

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Антоненко Павел Владимирович

Волновые функции некомпактных спиновых цепочек и их свойства

Специальность 1.1.2 —
«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Валиневич Павел Анатольевич

Санкт-Петербург — 2026

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Введение | 4 |
| Глава 1. $SL(2, \mathbb{C})$-инвариантная спиновая цепочка ВС-типа | 24 |
| 1.1 Представления основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$ | 24 |
| 1.2 Определение модели | 28 |
| 1.2.1 Условия на параметры K -матриц | 30 |
| 1.2.2 Спектральная задача для операторов $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$ | 31 |
| 1.3 Полученные результаты | 35 |
| 1.3.1 Одночастичные собственные функции | 35 |
| 1.3.2 n -частичные собственные функции | 39 |
| 1.3.3 Обобщение уравнения отражения | 42 |
| 1.4 Вывод формулы для оператора отражения | 43 |
| 1.5 Индуктивное построение собственных функций B -оператора | 47 |
| 1.6 Интегральные представления для одночастичных собственных функций | 51 |
| 1.6.1 Диаграммные представления | 51 |
| 1.6.2 Выражение через гипергеометрическую функцию | 53 |
| 1.6.3 Представление Меллина-Барнса | 54 |
| 1.7 Ортогональность одночастичных собственных функций | 55 |
| 1.8 Полнота набора одночастичных собственных функций | 58 |
| 1.9 Обобщенное уравнение отражения | 62 |
| Глава 2. $SL(2, \mathbb{R})$-инвариантная спиновая цепочка ВС-типа | 67 |
| 2.1 Определение модели | 67 |
| 2.1.1 Ограничения на параметры K -матрицы | 70 |
| 2.1.2 Самосопряженность квантовых интегралов движения | 71 |
| 2.2 Полученные результаты | 72 |
| 2.2.1 Одночастичная задача | 72 |
| 2.2.2 Многочастичная задача | 75 |
| 2.3 Оператор отражения | 77 |
| 2.3.1 Решение уравнения отражения | 77 |
| 2.3.2 Представление через бета-интеграл | 82 |
| 2.3.3 Диаграммное представление | 84 |
| 2.4 Связь оператора отражения с гипергеометрической функцией | 86 |
| 2.5 Ортогональность одночастичных собственных функций | 87 |
| 2.5.1 Доказательство через асимптотику | 88 |
| 2.5.2 Доказательство при помощи диаграммной техники | 92 |
| 2.6 Полнота набора одночастичных собственных функций | 94 |
| Глава 3. $SL(N, \mathbb{C})$-инвариантная спиновая цепочка А-типа | 99 |

| | | |
|-------|--|------------|
| 3.1 | Янгиан для $gl(N, \mathbb{C})$ и представления основной серии группы $SL(N, \mathbb{C})$ | 99 |
| 3.2 | Определение модели | 103 |
| 3.3 | Формулы для индуктивного построения собственных функций | 106 |
| 3.4 | Построение собственных функций | 117 |
| 3.4.1 | Собственные функции для $N = 2$ | 119 |
| 3.4.2 | Индукционный шаг от $N = 2$ к $N = 3$ | 121 |
| 3.4.3 | Индукционный шаг от $N = 3$ к $N = 4$ | 125 |
| 3.5 | Ортогональность собственных функций | 138 |
| 3.5.1 | Доказательство ортогональности в случае $N = 3$ | 138 |
| 3.5.2 | Доказательство ортогональности в случае $N = 4$ | 142 |
| | Заключение | 149 |
| | Приложение А. Диаграммная техника для $SL(2, \mathbb{C})$-инвариантной цепочки . | 161 |
| | Приложение Б. Диаграммная техника для $SL(2, \mathbb{R})$-инвариантной цепочки . | 164 |

Введение

Квантовые спиновые цепочки входят в число моделей, стоящих у истоков теории квантовых интегрируемых систем. Наиболее простым представителем этого семейства моделей является магнетик Гейзенберга спина $\frac{1}{2}$ – одномерная система из n взаимодействующих частиц. Эта модель определена в тензорном произведении n копий пространства \mathbb{C}^2 , ее гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{k=1}^n (J_1 \sigma_1^{(k)} \sigma_1^{(k+1)} + J_2 \sigma_2^{(k)} \sigma_2^{(k+1)} + J_3 \sigma_3^{(k)} \sigma_3^{(k+1)}), \quad (0.1)$$

где J_1, J_2, J_3 – вещественные константы взаимодействия, а оператор $\sigma_i^{(k)}$, $i = 1, 2, 3$ действует как матрица Паули σ_i в k -ом сомножителе в тензорном произведении и как тождественный оператор в остальных сомножителях. Подразумеваются, что $\sigma_i^{(n+1)} = \sigma_i^{(1)}$, то есть наложены периодические граничные условия. В случае общего положения $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ модель называется XYZ-магнетиком, а при $J_1 = J_2 \neq J_3$ и $J_1 = J_2 = J_3$ – XXZ и XXX магнитиком, соответственно.

В 1931 году Г. Бете решил XXX модель, найдя собственные состояния и собственные энергии гамильтониана [1]. Разработанный при этом метод *анзаца* (подстановки) *Бете* был впоследствии применен для различных одномерных систем квантовой механики и теории поля, таких как модель Либа-Линигера [2] точечного бозе-газа с дельта-образным взаимодействием и массивная модель Тиррринга [3]. В 1966 году Ц. Н. Янг и Ц. П. Янг применили анзац Бете для решения XXZ-магнетика [4, 5, 6]. Решение наиболее общей XYZ модели было представлено Р. Бакстером в 1973 году [7, 8, 9]. Оно потребовало нетривиального обобщения анзаца Бете.

В конце 1970-х годов трудом математиков Ленинградской школы был разработан *квантовый метод обратной задачи* [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Опишем кратко процедуру построения интегралов движения системы в рамках этого метода на примере рассматриваемых нами спиновых цепочек. Интегрируемая модель задается при помощи *L-оператора*. Для XXX цепочки произвольного спина его можно определить в универсальном виде следующим образом

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + S & S_- \\ S_+ & u - S \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

где числовой параметр u называется *спектральным*, а S, S_{\pm} – генераторы представления алгебры Ли $sl(2)$, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям

$$[S, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}, \quad [S_+, S_-] = 2S. \quad (0.3)$$

Пространство V , в котором действуют генераторы S, S_{\pm} , называется *квантовым*. Гильбер-

тово пространство системы из n частиц (цепочки из n узлов) – тензорное произведение n копий V : $H = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$, $V_k \simeq V$. В случае спина $\frac{1}{2}$ генераторы выражаются через матрицы Паули: $S = \frac{1}{2} \sigma_3$, $S_{\pm} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \pm i \sigma_2)$. L -оператор действует как матрица во *вспомогательном* пространстве (в данном случае двумерном), элементы которой являются операторами в пространстве представления. Узлу цепочки с номером k (k -ой частице) соответствует L -оператор $L_k(u)$, содержащий генераторы $S^{(k)}$, $S_{\pm}^{(k)}$, действующие нетривиально в V_k и как тождественные операторы в остальных сомножителях тензорного произведения пространств. Полный набор наблюдаемых строится при помощи *матрицы монодромии*

$$t(u) = L_1(u) L_2(u) \dots L_n(u) = \begin{pmatrix} a(u) & b(u) \\ c(u) & d(u) \end{pmatrix}. \quad (0.4)$$

Трансфер-матрица $\tau(u) = a(u) + d(u)$ – след матрицы монодромии по вспомогательному пространству – является производящей функцией для полного набора наблюдаемых. Последние являются коэффициентами $\tau(u)$ как полинома от u .

Для нахождения собственных состояний модели, или, что то же самое, для диагонализации трансфер-матрицы, применяется *алгебраический* анзац Бете [16, 17]. Он основан на *RТТ-соотношении* для матрицы монодромии, которое представляет из себя матричное равенство в тензорном произведении двух вспомогательных пространств

$$R(u-v) (t(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes t(v)) = (\mathbf{1} \otimes t(v)) (t(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v). \quad (0.5)$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичная матрица, и R -матрица $R(u)$ действует нетривиально в обоих вспомогательных пространствах. Рассматриваемой модели соответствует R -матрица Янга

$$R(u) = u + P, \quad (0.6)$$

где P – матрица перестановки: $Px \otimes y = y \otimes x$. Уравнение (0.5) задает коммутационные соотношения между элементами $a(u), \dots, d(u)$ матрицы $t(u)$. Оно является простым следствием *RLL-соотношения*

$$R(u-v) (L(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes L(v)) = (\mathbf{1} \otimes L(v)) (L(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v), \quad (0.7)$$

эквивалентного набору коммутационных соотношений для генераторов (0.3). Из (0.5), в частности, получаем

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0$$

для любых u, v , отсюда следует коммутативность набора наблюдаемых.

Как правило, R -матрица удовлетворяет *уравнению Янга-Бакстера* в тензорном кубе вспомогательного пространства

$$R_{12}(u-v) R_{13}(u) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u) R_{12}(u-v), \quad (0.8)$$

где $R_{ij}(u)$ – копия $R(u)$, действующая нетривиально в i -ой и j -ой компонентах тензорного произведения, а в оставшейся компоненте – как тождественный оператор. Причиной этому является условие коммутации [14]

$$[R_{12} R_{13} R_{23} R_{12}^{-1} R_{13}^{-1} R_{23}^{-1}, t(u_1) \otimes t(u_2) \otimes t(u_3)] = 0, \quad R_{ij} \equiv R_{ij}(u_i - u_j),$$

следующее из (0.5) (произведения некоммутирующих элементов $t(u)$ в матрице $t(u_1) \otimes t(u_2) \otimes t(u_3)$ стоят в порядке следования тензорных сомножителей).

В случае XXX модели старшего спина j , соответствующего неприводимым конечномерным представлениям алгебры Ли $su(2)$, гильбертово пространство представляет собой тензорное произведение n копий \mathbb{C}^{2j+1} , и линейная комбинация под знаком суммы в гамильтониане (0.1) заменяется на некоторый многочлен степени $2j$ от аргумента $\sum_{i=1}^3 S_i^{(k)} S_i^{(k+1)}$, где S_1, S_2, S_3 – генераторы представления $su(2)$ спина j [14, 18, 19]. Операторы (0.2) теперь имеют вид $S = S_3$, $S_{\pm} = S_1 \pm iS_2$. Эта обобщенная модель была решена при помощи алгебраического анзаца Бете независимо Л. А. Тахтаджяном [20] и Г. М. Бабуджяном [21].

