На правах рукописи

Антоненко Павел Владимирович

Волновые функции некомпактных спиновых цепочек и их свойства

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2026

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН).

Научный руководитель:	**Валиневич Павел Анатольевич** кандидат физико-математических наук старший научный сотрудник лаборатории математических проблем физики, ФГБУН ПОМИ РАН
Официальные оппоненты:	**Забродин Антон Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник факультета математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
	Назаров Антон Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета, ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет
Ведущая организация:	Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ), лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова

Защита состоится «___» __________ 2026 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета 24.1.207.02 при ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН ПОМИ РАН и на сайте https://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-24.1.207.02.

Автореферат разослан «___» __________ 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.1.207.02,
кандидат физико-математических
наук — Рядовкин Кирилл Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Квантовые спиновые цепочки входят в число моделей, стоящих у истоков теории квантовых интегрируемых систем. Полный набор наблюдаемых в этих моделях строится при помощи *квантового метода обратной задачи*, разработанного в конце 1970-х годов трудом математиков Ленинградской школы [1, 2]. В рамках этого метода ключевую роль играет квантовая матрица Лакса – L*-оператор*. Для XXX цепочек, исследуемых в настоящей диссертации, его можно определить в универсальном виде следующим образом

$$L(u) = \begin{pmatrix} u+S & S_- \\ S_+ & u-S \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где числовой параметр u называется *спектральным*, а $S, S_\pm$ – генераторы представления алгебры Ли $sl(2)$, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям $[S, S_\pm] = \pm S_\pm$, $[S_+, S_-] = 2S$. Гильбертово пространство системы из n частиц (цепочки из n узлов) – тензорное произведение n копий пространства V представления $sl(2)$: $H = V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n \,, V_k \simeq V$. L-оператор действует как матрица во *вспомогательном* пространстве (в данном случае двумерном), элементы которой являются операторами в пространстве представления. Узлу цепочки с номером k (k-ой частице) соответствует L-оператор $L_k(u)$, содержащий генераторы, действующие нетривиально в V_k и как тождественные операторы в остальных сомножителях тензорного произведения пространств. Полный набор наблюдаемых строится при помощи *матрицы монодромии*

$$t(u) = L_1(u)\, L_2(u) \ldots L_n(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Трансфер-матрица $\tau(u) = a(u) + d(u)$ – след матрицы монодромии – является производящей функцией для полного набора наблюдаемых. Последние являются коэффициентами $\tau(u)$ как полинома от u.

Для нахождения собственных состояний модели, или, что то же самое, для диагонализации трансфер-матрицы, применяется *алгебраический анзац Бете* [2]. Он основан на RTT*-соотношении* для матрицы монодромии, которое представляет из себя матричное равенство в тензорном произведении двух вспомогательных пространств

$$R(u-v)\,\big(t(u)\otimes \mathbf{1}\big)\,\big(\mathbf{1}\otimes t(v)\big) = \big(\mathbf{1}\otimes t(v)\big)\,\big(t(u)\otimes \mathbf{1}\big)\,R(u-v)\,. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичная матрица, и R-*матрица* $R(u)$ действует нетривиально в обоих вспомогательных пространствах. В частности, из (3) следует коммутативность набора наблюдаемых. Рассматриваемой модели соответствует R-матрица Янга

$$R(u) = u\,\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + P\,, \tag{4}$$

где P – матрица перестановки: $P\,x \otimes y = y \otimes x$. Уравнение (3) является простым следствием своего частного случая при $n = 1$ – RLL-соотношения, эквивалентного набору коммутационных соотношений для генераторов S, $S_{\pm}$.

Квантовый метод обратной задачи объединил все основные результаты в области одномерных квантовых систем и оказался универсальным математическим аппаратом для работы с интегрируемыми моделями. При помощи него были решены такие квантовомеханические и теоретико-полевые модели как нелинейное уравнение Шредингера, модель синус-Гордон, цепочка Тоды и другие. Тем не менее, до конца 1980-х годов в его арсенале не существовало систематического подхода к решению моделей с граничными условиями, отличающимися от периодических. Такой подход предложил Склянин [3], основываясь на работе Чередника [4]. Согласно новому методу, для построения интегрируемой системы, помимо L-оператора и R-матрицы, вводятся K-*матрицы* $K(u)$, $K_{+}(u)$, действующие во вспомогательном пространстве и содержащие информацию о граничных условиях. Набор коммутирующих операторов, задающих модель, строится при помощи матрицы монодромии вида

$$\begin{aligned} T(u) &= L_n(u)\dots L_1(u)K(u)L_1^{-1}(-u+\eta)\dots L_n^{-1}(-u+\eta) \\ &= \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5}$$

где под $L^{-1}(u)$ понимается матрица во вспомогательном пространстве, обратная к $L(u)$, и параметр η возникает из дополнительного требования кроссинг-унитарности R-матрицы $R^{\mathrm{t}_1}(u)\,R^{\mathrm{t}_1}(-u-2\eta) = \tilde{\rho}(u)$, где $\tilde{\rho}(u)$ – число, $R^{\mathrm{t}_1}(u)$ – транспонирование матрицы в 1-ой копии вспомогательного пространства. Трансфер-матрица – производящая функция для интегралов движения – представляется в виде следа

$$\mathcal{T}(u) = \mathrm{tr}(K_{+}(u)\,T(u))\,. \tag{6}$$

Модель будет интегрируемой, если K-матрицы удовлетворяют *уравне-*

ниям отражения

$$
\begin{aligned}
&R(u-v)\,\big(K(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u+v-\eta)\,\big(\mathbf{1}\otimes K(v)\big)\\
&\quad=\big(\mathbf{1}\otimes K(v)\big)\,R(u+v-\eta)\,\big(K(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u-v)\,,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&R(v-u)\,\big(K_+^{\mathrm{t}}(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(-u-v-\eta)\,\big(\mathbf{1}\otimes K_+^{\mathrm{t}}(v)\big)\\
&\quad=\big(\mathbf{1}\otimes K_+^{\mathrm{t}}(v)\big)\,R(-u-v-\eta)\,\big(K_+^{\mathrm{t}}(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(v-u)\,,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $K_+^{\mathrm{t}}(u)$ – матрица, транспонированная к $K_+(u)$.

Собственные состояния модели строятся при помощи алгебраического анзаца Бете, в основе которого лежит уравнение отражения для матрицы монодромии

$$
\begin{aligned}
&R(u-v)\,\big(T(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u+v-\eta)\,\big(\mathbf{1}\otimes T(v)\big)\\
&\qquad\qquad=\big(\mathbf{1}\otimes T(v)\big)\,R(u+v-\eta)\,\big(T(u)\otimes\mathbf{1}\big)\,R(u-v)\,,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

следующее из (7) и RLL-соотношения. Первым анзац Бете для нового типа граничных условий адаптировал Склянин [3]. В дальнейшем его подход был обобщен для спиновых цепочек с различными алгебрами симметрии, см., например, [5].

В 1990-е годы возник интерес к *некомпактным* XXX спиновым цепочкам [6, 7]. L-оператор в этих моделях выражается через генераторы $S, S_\pm$ бесконечномерного унитарного представления группы $SL(2,\mathbb{R})$ или $SL(2,\mathbb{C})$ на пространстве функций

$$
S = z\partial_z + s, \qquad S_- = -\partial_z, \qquad S_+ = z^2\partial_z + 2sz\,,
\tag{10}
$$

где s – параметр представления, называемый спином. Соответствующая модель называется $SL(2,\mathbb{R})$- или $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной. В случае $SL(2,\mathbb{R})$ представление определено на пространстве аналитических функций в верхней полуплоскости, квадратично-интегрируемых по некоторой степенной мере [7, 8]. А в случае $SL(2,\mathbb{C})$ рассматривается *представление основной унитарной серии* [8], определенное на пространстве квадратично-интегрируемых функций в комплексной плоскости.

Гамильтониан некомпактного $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантного магнетика с периодическими граничными условиями возникает при рассмотрении высокоэнергетического предела амплитуд рассеяния в квантовой хромидинамике [9, 10]. Эта модель была решена в [11, 6, 12]. В отличие от конечномерного случая, в гильбертовом пространстве модели отсутствует вакуумное состояние для алгебраического анзаца Бете, поэтому последний оказывается неприменим. Взамен ему был использован *квантовый метод разделения переменных* [13]. В случае XXX-цепочки ключевую роль в рамках этого метода играют собственные функции оператора $b(u)$ (2) [6], образующего коммутативное семейство $[b(u), b(v)] = 0$ согласно (3).

В настоящей диссертации рассматриваются некомпактные XXX спиновые цепочки, определяемые уравнением отражения (9). В этом случае два элемента матрицы монодромии (5) образуют коммутативные семейства $[B(u), B(v)] = 0\,,\ [C(u), C(v)] = 0$. Значит, как и трансфер-матрица (6), эти элементы определяют квантовые интегрируемые модели. Для единичных K-матриц $K(u)$, $K_+(u)$ B-оператор $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной модели был диагонализован в [14]. Он является четным полиномом от u, и спектральная задача для него принимает вид

$$B(u)\,\Psi_{p;\,x_1,\ldots,x_{n-1}} = (u^2 - x_1^2)\ldots(u^2 - x_{n-1}^2)\,\Psi_{p;\,x_1,\ldots,x_{n-1}}\,.$$

Несложно увидеть, что собственные числа симметричны относительно перестановок спектральных переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и отражений $x_i \to -x_i$. По причине простоты спектра собственные функции также обладают этим свойством. То есть, группой симметрий собственных функций является $\mathbb{Z}_2 \ltimes \mathfrak{S}_n$ – группа Вейля систем корней типа B и C (где $\mathfrak{S}_n$ – симметрическая группа степени n). Таким образом, спиновую цепочку, матрица монодромии которой удовлетворяет уравнению отражения, мы называем *цепочкой BC-типа* по аналогии с цепочкой Тоды типа BC [15, 16].

