $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при произвольно фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и $d \to \infty$. Ограничимся рассмотрением случаев, когда отношение $\lambda_1^{(j)}/\lambda_2^{(j)}$ первых двух собственных чисел ведет себя регулярно по $j \in \mathbb{N}$ в соответствии со следующей асимптотикой:

$$\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 3^{-2(r_j+1)} \sim \frac{\beta}{j(\ln j)^p}, \quad j \to \infty. \tag{5.10}$$

где $\beta > 0$ и $p \in \mathbb{R}$.

Случай $p > 1$

В этой ситуации, как несложно увидеть из теоремы 5.3.1, задача аппроксимации является QP-трактабильной, но не SP-трактабильной. В соответствии с этим при некоторых $c > 0$ и $t > 0$ имеем

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \forall d \in \mathbb{N} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \leqslant c \exp\bigl\{t(1+\ln d)(1+\ln \varepsilon^{-1})\bigr\}.$$

Как мы видим, в приведенной оценке мажоранта стремится к ∞ при $d \to \infty$. В то же время, на самом деле при фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ величина $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ ограничена по параметрической размерности d, т.е.

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \sup_{d\in\mathbb{N}} n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) < \infty, \tag{5.11}$$

что свидетельствует в данном случае о завышенности QP-оценки. Для доказательства (5.11) рассмотрим следующие суммы

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=2}^{\infty}(2i-1)^{-2r_j-2}.$$

В силу невозрастания r_j, $j \in \mathbb{N}$, имеем:

$$\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=2}^{\infty}(2i-1)^{-2r_j-2} = \sum_{j=1}^{d} c_3(r_j)\, 3^{-2r_j-2} \leqslant c_3(r_1) \sum_{j=1}^{d} 3^{-2r_j-2},$$

где $c_3(r) := 1 + \sum_{i=3}^{\infty}\left(\frac{2i-1}{3}\right)^{-2r-2}$. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} 3^{-2r_j-2}$ при условии (5.10) с $p > 1$ является сходящимся, следовательно, по утверждению 3.1.2 имеем (5.11).

Случай $p = 1$

В данном случае мы имеем $3^{2(r_j+1)} \sim (j \ln j)/\beta$ и $r_j + 1 \sim \frac{\ln j}{2\ln 3}$ при $j \to \infty$. Отсюда замечаем

$$\frac{1}{\ln d} \sum_{j=1}^{d} (1 + r_j)\, 3^{-2r_j-2} \sim \frac{1}{\ln d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\beta}{(2\ln 3) j} \to \frac{\beta}{2\ln 3}, \quad d \to \infty.$$

В силу условия (5.9) налицо QP-трактабильность. Однако по сравнению с предыдущим случаем, где $p > 1$, здесь $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \to \infty$, $d \to \infty$ при любом $\varepsilon \in (0,1)$. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=2}^{\infty}(2i-1)^{-2r_j-2} \geqslant \sum_{j=1}^{d} 3^{-2r_j-2}, \tag{5.12}$$

где последний ряд расходится. Тогда по утверждению 3.1.1 имеем требуемое стремление. Найдем логарифмическую асимптотику $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$.

Утверждение 5.3.1. *Пусть выполнено условие* (5.10) *при* $p = 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда*

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)\ln d + o(\ln d), \quad d \to \infty, \tag{5.13}$$

где $\mathcal{L}$ *— саморазложимый закон распределения с представлением Леви* (3.16), *в котором* $\mu = \beta\pi/4$, $\sigma^2 = 0$ *и* $L(x) = \beta \ln x\, \mathbb{1}(x \in (0,1))$.

Доказательство утверждения 5.3.1. Рассмотрим суммы

$$\sum_{j=1}^{d} \sum_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}^{(j)}: i > 2} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=3}^{\infty}(2i-1)^{-2r_j-2} = \sum_{j=1}^{d} c_5(r_j)\, 5^{-2r_j-2}. \tag{5.14}$$

где $c_5(r) := 1 + \sum_{i=4}^{\infty}\left(\frac{2i-1}{5}\right)^{-2r-2}$. В силу стремления $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ к ∞, имеем $c_5(r_j) \to 1$. В то же время, по предположению теоремы справедлива следующая асимптотика

$$5^{-2(r_j+1)} \sim \left(\frac{\beta}{j \ln j}\right)^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}, \quad j \to \infty,$$

из которой вытекает сходимость ряда (5.14). Воспользуемся теоремой 3.6.3 при $N = 2$. Положим $A_d = 0$ и $B_d = \ln(\lambda_1^{(d)}/\lambda_2^{(d)})$, $d \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает саморазложимый закон распределения, указанный в формулировке доказываемой теоремы. Проверим выполнение условий (A)–(C) теоремы 3.6.3 при $\mu = \beta\pi/4$, $\sigma^2 = 0$, $L(x) = \beta \ln x\, \mathbb{1}(x \in (0,1))$ и заданных $(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$, $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$.