Квантовый метод обратной задачи объединил все основные результаты в области одномерных квантовых систем и оказался универсальным математическим аппаратом для работы с интегрируемыми моделями. При помощи него были решены такие квантовомеханические и теоретико-полевые модели как нелинейное уравнение Шредингера [12, 13], модель синус-Гордон [10], цепочка Тоды [22, 23, 24, 25], и другие. Тем не менее, до конца 1980-х годов в его арсенале не существовало систематического подхода к решению моделей с граничными условиями, отличающимися от периодических. Такой подход предложил Е. К. Склянин [26], основываясь на работе И. В. Чередника [27], посвященной $(1+1)$ -мерной квантовой теории рассеяния на полуоси. Согласно новому методу, для построения интегрируемой системы, помимо L -оператора и R -матрицы, вводятся K -матрицы $K(u)$, $K_+(u)$, действующие во вспомогательном пространстве и содержащие информацию о граничных условиях. При этом на R -матрицу накладываются дополнительные условия: симметричность

$$R^{t_1}(u) = R^{t_2}(u), \quad P R(u) P = R(u),$$

а также «унитарность» и кроссинг-унитарность

$$R(u) R(-u) = \rho(u), \quad R^{t_1}(u) R^{t_1}(-u - 2\eta) = \tilde{\rho}(u). \quad (0.9)$$

Здесь $\rho(u)$ и $\tilde{\rho}(u)$ – числовые функции, а через $R^{t_i}(u)$ обозначается транспонирование матрицы в i -ой копии вспомогательного пространства. R -матрица Янга (0.6) удовлетворяет всем перечисленным требованиям, в частности свойству кроссинг-унитарности при $\eta = 1$. Набор коммутирующих операторов, задающих модель, строится при помощи матрицы монодромии вида

$$T(u) = L_n(u) \cdots L_1(u) K(u) L_1^{-1}(-u + \eta) \cdots L_n^{-1}(-u + \eta) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (0.10)$$

где под $L^{-1}(u)$ понимается матрица во вспомогательном пространстве, обратная к $L(u)$. Трансфер-матрица – производящая функция для интегралов движения – представляется в виде следа по вспомогательному пространству

$$\mathcal{T}(u) = \text{tr}(K_+(u) T(u)). \quad (0.11)$$

Модель будет интегрируемой, если K -матрицы удовлетворяют *уравнениям отражения*

$$\begin{aligned} R(u-v) (K(u) \otimes \mathbf{1}) R(u+v-\eta) (\mathbf{1} \otimes K(v)) \\ = (\mathbf{1} \otimes K(v)) R(u+v-\eta) (K(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v), \end{aligned} \quad (0.12)$$

$$\begin{aligned} R(v-u) (K_+^t(u) \otimes \mathbf{1}) R(-u-v-\eta) (\mathbf{1} \otimes K_+^t(v)) \\ = (\mathbf{1} \otimes K_+^t(v)) R(-u-v-\eta) (K_+^t(u) \otimes \mathbf{1}) R(v-u). \end{aligned} \quad (0.13)$$

Из RLL -соотношения и (0.12) следует уравнение отражения для матрицы монодромии

$$R(u-v) (T(u) \otimes \mathbf{1}) R(u+v-\eta) (\mathbf{1} \otimes T(v)) = (\mathbf{1} \otimes T(v)) R(u+v-\eta) (T(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v), \quad (0.14)$$

задающее коммутационные соотношения между всеми ее элементами $A(u), \dots, D(u)$. Из него, в частности, получается коммутационное соотношение для трансфер-матрицы: $[\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v)] = 0$ для любых u, v , из которого следует коммутативность интегралов движения. Собственные состояния модели строятся при помощи алгебраического анзаца Бете, с использованием этих коммутационных соотношений. Первым анзац Бете для нового типа граничных условий адаптировал Склянин в той же основополагающей работе [26], рассмотрев неперIODическую XXZ цепочку, гамильтониан которой содержит члены, отвечающие за взаимодействие граничных частиц со внешней средой. В дальнейшем его подход был обобщен для спиновых цепочек с различными алгебрами симметрии, см., например, [28, 29, 30, 31, 32].

В контексте $(1+1)$ -мерной теории рассеяния [27] уравнение Янга-Бакстера (0.8) и унитарность (0.9) являются условиями, накладываемыми на двухчастичную S -матрицу. При выполнении этих требований произвольная матрица рассеяния может быть факторизована в произведение двухчастичных, и модель становится интегрируемой [14]. В модели на полуоси, ограниченной непроницаемым экраном, K -матрица описывает рассеяние при отражении от экрана. В этом случае уравнение отражения, наряду с двумя предыдущими требованиями, является условием факторизуемости S -матриц.

В 1990-е годы возник интерес к *некомпактным* XXX спиновым цепочкам. L -оператор в этих моделях выражается через генераторы S, S_{\pm} бесконечномерного унитарного представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ или $SL(2, \mathbb{R})$ на пространстве функций

$$S = z\partial_z + s, \quad S_- = -\partial_z, \quad S_+ = z^2\partial_z + 2sz, \quad (0.15)$$

где s – параметр представления, называемый спином. Переменная соответствующая k -му узлу цепочки, обозначается через z_k . Соответствующая модель называется $SL(2, \mathbb{C})$ - или $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантной. В случае $SL(2, \mathbb{C})$ мы имеем дело с *представлением основной уни-*

тарной серии [33, 34, 35], определенным на пространстве $L^2(\mathbb{C})$ квадратично-интегрируемых функций в комплексной плоскости. А в случае $SL(2, \mathbb{R})$ представление определено на пространстве аналитических функций в верхней полуплоскости, квадратично-интегрируемых по некоторой степенной мере [36, 33]. В $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной модели к операторам (0.15) добавляется набор *антиголоморфных* генераторов. Они имеют аналогичный вид, с точностью до замены голоморфной переменной z на антиголоморфную \bar{z} , и параметра s на \bar{s} , который в общем случае не является комплексно-сопряженным с s (подробности см. в разделе 1.1). В настоящей диссертации рассматривается случай *однородной* спиновой цепочки, у которой спиновые параметры во всех узлах равны.

Гамильтониан некомпактного $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантного магнетика с периодическими граничными условиями возникает при рассмотрении высокоэнергетического предела амплитуд рассеяния в квантовой хромодинамике [37, 38, 39, 40]. Эта модель была решена в [41, 42, 43, 44]. В отличие от конечномерного случая, в гильбертовом пространстве модели отсутствует вакуумное состояние для алгебраического анзаца Бете, поэтому последний оказывается неприменим. Взамен ему был использован *квантовый метод разделения переменных* [45, 46], разработанный Складниным при нахождении спектра (квази)периодической цепочки Тоды [22] (не поддающейся решению при помощи алгебраического анзаца Бете по аналогичной причине), и развитый в дальнейшем С. М. Харчевым и Д. Р. Лебедевым [24, 25] при построении интегрального представления для волновых функций этой модели. Его идея состоит в построении линейного оператора перехода в унитарно эквивалентное представление, в котором изначальная спектральная задача для трансфер-матрицы принимает вид системы одномерных конечно-разностных или дифференциальных уравнений. В случае рассматриваемой нами спиновой цепочки это линейное отображение принимает вид интегрального оператора, ядром которого является собственная функция оператора $b(u)$ (0.4), образующего коммутативное семейство $[b(u), b(v)] = 0$ (отметим, что для диагонализации $\tau(u)$ и $b(u)$ на спиновые параметры накладываются некоторые условия, обеспечивающие самосопряженность интегралов движения). Унитарность оператора перехода эквивалентна ортогональности и полноте набора собственных функций b -оператора. Данный набор был построен в [43], там же была доказана его ортогональность. Доказательство полноты было представлено совсем недавно в [47].

Отдельный интерес представляют задачи диагонализации остальных элементов матрицы монодромии (0.4). Согласно (0.5), они также образуют коммутативные семейства

$$[a(u), a(v)] = 0, \quad [c(u), c(v)] = 0, \quad [d(u), d(v)] = 0,$$

а значит, по аналогии с $\tau(u)$, определяют квантовые интегрируемые модели. При исследовании поведения амплитуд рассеяния в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории в мультiredжевской кинематике [48, 49] появляется задача диагонализации d -элемента. Собственные функции a -оператора сыграли ключевую роль при вычислении диаграмм Бассо-Диксона в двумерной конформной fishnet теории поля [50]. Все элементы матрицы $t(u)$ были диагонализированы в [51]. В той же работе была доказана ортогональность наборов их собственных функций и

симметрия этих функций по перестановкам спектральных переменных. Остановимся подробнее на последнем свойстве. Рассмотрим, к примеру, оператор $a(u)$, которому соответствует открытая спиновая цепочка (без взаимодействия 1-ой и n -ой частиц). По построению, он является полиномом степени n от u с единичным старшим коэффициентом. Поскольку интегралы движения модели и собственные функции не зависят от спектрального параметра, его собственное число – также полином по u степени n . Собственные функции параметризуются корнями этого полинома

$$a(u) \psi_{x_1, \dots, x_n} = (u - x_1) \dots (u - x_n) \psi_{x_1, \dots, x_n}.$$

Как видно, собственные числа симметричны по спектральным переменным x_1, \dots, x_n , и по причине простоты спектра собственные функции также обладают этим свойством. Таким образом, за симметрии собственных функций отвечает группа перестановок \mathfrak{S}_n – группа Вейля системы корней типа А. Аналогичная картина имеет место и для собственных функций $b(u)$, $c(u)$, $d(u)$, $\tau(u)$. Более того, при доказательстве полноты собственных функций элементов $t(u)$ [47] используются интегральные тождества, являющиеся обобщением интегралов Густафсона типа А на случай поля \mathbb{C} [52, 53, 54]. По этим причинам спиновые цепочки, определяемые матрицей монодромии, удовлетворяющей RTT -соотношению (0.5), мы называем *цепочками А-типа*, по аналогии с цепочкой Тоды типа А [24, 25, 46].

Собственные функции элементов $t(u)$ строятся индуктивно: функция цепочки из n узлов выражается посредством действия «повышающего» интегрального оператора Λ_n на функцию для цепочки из $n - 1$ узла. К примеру, для a -оператора

$$\psi_{x_1, \dots, x_n}(z_1, \dots, z_n) = \Lambda_n(x_n) \psi_{x_1, \dots, x_{n-1}}(z_1, \dots, z_{n-1}). \quad (0.16)$$

Повышающие операторы выражаются через произведение локальных интегральных операторов $\mathcal{R}_{k, k+1}(x)$ со степенным ядром. Таким образом получается интегральное представление типа *Гаусса-Гивенталья* [55] для собственных функций. Оператор $\mathcal{R}_{ij}(x)$ действует нетривиально в пространствах V_i и V_j (соответствующих переменным z_i и z_j), он представляет собой решение уравнения Янга-Бакстера с L -оператором модели

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}(x) L_1(u - 1 + s, u - s) L_2(u - 1 + s, u - x) \\ = L_1(u - 1 + s, u - x) L_2(u - 1 + s, u - s) \mathcal{R}_{12}(x), \end{aligned} \quad (0.17)$$

где $L(u_1, u_2)$ – альтернативная параметризация L -оператора получающаяся в результате замены переменных $u = (u_1 + u_2 + 1)/2$, $s = (u_1 - u_2 + 1)/2$. Последнее равенство имеет ключевое значение, так как из него следуют коммутационные соотношения между каждым из элементов матрицы монодромии и соответствующим повышающим оператором. Рекуррентные формулы для собственных функций, такие как (0.16), являются прямым следствием этих коммутационных соотношений.

Собственная функция в представлении Гаусса-Гивенталья выражается через кратный ин-

теграл от произведения степенных функций. На графическом языке [43, 51, 53], изложенном в приложении А, последнее означает, что функция представляется в виде фейнмановской диаграммы, где роль фейнмановского пропагатора играет степенная функция. В частности, это диаграммное представление находит применение в уже упомянутой fishnet теории поля [50]. В [56] было получено альтернативное интегральное представление типа *Меллина-Барнса* для собственных функций $a(u)$. Как и в индуктивной формуле (0.16), в этом представлении собственная функция для n узлов выражается через интеграл от функции для $n - 1$ узла. Но, в отличие от предыдущей рекуррентной процедуры, интегрирование ведется по спектральным переменным функции для $n - 1$ узла, а не по пространственным переменным z_1, \dots, z_{n-1} . Ядро интегрального преобразования выражается через произведение гамма-функций, связанных с полем \mathbb{C} [57, 58].