Собственные функции строятся индуктивно: n-частичная функция выражается посредством действия «повышающего» интегрального оператора на $(n-1)$-частичную функцию. Таким образом получается интегральное представление типа *Гаусса-Гивенталя* [17] для собственных функций, в котором последние выражаются через кратный интеграл от произведения степенных функций. Аналогичная индуктивная конструкция была получена для собственных функций элементов матрицы монодромии (2) [6, 18, 19]. Кроме того, собственные функции элементов матриц монодромии обоих типов (2) и (5) (при $K(u) = \mathbb{1}$) были представлены через кратный интеграл типа Меллина-Барнса [14, 20].

Спектральная задача для трансфер-матрицы некомпактной спиновой цепочки BC-типа с группой симметрии $SL(2,\mathbb{R})$ в случае единичных K-матриц возникает при исследовании скейлинговой зависимости корреляционных функций в (3+1)-мерных теориях Янга-Миллса [21]. Трансфер-матрица этой модели диагонализована в [7] при помощи квантового метода разделения переменных. В BC-цепочке, как и в случае периодической цепочки, оператор перехода в представление разделенных переменных строится при помощи собственных функций B-элемента матрицы монодромии (5).

В первых двух главах настоящей диссертации рассмотрено обобщение описанных выше некомпактных $SL(2,\mathbb{C})$- и $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантных спиновых цепочек BC-типа – модели с нетривиальными K-матрицами

$$K(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & u-\frac{1}{2} \\ -\beta_1\left(u-\frac{1}{2}\right) & \alpha_1 \end{pmatrix}, \; K_+(u) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2\left(u+\frac{1}{2}\right) \\ -u-\frac{1}{2} & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – константы), удовлетворяющими уравнениям отражения (7), (8) с R-матрицей Янга (4). Решена задача диагонализации B-элемента соответствующих матриц монодромии вида (5). Матрицы (11) были предложены Скляниным для цепочки Тоды в [3]. Поскольку последней модели соответствует та же (янговская) R-матрица, что и $SL(2)$-инвариантным спиновым цепочкам, эти K-матрицы могут быть использованы для задания граничных условий в обоих видах моделей. Трансфер-матрица (6) для цепочки Тоды при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ была диагонализована Иорговым и Шадура в [16] с помощью квантового метода разделения переменных. Как и в описанных ранее случаях, ключевую роль при этом сыграли собственные функции B-элемента матрицы монодромии (5). Таким образом, логично использовать квантовый метод разделения переменных для диагонализации трансфер-матриц рассматриваемых нами спиновых цепочек. Решенная в текущей работе задача является первым шагом на пути к этой цели.

Собственные функции $B(u)$ мы строим индуктивно при помощи описанного выше подхода. Функция для цепочки из n узлов получается в результате действия повышающего интегрального оператора на функцию для цепочки из $n-1$ узла. Ввиду присутствия нетривиальной K-матрицы $K(u)$, при построении повышающего оператора возникает новый объект – *оператор отражения* $\mathcal{K}(s,x)$ ($\mathcal{K}$-оператор), определяемый уравнением отражения с K-матрицей и L-оператором модели

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}(s,x)\, L(u+x-1,u-s)\, K(u)\, L(u+s-1,u-x) \\ &= L(u+s-1,u-x)\, K(u)\, L(u+x-1,u-s)\, \mathcal{K}(s,x)\,, \end{aligned} \quad (12)$$

где $L(u_1,u_2)$ – альтернативная параметризация L-оператора получающаяся в результате замены переменных $u = (u_1+u_2+1)/2\,, s =$

$(u_1 - u_2 + 1)/2$. В случае $SL(2, \mathbb{R})$-инвариантной цепочки уравнение (12) было решено в [22]. Полученная в этой работе формула для оператора отражения эквивалентна найденному нами выражению в виде отношения двух гамма-функций от операторного аргумента. Вдобавок, в настоящей диссертации получены два интегральных представления для этого $\mathcal{K}$-оператора.

В третьей главе диссертации рассмотрена некомпактная $SL(N, \mathbb{C})$-инвариантная спиновая цепочка А-типа. Ее L-оператор представляет собой матрицу размера $N \times N$ с операторнозначными элементами, которые выражаются через генераторы E_{ij} представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям $[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}$ и условию $\sum_i E_{ii} = 0$. Частный случай при $N = 2$ приведен выше в формуле (1). Матрица монодромии цепочки из n узлов представляется через произведение n L-операторов по формуле (2). Коммутационные соотношения между ее элементами записываются при помощи RTT-соотношения (3) с R-матрицей Янга (4), действующей теперь в $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$. Интегралы движения строятся при помощи *квантовых миноров* [23]. Полный набор наблюдаемых порождается коммутативным семейством *угловых* квантовых миноров.

Назаров и Тарасов доказали [24], что в случае конечномерных неприводимых представлений $SL(N, \mathbb{C})$ набор общих собственных векторов угловых квантовых миноров L-оператора (представляющего собой матрицу монодромии цепочки из 1 узла) совпадает с классическим базисом, введенным Гельфандом и Цетлином в [25]. Конструкция этого базиса опирается на существование в представлении вектора младшего (старшего) веса. Таким образом, собственные состояния угловых квантовых миноров L-оператора являются обобщением *базиса Гельфанда-Цетлина* в случае, когда такой вектор отсутствует, например, в рассматриваемых в настоящей диссертации бесконечномерных представлениях $SL(N, \mathbb{C})$ основной унитарной серии [26], уже упомянутых выше для $N = 2$. $SL(N, \mathbb{C})$-инвариантная спиновая цепочка, задаваемая при помощи представлений основной серии, называется некомпактной.

Граевым была построена [27] модель представлений основной серии на пространстве функций от континуальных схем Гельфанда-Цетлина, элементы которых, в отличие от схем, определенных традиционным образом, принимают комплексные значения и не упорядочены неравенствами. Тем не менее, в [27] отсутствует выражение для оператора, сплетающего две модели представлений, при помощи которого можно построить элементы базиса Гельфанда-Цетлина для традиционной модели. Нахождению этих элементов посвящена работа [28]. В ней получены индуктивные формулы для базисных функций (обобщена конструкция, описанная выше для $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки): элемент базиса для ранга N выражается через интеграл (с некоторым ядром) от элемента базиса для ранга $N-1$.

В настоящей диссертации для элементов базиса Гельфанда-Цетлина в представлениях $SL(N,\mathbb{C})$ основной серии построено интегральное представление типа Меллина-Барнса. Собственная функция для ранга N получается в результате действия интегрального оператора на собственную функцию для ранга $N-1$. Но, в отличие от результатов [28], интегрирование ведется не по пространственным переменным функции (по которым действуют дифференциальные операторы представления основной серии), а по спектральным переменным (элементам континуальных схем Гельфанда-Цетлина), параметризующим собственные числа угловых квантовых миноров L-оператора. Построенная индуктивная конструкция собственных функций является аналогом конструкции, полученной Харчевым и Лебедевым в [29] для волновых функций открытой цепочки Тоды, а также Валиневичем в [20] для собственных функций a-элемента матрицы монодромии (2) $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки.

Цель и задачи диссертационной работы

Основной **целью** данной работы является диагонализация семейств коммутирующих операторов, порождающих интегралы движения квантовых некомпактных спиновых цепочек, а также исследование свойств построенных наборов собственных функций: ортогональности, полноты и различных симметрий этих функций. В случае $SL(2,\mathbb{C})$- и $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантных спиновых цепочек BC-типа с нетривиальной K-матрицей диагонализуется B-элемент матрицы монодромии. В случае $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки A-типа строятся общие собственные функции угловых квантовых миноров L-оператора.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Для спиновой цепочки BC-типа с группой симметрии $SL(2,\mathbb{C})$ построить $\mathcal{K}$-оператор (оператор отражения) – решение уравнения отражения с K-матрицей и L-оператором модели.

2. Найти одночастичные собственные функции для $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки BC-типа.

3. При помощи $\mathcal{K}$-оператора и известного $\mathcal{R}$-оператора для данной модели (решения $\mathcal{R}LL$-соотношения с двумя L-операторами, соответствующими разным частицам) построить повышающий оператор, переводящий собственную функцию для $n-1$ частицы в собственную функцию для n частиц. Определяющим для повышающего оператора является требование, что его сужение на пространство функций $n-1$ переменных сплетает B-элементы матриц монодромии для n узлов и $n-1$ узла.

4. Построить интегральные представления типа Гаусса-Гивенталя и Меллина-Барнса для одночастичных собственных функций, аналогичные известным интегральным представлениям для собственных функций $SL(2,\mathbb{C})$- и $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантных спиновых цепочек A-типа и BC-типа с единичной K-матрицей. Используя фейнмановскую диаграммную технику, разработанную в предыдущих работах для представления Гаусса-Гивенталя, получить диаграммное представление для этих функций.

5. Используя полученные интегральные представления, доказать ортогональность и проверить полноту набора одночастичных волновых функций, а также доказать формулы симметрии собственных функций, связанные с симметриями спектра B-оператора.