Покажем, что при любом фиксированном $x > 0$ имеет место сходимость

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\right) \to -\beta \ln x\, \mathbb{1}(x \in (0,1)). \tag{5.15}$$

При $x \geqslant 1$ она, очевидно, выполнена по определению B_d и по невозрастанию $\lambda_2^{(j)}/\lambda_1^{(j)}$. Пусть $x \in (0,1)$. Обозначим $j_{d,x}^{(1)} := \min\{j \in \mathbb{N} : 3^{-2(r_j+1)} < e^{-xB_d}\}$. Тогда по монотонности $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} < e^{-xB_d}\right) = \sum_{j=j_{d,x}^{(1)}}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}.$$

В соответствии с условиями на рост r_j при $j \to \infty$, и тем, что $j_{d,x}^{(1)} \to \infty$, получаем

$$\sum_{j=j_{d,x}^{(1)}}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \sim \sum_{j=j_{d,x}^{(1)}}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=j_{d,x}^{(1)}}^{d} 3^{-2r_j-2} \sim \sum_{j=j_{d,x}^{(1)}}^{d} \frac{\beta}{j \ln j}, \quad d \to \infty.$$

Воспользуемся асимптотикой (см. [19], №2.12, с. 40):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln k} = \ln\ln k + c + o(1), \quad n \to \infty, \tag{5.16}$$

где c некоторая константа. При $d \to \infty$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{j=j_{d,x}^{(1)}}^{d} \frac{\beta}{j \ln j} &= \beta\big(\ln\ln d - \ln\ln j_{d,x}^{(1)}\big) + o(1) \\
&= \beta\left(\ln\ln d - \ln\ln \frac{d^x(1+o(1))}{\beta x \ln d}\right) + o(1) \\
&= \beta\big(\ln\ln d - \ln(x \ln d)\big) + o(1) \\
&= -\beta \ln x + o(1).
\end{aligned}$$

Это завершает доказательство сходимости (5.15) при $x \in (0,1)$.

Проверим условие (B) теоремы 3.6.3:

$$\frac{1}{B_d}\left(A_d - \sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - \sum_{j=1}^{d} \left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right) \to -\mu - \int\limits_{(0,\infty)} \frac{x^3\,\mathrm{d}L(x)}{1+x^2}, \quad d \to \infty. \tag{5.17}$$

Вычислим явно интеграл в правой части последнего равенства с учетом заданных μ и L:

$$\int\limits_{(0,\infty)} \frac{x^3\,\mathrm{d}L(x)}{1+x^2} = \int\limits_{(0,1)} \frac{\beta\, x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \beta - \int\limits_{(0,1)} \frac{\beta\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \beta(1 - \pi/4) = \beta - \mu.$$

Следовательно, условие (5.17) при подстановке $A_d = 0$, $d \in \mathbb{N}$, примет вид:

$$\frac{1}{B_d}\left(\sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} + \sum_{j=1}^{d}\left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right) \to \beta, \quad d \to \infty. \tag{5.18}$$

Заметим, что для B_d, $d \in \mathbb{N}$, по (5.10) верно $B_d \sim \ln d$, $d \to \infty$. С учетом (5.10) имеем при $d \to \infty$:

$$\frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{d}\left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \sim \frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{d}\left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \sim \frac{1}{\ln d}\sum_{j=1}^{d}\left(\ln j \cdot \frac{\beta}{j \ln j}\right) \to \beta. \tag{5.19}$$

Далее рассмотрим сумму:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} &= \frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{d} \ln\Bigl(1 + \sum_{i \geqslant 2} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\Bigr) \\
&\leqslant \frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{d} \sum_{i \geqslant 2} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \\
&\leqslant \frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} + \frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i > 2} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}.
\end{aligned}$$

В силу сходимости ряда (5.14) и $B_d \to \infty$, $d \to \infty$, очевидно, имеем:

$$\frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i > 2} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \to 0, \quad d \to \infty.$$

Используя асимптотику констант B_d, $d \in \mathbb{N}$, и формулу (5.16), получаем

$$\frac{1}{B_d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \sim \frac{1}{\ln d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\beta}{j \ln j} \sim \frac{\beta \ln\ln d}{\ln d} \to 0, \quad d \to \infty.$$

В итоге имеем (5.18).

Проверим условие (C) теоремы 3.6.3 при заданных B_d и $\sigma^2 = 0$. Для этого будет достаточным показать, что

$$\lim_{\tau \to 0} \varlimsup_{d \to \infty} \frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2 \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\, \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right) = 0.$$

Это вытекает из следующей оценки с учетом ранее полученной асимптотики (5.19):

$$\varlimsup_{d \to \infty} \frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2 \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\, \mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right) \leqslant \varlimsup_{d \to \infty} \frac{\tau}{B_d}\sum_{j=1}^{d}\left|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} = \beta\tau.$$

Итак, проверена справедливость условий (A)–(C) теоремы 3.6.3. Следовательно, по ней имеем искомую асимптотику при любом фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) &= A_d + \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2) B_d + o(B_d) \\
&= \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2) \ln d + o(\ln d), \quad d \to \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Найдем логарифмическую асимптотику для сложности по вероятности. Применяя следствие 4.3.1, получаем такой результат.