Впервые интегральное представление типа Меллина-Барнса было получено в [24] для волновых функций открытой цепочки Тоды. Эта квантовомеханическая модель описывает одномерную систему из n частиц с экспоненциальным взаимодействием между ближайшими соседями. Как и $SL(2)$ спиновые цепочки, она задается при помощи L -оператора удовлетворяющего RLL -соотношению (0.7) с янговской R -матрицей (0.6). Производящей функцией для гамильтонианов открытой цепочки Тоды является a -элемент соответствующей матрицы монодромии вида (0.4). След матрицы монодромии порождает набор интегралов движения для уже упоминавшейся цепочки Тоды с периодическими граничными условиями. Волновые функции для этого случая были построены теми же авторами в [23] при помощи квантового метода разделения переменных с использованием собственных функций открытой цепочки. Унитарность оператора перехода в представление разделенных переменных доказана К. Козловски в [46]. Для открытой цепочки Тоды также было получено представление Гаусса-Гивентала [59].

Уравнение (0.17), с точностью до умножения слева на оператор перестановки

$$\mathbb{P}_{12}f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1),$$

является частным случаем определяющего соотношения [60, 61]

$$\mathbb{R}_{12}(u - v) L_1(u) L_2(v) = L_2(v) L_1(u) \mathbb{R}_{12}(u - v), \quad (0.18)$$

для оператора $\mathbb{R}_{12}(u)$ – общего решения уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ [60]. Соответственно, \mathcal{R}_{12} получается в частном случае из $\mathbb{P}_{12}\mathbb{R}_{12}$. Оператор $\mathbb{R}_{12}(u)$ действует в тензорном произведении двух представлений основной серии \tilde{V}_1 и \tilde{V}_2 спинов s_1 и s_2 , этим представлениям соответствуют L -операторы L_1 и L_2 в (0.18). Уравнение (0.18) можно получить путем следующих рассуждений. В конечномерном представлении спина $\frac{1}{2}$ при $S = \frac{1}{2}\sigma_3$, $S_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$ L -оператор совпадает с R -матрицей Янга: $R_{12}(u - \frac{1}{2}) = L_2(u)$, где генераторы S, S_{\pm} действуют в пространстве 2. То есть L -оператор является обобщением R -матрицы $R_{12}(u)$, когда одно из двумерных пространств 1 или 2 заменяется на пространство произвольного представления с генераторами S, S_{\pm} . Таким образом, если в урав-

нении Янга-Бакстера (0.8) заменить 3-е пространство \mathbb{C}^2 на пространство произвольного представления, то получится RLL -соотношение (0.7). Если же в (0.8) заменить 1-ую и 2-ую копии \mathbb{C}^2 на произвольные представления \tilde{V}_1 и \tilde{V}_2 , то $R_{13}(u)$ и $R_{23}(v)$ превратятся в L -операторы с генераторами S, S_{\pm} , действующими, соответственно, в \tilde{V}_1 и \tilde{V}_2 . А $R_{12}(u-v)$ заменится на оператор $\mathbb{R}_{12}(u-v)$, и в результате уравнение Янга-Бакстера трансформируется в (0.18). \mathbb{R} -оператор является обобщением понятия R -матрицы и L -оператора для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной модели, эти объекты могут быть получены редукцией из $\mathbb{R}(u)$ [62]. При замене в (0.8) всех копий двумерного пространства 1, 2, 3 на представления основной серии $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3$ спинов s_1, s_2, s_3 получаем наиболее общую форму уравнения Янга-Бакстера в случае группы симметрии $SL(2, \mathbb{C})$

$$\mathbb{R}_{12}(u-v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{12}(u-v). \quad (0.19)$$

где оператор \mathbb{R}_{ij} действует нетривиально в пространствах \tilde{V}_i и \tilde{V}_j , а в третьем пространстве – как тождественный оператор.

В открытой спиновой цепочке, определяемой уравнением отражения (0.14), лишь два элемента матрицы монодромии (0.10) образуют коммутативное семейство

$$[B(u), B(v)] = 0, \quad [C(u), C(v)] = 0.$$

Для единичных K -матриц $K(u) = K_+(u) = \mathbf{1}$ B -оператор $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной модели был диагонализирован в [53], в этой же работе доказана ортогональность собственных функций и их симметрии по спектральным переменным. Собственные функции имеют такую же итеративную структуру (0.16), как и в случае цепочки типа А, с тем отличием, что ядро интегрального повышающего оператора выражается не через произведение степенных функций, а через кратный интеграл от такого произведения. B -оператор является четным полиномом от u , и спектральная задача для него принимает вид

$$B(u) \Psi_{p; x_1, \dots, x_{n-1}} = p(u^2 - x_1^2) \dots (u^2 - x_{n-1}^2) \Psi_{p; x_1, \dots, x_{n-1}}.$$

Как видно, к свойству инвариантности собственных чисел и собственных функций относительно перестановок спектральных переменных добавляется симметрия относительно отражений $x_i \rightarrow -x_i$. То есть, группой симметрий собственных функций теперь является $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_n$ – группа Вейля систем корней типа В и С. Вдобавок, при разложении матричного элемента оператора сдвига в базисе собственных функций a -оператора по функциям B -оператора получается интегральное соотношение, являющееся обобщением интеграла Густафсона ВС-типа на случай поля \mathbb{C} [53]. Таким образом, спиновую цепочку, матрица монодромии которой удовлетворяет уравнению отражения, мы называем *цепочкой ВС-типа*, опять же, по аналогии с цепочкой Тоды типа ВС [63, 64].

Спектральная задача для трансфер-матрицы некомпактных спиновых цепочек А-типа и ВС-типа (в случае единичных K -матриц) с группой симметрии $SL(2, \mathbb{R})$ возникает при исследовании скейлинговой зависимости корреляционных функций в $(3+1)$ -мерных теори-

ях Янга-Миллса [65, 66, 67]. Трансфер-матрицы этих моделей диагонализуются в [36] и [68] при помощи квантового метода разделения переменных. В ВС-цепочке, как и в модели А-типа, оператор перехода в представление разделенных переменных строится при помощи собственных функций B -элемента матрицы монодромии. Таким образом, в первую очередь были диагонализуются B -элементы матриц $t(u)$ и $T(u)$ (0.4), (0.10). Собственные функции a -элемента $t(u)$ найдены в [69]. В перечисленных работах доказана ортогональность собственных функций элементов матриц монодромии, а также их свойства симметрии относительно преобразований наборов квантовых чисел, которые в точности совпадают с аналогичными свойствами в $SL(2, \mathbb{C})$ -цепочках. Полнота наборов построенных собственных функций доказана в [70] при помощи интегралов Густафсона [71, 72, 73]. Кроме того, как и в описанном выше случае $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантных моделей, собственные функции строятся индуктивно при помощи интегральных операторов. В результате собственная функция выражается через кратный интеграл от произведения степенных функций. Для цепочки с группой симметрии $SL(2, \mathbb{R})$ можно ввести фейнмановскую диаграммную технику [36], в которой пропагатор принимает вид степенной функции, ее описание дано в приложении Б. Таким образом, собственные функции B -элементов вновь представляются в виде диаграмм Фейнмана.

В первых двух главах настоящей диссертации рассмотрено обобщение описанных выше некомпактных $SL(2, \mathbb{C})$ - и $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантных спиновых цепочек ВС-типа – модели с нетривиальными K -матрицами

$$K(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & u - \frac{1}{2} \\ -\beta_1(u - \frac{1}{2}) & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad K_+(u) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2(u + \frac{1}{2}) \\ -u - \frac{1}{2} & \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (0.20)$$

($\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ – константы), удовлетворяющими уравнениям отражения (0.12), (0.13) с R -матрицей Янга (0.6). Решена задача диагонализации B -элемента соответствующих матриц монодромии вида (0.10). Матрицы (0.20) были предложены Скляниным для цепочки Тоды в [26]. Поскольку последней модели соответствует та же (янговская) R -матрица, что и $SL(2)$ -инвариантным спиновым цепочкам, эти K -матрицы могут быть использованы для задания граничных условий в обоих видах моделей. Трансфер-матрица (0.11) для цепочки Тоды при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ была диагонализирована Н. З. Иорговым и В. Н. Шадура в [64] при помощи квантового метода разделения переменных. Используемые при этом собственные функции B -элемента матрицы монодромии (0.10) были разложены по базису волновых функций открытой цепочки Тоды, которые, напомним, диагонализуют a -элемент матрицы монодромии $t(u)$ (0.4). Основываясь на результатах, изложенных в этом и предыдущем абзацах, логично использовать квантовый метод разделения переменных для диагонализации трансфер-матриц рассматриваемых нами спиновых цепочек. Решенная в текущей работе задача является первым шагом на пути к этой цели.

В отличие от метода, примененного Иорговым и Шадура, мы не используем собственные функции элементов $t(u)$ для диагонализации B -оператора. Собственные функции $B(u)$ строятся индуктивно при помощи алгебраического подхода, описанного выше для цепочки А-типа. Функция для цепочки из n узлов получается в результате действия повыша-

ющего интегрального оператора на функцию для цепочки из $n - 1$ узла. Ввиду присутствия нетривиальной K -матрицы $K(u)$, при построении повышающего оператора наряду с \mathcal{R} -оператором (0.17) возникает новый объект – *оператор отражения* $\mathcal{K}(s, x)$, определяемый уравнением отражения с K -матрицей и L -оператором модели

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(s, x) L(u + x - 1, u - s) K(u) L(u + s - 1, u - x) \\ & = L(u + s - 1, u - x) K(u) L(u + x - 1, u - s) \mathcal{K}(s, x). \end{aligned} \quad (0.21)$$

Этот оператор обобщает понятие K -матрицы, он действует в пространстве бесконечномерного представления $SL(2, \mathbb{C})$ или $SL(2, \mathbb{R})$. По аналогии с описанной выше иерархией уравнений Янга-Бакстера, определяющее соотношение для K -оператора (0.21) получается из уравнения отражения (0.12) при замене 2-го пространства \mathbb{C}^2 на бесконечномерное. Отметим также, что в случае группы симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ мы доказали общее уравнение отражения для \mathbb{R} - и \mathcal{K} -операторов, которое получается при замене обоих пространств \mathbb{C}^2 в (0.12) на бесконечномерные. В случае $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантной цепочки уравнение (0.21) было решено в [74]. Полученная в этой работе формула для оператора отражения эквивалентна найденному нами выражению в виде отношения двух гамма-функций от операторного аргумента. Вдобавок, в настоящей работе получены два интегральных представления для этого \mathcal{K} -оператора. Кроме того, в [75] был решен аналог соотношения (0.21) для XXZ-цепочки: найден оператор отражения, действующий в бесконечномерном представлении квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}(2))$.

В третьей главе диссертации рассмотрена некомпактная $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантная спиновая цепочка А-типа. Ее L -оператор представляет собой матрицу размера $N \times N$ с операторнозначными элементами, которые выражаются через генераторы E_{ij} представления группы $SL(N, \mathbb{C})$, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}$$

и условию $\sum_i E_{ii} = 0$. Он имеет вид

$$L(u) = u\mathbf{1} + E. \quad (0.22)$$

Здесь $\mathbf{1}$ – единичная матрица, а E – матрица составленная из генераторов: $E_j^i = E_{ji}$, где E_j^i – элемент в i -ой строке и j -ом столбце матрицы E . При $N = 2$ формула (0.22) переходит в выражение для L -оператора (0.2) $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной модели. Матрица монодромии $t(u)$ цепочки из n узлов (0.4) представляется через произведение n L -операторов. Коммутационные соотношения между ее элементами записываются при помощи RTT -соотношения (0.5) с R -матрицей Янга (0.6), действующей теперь в $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$.