6. Реализовать программу, изложенную в предыдущих пунктах, для спиновой цепочки BC-типа с группой симметрии $SL(2,\mathbb{R})$, задаваемой K-матрицей того же вида.

7. Выразить угловые квантовые миноры L-оператора некомпактной $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки через миноры L-оператора для $SL(N-1,\mathbb{C})$, используя рекуррентную формулу, связывающую эти L-операторы. Использовать эти выражения при индуктивном построении собственных функций угловых квантовых миноров (базиса Гельфанда-Цетлина) на шаге индукции $N-1 \to N$. Для следующего шага $N \to N+1$ выразить аналогичным образом нужные неугловые миноры L-оператора для $SL(N,\mathbb{C})$ (миноры того же типа, что и задействованные в рекуррентных формулах для угловых).

8. Используя результаты из предыдущего пункта, получить интегральное представление типа Меллина-Барнса для собственных функций угловых квантовых миноров L-оператора $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки (базиса Гельфанда-Цетлина) при

помощи индукции по N. Для этого, в том числе, нужно получить формулы для действия неугловых миноров L-оператора на собственные функции угловых.

9. Доказать ортогональность построенных наборов собственных функций угловых квантовых миноров.

Положения, выносимые на защиту:

1. Найдено интегральное представление $\mathcal{K}$-оператора для $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки BC-типа с нетривиальной K-матрицей. Ядро интегрального оператора выражено через произведение степенных функций. В случае $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантной спиновой цепочки BC-типа с нетривиальной K-матрицей получены два интегральных представления для оператора отражения: в первом интегрирование ведется по контуру (соответствующее ядро выражено через произведение степенных функций), во втором – по верхней полуплоскости (с ядром в виде интеграла от произведения степеней). В обеих моделях одночастичная собственная функция B-элемента матрицы монодромии представлена как результат действия $\mathcal{K}$-оператора на функцию, тождественно равную единице.

2. Для спиновой цепочки BC-типа с группой симметрии $SL(2,\mathbb{C})$ найден интегральный оператор, при помощи которого n-частичная собственная функция B-элемента матрицы монодромии выражается через $(n-1)$-частичную. Таким образом, получена индуктивная конструкция для собственных функций.

3. При помощи интегрального выражения для $\mathcal{K}$-оператора получено интегральное представление типа Гаусса-Гивенталя для одночастичных волновых функций $SL(2,\mathbb{C})$- и $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантных спиновых цепочек BC-типа. Также для этих функций найдено интегральное представление типа Меллина-Барнса и выражение через гипергеометрическую функцию. В обеих моделях доказана ортогональность и полнота наборов одночастичных собственных функций и симметрия этих функций относительно отражения спектральной переменной.

4. В случае $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки BC-типа доказано уравнение отражения для $\mathcal{K}$-оператора и $\mathbb{R}$-оператора, являющегося общим решением уравнения Янга-Бакстера с группой

симметрии $SL(2,\mathbb{C})$. Доказанное соотношение представляет собой бесконечномерное обобщение уравнения отражения для K- и R-матриц.

5. Для $N = 3, 4$ получена рекуррентная формула, связывающая собственные функции системы угловых квантовых миноров L-оператора $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной и $SL(N-1,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки. Собственная функция для $SL(N,\mathbb{C})$ выражается через интеграл типа Меллина-Барнса от собственной функции для $SL(N-1,\mathbb{C})$. При $N = 3$ ядро интеграла представлено через произведение гамма-функций, связанных с полем $\mathbb{C}$, а при $N = 4$ – через обобщенную гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел ${}_4G_4^{\mathbb{C}}$ в единице. Доказана ортогональность построенных наборов собственных функций. Также получены соотношения, необходимые при выводе аналогичной индукционной формулы для собственных функций в случае произвольного N. В их число входят рекуррентные выражения для квантовых миноров L-оператора $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки через миноры L-оператора для $SL(N-1,\mathbb{C})$, а также формулы для действия неугловых квантовых миноров на собственные функции угловых.

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты первой главы могут быть использованы в двумерной конформной теории поля для точного вычисления некоторых фейнмановских диаграмм, по аналогии с тем, как в этой теоретико-полевой модели были использованы собственные функции a-элемента матрицы монодромии $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки A-типа. Также, при помощи собственных функций B-элемента матрицы монодромии $SL(2,\mathbb{C})$- и $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантных спиновых цепочек BC-типа, полученных в первых двух главах настоящей диссертации, можно диагонализовать трансфер-матрицы этих моделей. Собственные функции B-элемента играют роль ядра оператора перехода в унитарно эквивалентное представление, в котором спектральная задача для трансфер-матрицы переписывается в виде системы одномерных уравнений.

Поскольку представления $SL(4,\mathbb{C})$ основной серии используются в четырехмерной конформной теории поля, результаты третьей главы могут найти применение в этой области. Интегральное представление типа Меллина-Барнса, полученное для собственных функций угловых квантовых миноров L-оператора в представлениях $SL(3,\mathbb{C})$ и $SL(4,\mathbb{C})$ основной серии, удобно использовать для доказательства полноты этих наборов функций.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы теории представлений групп Ли, теории функций комплексной переменной и асимптотического анализа. При доказательстве ортогональности и полноты волновых функций рассматриваемых моделей применяется фейнмановская диаграммная техника, интегральные тождества Густафсона, а также их обобщения на случай поля $\mathbb{C}$ [14].

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Семинар лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, 2026.

2. Международная конференция «Инвариантность и интегрируемость 2», приуроченная к 60-летию А. В. Маршакова, г. Пушкин, Санкт-Петербург, 2024.

3. Семинар Центра перспективных исследований Сколтеха, Сколково, Москва, 2021.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в четырех работах [A1, A2, A3, A4], опубликованных в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Личный вклад

Все выносимые на защиту результаты диссертации были получены соискателем единолично [A4], либо при непосредственном его участии [A1, A2, A3]. В последнем случае личный вклад диссертанта заключается в доказательстве формул (1.15), (1.18), (1.20), (1.21), (3.1), (3.2), (4.2), (5.1) из работы [A1]; в доказательстве формул (2.20), (2.22), (2.23), (2.24), (2.26), (4.1), (4.2), (6.1) из работы [A2], в доказательстве предпоследней формулы из раздела 4.2 статьи [A2]; в доказательстве формулы (3.1) из работы [A3], второй формулы из раздела 4 статьи [A3] и формулы (4.2) из того же раздела.

Содержание работы

Глава 1 посвящена $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочке BC-типа с нетривиальной K-матрицей.

В разделе 1.1 дается необходимая информация о представлениях основной унитарной серии группы $SL(2,\mathbb{C})$, через которые определяется изучаемая модель. Они определены на пространстве квадратично-интегрируемых функций в комплексной плоскости со стандартным скалярным произведением

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^2 z\, \overline{\Phi(z,\bar{z})}\, \Psi(z,\bar{z})\,, \tag{13}$$

где $\mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\,\mathrm{Re}\, z\, \mathrm{d}\,\mathrm{Im}\, z$ – мера Лебега в $\mathbb{C}$, и под $\int \mathrm{d}^2 z$ подразумевается интегрирование по всей комплексной плоскости. Вводятся генераторы представлений (10) и антиголоморфные генераторы, имеющие аналогичный вид, с точностью до замены голоморфной переменной z на антиголоморфную $\bar{z}$, и параметра s на $\bar{s}$, где

$$(s,\bar{s}) = \left(\frac{1+n_s}{2} + \mathrm{i}\nu_s, \frac{1-n_s}{2} + \mathrm{i}\nu_s\right), \qquad n_s \in \mathbb{Z}+\sigma\,,\ \nu_s \in \mathbb{R}\,. \tag{14}$$

Здесь и далее фиксируется значение параметра σ, которое может быть равно 0, либо $\frac{1}{2}$. Параметры вроде спина и спектральных переменных в случае $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной модели группируются в пары вида $(\alpha,\bar{\alpha}) \in \mathbb{C}^2\,,\ \alpha-\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}+\sigma$. Параметр α называется *голоморфным* (в (14) это s), параметр $\bar{\alpha}$ – *антиголоморфным* (в (14) это $\bar{s}$). Во избежание путаницы отметим, что комплексное сопряжение числа $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначается в тексте через α^*, и обозначение $\bar{\alpha}$ не означает «комплексно сопряженный к α». Исключение делается лишь для комплексной переменной $\bar{z} \equiv z$ и функций $\overline{\Psi(z,\bar{z})} \equiv \Psi^*(z,\bar{z})$. Кроме того, у функций обозначается только голоморфный аргумент z, то есть $\Psi(z) \equiv \Psi(z,\bar{z})$.

Вводится степенная функция в комплексной плоскости, задаваемая парой чисел $(a,\bar{a}) \in \mathbb{C}^2$, таких что $a-\bar{a} \in \mathbb{Z}$

$$[z]^a \equiv z^a \bar{z}^{\bar{a}} = |z|^{a+\bar{a}}\, e^{\mathrm{i}(a-\bar{a})\arg z}. \tag{15}$$

В конце раздела приводится интегральный оператор $W(s,\bar{s})$ со степенным ядром, сплетающий эквивалентные представления.