Утверждение 5.3.2. *Пусть выполнено условие* (5.10) *при* $p = 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и для любой последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющей условиям*

$$\varlimsup_{d\to\infty} \frac{\ln|\ln\min\{\delta_{d,\varepsilon}, 1-\delta_{d,\varepsilon}\}|}{\ln d} < \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2),$$

справедлива асимптотика

$$\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) = \mathcal{L}^{-1}(1-\varepsilon^2)\ln d + o(\ln d), \quad d\to\infty. \tag{5.20}$$

где $\mathcal{L}$ — *саморазложимый закон распределения с представлением Леви* (3.16), *в котором* $\mu = \beta\pi/4$, $\sigma^2 = 0$ *и* $L(x) = \beta\ln x\,\mathbb{1}(x\in(0,1))$.

Случай $p < 1$

Здесь для любого $p < 1$ верно $r_j + 1 \sim \frac{\ln j}{2\ln 3}$ при $j \to \infty$. По условию (5.8) теоремы 5.3.1 в данном случае задача аппроксимации является W-трактабильной, однако QP-трактабильность здесь уже не имеет места. Чтобы это показать, рассмотрим следующие суммы при $d \to \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln d}\sum_{j=1}^{d}(1+r_j)\,3^{-2r_j-2} &\sim \frac{(2\beta\ln 3)^{-1}}{\ln d}\sum_{j=1}^{d}\frac{(\ln j)^{1-p}}{j} \\
&\sim \frac{(2\beta\ln 3)^{-1}}{\ln d}\int_1^d \frac{(\ln t)^{1-p}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(2\beta\ln 3)^{-1}}{\ln d}\cdot\frac{(\ln d)^{2-p}}{2-p} \\
&= \frac{(\ln d)^{1-p}}{2\beta(2-p)\ln 3}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что критерий (5.9) QP-трактабильности нарушается.

С использованием оценки (5.12) несложно проверить, что в данном случае для любого $\varepsilon \in (0,1)$ $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \to \infty$, $d \to \infty$. Для того чтобы найти логарифмическую асимптотику $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ в наиболее явном виде, нам потребуется следующее усиление условия (5.10):

$$\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 3^{-2(r_j+1)} = \frac{\beta}{j(\ln j)^p}\cdot\left[1 + o\Big((\ln j)^{-\frac{1-p}{2}}\Big)\right], \quad j\to\infty. \tag{5.21}$$

где $\beta > 0$ и $p < 1$.

Утверждение 5.3.3. *Пусть выполнено условие* (5.21) *при* $p < 1$ *и* $\beta > 0$. *Тогда имеем асимптотику*

$$\forall\varepsilon\in(0,1) \quad \ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \;=\; A'_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B'_d + o(B'_d), \quad d\to\infty, \tag{5.22}$$

где

$$A'_d := c_{p,\beta}^{(1)}(\ln d)^{2-p} + c_{p,\beta}^{(2)}(\ln\ln d)(\ln d)^{1-p} + c_{p,\beta}^{(3)}(\ln d)^{1-p}, \qquad B'_d := c_{p,\beta}^{(4)}(\ln d)^{\frac{3-p}{2}}.$$

Здесь коэффициенты определяются по формулам:

$$c^{(1)}_{p,\beta} := \frac{\beta}{2-p}, \quad c^{(2)}_{p,\beta} := \frac{\beta p}{(1-p)}, \quad c^{(3)}_{p,\beta} := \frac{\beta}{(1-p)}\left(\frac{1-2p}{1-p} - \ln\beta\right), \quad c^{(4)}_{p,\beta} := \left(\frac{\beta}{3-p}\right)^{1/2}.$$

Доказательство утверждения 5.3.3. Рассмотрим суммы (5.14). В силу стремления последовательности $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ к ∞, имеем $c_5(r_j) \to 1$. В то же время, по предположению теоремы справедлива следующая асимптотика:

$$5^{-2(r_j+1)} \sim \left(\frac{\beta}{j\,(\ln j)^p}\right)^{\frac{\ln 5}{\ln 3}}, \quad j \to \infty,$$

из которой вытекает сходимость ряда (5.14). Воспользуемся теоремой 3.6.3 при $N = 2$ для получения асимптотики $n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon)$.