В случае $N > 2$ для построения полного набора наблюдаемых недостаточно рассмотреть лишь след $t(u)$. Коммутирующие гамильтонианы строятся при помощи *квантовых ми-*

норов [76, 77]

$$t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u) = \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_m} \text{sgn}(\omega) t_{j_1}^{i_{\omega(1)}}(u - m + 1) t_{j_2}^{i_{\omega(2)}}(u - m + 2) \dots t_{j_m}^{i_{\omega(m)}}(u),$$

где $1 \leq m \leq N$, и $\text{sgn}(\omega)$ – знак перестановки ω . Квантовые миноры симметричны по перестановкам верхних и нижних индексов. Один из возможных наборов интегралов движения порождается элементами подалгебры Картана E_{ii} , $i = 1, \dots, N - 1$ и производящими функциями

$$\tau_k(u) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ i_1 < \dots < i_k}}^n t_{i_1 \dots i_k}^{i_1 \dots i_k}(u), \quad k = 1, \dots, n - 1. \quad (0.23)$$

В случае конечномерных представлений $SL(N)$ соответствующая модель была решена П. П. Кулишом и Н. Ю. Решетихиным при помощи вложенного алгебраического анзаца Бете в [78, 79]. Кроме того, операторы (0.23) могут быть диагонализированы при помощи квантового метода разделения переменных. Для $SL(3)$ -инвариантной цепочки этот подход был сформулирован в общем виде Скляниным в [80], и далее был обобщен в случае конечномерных представлений для $SL(N)$ -инвариантной модели в [81, 82, 83, 84]. Оператор перехода в представление разделенных переменных для спиновой цепочки $SL(3, \mathbb{C})$, соответствующей бесконечномерным представлениям основной серии, был построен в [85].

Еще один набор коммутирующих гамильтонианов порождается коммутативным семейством *угловых* квантовых миноров

$$A_m(u) = t_{1 \dots m}^{1 \dots m}(u), \quad m = 1, \dots, N. \quad (0.24)$$

М. Л. Назаров и В. О. Тарасов доказали [86], что в случае конечномерных неприводимых представлений $SL(N, \mathbb{C})$ набор общих собственных векторов угловых квантовых миноров L -оператора (представляющего собой матрицу монодромии цепочки из 1 узла) совпадает с классическим базисом, введенным И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлином в [87]. Каждый вектор этого базиса задается схемой Гельфанда-Цетлина – целочисленным массивом из N строк, в котором k -ая строка имеет длину $N + 1 - k$. По смыслу, k -ая строка – это старший вес пространства неприводимого представления подгруппы $GL(N + 1 - k, \mathbb{C})$, содержащего данный вектор. Элементы k -ой и $(k + 1)$ -ой строк удовлетворяют некоторым неравенствам. В терминах (0.24), параметры в m -ой строке схемы являются корнями собственного числа оператора $A_m(u)$, представляющего собой полином от u степени m . Конструкция базиса опирается на существование в представлении вектора младшего (старшего) веса. Таким образом, собственные состояния угловых квантовых миноров L -оператора являются обобщением базиса Гельфанда-Цетлина в случае, когда такой вектор отсутствует, например, в рассматриваемых в настоящей работе представлениях $SL(N, \mathbb{C})$ основной унитарной серии [34, 35], уже упомянутых выше для $N = 2$. Они определены на пространстве функций $N(N - 1)/2$ переменных, соответствующие генераторы представляются в виде дифференциальных операторов. Как и в упомянутом ранее частном случае $N = 2$, $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантная спиновая цепочка,

задаваемая при помощи представлений основной серии, называется некомпактной [88, 89].

М. И. Граевым была построена [90] модель представлений основной серии на пространстве функций от континуальных схем Гельфанда-Цетлина, элементы которых, в отличие от схем, определенных традиционным образом, принимают комплексные значения и не ограничены неравенствами. Полученные выражения для действия корневых и картановских генераторов $E_{i,i+1}$, $E_{i+1,i}$, E_{ii} имеют ту же структуру, что и формулы для конечномерного случая из классических работ [87, 91]. Тем не менее, в [90] отсутствует выражение для оператора, сплетающего две модели представлений, при помощи которого можно построить элементы базиса Гельфанда-Цетлина для традиционной модели.

Нахождению этих элементов посвящена работа [92]. В ней получены явные формулы для построения базисных функций в представлениях основной серии при помощи индукции по рангу N : элемент базиса для ранга N выражается через интеграл от элемента базиса для ранга $N - 1$. Процедура индукции продемонстрирована для перехода от $N = 2$ к $N = 3$. В основе подхода, изложенного в [92], лежат более общие результаты работы [89], в которой построено представление Гаусса-Гивенталья для собственных функций операторов (0.24) в случае произвольного числа узлов. С этой целью была обобщена конструкция, описанная выше для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки. Ключевую роль в конструкции собственных функций играют аналоги \mathcal{R} -оператора (0.17), коммутирующие специальным образом с копиями L -оператора модели (0.22), действующими в разных квантовых пространствах. Эти операторы были построены в работах [93], [88], через них выражается общее решение уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(N, \mathbb{C})$ [60].

В настоящей диссертации для элементов базиса Гельфанда-Цетлина в представлениях $SL(N, \mathbb{C})$ основной серии построено интегральное представление типа Меллина-Барнса. Собственная функция для ранга N выражается через интеграл от собственной функции для ранга $N - 1$. Но, как уже упоминалось, в отличие от представления Гаусса-Гивенталья интегрирование ведется не по пространственным переменным функции (по которым действуют дифференциальные операторы представления основной серии), а по спектральным переменным (элементам континуальных схем Гельфанда-Цетлина), параметризующим собственные числа угловых миноров. Ключевую роль при построении собственных функций играет тот факт, что генераторы представления $SL(N, \mathbb{C})$ могут быть выражены через генераторы представления $SL(N - 1, \mathbb{C})$, эти рекуррентные формулы можно записать в терминах L -операторов [89]. Индукционная процедура выглядит следующим образом. Угловые миноры L -оператора ранга N выражаются через миноры L -оператора ранга $N - 1$, причем формулы для действия последних на базис Гельфанда-Цетлина выводятся на предыдущем индукционном шаге. Элемент базиса для ранга N представляется через интеграл с неизвестным ядром от элемента базиса для ранга $N - 1$. Используя этот анзац и индуктивные формулы для миноров, уравнения на собственные значения угловых миноров для ранга N можно свести к системе конечно-разностных уравнений на ядро интеграла. Подобная идея впервые была применена Харчевым и Лебедевым в [24] при построении собственных функций открытой цепочки Тоды посредством индукции по числу узлов.

Цель и задачи диссертационной работы

Основной **целью** данной работы является диагонализация семейств коммутирующих операторов, порождающих интегралы движения квантовых некомпактных спиновых цепочек, а также исследование свойств построенных наборов собственных функций: ортогональности, полноты и различных симметрий этих функций. В случае $SL(2, \mathbb{C})$ - и $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантных спиновых цепочек ВС-типа с нетривиальной K -матрицей диагонализуется B -элемент матрицы монодромии. В случае $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки А-типа строятся общие собственные функции угловых квантовых миноров L -оператора.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Для спиновой цепочки ВС-типа с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ построить \mathcal{K} -оператор (оператор отражения) – решение уравнения отражения с K -матрицей и L -оператором модели.
2. Найти одночастичные собственные функции для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки ВС-типа.
3. При помощи \mathcal{K} -оператора и известного \mathcal{R} -оператора для данной модели (решения \mathcal{RLL} -соотношения с двумя L -операторами, соответствующими разным частицам) построить повышающий оператор, переводящий собственную функцию для $n - 1$ частицы в собственную функцию для n частиц. Определяющим для повышающего оператора является требование, что его сужение на пространство функций $n - 1$ переменных сплетает B -элементы матриц монодромии для n узлов и $n - 1$ узла.
4. Построить интегральные представления типа Гаусса-Гивенталья и Меллина-Барнса для одночастичных собственных функций, аналогичные известным интегральным представлениям для собственных функций $SL(2, \mathbb{C})$ - и $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантных спиновых цепочек А-типа и ВС-типа с единичной K -матрицей. Используя фейнмановскую диаграммную технику, разработанную в предыдущих работах для представления Гаусса-Гивенталья, получить диаграммное представление для этих функций.
5. Используя полученные интегральные представления, доказать ортогональность и проверить полноту набора одночастичных волновых функций, а также доказать формулы симметрии собственных функций, связанные с симметриями спектра B -оператора.
6. Реализовать программу, изложенную в предыдущих пунктах, для спиновой цепочки ВС-типа с группой симметрии $SL(2, \mathbb{R})$, задаваемой K -матрицей того же вида.
7. Выразить угловые квантовые миноры L -оператора некомпактной $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки через миноры L -оператора для $SL(N - 1, \mathbb{C})$, используя рекуррентную формулу, связывающую эти L -операторы. Использовать эти выражения при индуктивном построении собственных функций угловых квантовых миноров (базиса Гельфанда-Цетлина) на шаге индукции $N - 1 \rightarrow N$. Для следующего шага $N \rightarrow N + 1$

выразить аналогичным образом нужные неугловые миноры L -оператора для $SL(N, \mathbb{C})$ (миноры того же типа, что и задействованные в рекуррентных формулах для угловых).

8. Используя результаты из предыдущего пункта, получить интегральное представление типа Меллина-Барнса для собственных функций угловых квантовых миноров L -оператора $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки (базиса Гельфанда-Цетлина) при помощи индукции по N . Для этого, в том числе, нужно получить формулы для действия неугловых миноров L -оператора на собственные функции угловых.
9. Доказать ортогональность построенных наборов собственных функций угловых квантовых миноров.

Положения, выносимые на защиту:

1. Найдено интегральное представление \mathcal{K} -оператора для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки ВС-типа с нетривиальной K -матрицей. Ядро интегрального оператора выражено через произведение степенных функций. В случае $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантной спиновой цепочки ВС-типа с нетривиальной K -матрицей получены два интегральных представления для оператора отражения: в первом интегрирование ведется по контуру (соответствующее ядро выражено через произведение степенных функций), во втором – по верхней полуплоскости (с ядром в виде интеграла от произведения степеней). В обеих моделях одночастичная собственная функция B -элемента матрицы монодромии представлена как результат действия \mathcal{K} -оператора на функцию, тождественно равную единице.
2. Для спиновой цепочки ВС-типа с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ найден интегральный оператор, при помощи которого n -частичная собственная функция B -элемента матрицы монодромии выражается через $(n - 1)$ -частичную. Таким образом, получена индуктивная конструкция для собственных функций.
3. При помощи интегрального выражения для \mathcal{K} -оператора получено интегральное представление типа Гаусса-Гивенталья для одночастичных волновых функций $SL(2, \mathbb{C})$ - и $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантных спиновых цепочек ВС-типа. Также для этих функций найдено интегральное представление типа Меллина-Барнса и выражение через гипергеометрическую функцию. В обеих моделях доказана ортогональность и полнота наборов одночастичных собственных функций и симметрия этих функций относительно отражения спектральной переменной.
4. В случае $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки ВС-типа доказано уравнение отражения для \mathcal{K} -оператора и \mathbb{R} -оператора, являющегося общим решением уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$. Доказанное соотношение представляет собой бесконечномерное обобщение уравнения отражения для K - и R -матриц.

5. Для $N = 3, 4$ получена рекуррентная формула, связывающая собственные функции системы угловых квантовых миноров L -оператора $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной и $SL(N-1, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки. Собственная функция для $SL(N, \mathbb{C})$ выражается через интеграл типа Меллина-Барнса от собственной функции для $SL(N-1, \mathbb{C})$. При $N = 3$ ядро интеграла представлено через произведение гамма-функций, связанных с полем \mathbb{C} , а при $N = 4$ – через обобщенную гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел ${}_4G_4^{\mathbb{C}}$ в единице. Доказана ортогональность построенных наборов собственных функций. Также получены соотношения, необходимые при выводе аналогичной индукционной формулы для собственных функций в случае произвольного N . В их число входят рекуррентные выражения для квантовых миноров L -оператора $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки через миноры L -оператора для $SL(N-1, \mathbb{C})$, а также формулы для действия неугловых квантовых миноров на собственные функции угловых.