В разделе 1.2 определяется рассматриваемая квантовомеханическая модель. Вводятся основные понятия: L-оператор $L(u)$ (1), R-матрица $R(u)$ (4), K-матрица

$$K(u) = \begin{pmatrix} \gamma\left(g-\frac{1}{2}\right) & u-\frac{1}{2} \\ \gamma^2\left(u-\frac{1}{2}\right) & \gamma\left(g-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix},$$

и матрица монодромии $T(u)$ (5)

$$T_n(u) = L_n(u)\cdots L_1(u)K(u)L_1(u)\cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} A_n(u) & B_n(u) \\ C_n(u) & D_n(u) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

а также антиголоморфные L-оператор $\bar{L}(\bar{u})$, K-матрица $\bar{K}(\bar{u})$ и матрица монодромии $\bar{T}_n(\bar{u})$. Частице с номером k соответствует координата z_k и L-оператор

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u + z_k\partial_{z_k} + s & -\partial_{z_k} \\ z_k^2\partial_{z_k} + 2sz_k & u - z_k\partial_{z_k} - s \end{pmatrix}.$$

Антиголоморфные объекты отличаются от своих голоморфных аналогов заменой параметров $s \to \bar{s}$, $\gamma \to \bar{\gamma}$, $g \to \bar{g}$, где $\bar{\gamma} = \gamma^*$ и

$$(g,\bar{g}) = \left(\frac{1+n_g}{2} + \mathrm{i}\nu_g, \frac{1-n_g}{2} + \mathrm{i}\nu_g\right), \qquad n_g \in \mathbb{Z} + \sigma\,,\ \nu_g \in \mathbb{R}\,. \quad (17)$$

Голоморфный и антиголоморфный B-элементы матриц монодромии $B_n(u)$, $\bar{B}_n(\bar{u})$ являются производящими функциями для полного набора наблюдаемых, задающих рассматриваемую интегрируемую модель. Диагонализация набора наблюдаемых эквивалентна одновременной диагонализации $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$.

В разделе 1.2.1 выводятся условия на параметры голоморфной и антиголоморфной K-матриц, при которых интегралы движения модели самосопряжены. Первое условие: $\bar{\gamma} = \gamma^*$, а из второго получается параметризация (17) для g и $\bar{g}$.

Раздел 1.2.2 содержит постановку совместной спектральной задачи для B-операторов

$$B_n(u)\,\Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n) = \left(u - \frac{1}{2}\right)\left(u^2 - x_1^2\right)\cdots\left(u^2 - x_n^2\right)\,\Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n)\,,$$

$$\bar{B}_n(\bar{u})\,\Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n) = \left(\bar{u} - \frac{1}{2}\right)\left(\bar{u}^2 - \bar{x}_1^2\right)\cdots\left(\bar{u}^2 - \bar{x}_n^2\right)\,\Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n)\,,$$

где $\boldsymbol{z}_n = (z_1, \ldots, z_n)$, $\boldsymbol{x}_n = (x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n)$. На основе симметрий собственных чисел этих операторов формулируются предполагаемые свойства симметрии собственных функций относительно перестановок и отражений спектральных переменных

$$\Psi_{\tau \boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n) = \Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n)\,, \qquad \Psi_{\sigma_k \boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n) = \Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n)\,, \tag{18}$$

где $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\tau \boldsymbol{x}_n = (x_{\tau(1)}, \bar{x}_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)}, \bar{x}_{\tau(n)})$ и $\sigma_k \boldsymbol{x}_n$ отличается от $\boldsymbol{x}_n$ знаком x_k и $\bar{x}_k$. Кроме того, доказывается самосопряженность интегралов движения относительно скалярного произведения в гильбертовом пространстве модели $\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \mathrm{d}^2 z_1 \cdots \int \mathrm{d}^2 z_n \, \overline{\Phi(\boldsymbol{z}_n)}\, \Psi(\boldsymbol{z}_n)$ в случае произвольного числа частиц n.

В разделе 1.3 кратко сформулированы полученные результаты.

В разделе 1.3.1 изложены результаты, касающиеся одночастичных собственных функций B-оператора $\Psi_x(z) \equiv \Psi_{(x,\bar{x})}(z)$. В одночастичном случае задача на собственные значения B-операторов сводится к спектральной задаче для наблюдаемых

$$H^s \, \Psi_x(z) = x^2 \, \Psi_x(z), \qquad \bar{H}^{\bar{s}} \, \Psi_x(z) = \bar{x}^2 \, \Psi_x(z),$$

где

$$H^s = (z^2 - \gamma^2)\partial_z^2 + (2s+1) z \partial_z + 2\gamma \left(g - \frac{1}{2} \right) \partial_z + s^2\,, \tag{19}$$

и $\bar{H}^{\bar{s}}$ имеет тот же вид, с точностью до замены z, γ, g, s на $\bar{z}, \bar{\gamma}, \bar{g}, \bar{s}$. Вводится определяющее соотношение для $\mathcal{K}$-оператора – уравнение отражения (12) с K-матрицей и L-оператором и его антиголоморфный аналог. Получено выражение для собственных функций в терминах оператора отражения

$$\Psi_x(z) = \pi \, [-2\mathrm{i}\gamma]^{s-x} \, \mathbf{\Gamma}(g - x) \, \mathcal{K}(s, x) \cdot 1\,, \tag{20}$$

спектральные переменные имеют вид

$$(x, \bar{x}) = \left(\frac{k}{2} + \mathrm{i}\eta, -\frac{k}{2} + \mathrm{i}\eta \right), \qquad k \in \mathbb{Z} + \sigma\,,\ \eta \in \mathbb{R}\,, \tag{21}$$

и нормировочный множитель подобран таким образом, чтобы функции обладали симметрией (18) относительно отражения спектральных переменных: $\Psi_x(z) = \Psi_{-x}(z)$. Через $\mathbf{\Gamma}$ обозначается гамма-функция, связанная с полем комплексных чисел $\mathbf{\Gamma}(a) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-\bar{a})}$. Она зависит от двух аргументов $(a, \bar{a}) \in \mathbb{C}^2$, таких что $a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$, при этом для краткости указывается лишь первый аргумент. Для оператора отражения написано представление в виде интегрального оператора

$$\big(\mathcal{K}(s,x)\,\Psi\big)(z) = \frac{[\mathrm{i}]^{x-s}\,\mathbf{\Gamma}(x-s+1)}{\pi}\,[z+\gamma]^{g-s}\,[z-\gamma]^{1-s-g} \\ \times \int \mathrm{d}^2 w\;\frac{[w+\gamma]^{x-g}\,[w-\gamma]^{x+g-1}}{[z-w]^{x-s+1}}\;\Psi(w)\,, \tag{22}$$

где степенная функция $[z]^a$ определена в (15). Отметим, что операторы вроде $\mathcal{K}(s,x)$ зависят как от голоморфных параметров, так и от антиголоморфных, но зависимость от антиголоморфных для краткости не указывается.

Для собственных функций приведены интегральные представления типа Гаусса-Гивенталя

$$\Psi_x(z) = [2\gamma]^{s-x}\,\mathbf{\Gamma}(g-x, 1-s+x) \\ \times \int \frac{\mathrm{d}^2 w}{[z+\gamma]^{s-g}\,[z-\gamma]^{s+g-1}\,[w-z]^{x-s+1}\,[w+\gamma]^{g-x}\,[w-\gamma]^{1-x-g}} \tag{23}$$

и Меллина-Барнса

$$\Psi_x(z) = \frac{1}{2}\int \mathcal{D}y\;\frac{[-1]^{y-s}\;\mathbf{\Gamma}(\varepsilon-y\pm x,\,1-s-\varepsilon+y,\,g-\varepsilon+y)}{[2\gamma]^{\varepsilon-y-s}\,[z+\gamma]^{s-g}\,[z-\gamma]^{g-\varepsilon+y}}\,, \tag{24}$$

(где ε – произвольное число из интервала $(0,1/2)$), а также выражение через гипергеометрическую функцию над $\mathbb{C}$

$$\Psi_x(z) = \frac{\pi\,\mathbf{\Gamma}(g+x,g-x)}{\mathbf{\Gamma}(s+g)}\;{}_2F_1^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} s+x|\bar{s}+\bar{x},\; s-x|\bar{s}-\bar{x} \\ s+g|\bar{s}+\bar{g}\end{matrix}\;\middle|\;\frac{1}{2}-\frac{z}{2\gamma}\right]. \tag{25}$$

Для гамма-функций используются обозначения

$$\mathbf{\Gamma}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots) = \mathbf{\Gamma}(\alpha_1)\,\mathbf{\Gamma}(\alpha_2)\ldots\,, \qquad \mathbf{\Gamma}(a\pm b) = \mathbf{\Gamma}(a+b)\,\mathbf{\Gamma}(a-b)\,,$$

и под знаком интегрирования в (24) понимается следующее

$$\int \mathcal{D}y = \sum_{m\in\mathbb{Z}+\sigma}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau\,, \qquad (y,\bar{y}) = \left(\frac{m}{2}+\mathrm{i}\tau, -\frac{m}{2}+\mathrm{i}\tau\right). \tag{26}$$

Вдобавок, приведено соотношение ортогональности относительно скалярного произведения (13) для собственных функций, задаваемых спектральными переменными вида (21),

$$\langle\Psi_y|\Psi_x\rangle = \mu^{-1}(x)\,\frac{\delta^{(2)}(x-y)+\delta^{(2)}(x+y)}{2}\,, \quad \mu(x) = \frac{1}{4\pi^4}\left|\frac{x}{\gamma}\right|^2 \tag{27}$$