Определим константы A_d и B_d следующим образом:

$$A_d := \sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|\frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} + \sum_{j=1}^{d}\ln\frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}, \qquad B_d := \left(\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\right)^{1/2}, \qquad d\in\mathbb{N}.$$

Вычислим асимптотику B_d при $d\to\infty$. Заметим

$$\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \sim \sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \sim \sum_{j=1}^{d}\frac{\beta(\ln j)^{2-p}}{j}, \quad d\to\infty.$$

Воспользовавшись следующей формулой (см. [19], №2.12, с. 40):

$$\forall\alpha<1 \quad \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(\ln k)^{\alpha}} = \frac{(\ln n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + C_\alpha + o(1), \quad n\to\infty, \tag{5.23}$$

получаем

$$B_d \sim \left(\frac{\beta(\ln d)^{3-p}}{3-p}\right)^{1/2}, \quad d\to\infty.$$

Проверим выполнение условий (A)–(C) теоремы 3.6.3 при $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, $L(x)\equiv 0$ и заданных $(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$, $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$.

Заметим, что $\ln(\lambda_1^{(d)}/\lambda_2^{(d)}) = 2\ln 3(r_d+1) \sim \ln d = o(B_d)$, $d\to\infty$. Тогда, с учетом неубывания $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$, в суммах из (A) при любом $x>0$, начиная с некоторого значения d, не будет слагаемых, т.е. они будут нулевыми. Отсюда получаем требуемый нулевой предел $-L(x)\equiv 0$. Аналогичным рассуждением находим, что суммы

$$\frac{1}{B_d^2}\sum_{j=1}^{d}\left|\ln\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\right|^2\frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}}\,\mathbb{1}\left(\frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \geqslant e^{-\tau B_d}\right)$$

по определению B_d, $d\in\mathbb{N}$, для любого $\tau>0$ при достаточно больших d будут равными 1. Откуда имеем выполнение (C). Условие (B) проверяется непосредственной подстановкой.

В итоге при заданных $(A_d)_{d\in\mathbb{N}}$ и $(B_d)_{d\in\mathbb{N}}$ по теореме 3.6.3 получаем асимптотику: при любом фиксированном $\varepsilon\in(0,1)$:

$$\forall\varepsilon\in(0,1) \quad \ln n^{\mathrm{avg}}_d(\varepsilon) = A_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B_d + o(B_d), \quad d\to\infty.$$

Найдем асимптотику для A_d с точностью до $o(B_d)$:

$$\begin{aligned} A_d \ &:= \ \sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} + \sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \\ &= \ \sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - R_d^{(1)} + R_d^{(2)}, \end{aligned}$$

где

$$R_d^{(1)} := \sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \left(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - \frac{\lambda_2^{(j)}}{\Lambda^{(j)}} \right), \qquad R_d^{(2)} := \sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}. \tag{5.24}$$

Покажем, что величинами $R_d^{(1)}$ и $R_d^{(1)}$ можно пренебречь. Оценим $R_d^{(1)}$:

$$R_d^{(1)} \leqslant \sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \cdot \frac{\Lambda^{(j)} - \lambda_1^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \leqslant c_5(r_1) \sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \left(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right)^2.$$

Последний ряд по условию (5.21) является сходящимся, тогда $R_d^{(1)} = o(B_d)$, $d \to \infty$. Далее рассмотрим

$$\begin{aligned} R_d^{(2)} \ &= \ \sum_{j=1}^{d} \ln \frac{\Lambda^{(j)}}{\lambda_1^{(j)} + \lambda_2^{(j)}} + \sum_{j=1}^{d} \left[\ln \left(1 + \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right) - \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right] & (5.25) \\ &\leqslant \ \sum_{j=1}^{d} \sum_{i>2} \frac{\lambda_i^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} + \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \right)^2. & (5.26) \end{aligned}$$

Оба ряда в последнем выражении являются сходящимися, т.е. $R_d^{(2)} = o(B_d)$, $d \to \infty$. Следовательно, мы приходим к следующему представлению для A_d:

$$A_d = \sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} + o(B_d), \quad d \to \infty. \tag{5.27}$$

Для первого ряда имеет место эквивалентность:

$$\sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \sim \sum_{j=1}^{d} \frac{\beta}{j (\ln j)^{p-1}} = \frac{\beta (\ln d)^{2-p}}{2-p} + O(1), \quad d \to \infty. \tag{5.28}$$

Определим вспомогательные величины s_j так, чтобы при $j \geqslant 2$ выполнялось равенство

$$\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = 3^{-2(r_j+1)} = \frac{\beta(1+s_j)}{j (\ln j)^p}, \quad j \to \infty.$$

Рассмотрим следующую разность при $d \to \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d} \Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - \sum_{j=1}^{d} \frac{\beta (\ln j)^{1-p}}{j} \ &= \ \sum_{j=2}^{d} \left(\Big| \ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} \Big| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - \frac{\beta (\ln j)^{1-p}}{j} \right) + o(B_d) \\ &= \ \sum_{j=2}^{d} \left(\frac{\beta s_j}{j (\ln j)^{p-1}} + \frac{\beta p (\ln \ln j)(1+s_j)}{j (\ln j)^p} \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\beta \ln \beta (1+s_j)}{j (\ln j)^p} - \ln(1+s_j) \frac{\beta(1+s_j)}{j (\ln j)^p} \right) + o(B_d) \end{aligned}$$