Научная новизна. Все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты первой главы могут быть использованы в двумерной конформной теории поля для точного вычисления некоторых фейнмановских диаграмм, по аналогии с тем, как в этой теоретико-полевой модели были использованы собственные функции a -элемента матрицы монодромии $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки A -типа. Также, при помощи собственных функций B -элемента матрицы монодромии $SL(2, \mathbb{C})$ - и $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантных спиновых цепочек BC -типа, полученных в первых двух главах настоящей диссертации, можно диагонализировать трансфер-матрицы этих моделей. Собственные функции B -элемента играют роль ядра оператора перехода в унитарно эквивалентное представление, в котором спектральная задача для трансфер-матрицы переписывается в виде системы одномерных уравнений.

Поскольку представления $SL(4, \mathbb{C})$ основной серии используются в четырехмерной конформной теории поля, результаты третьей главы могут найти применение в этой области. Интегральное представление типа Меллина-Барнса, полученное для собственных функций угловых квантовых миноров L -оператора в представлениях $SL(3, \mathbb{C})$ и $SL(4, \mathbb{C})$ основной серии, удобно использовать для доказательства полноты этих наборов функций.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы теории представлений групп Ли, теории функций комплексной переменной и асимптотического анализа. При доказательстве ортогональности и полноты волновых функций рассматриваемых моделей применяется фейнмановская диаграммная техника, интегральные тождества Густафсона [71, 72, 73], а также их обобщения на случай поля \mathbb{C} [52, 53, 54].

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Семинар лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, 2026.
2. Международная конференция «Инвариантность и интегрируемость 2», приуроченная к 60-летию А. В. Маршакова, г. Пушкин, Санкт-Петербург, 2024.
3. Семинар Центра перспективных исследований Сколтеха, Сколково, Москва, 2021.

Публикации

Основные результаты диссертации изложены в четырех работах [94, 95, 96, 97], опубликованных в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Личный вклад

Все выносимые на защиту результаты диссертации были получены соискателем единолично [97], либо при непосредственном его участии [94, 95, 96]. В последнем случае личный вклад диссертанта заключается в доказательстве формул (1.15), (1.18), (1.20), (1.21), (3.1), (3.2), (4.2), (5.1) из работы [94]; в доказательстве формул (2.20), (2.22), (2.23), (2.24), (2.26), (4.1), (4.2), (6.1) из работы [95], в доказательстве предпоследней формулы из раздела 4.2 статьи [95]; в доказательстве формулы (3.1) из работы [96], второй формулы из раздела 4 статьи [96] и формулы (4.2) из того же раздела.

Структура работы

Глава 1 посвящена $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочке ВС-типа с нетривиальной K -матрицей.

В разделе 1.1 дается необходимая информация о представлениях основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$, через которые определяется изучаемая модель. Вводится оператор, сплетающий эквивалентные представления, он играет важную роль в дальнейших построениях.

В разделе 1.2 определяется рассматриваемая модель. Вводятся основные понятия: L -оператор, K -матрица, R -матрица, матрица монодромии и ее B -элемент – производящая функция для интегралов движения, а также их антиголоморфные аналоги.

В разделе 1.2.1 выводятся условия на параметры голоморфной и антиголоморфной K -матриц, при которых интегралы движения модели самосопряжены.

Раздел 1.2.2 содержит постановку совместной спектральной задачи для B -оператора и его антиголоморфного аналога. На основе симметрий собственных чисел этих операторов формулируются предполагаемые свойства симметрии собственных функций относительно перестановок и отражений спектральных переменных. Кроме того, доказывается самосопряженность интегралов движения в случае произвольного числа узлов.

В разделе 1.3 кратко сформулированы полученные результаты.

В разделе 1.3.1 изложены результаты, касающиеся одночастичных собственных функций B -оператора. Вводится определяющее соотношение для \mathcal{K} -оператора – уравнение отражения с K -матрицей и L -оператором. Получено выражение для собственных функций в

терминах \mathcal{K} -оператора. Для последнего написано представление в виде интегрального оператора. Для собственных функций приведены интегральные представления типа Меллина-Барнса и Гаусса-Гивенталья, соотношения ортогональности и полноты, соотношение симметрии при отражении спектральной переменной, а также выражение через гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел.

В разделе 1.3.2 описана индуктивная конструкция собственных функций для произвольного числа частиц. Приведено выражение для повышающего оператора, переводящего $(n-1)$ -частичную собственную функцию в n -частичную. Введен \mathcal{R} -оператор, определяемый через \mathcal{RLL} -соотношение с двумя L -операторами, соответствующими разным частицам. \mathcal{R} - и \mathcal{K} -операторы являются элементарными «строительными блоками», через которые выражается повышающий оператор.

В разделе 1.3.3 сформулировано уравнение отражения для \mathcal{K} -оператора и \mathbb{R} -оператора – общего решения уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$. Это соотношение представляет собой обобщение уравнения отражения для K - и R -матриц.

Раздел 1.4 содержит вывод интегрального представления для оператора отражения. Ключевую роль при этом играет оператор, сплетающий эквивалентные представления основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$.

В разделе 1.5 доказано, что при действии повышающего оператора на собственную функцию для цепочки из $n-1$ узла получается собственная функция для n узлов. Доказательство основано на использовании определяющих соотношений для \mathcal{K} - и \mathcal{R} -операторов.

Раздел 1.6 содержит вывод различных представлений для собственных функций B -оператора в случае цепочки из одного узла, перечисленных в разделе 1.3.1.

В разделе 1.6.1 из явной формулы для \mathcal{K} -оператора получено интегральное представление типа Гаусса-Гивенталья для одночастичных собственных функций, а также соответствующее диаграммное представление. При помощи фейнмановской диаграммной техники, изложенной в приложении А, доказана симметрия волновых функций относительно отражения спектральной переменной.

В разделе 1.6.2 при помощи представления Гаусса-Гивенталья собственные функции выражены через гипергеометрическую функцию.

В разделе 1.6.3 из представления Гаусса-Гивенталья выводится интегральное представление типа Меллина-Барнса для одночастичных функций. Для этой цели используется выражение для степенной функции через интеграл типа Меллина-Барнса.

В разделе 1.7 при помощи фейнмановской диаграммной техники доказана ортогональность одночастичных собственных функций.

Раздел 1.8 содержит доказательство полноты одночастичных собственных функций, использующее интегральное представление типа Меллина-Барнса для этих функций. Ключевую роль играет комплексный аналог интеграла Густафсона ВС-типа.

В разделе 1.9 приведено доказательство уравнения отражения для \mathcal{K} - и \mathbb{R} -операторов, анонсированное в разделе 1.3.3.

Глава 2 посвящена спиновой цепочке ВС-типа с группой симметрии $SL(2, \mathbb{R})$, задаваемой

нетривиальной K -матрицей того же вида, что и в случае $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки.

Модель определена в разделе 2.1. Формально, базовые объекты, при помощи которых задается эта модель (L -оператор, K - и R -матрицы, матрица монодромии), имеют тот же вид, что и в случае $SL(2, \mathbb{C})$. Отличие состоит в гильбертовом пространстве модели.

В разделе 2.1.1 наложены ограничения на параметры K -матрицы, диктуемые требованием эрмитовости интегралов движения, а также отсутствия дискретного и вырожденного спектра у B -элемента матрицы монодромии.

В разделе 2.1.2 доказана эрмитовость интегралов движения модели в случае выполнения условий, сформулированных в предыдущем разделе.

В разделе 2.2 сформулированы основные результаты, полученные в настоящей работе для $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантной спиновой цепочки.

Результаты для одночастичного случая приведены в разделе 2.2.1. \mathcal{K} -оператор определяется через уравнение отражения с L -оператором и K -матрицей, которое имеет тот же вид, что и в предыдущей модели. Найдено выражение для одночастичных собственных функций через гипергеометрическую функцию, а также в виде результата действия \mathcal{K} -оператора на функцию, тождественно равную единице. Для оператора отражения приведены три представления: первое – в виде отношения гамма-функций от операторного аргумента, и два других в виде интегрального оператора, где интегрирование ведется по контуру и по верхней полуплоскости. Также для набора одночастичных волновых функций приведены соотношения ортогональности и полноты.

В разделе 2.2.2 изложена индуктивная конструкция собственных функций для цепочки, состоящей из произвольного числа узлов. Формула для повышающего оператора имеет ту же структуру, что и в случае $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки ВС-типа. Он выражается через \mathcal{K} -оператор и \mathcal{R} -оператор, который, напомним, определяется через \mathcal{RLL} -соотношение с L -операторами, соответствующими разным узлам цепочки.

Раздел 2.3 посвящен оператору отражения.

В разделе 2.3.1 решено уравнение отражения – определяющее соотношение для \mathcal{K} -оператора. Для него найдено выражение в виде отношения двух гамма-функций от операторного аргумента. Доказана эквивалентность этого представления и формулы из работы [74].

В разделе 2.3.2 получено первое интегральное представление для оператора отражения. Результат его действия на функцию выражается в виде контурного интеграла от этой функции с ядром, представляющим собой произведение степеней.

Второе интегральное представление для \mathcal{K} -оператора выведено из первого в разделе 2.3.3. В этом представлении интегрирование (со степенной мерой) ведется по верхней полуплоскости. Ядро соответствующего интеграла само представляется через интеграл аналогичного типа от произведения степенных функций. Для интегральных операторов такого типа можно ввести фейнмановскую диаграммную технику, описание которой приведено в приложении Б. В данном разделе приведена диаграмма для ядра оператора отражения.

В разделе 2.4 доказана эквивалентность двух представлений одночастичных собственных функций: через гипергеометрическую функцию и в виде результата действия \mathcal{K} -оператора

на функцию, тождественно равную единице. Собственные функции выражены через интеграл по верхней полуплоскости от произведения степеней (представление Гаусса-Гивенталья), для них получено соответствующее диаграммное представление. Для этого использовано интегральное и диаграммное представление для оператора отражения.

Раздел 2.5 посвящен доказательству соотношения ортогональности одночастичных собственных функций.

В разделе 2.5.1 ортогональность доказана при помощи асимптотики гипергеометрической функции при больших значениях аргумента.

В разделе 2.5.2 приведено второе доказательство ортогональности набора одночастичных собственных функций – при помощи фейнмановской диаграммной техники.

Раздел 2.6 содержит доказательство полноты построенной системы одночастичных собственных функций. Для этой цели волновые функции представлены через интеграл типа Меллина-Барнса (при помощи представления Меллина-Барнса для гипергеометрической функции). Ключевую роль в доказательстве играет предельный случай однократного интеграла Густафсона ВС-типа (интеграла де Бранжа-Вильсона).

Глава 3 посвящена $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочке А-типа.

В разделе 3.1 вводится алгебра симметрии модели – янгиан. Она задается при помощи матрицы $t(u)$, элементы которой представляют собой формальные ряды по u , коэффициенты этих рядов являются генераторами алгебры. Определяющие соотношения задаются при помощи RTT -соотношения с R -матрицей Янга. Матрица монодромии, которую мы также обозначаем $t(u)$, является представлением этой алгебры. L -оператор реализует ее простейшее представление. Вводится понятие квантовых миноров матрицы генераторов янгиана $t(u)$, приводятся известные формулы антисимметрии квантовых миноров по перестановкам индексов строк и столбцов. Уделяется внимание важному частному случаю – угловым квантовым минорам, которые в рассматриваемом нами представлении являются производящими функциями для интегралов движения модели. Также определяются представления основной серии группы $SL(N, \mathbb{C})$, через которые задается L -оператор.