и соотношение полноты

$$\int \mathcal{D}x\;\mu(x)\,\Psi_x(z)\,\overline{\Psi_x(w)} = \delta(\mathrm{Re}(z-w))\,\delta(\mathrm{Im}(z-w))\,, \tag{28}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, и для пары вида

$$(v,\bar{v}) = \left(\frac{h}{2}+\mathrm{i}\rho, -\frac{h}{2}+\mathrm{i}\rho\right), \qquad h\in\mathbb{Z}\,,\ \rho\in\mathbb{R}\,.$$

дельта-функция $\delta^{(2)}(v)$ определяется как

$$\delta^{(2)}(v) = \delta_{h,0}\,\delta(\rho)\,. \tag{29}$$

В разделе 1.3.2 описана индуктивная конструкция собственных функций для произвольного числа частиц. Приведено выражение для повышающего интегрального оператора $\Lambda_n(x)$, переводящего $(n-1)$-частичную собственную функцию в n-частичную

$$\Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n) = \Lambda_n(x_n)\,\Psi_{\boldsymbol{x}_{n-1}}(\boldsymbol{z}_{n-1})\,. \tag{30}$$

Он представлен в виде произведения элементарных «строительных блоков»

$$\begin{aligned}\Lambda_k(x) &= \lambda_k(x)\,\mathcal{R}_{k\,k-1}(x)\,\mathcal{R}_{k-1\,k-2}(x)\dots\mathcal{R}_{21}(x)\,\mathcal{K}_1(s,x)\\ &\qquad\times\mathcal{R}_{12}(x)\,\mathcal{R}_{23}(x)\dots\mathcal{R}_{k-1\,k}(x)\,,\\ \Lambda_1(x) &= \lambda_1(x)\,\mathcal{K}_1(s,x)\,.\end{aligned} \tag{31}$$

Оператор $\mathcal{K}_1$ вида (22) действует на функции переменной z_1, оператор $\mathcal{R}_{kj}$ действует на функции переменных z_k и z_j

$$[\mathcal{R}_{kj}(x)\,\Psi]\,(z_k,z_j) = \int \mathrm{d}^2w\,\frac{[\mathrm{i}]^{x-s}\,\boldsymbol{\Gamma}(x-s+1)\,[z_k-z_j]^{1-2s}}{\pi\,[z_k-w]^{1-s+x}\,[w-z_j]^{1-s-x}}\,\Psi(w,z_j)\,,$$

и нормировочные множители $\lambda_k(x)$ выбраны таким образом, чтобы выполнялись свойства симметрии (18). $\mathcal{R}$-оператор определяется уравнением [18]

$$\mathcal{R}_{kj}(x)\,L_k(u_1,u_2)\,L_j(u_1,u-x) = L_k(u_1,u-x)\,L_j(u_1,u_2)\,\mathcal{R}_{kj}(x)\,, \tag{32}$$

где, напомним, параметризация L-оператора $L(u_1, u_2)$ получается в результате замены переменных $u = (u_1 + u_2 + 1)/2\,, s = (u_1 - u_2 + 1)/2$. Также приведено выражение для собственных функций в терминах Λ-операторов

$$\Psi_{\boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{z}_n) = \Lambda_n(x_n)\,\Lambda_{n-1}(x_{n-1})\cdots\Lambda_1(x_1)\cdot 1\,,$$

являющееся прямым следствием (30) и (20).

В разделе 1.3.3 сформулировано уравнение отражения для $\mathcal{K}$-оператора и $\mathbb{R}$-оператора – общего решения уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(2,\mathbb{C})$ [6]. $\mathbb{R}$-оператор действует в тензорном произведении двух представлений основной серии спинов $(s_1, \bar{s}_1)$ и $(s_2, \bar{s}_2)$

$$\begin{aligned}&[\mathbb{R}_{12}(u)\,\Psi](z_1, z_2)\\ &\qquad = \int \mathrm{d}^2 z_1\,\mathrm{d}^2 z_2\,\frac{[z_2 - z_1]^{u+1-s_1-s_2}[w_1 - w_2]^{u+s_1+s_2-1}}{[z_2 - w_1]^{u+s_2-s_1+1}\,[z_1 - w_2]^{u+s_1-s_2+1}}\,\Psi(w_1, w_2)\,,\end{aligned}$$

переменная z_i соответствует пространству представления спина $(s_i, \bar{s}_i)$. Уравнение отражения для $\mathcal{K}$- и $\mathbb{R}$-операторов имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}_{12}(u-v)\,\mathbb{K}_1(u,s_1)\,\mathbb{R}_{12}(u+v)\,\mathbb{K}_2(v,s_2)\\ &\qquad = \mathbb{K}_2(v,s_2)\,\mathbb{R}_{12}(u+v)\,\mathbb{K}_1(u,s_1)\,\mathbb{R}_{12}(u-v)\,,\end{aligned} \tag{33}$$

где $\mathbb{K}(u,s) = \mathcal{K}(s-u, s+u)$, и через $\mathbb{K}_i$ обозначается оператор $\mathbb{K}$, действующий на функции переменной z_i. Оно представляет собой бесконечномерное обобщение уравнения отражения для K- и R-матриц.

Раздел 1.4 содержит вывод интегрального представления для оператора отражения (22). Ключевую роль при этом играет оператор, сплетающий эквивалентные представления $SL(2,\mathbb{C})$ основной серии.

В разделе 1.5 доказано, что при действии повышающего оператора (31) на собственную функцию для цепочки из $n-1$ узла получается собственная функция для n узлов. Доказательство основано на использовании определяющих соотношений для $\mathcal{K}$- и $\mathcal{R}$-операторов (12) и (32).

Раздел 1.6 содержит вывод различных представлений для собственных функций B-оператора в случае цепочки из одного узла, перечисленных в разделе 1.3.1.

В разделе 1.6.1 из явной формулы для $\mathcal{K}$-оператора получено интегральное представление типа Гаусса-Гивенталя для одночастичных собственных функций (23), а также соответствующее диаграммное представление. При помощи фейнмановской диаграммной техники, изложенной в приложении A, доказана симметрия волновых функций относительно отражения спектральной переменной.

В разделе 1.6.2 при помощи представления Гаусса-Гивенталя собственные функции выражены через гипергеометрическую функцию (25).

В разделе 1.6.3 из представления Гаусса-Гивенталя выводится интегральное представление типа Меллина-Барнса для одночастичных функций (24).

В разделе 1.7 при помощи фейнмановской диаграммной техники доказана ортогональность одночастичных собственных функций (27).

Раздел 1.8 содержит доказательство полноты одночастичных собственных функций (28), использующее интегральное представление типа Меллина-Барнса для этих функций и комплексный аналог интеграла Густафсона BC-типа.

В разделе 1.9 приведено доказательство уравнения отражения для $\mathcal{K}$- и $\mathbb{R}$-операторов (33), анонсированное в разделе 1.3.3.

Глава 2 посвящена спиновой цепочке BC-типа с группой симметрии $SL(2,\mathbb{R})$, задаваемой нетривиальной K-матрицей того же вида, что и в случае $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки.

Модель определена в разделе 2.1. Вводятся генераторы представления $SL(2,\mathbb{R})$ (10) (при этом $s \in \mathbb{R}$ и $s > \frac{1}{2}$), при помощи которых определяется L-оператор (1). Они действуют на пространстве голоморфных функций в верхней полуплоскости, квадратично-интегрируемых относительно меры $\mathcal{D}z = \frac{2s-1}{\pi}\,(2\operatorname{Im} z)^{2s-2}\ \mathrm{d}\operatorname{Re} z\ \mathrm{d}\operatorname{Im} z$, со скалярным произведением

$$\langle \chi | \psi \rangle = \int \mathcal{D}z\, \overline{\chi(z)}\, \psi(z)\,. \tag{34}$$

Генераторы, L-оператор, R-матирца (4), K-матрица

$$K(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\beta\big(g - \frac{1}{2}\big) & u - \frac{1}{2} \\ -\beta^2\big(u - \frac{1}{2}\big) & \mathrm{i}\beta\big(g - \frac{1}{2}\big) \end{pmatrix}$$

и матрица монодромии (16) имеют тот же вид, что и в случае $SL(2,\mathbb{C})$. Производящей функцией для полного набора наблюдаемых является B-элемент матрицы монодромии, и диагонализация этого набора эквивалентна диагонализации B-элемента.

В разделе 2.1.1 наложены ограничения на параметры K-матрицы $\beta > 0$, $g > 0$, диктуемые требованием эрмитовости интегралов движения, а также отсутствия дискретного и вырожденного спектра у B-элемента матрицы монодромии.

В разделе 2.1.2 показано, что в случае выполнения условий, сформулированных в предыдущем разделе, интегралы движения эрмитовы относительно скалярного произведения в гильбертовом пространстве модели $\langle\Phi|\Psi\rangle = \int \mathcal{D}z_1 \cdots \int \mathcal{D}z_n\, \overline{\Phi(\boldsymbol{z}_n)}\, \Psi(\boldsymbol{z}_n)$. Под $\int \mathcal{D}z$ подразумевается интегрирование по всей верхней полуплоскости относительно упомянутой выше меры.

В разделе 2.2 сформулированы основные результаты, полученные в настоящей диссертации для $SL(2,\mathbb{R})$-инвариантной спиновой цепочки.