По условию (5.21), определению s_j, $j \in \mathbb{N}$ и с учетом асимптотики B_d имеем

$$\sum_{j=2}^{d} \frac{\beta s_j}{j(\ln j)^{p-1}} = o\biggl(\sum_{j=2}^{d} \frac{\beta}{j(\ln j)^{\frac{p-1}{2}}}\biggr) = o\Bigl((\ln d)^{\frac{3-p}{2}}\Bigr) = o(B_d), \quad d \to \infty.$$

Отсюда несложно заключить аналогичное утверждение для сумм, растущих более медленно при $d \to \infty$:

$$\sum_{j=2}^{d} \frac{s_j \beta p \ln\ln j}{j(\ln j)^p} = o(B_d), \quad \sum_{j=2}^{d} \frac{s_j \beta \ln \beta}{j(\ln j)^p} = o(B_d), \quad \sum_{j=2}^{d} \frac{\beta(1+s_j)\ln(1+s_j)}{j(\ln j)^p} = o(B_d).$$

В итоге получаем при $d \to \infty$:

$$\sum_{j=1}^{d} \Bigl|\ln \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}}\Bigr| \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - \sum_{j=1}^{d} \frac{\beta(\ln j)^{1-p}}{j} \;=\; \sum_{j=2}^{d} \frac{\beta p \ln\ln j}{j(\ln j)^p} - \sum_{j=2}^{d} \frac{\beta \ln \beta}{j(\ln j)^p} + o(B_d). \tag{5.29}$$

Посчитаем асимптотики сумм в последнем выражении. Для второй суммы, используя (5.23), получаем

$$\sum_{j=2}^{d} \frac{\beta \ln \beta}{j(\ln j)^p} = \frac{\beta(\ln\beta)(\ln d)^{1-p}}{1-p} + O(1), \quad d \to \infty. \tag{5.30}$$

Для вычисления первой суммы воспользуемся формулой

$$\Bigl|\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n} f(t)\mathrm{d}t\Bigr| \leqslant \max\{f(m), f(n)\}.$$

справедливой для любой монотонной на отрезке $[m,n]$ функции f (см. [19], с. 104). Имеем при $d \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{d} \frac{\beta p \ln\ln j}{j(\ln j)^p} \;&=\; \int\limits_{2}^{d} \frac{\beta p \ln\ln t}{t(\ln t)^p}\,\mathrm{d}t + O(1) \\
&=\; \int\limits_{\ln 2}^{\ln d} \frac{\beta p \ln z}{z^p}\,\mathrm{d}z + O(1) \\
&=\; \frac{\beta p(\ln z) z^{1-p}}{(1-p)}\Bigr|_{\ln 2}^{\ln d} - \int\limits_{\ln 2}^{\ln d} \frac{\beta p}{(1-p)z^p}\,\mathrm{d}z + O(1) \\
&=\; \frac{\beta p(\ln\ln d)(\ln d)^{1-p}}{(1-p)} - \frac{\beta p(\ln d)^{1-p}}{(1-p)^2} + O(1).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} = \sum_{j=2}^{d} \frac{\beta}{j(\ln j)^p} + R_d^{(3)},$$

где

$$R_d^{(3)} := \sum_{j=2}^{d} \biggl(\frac{\lambda_2^{(j)}}{\lambda_1^{(j)}} - \frac{\beta}{j(\ln j)^p}\biggr) + \frac{\lambda_2^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} = \sum_{j=2}^{d} \frac{s_j \beta}{j(\ln j)^p} + O(1).$$

Из предыдущих вычислений видно $R_d^{(3)} = o(B_d)$, $d \to \infty$. Используя (5.23), находим

$$\sum_{j=2}^{d} \frac{\beta}{j(\ln j)^p} = \frac{\beta(\ln d)^{1-p}}{(1-p)} + O(1), \quad d \to \infty. \tag{5.32}$$

Совместим в (5.27) результаты вычислений (5.28)–(5.32), получаем следующее асимптотическое представление при $d \to \infty$:

$$A_d = \frac{\beta(\ln d)^{2-p}}{2-p} + \frac{\beta p(\ln\ln d)(\ln d)^{1-p}}{(1-p)} + \frac{\beta(\ln d)^{1-p}}{(1-p)}\left(1 - \frac{p}{1-p} - \ln\beta\right) + o(B_d).$$

Этим доказательство полностью завершено. $\square$

Найдем логарифмическую асимптотику для сложности по вероятности.

Утверждение 5.3.4. *Пусть выполнено условие* (5.21) *при* $p < 1$ *и* $\beta > 0$. *Пусть* A'_d *и* B'_d, $d \in \mathbb{N}$, *такие как в утверждении* (5.3.3). *Тогда для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *и для любой последовательности* $(\delta_{d,\varepsilon})_{d\in\mathbb{N}}$, *удовлетворяющей условиям*

$$\overline{\lim_{d\to\infty}} \frac{\ln|\ln\min\{\delta_{d,\varepsilon}, 1-\delta_{d,\varepsilon}\}| - A'_d}{B'_d} < \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2),$$

справедлива асимптотика

$$\ln n_d^{\mathrm{prob}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) = A'_d + \Phi^{-1}(1-\varepsilon^2)B'_d + o(B'_d), \quad d \to \infty.$$

Данное утверждение очевидно вытекает из следствия 4.3.1.