Раздел 3.2 посвящен определению модели. Вводится L -оператор, матрица монодромии определяется стандартным образом через произведение L -операторов. Также вводятся антиголоморфные аналоги этих объектов. Вдобавок, формулируется спектральная задача для угловых квантовых миноров в рассматриваемом нами случае цепочки из одного узла (рассматриваются угловые миноры голоморфного и антиголоморфного L -операторов).

В разделе 3.3 выводятся формулы для построения общих собственных функций угловых квантовых миноров L -оператора $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки при помощи индукции по N . В число этих формул входят выражения для миноров L -оператора $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки через миноры L -оператора для $SL(N-1, \mathbb{C})$, а также выражения для действия неугловых миноров на собственные функции угловых.

Раздел 3.4 посвящен индуктивному построению собственных функций угловых квантовых миноров L -оператора (элементов базиса Гельфанда-Цетлина). Приведен анзац для произвольного шага индукции, выражающий элемент базиса Гельфанда-Цетлина для пред-

ставления $SL(N, \mathbb{C})$ через интеграл по спектральным переменным с неизвестным ядром от элемента базиса для $SL(N-1, \mathbb{C})$ (представление Меллина-Барнса). В следующих разделах разобраны индукционные шаги $N = 2 \rightarrow N = 3$ и $N = 3 \rightarrow N = 4$.

В разделе 3.4.1 приведены известные результаты для собственных функций элемента $(1, 1)$ L -оператора $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки, который является его единственным нетривиальным угловым минором. Они выражаются через степенную функцию. Приведены формулы для действия элемента $(1, 2)$ L -оператора и его антиголоморфного аналога на собственные функции, а также соотношения ортогональности и полноты для них.

В разделе 3.4.2 построено представление Меллина-Барнса для собственных функций угловых квантовых миноров L -оператора $SL(3, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки: они выражены через функции для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки из предыдущего раздела. Из уравнений на собственные значения угловых миноров выведено конечно-разностное уравнение для ядра интегрального представления, найдено выражение для ядра в виде произведения гамма-функций, связанных с полем \mathbb{C} . Приведено соотношение ортогональности и предполагаемое соотношение полноты для собственных функций $SL(3, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки (доказательство последнего остается открытой задачей), а также формулы для действия неугловых миноров на эти функции.

В разделе 3.4.3 собственные функции угловых миноров L -оператора $SL(4, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки выражены через собственные функции $SL(3, \mathbb{C})$ цепочки из предыдущего раздела при помощи представления Меллина-Барнса. Спектральная задача для угловых миноров $SL(4, \mathbb{C})$ L -оператора преобразована к системе конечно-разностных уравнений для ядра интегрального представления, которая решена при помощи многомерного комплексного аналога преобразования Меллина. Получены формулы для действия неугловых миноров L -оператора $SL(4, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки на собственные функции угловых. Также для этих функций приведено соотношение ортогональности и предполагаемое соотношение полноты (доказательство которого остается открытой задачей).

Раздел 3.5 посвящен доказательству ортогональности построенных наборов собственных функций угловых квантовых миноров L -оператора $SL(3, \mathbb{C})$ - и $SL(4, \mathbb{C})$ -инвариантных спиновых цепочек.

В разделе 3.5.1 приведено доказательство ортогональности собственных функций для $SL(3, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки. Ключевую роль в нем играет соотношение ортогональности функций для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки и комплексный аналог интеграла Густафсона А-типа.

Ортогональность собственных функций угловых миноров L -оператора $SL(4, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки доказана в разделе 3.5.2. В основе доказательства лежит соотношение ортогональности собственных функций для $SL(3, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки и комплексный аналог интеграла Густафсона А-типа.

В заключении диссертации приводятся основные результаты работы и обсуждаются перспективы дальнейшего развития темы. Также эта часть содержит благодарности автора.

Глава 1. $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантная спиновая цепочка ВС-типа

1.1 Представления основной серии группы $SL(2, \mathbb{C})$

Для того, чтобы определить модель, напомним основные формулы для *представлений основной серии* группы $SL(2, \mathbb{C})$ [33]. Эти представления определены в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{C})$ интегрируемых с квадратом функций в \mathbb{C} . Скалярное произведение функций определяется следующим образом

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^2z \overline{\Phi(z, \bar{z})} \Psi(z, \bar{z}), \quad (1.1)$$

где мерой интегрирования является мера Лебега в \mathbb{C} : $d^2z = d \operatorname{Re} z d \operatorname{Im} z$. В дальнейшем через $\int d^2z$ мы будем обозначать интеграл по всей комплексной плоскости.

Во избежание путаницы отметим, что комплексное сопряжение числа $a \in \mathbb{C}$ будет обозначаться a^* . При этом обозначение \bar{a} не будет означать «комплексно сопряженный к a ». В дань традиции мы делаем исключение для комплексной переменной z , то есть $\bar{z} \equiv z^*$, и для комплексного сопряжения функций: $\overline{\Psi(z, \bar{z})}$. Для простоты в дальнейшем у функций будет обозначаться лишь голоморфный аргумент z , то есть $\Psi(z) \equiv \Psi(z, \bar{z})$.

Для того, чтобы определить представление, введем понятие *двойной степени*. Это степенная функция, задаваемая парой чисел $(a, \bar{a}) \in \mathbb{C}$. Она определяется следующим образом

$$[z]^a \equiv z^a \bar{z}^{\bar{a}} = |z|^{a+\bar{a}} e^{i(a-\bar{a}) \arg z}. \quad (1.2)$$

Для того, чтобы функция (1.2) была определена во всей комплексной плоскости, на числа a, \bar{a} накладывается условие $a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$. Параметр a называется *голоморфным*, параметр \bar{a} — *антиголоморфным*, при этом a и \bar{a} в общем случае не являются комплексно-сопряженными друг к другу. Для краткости в формулах пишется лишь «голоморфный» показатель. Кроме того, для $\rho \in \mathbb{R}$ используется следующее обозначение

$$[z]^{\rho+a} \equiv z^{\rho+a} \bar{z}^{\rho+\bar{a}}.$$

Представление задается двумя параметрами (s, \bar{s}) , называемыми *спинами* и удовлетворяющими условию $2(s - \bar{s}) \in \mathbb{Z}$. Элементу группы

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1,$$

соответствует оператор $T^{(s, \bar{s})}(g)$, действующий на функцию $\Psi(z, \bar{z})$ по формуле

$$[T^{(s, \bar{s})}(g) \Psi](z) = [d - bz]^{-2s} \Psi\left(\frac{-c + az}{d - bz}\right),$$

где $[d - bz]^{-2s} \equiv (d - bz)^{-2s} (d^* - b^* \bar{z})^{-2\bar{s}}$. Здесь и далее для краткости указывается лишь голоморфный аргумент z , то есть $\Psi(z) \equiv \Psi(z, \bar{z})$.

Унитарность представления основной серии накладывает следующие ограничения на его параметры

$$s^* + \bar{s} = 1, \quad (1.3)$$

Таким образом, с учетом ограничения $2(s - \bar{s}) \in \mathbb{Z}$ получается следующая параметризация для спинов

$$s = \frac{1 + n_s}{2} + i\nu_s, \quad \bar{s} = \frac{1 - n_s}{2} + i\nu_s, \quad n_s \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \nu_s \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Здесь и во всем остальном тексте мы фиксируем параметр σ

$$\sigma \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}. \quad (1.5)$$

При $\sigma = 0$ параметр n_s принимает целые значения, а при $\sigma = \frac{1}{2}$ – полуцелые.

Для того, чтобы определить модель, нам также понадобятся генераторы представления

$$\begin{aligned} S &= z\partial_z + s, & S_- &= -\partial_z, & S_+ &= z^2\partial_z + 2sz, \\ \bar{S} &= \bar{z}\partial_{\bar{z}} + \bar{s}, & \bar{S}_- &= -\partial_{\bar{z}}, & \bar{S}_+ &= \bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + 2\bar{s}\bar{z}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Генераторы S, S_{\pm} , называемые голоморфными, коммутируют с антиголоморфными генераторами \bar{S}, \bar{S}_{\pm} . Также для них выполняются стандартные коммутационные соотношения алгебры Ли $sl(2, \mathbb{C})$, то есть

$$[S_+, S_-] = 2S, \quad [S, S_{\pm}] = \pm S_{\pm},$$

и аналогично для антиголоморфных генераторов. Два типа генераторов эрмитово сопряжены друг другу относительно скалярного произведения (1.1)

$$S^\dagger = -\bar{S}, \quad S_-^\dagger = -\bar{S}_-, \quad S_+^\dagger = -\bar{S}_+ \quad (1.7)$$

в силу соотношения (1.3).

Хорошо известно [33, 34], что представления, задаваемые параметрами (s, \bar{s}) и $(1 - s, 1 - \bar{s})$, являются эквивалентными. Соответствующий сплетатель

$$W(s, \bar{s}) T^{(s, \bar{s})}(g) = T^{(1-s, 1-\bar{s})}(g) W(s, \bar{s}).$$

имеет вид интегрального оператора. В явном виде он задается следующей формулой [33]

$$[W(s, \bar{s})\Phi](z, \bar{z}) = \frac{i^{-|2s-2\bar{s}|}}{\pi} \frac{\Gamma(2-s-\bar{s}+|s-\bar{s}|)}{\Gamma(s+\bar{s}+|s-\bar{s}|-1)} \int d^2x \frac{\Phi(x, \bar{x})}{[z-x]^{2-2s}},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция Эйлера. Этот оператор определен для всех возможных значений s и \bar{s} . Несмотря на то, что для дискретных значений $2s = -n$, $2\bar{s} = -\bar{n}$, где $n, \bar{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ интеграл расходится, сам оператор остается хорошо определен благодаря выбранной нормировке.

Сплетающему оператору можно придать смысл псевдодифференциального оператора. Рассмотрим «операторы импульса» $\hat{p} = -i\partial_z, \hat{\bar{p}} = -i\partial_{\bar{z}}$. Введем следующий интегральный оператор со степенным ядром

$$[\hat{p}]^\alpha \Phi(z, \bar{z}) = c(\alpha) \int d^2x \frac{\Phi(x, \bar{x})}{[z-x]^{1+\alpha}}, \quad (1.8)$$

Оператор (1.8) задается парой комплексных параметров $\alpha, \bar{\alpha}$, таких что $\alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Константа $c(\alpha)$ также является функцией этих параметров. Она имеет вид

$$c(\alpha) = \frac{[i]^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{\pi}, \quad (1.9)$$

где $[i]^\alpha \equiv i^{\alpha-\bar{\alpha}}$, а Γ – гамма-функция, связанная с полем \mathbb{C} [57, 58]

$$\mathbf{\Gamma}(a) := \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1-\bar{a})}. \quad (1.10)$$

Функция $\mathbf{\Gamma}$ зависит от двух аргументов $(a, \bar{a}) \in \mathbb{C}^2$, таких что $a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$, при этом для краткости указывается лишь «голоморфный» аргумент. Вдобавок, для $\rho \in \mathbb{R}$ будет использоваться обозначение

$$\mathbf{\Gamma}(a + \rho) \equiv \frac{\Gamma(a + \rho)}{\Gamma(1 - \bar{a} - \rho)}.$$

Полезные свойства функции (1.10) перечислены в Приложении А.