Результаты для одночастичных функций $\Psi_\lambda(z)$ приведены в разделе 2.2.1. В этом случае $B(u) = \big(u - \frac{1}{2}\big)(u^2 - H^s)$, где H^s дается формулой (19), и спектральная задача для B-элемента эквивалентна $H^s\, \Psi_\lambda(z) = -\lambda^2\, \Psi_\lambda(z)$. Найдено выражение для одночастичных собственных функций через гипергеометрическую функцию

$$\Psi_\lambda(z) = {}_2F_1\left(s + \mathrm{i}\lambda,\, s - \mathrm{i}\lambda,\, s + g;\, \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}z}{2\beta}\right). \tag{35}$$

а также в виде результата действия оператора отражения на функцию, тождественно равную единице

$$\Psi_\lambda(z) = \frac{\Gamma(g+s)}{\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)}\, \mathcal{K}(s, \mathrm{i}\lambda)\cdot 1\,. \tag{36}$$

$\mathcal{K}$-оператор $\mathcal{K}(s,x)$ определяется через уравнение отражения с L-оператором и K-матрицей (12). Для оператора отражения приведены три представления: первое – в виде отношения гамма-функций от операторного аргумента

$$\mathcal{K}(s,x) = \frac{\Gamma\big(N + \frac{x-s}{2} + g\big)}{\Gamma\big(N + \frac{s-x}{2} + g\big)}, \quad N = \frac{1}{2\mathrm{i}\beta}\big[(z^2+\beta^2)\partial_z + (s+x)z\big], \tag{37}$$

второе – через контурный интеграл

$$\big[\mathcal{K}(s,x)\,\psi\big](z) = \frac{(2\mathrm{i}\beta)^{s-x}}{\Gamma(s-x)}\,(z+\mathrm{i}\beta)^{g-s} \int_0^1 \mathrm{d}t\; (1-t)^{s-x-1}\; t^{g+x-1} \\ \times \big(t(z-\mathrm{i}\beta) + 2\mathrm{i}\beta\big)^{x-g}\; \psi\big(t(z-\mathrm{i}\beta)+\mathrm{i}\beta\big) \tag{38}$$

и третье – через интеграл по верхней полуплоскости

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{K}(s,x)\,\psi\big](z) &= e^{2\pi \mathrm{i} s}\,(2\mathrm{i}\beta)^{s-x}\,\frac{\Gamma(g+x)\,\Gamma(3s-g)}{\Gamma^2(2s)}\,(z+\mathrm{i}\beta)^{g-s}\\ &\times\int \mathcal{D}w\,\mathcal{D}v\,(z-\bar v)^{-g-x}(i\beta-\bar v)^{x-s}(v-\bar w)^{g-3s}(w+\mathrm{i}\beta)^{x-g}\psi(w)\,.\end{aligned} \tag{39}$$

Также для набора одночастичных волновых функций приведено соотношение ортогональности относительно скалярного произведения (34)

$$\langle\Psi_\rho|\Psi_\lambda\rangle = \mu^{-1}(\lambda)\,\frac{\delta(\lambda-\rho)+\delta(\lambda+\rho)}{2}\,, \tag{40}$$

где $\mu(\lambda) = \frac{1}{4\pi\,(2\beta)^{2s}\,\Gamma(2s)}\,|\Gamma^2(s+\mathrm{i}\lambda)\,\Gamma(g+\mathrm{i}\lambda)\Gamma^{-1}(s+g)\,\Gamma^{-1}(2\mathrm{i}\lambda)|^2$, и соотношение полноты

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\lambda\;\mu(\lambda)\;\Psi_\lambda(z)\,\overline{\Psi_\lambda(w)} = \frac{e^{\mathrm{i}\pi s}}{(z-\bar w)^{2s}}\,, \tag{41}$$

правая часть которого представляет собой ядро тождественного оператора в гильбертовом пространстве одночастичной системы.

В разделе 2.2.2 изложена индуктивная конструкция собственных функций для цепочки, состоящей из произвольного числа частиц. Формула для повышающего оператора имеет ту же структуру, что и в случае $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки BC-типа. Он выражается через $\mathcal{K}$-оператор и $\mathcal{R}$-оператор, который, напомним, определяется через $\mathcal{R}LL$-соотношение (32).

Раздел 2.3 посвящен оператору отражения.

В разделе 2.3.1 решено определяющее соотношение для $\mathcal{K}$-оператора (12). Для него найдено выражение в виде отношения двух гамма-функций от операторного аргумента (37). Доказана эквивалентность этого представления и формулы из работы [22].

В разделе 2.3.2 получено первое интегральное представление для оператора отражения (38).

Второе интегральное представление для $\mathcal{K}$-оператора (39) выведено из первого в разделе 2.3.3. Для интегральных операторов такого типа можно ввести фейнмановскую диаграммную технику, описание которой дано в приложении Б. Приведена диаграмма для ядра оператора отражения.

В разделе 2.4 доказана эквивалентность двух представлений одночастичных собственных функций (35) и (36). При помощи формулы для оператора отражения (39) получено интегральное представление типа Гаусса-Гивенталя для собственных функций

$$\Psi_\lambda(z) = (2i\beta)^{s+\mathrm{i}\lambda}\, e^{i\pi s}\, \frac{\Gamma(s+g)\Gamma(2s+\mathrm{i}\lambda-g)}{\Gamma(s+\mathrm{i}\lambda)\Gamma(2s)} \times \int \mathcal{D}w\, \frac{1}{(z-\bar{w})^{s-\mathrm{i}\lambda}\,(i\beta-\bar{w})^{g+\mathrm{i}\lambda}\,(w+i\beta)^{2s+\mathrm{i}\lambda-g}}\,,$$

а также соответствующее диаграммное представление.

Раздел 2.5 посвящен доказательству соотношения ортогональности одночастичных собственных функций (40).

В разделе 2.5.1 ортогональность доказана при помощи асимптотики гипергеометрической функции при больших значениях аргумента.

В разделе 2.5.2 приведено второе доказательство ортогональности набора одночастичных собственных функций – при помощи фейнмановской диаграммной техники.

Раздел 2.6 содержит доказательство полноты построенной системы одночастичных собственных функций (41). Для этой цели волновые функции представлены через интеграл типа Меллина-Барнса (при помощи представления Меллина-Барнса для гипергеометрической функции). Ключевую роль в доказательстве играет предельный случай интеграла де Бранжа-Вильсона.

Глава 3 посвящена $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочке A-типа.

В разделе 3.1 дается определение янгиана $\mathrm{Y}(gl(N,\mathbb{C}))$ – алгебры симметрии модели. Она задается при помощи матрицы $t(u)$, элементы которой представляют собой формальные ряды по u, коэффициенты этих рядов являются генераторами алгебры. Определяющие соотношения задаются при помощи RTT-соотношения вида (3) с R-матрицей Янга (4) размера $N \times N$. Матрица монодромии, которая также обозначается $t(u)$, является представлением этой алгебры. L-оператор реализует ее простейшее представление. Вводится понятие квантовых миноров

$$t^{i_1\dots i_m}_{j_1\dots j_m}(u) = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\tau)\, t^{i_{\tau(1)}}_{j_1}(u-m+1)\, t^{i_{\tau(2)}}_{j_2}(u-m+2)\dots t^{i_{\tau(m)}}_{j_m}(u)\,,$$

где элемент в i-ой строке и j-ом столбце произвольной матрицы M обозначается M^i_j. Приводятся известные формулы антисимметрии квантовых миноров по перестановкам индексов строк и столбцов. Уделяется внимание важному частному случаю – угловым квантовым минорам

$$A_m(u) = t^{1\dots m}_{1\dots m}(u)\,, \qquad m = 1,\dots,N\,,$$

образы этих элементов в конкретном представлении янгиана являются производящими функциями для полного набора наблюдаемых квантовомеханической модели. Квантовый определитель $A_N(u)$ порождает центр $\mathrm{Y}(gl(N,\mathbb{C}))$. Вводятся унитарные представления основной серии группы $SL(N,\mathbb{C})$, через которые определяется L-оператор. Они определены в пространстве квадратично-интегрируемых функций на множестве нижнетреугольных комплексных матриц z с единицами на диагонали, $z^i_j \equiv z_{ij}$, $1 \le j < i \le N$. Скалярное произведение в этом пространстве имеет вид

$$\langle\Phi|\Psi\rangle = \int \mathrm{d}^{N(N-1)}z\,\overline{\Phi(z)}\,\Psi(z), \tag{42}$$

где $\mathrm{d}^{N(N-1)}z = \prod_{1\le j<i\le N} \mathrm{d}^2 z_{ij}$, и интегрирование по z_{ij} ведется по всей комплексной плоскости. Представление задается набором параметров

$$(\sigma_1,\bar\sigma_1,\ldots,\sigma_N,\bar\sigma_N)\,, \qquad \sigma_j = \frac{s_j+\varkappa}{2} + \mathrm{i}\eta_j,\ \bar\sigma_j = \frac{-s_j+\varkappa}{2} + \mathrm{i}\eta_j \tag{43}$$

где $s_j \in \mathbb{Z}$, $\varkappa, \eta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,n$. Генераторы представления E_{ki} можно записать в компактной форме, собрав их в матрицу E: $E^i_k = E_{ki}$. Формула для генераторов: $E = -z\,(D+\hat\sigma)\,z^{-1}$, где матрицы E, $\hat\sigma$ и D размера $N\times N$ имеют вид

$$E^i_k = E_{ki}\,, \qquad \hat\sigma^c_d = \delta_{dc}\sigma_c\,, \qquad D^c_d = \begin{cases} \sum\limits_{k=d}^{N} z_{kd}\partial_{z_{kc}}, & d > c \\ 0, & d \le c \end{cases}.$$

Также вводится набор антиголоморфных генераторов $\bar E_{ab}$, отличающихся от E_{ab} заменой $z_{ij} \to \bar z_{ij}$, $\sigma_k \to \bar\sigma_k$. Отметим, что параметры представления $SL(N,\mathbb{C})$ основной серии должны удовлетворять условию $\sum_{k=1}^N \sigma_k = N(N-1)/2$ и аналогичному условию для $\bar\sigma_k$. Мы такого ограничения не накладываем и рассматриваем более общий случай произвольных параметров вида (43).