Заключение

При изучении сложности аппроксимации гауссовских случайных полей возрастающей параметрической размерности были получены следующие результаты:

1. Найдены логарифмические асимптотические представления сложности аппроксимации в среднем и по вероятности растущих тензорных степеней случайных процессов при специальных условиях на спектр порождающего процесса. Доказано, что для представлений такого вида эти условия являются необходимыми.

2. Получено точное асимптотическое представление сложности в среднем для тензорных степеней случайных процессов. Показано, что вид этого представления зависит от арифметической структуры последовательности собственных чисел маргинального процесса.

3. Доказана эквивалентность сложности аппроксимации по вероятности и сложности аппроксимации в среднем для тензорных степеней случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в очень широкой области варьирования уровня значимости.

4. Найдены логарифмические асимптотические представления сложности аппроксимации для неоднородных тензорных произведений случайных процессов при возрастающей параметрической размерности в постановках в среднем и по вероятности. Показана связь таких представлений с классом $\boldsymbol{L}$ безгранично делимых законов распределения.

5. Проведен асимптотический анализ сложности аппроксимации однородных тензорных случайных полей, спектры которых имеют специальное заданное регулярное изменение.

6. Найдены точные асимптотики тензорных степеней винеровского процесса и броуновского моста.

7. Сделан асимптотический анализ растущих тензорных произведений эйлеровских интегрированных процессов.

Литература

[1] Н. С. Бахвалов, *О приближенном вычислении кратных интегралов*, Вестник МГУ сер. матем., механ., астрон., физ., (1959), № 4, 3–18.

[2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Лань, СПб., 2010.

[3] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Физматлит, М., 1997.

[4] А. А. Боровков, К. А. Боровков, *Асимптотический анализ случайных блужданий. Том I: Медленно убывающие распределения скачков*, Физматлит, М., 2008.

[5] Г. Василковский, Г. Возняковский, *Обзор сложности в средней ситуации для линейных многомерных проблем*, Изв. вузов. Матем., (2009), №4, 3–19.

[6] В. Гефдинг, *Об одной теореме В. М. Золотарева*, ТВП, **9** (1964), №1, 89–91.

[7] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, Том 1, Наука, М., 1971.

[8] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, Гостехиздат, М.–Л., 1949.

[9] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, рядов, сумм и произведений*, Физматлит, М., 1962.

[10] В. М. Золотарев, *Об одной вероятностной задаче*, ТВП, **6** (1961), №2, 219–222.

[11] В. М. Золотарев, *Аналитическое строение безгранично делимых законов класса L*, Литовск. Матем. Сбор., **3** (1963), №1, 123–140.

[12] В. М. Золотарев, *Одномерные устойчивые распределения*, Наука, М., 1983.

[13] В. М. Золотарев, *Устойчивые законы и их применения*, Серия Матем., Кибер., **11**, Знание, М., 1984.

[14] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965.

[15] Г. Кристоф, Ю. В. Прохоров, В. В. Ульянов, *О распределении квадратичных форм от гауссовских случайных величин*, ТВП, **40** (1995), №2, 301–312.

[16] М. Лоэв, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962.

[17] Ю. В. Линник , И. В. Островский, *Разложения случайных величин и векторов*, Наука, М., 1972.

[18] М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции*, ТВиМС, Киев, 1995.

[19] Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу*, Невский Диалект, БХВ-Петербург, СПб., 2004.

[20] С. В. Нагаев, В. И. Вахтель, *О суммах независимых случайных величин без степенных моментов*, Сиб. мат. журн., **49** (2008), №6, 1369–1380.

[21] В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*, Наука, М., 1987.

[22] В. С. Пугачев, *Общая теория корреляции случайных функций*, Изв. Академии Наук СССР, Серия Матем., **17** (1953), 5, 401–420.

[23] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.

[24] Н. А. Сердюкова, *Зависимость сложности аппроксимации случайных полей от размерности*, ТВП, **54** (2009), №2, 256–270.

[25] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Канд. диссерт., МГУ, 1965.

[26] В. Р. Фаталов, *Большие уклонения гауссовских мер в пространствах l_p и L_p, $p \geqslant 2$*, ТВП, **41** (1996), №3, 682–689.

[27] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Том 2, Мир, М., 1984.

[28] А. А. Хартов, *Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **396** (2011), 233–256.

[29] А. А. Хартов, *Аппроксимация по вероятности тензорных случайных полей возрастающей параметрической размерности*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **412** (2013), 252–273.

[30] А. А. Хартов, *Сложность аппроксимации случайных полей тензорного типа с тяжелым спектром*, Вестник СПбГУ, Сер. 1 Матем., Мех., Астр., (2013), №2, 64–67.