Оператор (1.8) обозначается $[\hat{p}]^\alpha$, в связи с тем что его можно интерпретировать [60] как двойную степень $\hat{p}^\alpha \hat{\bar{p}}^{\bar{\alpha}}$ оператора \hat{p} . А именно, рассмотрим следующую формулу для преобразования Фурье степенной функции

$$A(\alpha, \bar{\alpha}) \int d^2x \frac{e^{ipx+i\bar{p}\bar{x}}}{x^{1+\alpha}\bar{x}^{1+\bar{\alpha}}} = p^\alpha \bar{p}^{\bar{\alpha}}, \quad \alpha - \bar{\alpha} \in \mathbb{Z}, \quad (1.11)$$

где нормировочная константа имеет вид [33]

$$A(\alpha, \bar{\alpha}) := \frac{i^{-|\alpha-\bar{\alpha}|}}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\bar{\alpha}+|\alpha-\bar{\alpha}|+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\alpha-\bar{\alpha}+|\alpha-\bar{\alpha}|}{2}\right)}.$$

Для нецелых значений α последнюю формулу можно упростить

$$A(\alpha, \bar{\alpha}) = \frac{[i]^{-\alpha}}{\pi} \Gamma(\alpha + 1) \quad ; \quad \Gamma(\alpha) := \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1 - \bar{\alpha})} \quad ; \quad [i]^\alpha \equiv i^{\alpha - \bar{\alpha}} .$$

Формулу (1.8) легко получить при помощи формальных манипуляций, заменив в (1.11) комплексные переменные p и \bar{p} на операторы импульса $p \rightarrow \hat{p} = -i\partial_z$, $\bar{p} \rightarrow \hat{\bar{p}} = -i\partial_{\bar{z}}$ и используя стандартную формулу для оператора сдвига

$$e^{ia\hat{p}+i\bar{a}\hat{\bar{p}}} f(z) = e^{a\partial_z + \bar{a}\partial_{\bar{z}}} f(z, \bar{z}) = f(z + a, \bar{z} + \bar{a}) .$$

Сплетающий оператор следующим образом выражается в терминах псевдодифференциального оператора (1.8)

$$W(s, \bar{s}) := [\hat{p}]^{1-2s} . \quad (1.12)$$

Оператор (1.8) играет важную роль, т.к. через него выражается оператор отражения, используемый при построении собственных функций. При помощи правила цепочки (A.6) и его предельного случая (A.11) можно вывести следующие формулы умножения

$$[\hat{p}]^\alpha [\hat{p}]^\beta = [\hat{p}]^{\alpha+\beta} , \quad [\hat{p}]^\alpha [\hat{p}]^{-\alpha} = \mathbb{1} , \quad (1.13)$$

где $\mathbb{1}$ – тождественный оператор. Из (1.12) и соотношения $[p]^\alpha [p]^{-\alpha} = \mathbb{1}$ следует формула для обращения сплетающего оператора

$$W^{-1}(s, \bar{s}) = W(1 - s, 1 - \bar{s}) .$$

Вместе с тем, из правила комплексного сопряжения степенной функции (1.2)

$$([z]^\alpha)^* = [z]^{\bar{\alpha}^*} = z^{\bar{\alpha}^*} \bar{z}^{\alpha^*} \quad (1.14)$$

и определения $[\hat{p}]^\alpha$ несложно получить следующую формулу для эрмитового сопряжения относительно скалярного произведения (1.1)

$$([\hat{p}]^\alpha)^\dagger = [\hat{p}]^{\bar{\alpha}^*} .$$

Таким образом, используя условие (1.3) на спин s , получаем

$$W^\dagger(s, \bar{s}) = W(1 - s, 1 - \bar{s}) = W^{-1}(s, \bar{s}) .$$

Другими словами, $W(s, \bar{s})$ – унитарный оператор $W^\dagger(s, \bar{s}) W(s, \bar{s}) = \mathbb{1}$.

1.2 Определение модели

Гильбертово пространство модели представляет собой тензорное произведение пространств $L^2(\mathbb{C})$

$$H = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n, \quad V_k = L^2(\mathbb{C}), \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

Скалярное произведение в пространстве (1.15) определяется через кратный интеграл

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^2 z_n \overline{\Phi(z_n)} \Psi(z_n), \quad (1.16)$$

где $z_n = (z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$, и $d^2 z_n = \prod_{k=1}^n d^2 z_k$.

Узлу цепочки с номером k соответствует L -оператор с индексом k , действующий нетривиально в k -ой компоненте тензорного произведения (1.15)

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u + S^{(k)} & S_-^{(k)} \\ S_+^{(k)} & u - S^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \bar{L}_k(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \bar{u} + \bar{S}^{(k)} & \bar{S}_-^{(k)} \\ \bar{S}_+^{(k)} & \bar{u} - \bar{S}^{(k)} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

Функции в пространстве V_k зависят от переменной z_k , в этом пространстве действуют копии генераторов (1.6)

$$S^{(k)} = z_k \partial_k + s, \quad S_-^{(k)} = -\partial_k, \quad S_+^{(k)} = z_k^2 \partial_k + 2s z_k,$$

выражения для антиголоморфных генераторов имеют аналогичный вид. L -оператор зависит от дополнительного вспомогательного параметра u , называемого *спектральным*. В настоящей работе рассматривается случай *однородной* спиновой цепочки, то есть спиновые параметры (s, \bar{s}) одинаковые во всех узлах.

L -оператор является функцией спектрального параметра u и спина s

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + z \partial_z + s & -\partial_z \\ z^2 \partial_z + 2s z & u - z \partial_z - s \end{pmatrix}.$$

Его также можно задать при помощи двух эквивалентных параметров

$$u_1 = u - 1 + s, \quad u_2 = u - s,$$

которые возникают естественным образом при факторизации [61]

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2) &= \begin{pmatrix} u_1 + 1 + z \partial_z & -\partial_z \\ z^2 \partial_z + (u_1 - u_2 + 1)z & u_2 - z \partial_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -\partial_z \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Квантовые интегралы движения строятся при помощи *матрицы монодромии*. Она определяется следующим образом [26, 98, 99]

$$T_n(u) = L_n(u) \cdots L_1(u) K(u) L_1(u) \cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} A_n(u) & B_n(u) \\ C_n(u) & D_n(u) \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Антиголоморфный аналог $\bar{T}_n(\bar{u})$ определяется аналогично через $\bar{L}_k(\bar{u})$ и $\bar{K}(\bar{u})$. Для того, чтобы модель была интегрируемой, матрица $K(u)$ должна удовлетворять *уравнению отражения* [26]

$$\begin{aligned} R(u-v) (K(u) \otimes \mathbf{1}) R(u+v-1) (\mathbf{1} \otimes K(v)) \\ = (\mathbf{1} \otimes K(v)) R(u+v-1) (K(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица 2×2 , а $R(u)$ – это *R-матрица Янга*, действующая в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$R(u) = u + P, \quad P a \otimes b = b \otimes a. \quad (1.21)$$

В свою очередь, *R-матрица* является решением *уравнения Янга-Бакстера* [16, 10, 11, 14] в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$R_{12}(u-v) R_{13}(u) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u) R_{12}(u-v), \quad (1.22)$$

где матрица R_{ij} действует по формуле (1.21) в i -ой и j -ой компонентах тензорного произведения, а в оставшейся компоненте – как тождественный оператор. Мы рассмотрим общее решение соотношения (1.20) (и его антиголоморфного аналога), оно имеет вид [27, 26, 98, 99]

$$K(u) = \begin{pmatrix} \gamma(g - \frac{1}{2}) & u - \frac{1}{2} \\ \gamma^2(u - \frac{1}{2}) & \gamma(g - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad \bar{K}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}(\bar{g} - \frac{1}{2}) & \bar{u} - \frac{1}{2} \\ \bar{\gamma}^2(\bar{u} - \frac{1}{2}) & \bar{\gamma}(\bar{g} - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Из (1.20) и *RLL-соотношения* для *L-оператора* [16, 10]

$$R(u-v) (L(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes L(v)) = (\mathbf{1} \otimes L(v)) (L(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v). \quad (1.24)$$

следует уравнение отражения для $T_n(u)$ [26]

$$\begin{aligned} R(u-v) (T_n(u) \otimes \mathbf{1}) R(u+v-1) (\mathbf{1} \otimes T_n(v)) \\ = (\mathbf{1} \otimes T_n(v)) R(u+v-1) (T_n(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Подставляя явное выражение для *R-матрицы Янга* и матрицы монодромии в (1.25) и его антиголоморфный аналог, и далее рассматривая элемент (1, 4) в этих матричных уравнениях,

получаем следующие коммутационные соотношения

$$[B_n(u), B_n(v)] = 0, \quad [\bar{B}_n(\bar{u}), \bar{B}_n(\bar{v})] = 0. \quad (1.26)$$

Голоморфный и антиголоморфный B -элементы также коммутируют друг с другом

$$[B_n(u), \bar{B}_n(\bar{v})] = 0.$$

Оператор $B_n(u)$ является полиномом от спектрального параметра u , и по построению у этого полинома есть n независимых операторнозначных коэффициентов. Из (1.26) следует, что эти коэффициенты образуют набор коммутирующих операторов. Аналогичная история имеет место для оператора $\bar{B}_n(\bar{u})$. Интегралы движения модели являются линейными комбинациями коэффициентов полиномов $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$. Таким образом, главной целью является одновременная диагонализация $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$.

1.2.1 Условия на параметры K -матриц

Наложим на параметры $\gamma, \bar{\gamma}$ и g, \bar{g} условия, при которых интегралы движения являются самосопряженными операторами. Для этого рассмотрим случай одного узла. В этом случае оператор $B(u)$ имеет вид

$$B(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right)(u^2 - H^s), \quad (1.27)$$

где оператор H^s выражается через голоморфные генераторы (1.6) следующим образом

$$\begin{aligned} H^s &= S^2 - \gamma^2 S_-^2 - 2\gamma \left(g - \frac{1}{2}\right) S_- \\ &= (z^2 - \gamma^2) \partial_z^2 + (2s + 1) z \partial_z + 2\gamma \left(g - \frac{1}{2}\right) \partial_z + s^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Из (1.27) видно, что спектральная задача для $B(u)$ эквивалентна спектральной задаче для H^s . Аналогично для антиголоморфного B -элемента

$$\bar{B}(\bar{u}) = \left(\bar{u} - \frac{1}{2}\right)(\bar{u}^2 - \bar{H}^{\bar{s}})$$

и оператора

$$\bar{H}^{\bar{s}} = \bar{S}^2 - \bar{\gamma}^2 \bar{S}_-^2 - 2\bar{\gamma} \left(\bar{g} - \frac{1}{2}\right) \bar{S}_- = (\bar{z}^2 - \bar{\gamma}^2) \partial_{\bar{z}}^2 + (2\bar{s} + 1) \bar{z} \partial_{\bar{z}} + 2\bar{\gamma} \left(\bar{g} - \frac{1}{2}\right) \partial_{\bar{z}} + \bar{s}^2. \quad (1.29)$$

Наложим следующее условие на эти операторы

$$(H^s)^\dagger = \bar{H}^{\bar{s}}, \quad (1.30)$$

где эрмитово сопряжение берется относительно скалярного произведения (1.1). Операторы H^s и $\bar{H}^{\bar{s}}$ коммутируют, и благодаря условию (1.30) из них можно построить коммутирующие самосопряженные операторы $H^s + \bar{H}^{\bar{s}}$, $i(H^s - \bar{H}^{\bar{s}})$.