Раздел 3.2 посвящен определению модели. Вводятся голоморфный и антиголоморфный L-операторы

$$L(u) = u\mathbf{1} + E\,, \qquad \bar L(\bar u) = \bar u\mathbf{1} + \bar E\,,$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица $N\times N$ и $\bar E$ – матрица антиголоморфных генераторов, а также матрица монодромии и ее антиголоморфный аналог, определяющиеся стандартным образом (2) через произведение голоморфных либо антиголоморфных L-операторов. Вдобавок, формулируется спектральная задача для коммутативного семейства угловых квантовых миноров голоморфного и антиголоморфного L-операторов

$$A_m(u)\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{k=1}^{m}(u-\lambda_{mk})\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \bar{A}_m(\bar{u})\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod_{k=1}^{m}(\bar{u}-\bar{\lambda}_{mk})\,\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}\,,$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \bar{\lambda})$ и $\lambda = \{\lambda_{mk}\,,\ 1 \leq k \leq m \leq N\}$, $\bar{\lambda} = \{\bar{\lambda}_{mk}\,,\ 1 \leq k \leq m \leq N\}$. Поскольку унитарные представления основной серии неприводимы, $A_N(u)$ и $\bar{A}_N(\bar{u})$ пропорциональны тождественному оператору, и $\lambda_{Nk} = \sigma_k$, $\bar{\lambda}_{Nk} = \bar{\sigma}_k$. Далее мы для краткости не будем упоминать антиголоморфные миноры и параметры $\bar{\sigma}_k$

В разделе 3.3 выводятся формулы для построения общих собственных функций угловых квантовых миноров L-оператора $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки при помощи индукции по N. В число этих формул входят выражения для миноров L-оператора $SL(N,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки через миноры L-оператора для $SL(N-1,\mathbb{C})$, а также выражения для действия неугловых миноров на собственные функции угловых.

Раздел 3.4 посвящен индуктивному построению собственных функций угловых квантовых миноров L-оператора (элементов базиса Гельфанда-Цетлина). Приведен анзац для произвольного шага индукции, выражающий элемент базиса Гельфанда-Цетлина для представления $SL(N,\mathbb{C})$ через интеграл по спектральным переменным с неизвестным ядром от элемента базиса для $SL(N-1,\mathbb{C})$ (представление Меллина-Барнса). В следующих разделах разобраны индукционные шаги $N = 2 \to N = 3$ и $N = 3 \to N = 4$.

В разделе 3.4.1 приведены известные формулы для собственных функций единственного нетривиального углового минора L-оператора $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки $A_1(u) = u - \sigma_1 + 1 + z_{21}\partial_{z_{21}}$, соответствующее представление основной серии задается параметрами σ_1, σ_2. Они выражаются через степенную функцию

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(z_{21}) = \boldsymbol{\Gamma}(1-\sigma_1+\lambda_{11})\,[z_{21}]^{\sigma_1-1-\lambda_{11}}\,. \tag{44}$$

Приведены формулы для действия элемента $(1,2)$ L-оператора и его антиголоморфного аналога на собственные функции, а также соотношения ортогональности и полноты для них.

В разделе 3.4.2 построено интегральное представление типа Меллина-Барнса для собственных функций $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ угловых квантовых миноров L-оператора $SL(3,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки, задаваемой параметрами представления основной серии $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Они выражены через функции $\Phi_{\boldsymbol{\gamma}}$ (44) для $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки, задаваемой параметрами σ_2, σ_3

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(z_{21}, z_{31}, z_{32}) = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int \mathcal{D}\gamma_{11}\, K^{(\varepsilon)}_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda})\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}}(z_{32}) \\ \times [z_{21}]^{-\gamma_{11}-1-\lambda_{11}+\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}}\, [z_{31}]^{\gamma_{11}+\sigma_1-1-\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}}\,, \quad (45)$$

где $(\gamma_{11}\,,\, \bar\gamma_{11}) = \left(\frac{k+\varkappa-1}{2} + \mathrm{i}\nu,\ \frac{-k+\varkappa-1}{2} + \mathrm{i}\nu\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\nu \in \mathbb{R}$, ядро интеграла имеет вид

$$K^{(\varepsilon)}_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda}) = [-1]^{\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}}\, \boldsymbol{\Gamma}(1-\sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}_2)\, \boldsymbol{\Gamma}\big(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\boldsymbol{\lambda}_2} + 1\big)\, \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}_2 + \varepsilon, \boldsymbol{\gamma}_1)\,,$$

и введены обозначения $\int \mathcal{D}\gamma_{11} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\nu$,

$$\boldsymbol{\lambda}_m = (\lambda_{m1}, \bar\lambda_{m1}, \ldots, \lambda_{mm}, \bar\lambda_{mm})\,, \quad \underline{\boldsymbol{\lambda}_m} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{mi}\,,$$
$$\boldsymbol{\lambda}_m + \varepsilon = (\lambda_{m1}+\varepsilon, \bar\lambda_{m1}+\varepsilon, \ldots, \lambda_{mm}+\varepsilon, \bar\lambda_{mm}+\varepsilon)\,,$$
$$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}_m, \boldsymbol{\gamma}_j) = \prod_{a=1}^{m}\prod_{b=1}^{j} \boldsymbol{\Gamma}(\lambda_{ma} - \gamma_{jb})\,, \quad \boldsymbol{\Gamma}(\alpha, \pm\boldsymbol{\lambda}_m) = \prod_{i=1}^{m} \boldsymbol{\Gamma}(\alpha \mp \lambda_{mi})\,.$$

Приведено соотношение ортогональности для собственных функций относительно скалярного произведения (42) при $N = 3$

$$\langle \Psi_{\boldsymbol{\lambda}} | \Psi_{\boldsymbol{\lambda}'} \rangle = \frac{64\pi^8}{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2}\, \delta^{(2)}(\boldsymbol{\lambda}_1 - \boldsymbol{\lambda}'_1)\, \delta^{(2)}\left(\boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}'_2\right)\,, \quad (46)$$

где спектральные переменные имеют вид

$$(\lambda_{lj}\,,\, \bar\lambda_{lj}) = \left(\frac{k_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + \mathrm{i}\nu_{lj}\,,\ \frac{-k_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + \mathrm{i}\nu_{lj}\right), \quad (47)$$

$k_{lj} \in \mathbb{Z}$, $\nu_{lj} \in \mathbb{R}$, $1 \le j \le l \le 2$, симметричная дельта-функция определяется как

$$\delta^{(2)}(\boldsymbol{\lambda}_m, \boldsymbol{\lambda}'_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} \delta^{(2)}(\lambda_{m1} - \lambda'_{m,\tau(1)}) \ldots \delta^{(2)}(\lambda_{mm} - \lambda'_{m,\tau(m)})$$

и дельта-функция $\delta^{(2)}$ определена в (29). Также приведены формулы для действия неугловых квантовых миноров на эти функции, необходимые для следующего индукционного шага $N = 3 \to N = 4$, и предполагаемое соотношение полноты для них (доказательство соотношения полноты остается открытой задачей).

В разделе 3.4.3 собственные функции $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ угловых миноров L-оператора $SL(4,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки, задаваемой параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ выражены при помощи представления Меллина-Барнса через собственные функции $\Phi_{\boldsymbol{\gamma}}$ (45) $SL(3,\mathbb{C})$ цепочки, задаваемой параметрами $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Спектральная задача для угловых миноров $SL(4,\mathbb{C})$ L-оператора преобразована к системе конечно-разностных уравнений для ядра интегрального представления, которая решена при помощи многомерного комплексного аналога преобразования Меллина. Окончательное выражение имеет вид

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(z_{21}, z_{31}, z_{41}, \boldsymbol{z}') = \lim_{\varepsilon\to 0_+} \int \mathcal{D}\boldsymbol{\gamma}\, \frac{|\lambda_{21}-\lambda_{22}|^2}{64\pi^8}\, K^{(\varepsilon)}_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda})\, \Phi_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{z}') \\ \times [z_{21}]^{-\gamma_{11}-\lambda_{11}+\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}-1} [z_{31}]^{\gamma_{11}-\underline{\boldsymbol{\gamma}_2}-\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}+\underline{\boldsymbol{\lambda}_3}-1} [z_{41}]^{\sigma_1-1+\underline{\boldsymbol{\gamma}_2}-\underline{\boldsymbol{\lambda}_3}},$$

где $\boldsymbol{z}' = (z_{32}, z_{42}, z_{43})$, ядро интеграла представляется следующим образом

$$K^{(\varepsilon)}_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda}) = [-1]^{\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}+\underline{\boldsymbol{\gamma}_2}}\, \boldsymbol{\Gamma}(1-\sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}_3) \\ \times \boldsymbol{\Gamma}\left(\gamma_{11}+\lambda_{11}-\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}+1\right) \boldsymbol{\Gamma}\left(1-\gamma_{11}+\underline{\boldsymbol{\gamma}_2}+\underline{\boldsymbol{\lambda}_2}-\underline{\boldsymbol{\lambda}_3}\right) \\ \times \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\lambda}_3+\varepsilon, \boldsymbol{\gamma}_2)\; {}_4G_4^{\mathbb{C}}\left[\begin{matrix} \lambda_{21}+\varepsilon, \lambda_{22}+\varepsilon, \gamma_{21}, \gamma_{22} \\ 1-\lambda_{31}, 1-\lambda_{32}, 1-\lambda_{33}, -\gamma_{11} \end{matrix}\; ; 1\right],$$