[31] А. А. Хартов, *Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности*, Тезисы Международной (43-й Всероссийской) молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики», УроРАН Институт математики и механики, Екатеринбург, (2012), 296–298.

[32] Н. Н. Ченцов, *Винеровские случайные поля от нескольких параметров*, Доклады Акад. Наук СССР, **106** (1956), 607–609.

[33] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, в 2-х кн., МЦНМО, М., 2007.

[34] R. J. Adler, *The uniform dimension of the level sets of a Brownian sheet*, Ann. Probab., **6** (1978), no. 3, 509–518.

[35] R. J. Adler, J. Taylor, *Random Fields and Geometry*, Springer, New York, 2007.

[36] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1957.

[37] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1987.

[38] J. R. Blum, J. Kiefer, M. Rosenblatt, *Distribution free tests of independence based on the sample distribution function*, Ann. Math. Statist., **32** (1961), no. 2, 485–498.

[39] J. C. Bronski, *Small ball constants and tight eigenvalue asymptotics for fractional Brownian motions*, J. Theoret. Probab., **16** (2003), p. 87–100.

[40] N. G. de Bruijn, *Pairs of slowly oscillating functions occurring in asymptotic problems concerning the Laplace transform*, Nieuw Arch. Wisk., **3** (1959), no. 7, 20–26.

[41] R. Carmona, *Tensor product of Gaussian mesures. Vector Space Measures and Applications*, Dublin 1977. Lecture notes in Mathematics, 644 (1978), Springer, Berlin Heidelberg , 96–124.

[42] C.-H. Chang, C.-W. Ha, *The Greens functions of some boundary value problems via the Bernoulli and Euler polynomials*, Arch. Math. (Basel), **76** (2001), no. 5, 360–365.

[43] G. Christoph, W. Wolf, *Convergence Theorems with a Stable Limit Law*, Math. Research 70, Akad. Verlag, Berlin, 1992.

[44] R.C. Dalang, J.B. Walsh, *Geography of the level sets of the Brownian sheet*, Probab. Th. Rel. Fields, **96** (1993), no. 2, 153–176.

[45] R.C. Dalang, J.B. Walsh, *The structure of a Brownian bubble*, Probab. Th. Rel. Fields, **96** (1993), 475–501.

[46] R.C. Dalang, T. Mountford, *Nondifferentiability of curves on the Brownian sheet*, Ann. Probab., **24** (1996), no. 1, 182–195.

[47] D. A. Darling, *The Influence of the maximum term in the addition of independent random variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952), no. 1, 95–107.

[48] C.-G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law*, Acta Math., **77** (1945), 1–125.

[49] F. Gao, J. Hanning, F. Torcaso, *Integrated Brownian motions and exact L2-small balls*, Ann. Probab., **31** (2003), no. 3, 1320–1337.

[50] F. J. Hickernell, G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Tractability of linear multivariate problems in the average case setting*, Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006, Springer (2008), 461–493.

[51] F. J. Hickernell, H. Woźniakowski, *Integration and approximation in arbitrary dimension*, Adv. Comput. Math., *12* (2000), no. 1, 25–58.

[52] P. Hall, *A comedy of errors: the canonical form for a stable characteristic function*, Bull. London Math. Soc., **13** (1981), no. 1, 23–27.

[53] C.-R. Hwang, *Gaussian measure of large balls in Hilbert Space*, Proc. Amer. Math. Soc., **78** (1980), no. 1, 107–110. Erratum: **94** (1985), no. 1, 188.

[54] T. Jackowski, H. Woźniakowski, *Complexity of approximation with relative error criterion in worst, average, and probabilistic settings*, J. Complexity, **3** (1987), 114—135.

[55] K. Karhunen, *Zur Spektraltheorie Stochastischer Prozesse*, Akad. Sci. Fennicae, Ser. A. I, (1946), no. 34, 1–7.

[56] K. Karhunen, *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Akad. Sci. Fennicae, Ser. A. I, (1947), no. 37, 3–79.

[57] A. Karol, A. Nazarov, Ya. Nikitin, *Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **360** (2008), no. 3, 1443–1474.

[58] A. A. Khartov, *Approximation in probability of tensor product-type random fields of increasing parametric dimension*, Abstracts of International Conference «Probability Theory and Its Applications», Moscow, 2012, 108–109.

[59] A. A. Khartov, *Approximation complexity of tensor product-type random fields with heavy spectrum*, Abstracts of International conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III», Kyiv, 2012, 21–22.

[60] D. Lee, G. W. Wasilkowski, *Approximation of linear functionals on a Banach space with a Gaussian measure*, J. Complexity, **2** (1986), no. 1, 12–43.

[61] M. A. Lifshits, *Lectures on Gaussian Processes*, Springer, New York, 2012.

[62] M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *Average case tractability of non-homogeneous tensor product problems*, J. Complexity, **28** (2012), no. 5–6, 539–561.

[63] M. A. Lifshits, A. Papageorgiou, H. Woźniakowski, *Tractability of multi-parametric Euler and Wiener integrated processes*, Probab. Math. Stat., **32** (2012), no. 1, 131–165.

[64] M. A. Lifshits, E. V. Tulyakova, *Curse of dimensionality in approximation of random fields*, Probab. Math. Stat., **26** (2006), no. 1, 97–112.

[65] W. Linde, *Gaussian measure of large balls in l_p^1*, Ann. Probab., **19** (1991), no. 3, 1264–1279.

[66] M. Loève, *Fonctions aléatoires de second ordre*, Revue Scientifique, **84** (1946), no. 4, 195–206.

[67] H. Luschgy, G. Pagès, *Sharp asymptotics of the functional quantization problem for Gaussian processes*, Ann. Probab., **32** (2004), no. 2, 1574–1599.

[68] A. I. Nazarov, Ya. Yu. Nikitin, *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems*, Probab. Theory Relat. Fields, **129** (2004), no. 4, 469–494.

[69] E. Novak, *Deterministic and stochastic error bounds in numerical analysis*, Lecture Notes in Math. 1349, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[70] E. Novak, I. H. Sloan, J. F. Traub, H. Woźniakowski, *Essays on the Complexity of Continuous Problems*, EMS, Zürich, 2009.

[71] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume I: Linear Information*, EMS Tracts Math. 6, EMS, Zürich, 2008.

[72] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals*, EMS Tracts Math. 12, EMS, Zürich, 2010.

[73] E. Novak, H. Woźniakowski, *Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators*, EMS Tracts Math. 18, EMS, Zürich, 2012.

[74] A. Papageorgiou, G. W. Wasilkowski, *On the average complexity of multivariate problems*, J. Complexity, **6** (1990), no. 1, 1–23.

[75] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis*, Acad. Press, London, 1980.

[76] K. Ritter, *Average-case Analysis of Numerical Problems*, Lecture Notes in Math. No 1733, Springer, Berlin, 2000.

[77] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer-Verlag, London, 2002.

[78] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastics Models with Infinite Variance*, Chapman & Hall, London, 1994.

[79] A. Sard, *Linear Approximation*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1963.

[80] K.-I. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1999.

[81] K.-I. Sato, M. Yamazato, *On Distribution function of class L*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **43** (1978), no. 4, 273–308.

[82] F. W. Steutel, K. Harn, *Infinite Divisibility of Probability Distributions on the Real Line*. Marcel Dekker Inc., New York, 2004.

[83] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wózniakowski, *Information, Uncertainty, Complexity*, Addison-Wasley, Reading MA, 1983.

[84] J. F. Traub, G. W. Wasilkowski, H. Wózniakowski, *Information-Based Complexity*, Academic Press, New York, 1988.

[85] J. F. Traub, H. Wózniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, NewYork, 1980.

[86] J. F. Traub, A. G. Werschulz, *Complexity and Information*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1998.

[87] V. V. Uchaikin, V. M. Zolotarev, *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*, VSP, 1999.

[88] A. W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1998.

[89] J. B. Walsh, *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics 1180, Springer-Verlag, New York, (1986), 265—439.

[90] G. W. Wasilkowski, *Information of varying cardinality*, J. Complexity, **2** (1986), no. 3, 204–228.

[91] G. W. Wasilkowski, *Optimal algorithms for linear problems with Gaussian measures*, Rocky Mountain J. Math, **16** (1986), no. 4, 204–228.

[92] G. W. Wasilkowski, H. Woźniakowski, *Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems*, J. Complexity, **11** (1995), no. 1, 1—56.

[93] W. Whitt, *Stochastic-Process Limits: An Introduction to Stochastic-Process Limits and Their Application to Queues*, Springer, New York, 2002.

[94] S. J. Wolfe, *On the unimodality of L functions*, Ann. Math. Statist., **42** (1971), no. 3, 912–918.

[95] S. J. Wolfe, *On the continuity properties of L functions*, Ann. Math. Statist., **42** (1971), no. 6, 2064–2073.

[96] E. Wong, M. Zakai, *Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 29 (1974), no. 2, 109–122.

[97] E. Wong, M. Zakai, *Weak martingales and stochastic integrals in the plane*, Ann. Probab., **4** (1976), no. 4, 570–587.

[98] H. Woźniakowski, *Probabilistic Setting of Information-Based Complexity*, J. Complexity, **2** (1986), no. 3, 255–269.

[99] H. Woźniakowski, *Tractability and strong tractability of linear multivariate problems*, J. Complexity, **10** (1994), no. 1, 96–128.

[100] H. Woźniakowski, *Tractability and strong tractability of multivariate tensor product problems*, J. Comput. Inform., **4** (1994), 1–19.

[101] M. Yamazato, *Unimodality of Infinitely Divisible Distribution Functions of Class L*, Ann. Probab., **6** (1978), no. 4, 523–531.