${}_4G_4^{\mathbb{C}}$ – обобщенная гипергеометрическая функция над полем комплексных чисел, выражающаяся через интеграл от произведения гамма-функций $\boldsymbol{\Gamma}$, связанных с полем $\mathbb{C}$. Переменные интегрирования имеют вид (47), и $\int \mathcal{D}\boldsymbol{\gamma} = \prod_{1\le j\le l\le 2} \int \mathcal{D}\gamma_{lj}$, $\int \mathcal{D}\gamma_{lj} = \sum_{k_{lj}\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\nu_{lj}$. Для собственных функций приведено соотношение ортогональности относительно скалярного произведения (42) при $N=4$

$$\langle \Psi_{\boldsymbol{\lambda}} | \Psi_{\boldsymbol{\lambda}'} \rangle = \mu_4^{-1}(\boldsymbol{\lambda})\, \delta^{(2)}(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}'_1)\, \delta^{(2)}(\boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}'_2)\, \delta^{(2)}(\boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}'_3)\,, \qquad (48)$$

где $\mu_4(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{192\,\pi^4} \prod_{m=1}^3 \prod_{1\le l<j\le m} |\lambda_{ml}-\lambda_{mj}|^2$ и спектральные переменные имеют вид

$$(\lambda_{lj}\,, \bar{\lambda}_{lj}) = \left(\frac{m_{lj}+\varkappa-4+l}{2} + \mathrm{i}\mu_{lj}\,,\; \frac{-m_{lj}+\varkappa-4+l}{2} + \mathrm{i}\mu_{lj} \right),$$

$m_{lj}\in\mathbb{Z}$, $\mu_{lj}\in\mathbb{R}$, $1\le j\le l\le 3$. Также приведено предполагаемое соотношение полноты (доказательство которого остается открытой задачей) и получены формулы для действия неугловых миноров

L-оператора $SL(4,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки на собственные функции угловых.

Раздел 3.5 посвящен доказательству ортогональности построенных наборов собственных функций угловых квантовых миноров L-оператора $SL(3,\mathbb{C})$- и $SL(4,\mathbb{C})$-инвариантных спиновых цепочек.

В разделе 3.5.1 приведено доказательство ортогональности собственных функций для $SL(3,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки (46). Ключевую роль в нем играет соотношение ортогональности функций для $SL(2,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки и комплексный аналог интеграла Густафсона A-типа.

Ортогональность собственных функций угловых миноров L-оператора $SL(4,\mathbb{C})$-инвариантной спиновой цепочки (48) доказана в разделе 3.5.2. В основе доказательства лежит соотношение ортогональности собственных функций для $SL(3,\mathbb{C})$-инвариантной цепочки и комплексный аналог интеграла Густафсона A-типа.

В заключении диссертации приводятся основные результаты работы и обсуждаются перспективы дальнейшего развития темы. Также эта часть содержит благодарности автора.

Публикации автора по теме диссертации

[A1] *Антоненко П. В.*, *Белоусов Н. М.*, *Деркачев С. Э.*, *Хорошкин С. М.* Оператор отражения и гипергеометрия I: $SL(2,\mathbb{R})$ спиновая цепочка // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2024. — Т. 532. — С. 5—46.

[A2] *Антоненко П. В.*, *Белоусов Н. М.*, *Деркачев С. Э.*, *Валиневич П. А.*, Оператор отражения и гипергеометрия II: $SL(2,\mathbb{C})$ спиновая цепочка // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2024. — Т. 532. — С. 47—79.

[A3] *Antonenko P.*, *Derkachov S.*, *Valinevich P.* BC-Type Open $SL(2,\mathbb{C})$ Spin Chain // Annales Henri Poincaré. — 2026. — DOI: 10.1007/s00023-025-01653-0.

[A4] *Antonenko P. V.* The Gelfand-Tsetlin basis for infnite-dimensional representations of $gl_n(\mathbb{C})$ // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2022. — Vol. 55, no. 22. — P. 225201.

Список литературы

[1] *Sklyanin E. K., Kulish P. P.* Quantum Spectral Transform Method. Recent Developments // Lecture Notes in Physics. — 1982. — Vol. 151. — P. 61.

[2] *Боголюбов Н. М., Изергин А. Г., Корепин В. Е.* Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. — Москва: Наука, 1992.

[3] *Sklyanin E. K.* Boundary Conditions for Integrable Quantum Systems // J. Phys. A. — 1988. — Vol. 21. — P. 2375—2389.

[4] *Чередник И. В.* Факторизующиеся частицы на полупрямой и системы корней // ТМФ. — 1984. — Т. 61, № 1. — С. 35–44.

[5] *Kitanine N., Maillet J. M., Niccoli G.* Open spin chains with generic integrable boundaries: Baxter equation and Bethe ansatz completeness from separation of variables // J. Stat. Mech. — 2014. — P. 5015.

[6] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Manashov A. N.* Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD: I. Baxter Q-operator and separation of variables // Nuclear Physics B. — 2001. — Vol. 617, no. 1. — P. 375—440.

[7] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Manashov A. N.* Baxter Q-operator and separation of variables for the open $SL(2,\mathbb{R})$ spin chain // JHEP. — 2003. — Vol. 2003, no. 10. — P. 53.

[8] *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. Том 5: интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. — 656 с.

[9] *Липатов Л. Н.* Асимптотика многоцветной КХД при больших энергиях и точно решаемые спиновые модели // Письма в ЖЭТФ. — 1994. — Т. 59, № 9. — С. 571—574.

[10] *Faddeev L. D., Korchemsky G. P.* High-energy QCD as a completely integrable model // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 342, no. 1. — P. 311—322.

[11] *De Vega H. J., Lipatov L. N.* Interaction of reggeized gluons in the Baxter-Sklyanin representation // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64, no. 11. — P. 114019.

[12] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Kotanski J., Manashov A. N.* Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD. 2. Quantization conditions and energy spectrum // Nucl. Phys. B. — 2002. — Vol. 645, no. 1. — P. 237—297.

[13] *Sklyanin E. K.* Separation of Variables: New Trends // Progress of Theoretical Physics Supplement. — 1995. — Vol. 118. — P. 35—60.

[14] *Derkachov S. E., Manashov A. N., Valinevich P. A.* SL$(2, \mathbb{C})$ Gustafson Integrals // SIGMA. — 2018. — Vol. 14.

[15] Kuznetsov V., Sklyanin E., Bäcklund Transformation for the BC-Type Toda Lattice // SIGMA. — 2007. — Vol. 3.

[16] *Иоргов Н. З., Шадура В. Н.* Волновые функции цепочки Тоды с взаимодействием на границе // ТМФ. — 2005. — Т. 142, №. 2. — С. 346—364.

[17] *Givental A.* Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture // American Mathematical Society Translations: Series 2. — 1997. — Vol. 180. — P. 103—115.

[18] *Derkachov S. E., Manashov A. N.* Iterative construction of eigenfunctions of the monodromy matrix for $SL(2, \mathbb{C})$ magnet // J. Phys. A: Math. Theor. — 2014. — Vol. 47, no. 30. — P. 305204.

[19] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Manashov A. N.* Separation of variables for the quantum $SL(2, \mathbb{R})$ spin chain // JHEP. — 2003.

[20] *Валиневич П. А.* Представление Меллина–Барнса для $SL(2, \mathbb{C})$-магнетика // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2020. — Т. 494. — С. 125—143.

[21] *Belitsky A. V.* Fine structure of spectrum of twist-three operators in QCD // Phys.Lett. B. — 1999. — Vol. 453. — P. 59—72.

[22] *Frassek R., Giardinà C., Kurchan J.* Non-compact quantum spin chains as integrable stochastic particle processes // Journal of Statistical Physics. — 2020. — Vol. 180. — P. 135—171.

[23] *Молев А. И.* Янгианы и классические алгебры Ли. — Москва: Издательство МЦНМО, 2009.

[24] *Nazarov M. L.*, *Tarasov V. O.* Yangians and Gelfand-Zetlin Bases // Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1994. — Vol. 30. — P. 459—478.

[25] *Гельфанд И. М.*, *Цетлин М. Л.* Конечномерные представления группы унимодулярных матриц // ДАН СССР. — 1950. — Т. 71, № 5. — С. 825—828.

[26] *Гельфанд И. М.*, *Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп // Тр. МИАН СССР. — 1950. — Т. 36. — С. 3—288.

[27] *Граев М. И.* Континуальный аналог схем Гельфанда-Цетлина и реализация основной серии неприводимых унитарных представлений группы $GL(n, \mathbb{C})$ в пространстве функций на многообразии этих схем // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 412, № 2. — С. 154—158.

[28] *Валиневич П. А.* Построение базиса Гельфанда–Цетлина для представлений основной унитарной серии алгебры $sl_n(\mathbb{C})$ // ТМФ. — 2019. — Т. 198, № 1. — С. 162—174.

[29] *Kharchev S.*, *Lebedev D.* Eigenfunctions of $GL(N, \mathbb{R})$ Toda chain: The Mellin-Barnes representation // Письма в ЖЭТФ. — 2000. — Т. 71, № 6. — С. 338—343.

Антоненко Павел Владимирович

Волновые функции некомпактных спиновых цепочек и их свойства

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ___________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ___________________________________