Голоморфные и антиголоморфные генераторы сопряжены друг другу (1.7): $S^\dagger = -\bar{S}$, $S_-^\dagger = -\bar{S}_-$. Поэтому, условие (1.30) будет выполнено, если

$$g^* = 1 - \bar{g}, \quad \bar{\gamma}^2 = (\gamma^*)^2.$$

Так как оператор $\bar{H}^{\bar{s}}$ (1.29) зависит от $\bar{\gamma}^2$, то без потери общности можно принять

$$g^* = 1 - \bar{g}, \quad \bar{\gamma} = \gamma^*. \quad (1.31)$$

Кроме того, наложим на параметры g, \bar{g} ограничение $g - \bar{g} \in \mathbb{Z} + \sigma$, где параметр $\sigma \in \{0, 1/2\}$ определяется видом спиновых параметров (1.4). Это требование вводится для того, чтобы степенные функции вида (1.2), используемые при построении собственных функций модели, были корректно определены. С учетом этих условий, константы g, \bar{g} параметризуются аналогично спинам s, \bar{s}

$$g = \frac{1 + n_g}{2} + i\nu_g, \quad \bar{g} = \frac{1 - n_g}{2} + i\nu_g, \quad n_g \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \nu_g \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Спектральная задача для операторов $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$

Обозначим через u и \bar{u} пару комплексно-сопряженных переменных

$$\bar{u} = u^*. \quad (1.32)$$

В конце этого раздела мы покажем, что при условии (1.32) операторы $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$ эрмитово сопряжены друг другу

$$B_n^\dagger(u) = \bar{B}_n(\bar{u}), \quad (1.33)$$

Из этого следует, что $B_n(u) + \bar{B}_n(\bar{u})$ и $i(B_n(u) - \bar{B}_n(\bar{u}))$ – два коммутирующих друг с другом самосопряженных оператора, значит они могут быть одновременно диагонализированы. Таким образом, у $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$ есть общий базис собственных функций, которые являются основными объектами исследования.

По построению, оператор $B_n(u)$ является полиномом степени $2n + 1$ от спектрального параметра u , и далее в этом разделе мы покажем, что $B_n(u)/(u - \frac{1}{2})$ – четный полином от u . Естественно, аналогичное свойство имеет место и для $\bar{B}_n(\bar{u})$. Следовательно, собственные значения $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$ также являются многочленами степени $2n + 1$ от u и \bar{u} , обладающими аналогичным свойством. Общие собственные функции параметризуются корнями этих

МНОГОЧЛЕНОВ

$$\begin{aligned} B_n(u) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) &= \left(u - \frac{1}{2}\right) (u^2 - x_1^2) \cdots (u^2 - x_n^2) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n), \\ \bar{B}_n(\bar{u}) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) &= \left(\bar{u} - \frac{1}{2}\right) (\bar{u}^2 - \bar{x}_1^2) \cdots (\bar{u}^2 - \bar{x}_n^2) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n). \end{aligned} \quad (1.34)$$

В (1.34) используются компактные обозначения для наборов переменных

$$\mathbf{z}_n = (z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n), \quad \mathbf{x}_n = (x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n).$$

Наложим на параметры x_k, \bar{x}_k то же ограничение $x_k - \bar{x}_k \in \mathbb{Z} + \sigma$, что и на s, \bar{s} и g, \bar{g} . Кроме того, условие (1.33) дает ограничение $(x_k^*)^2 = \bar{x}_k^2$. Мы рассмотрим случай $x_k^* = -x_k$. Таким образом, получается следующая параметризация для спектральных переменных

$$x_k = \frac{n_k}{2} + i\nu_k, \quad \bar{x}_k = -\frac{n_k}{2} + i\nu_k, \quad (1.35)$$

где $n_k \in \mathbb{Z} + \sigma$, а число ν_k вещественное.

Следует сделать несколько замечаний:

- Так как $\Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n)$ являются собственными функциями самосопряженных операторов $B_n(u) + \bar{B}_n(\bar{u})$ и $i(B_n(u) - \bar{B}_n(\bar{u}))$, то набор этих функций должен быть ортогональным при условии простоты спектра. В рассматриваемой модели спектр операторов $B_n(u)$, $\bar{B}_n(\bar{u})$ действительно оказывается простым. В разделе 1.7 доказана ортогональность набора собственных функций, задаваемых параметрами вида (1.35), для цепочки, состоящей из одного узла. Более того, в разделе 1.8 доказана полнота этого набора. Соотношения ортогональности (1.65) и полноты (1.68) для случая произвольного числа узлов доказаны в работе [96].
- Как функция спектральных переменных, собственное число B -оператора инвариантно относительно перестановок параметров x_1, \dots, x_n . Оно также инвариантно относительно отражений $x_i \rightarrow -x_i$. Поэтому, группой симметрий собственного числа является $\mathbb{Z}_2 \times \mathfrak{S}_n$ – группа Вейля систем корней типа В и С. Благодаря простоте спектра собственные функции также симметричны относительно упомянутых преобразований набора параметров \mathbf{x}_n – формула (1.64). В случае спиновой цепочки, состоящей из одного узла, инвариантность относительно отражения спектральной переменной доказана в разделе 1.6.1. Доказательство перечисленных свойств симметрии для случая произвольного числа узлов приведено в [96].
- Диагонализуя операторы $B(u)$ и $\bar{B}(\bar{u})$, зависящие полиномиально от спектральных параметров u и \bar{u} , мы одновременно диагонализуем операторнозначные коэффициенты этих полиномов. То есть, $\Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n)$ являются общими собственными функциями операторов

$$\frac{1}{(2j)!} \frac{\partial^{2j}}{\partial^{2j} u} \Big|_{u=0} \frac{B_n(u)}{u - \frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{(2j)!} \frac{\partial^{2j}}{\partial^{2j} \bar{u}} \Big|_{\bar{u}=0} \frac{\bar{B}_n(\bar{u})}{\bar{u} - \frac{1}{2}}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (1.36)$$

Поэтому, уравнения на собственные значения (1.34) выполняются для произвольных u и \bar{u} , необязательно комплексно сопряженных друг другу.

- По построению, (1.36) представляют собой дифференциальные операторы порядка $2j$ по z_1, \dots, z_n и $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$. Старшие коэффициенты ($j = 0$) являются тождественными операторами. Вдобавок, из (1.33) следует, что голоморфные и антиголоморфные операторы в (1.36) эрмитово сопряжены друг другу. Таким образом, собственные функции $\Psi_{\mathbf{z}_n}(\mathbf{z}_n)$ одновременно диагонализуют $2n$ самосопряженных дифференциальных операторов

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2j)!} \left(\frac{\partial^{2j}}{\partial^{2j} u} \Big|_{u=0} \frac{B_n(u)}{u - \frac{1}{2}} + \frac{\partial^{2j}}{\partial^{2j} \bar{u}} \Big|_{\bar{u}=0} \frac{\bar{B}_n(\bar{u})}{\bar{u} - \frac{1}{2}} \right), \\ & \frac{i}{(2j)!} \left(\frac{\partial^{2j}}{\partial^{2j} u} \Big|_{u=0} \frac{B_n(u)}{u - \frac{1}{2}} - \frac{\partial^{2j}}{\partial^{2j} \bar{u}} \Big|_{\bar{u}=0} \frac{\bar{B}_n(\bar{u})}{\bar{u} - \frac{1}{2}} \right), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $B_n(u)/(u - \frac{1}{2})$ является четным многочленом от u

$$\frac{B_n(u)}{u - \frac{1}{2}} = \frac{B_n(-u)}{-u - \frac{1}{2}}. \quad (1.37)$$

Во-первых, из формулы (1.37) следует, что $B_n(u)/(u - \frac{1}{2})$ – полином от u , так как согласно ей $B_n(\frac{1}{2}) = 0$, а значит многочлен $B_n(u)$ должен быть пропорционален $(u - \frac{1}{2})$. Для того, чтобы вывести (1.37), выразим матрицу монодромии

$$T_n(u) = L_n(u) \cdots L_1(u) K(u) L_1(u) \cdots L_n(u)$$

через матрицу монодромии $t_n(u)$ открытой спиновой цепочки А-типа [43, 51]

$$t_n(u) = L_1(u) \cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} a_n(u) & b_n(u) \\ c_n(u) & d_n(u) \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Получаем

$$\begin{aligned} T_n(u) &= (-1)^n \sigma_2 t_n^t(-u) \sigma_2 K(u) t_n(u) \\ &= (-1)^n \begin{pmatrix} d_n(-u) & -b_n(-u) \\ -c_n(-u) & a_n(-u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(g - \frac{1}{2}) & u - \frac{1}{2} \\ \gamma^2(u - \frac{1}{2}) & \gamma(g - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n(u) & b_n(u) \\ c_n(u) & d_n(u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где через t обозначается матричное транспонирование $(t_n^t)_{ij} = (t_n)_{ji}$, а σ_2 – матрица Паули. Это выражение напрямую следует из соотношения

$$L_k(u) = -\sigma_2 L_k^t(-u) \sigma_2,$$

которое легко проверить, расписав явно L -оператор по определению (1.17).

Для доказательства (1.37) используем явное выражение для $B_n(u)$ в терминах элементов

матрицы монодромии $t_n(u)$

$$\frac{B_n(u)}{u - \frac{1}{2}} = (-1)^n \gamma \left(g - \frac{1}{2}\right) \frac{d_n(-u) b_n(u) - b_n(-u) d_n(u)}{u - \frac{1}{2}} + (-1)^n d_n(-u) d_n(u) + (-1)^{n+1} \gamma^2 b_n(-u) b_n(u), \quad (1.39)$$

а также уравнение Янга-Бакстера для $t_n(u)$ [16, 11, 45, 15, 14]

$$R(u-v) (t_n(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes t_n(v)) = (\mathbf{1} \otimes t_n(v)) (t_n(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v),$$

где $R(u-v)$ – это R -матрица Янга (1.21). Последнее матричное соотношение переписывается через элементы матрицы монодромии следующим образом

$$(u-v) t(u)_{ij} t(v)_{kl} + t(u)_{kj} t(v)_{il} = (u-v) t(v)_{kl} t(u)_{ij} + t(v)_{kj} t(u)_{il}. \quad (1.40)$$

Во-первых, из (1.40) следует, что операторы $b(u)$ и $d(u)$ образуют коммутативные семейства $[b(u), b(v)] = [d(u), d(v)] = 0$, поэтому последние два члена в (1.39) инвариантны относительно замены $u \rightarrow -u$. Во-вторых, используя (1.40) можно вывести следующее соотношение

$$(u-v-1) [\sigma_2 t'(u) \sigma_2 t(v)]_{ij} = (u-v) [t'(v) \sigma_2 t(u) \sigma_2]_{ji} - [\sigma_2 t'(v) \sigma_2 t(u)]_{ij}.$$

При $v = -u$ и $i = 1, j = 2$ последняя формула принимает вид

$$(2u-1) [d_n(u) b_n(-u) - b_n(u) d_n(-u)] = -(2u+1) [d_n(-u) b_n(u) - b_n(-u) d_n(u)].$$

Из этого соотношения следует, что и оставшееся слагаемое в выражении (1.39) инвариантно относительно замены $u \rightarrow -u$.

Остается вывести формулу (1.33) для эрмитового сопряжения B -оператора

$$B_n^\dagger(u) = \bar{B}_n(\bar{u}), \quad (1.41)$$

где, напомним, $\bar{u} \equiv u^*$. Снова используем выражение (1.39) для B -элемента

$$B_n(u) = (-1)^n \gamma \left(g - \frac{1}{2}\right) (d_n(-u) b_n(u) - b_n(-u) d_n(u)) + (-1)^n \left(u - \frac{1}{2}\right) (d_n(-u) d_n(u) - \gamma^2 b_n(-u) b_n(u)). \quad (1.42)$$

Формула для $\bar{B}_n(\bar{u})$ имеет аналогичный вид, нужно лишь заменить параметры g, γ, u на $\bar{g}, \bar{\gamma}, \bar{u}$, и b_n, d_n – на элементы \bar{b}_n, \bar{d}_n антиголоморфной матрицы монодромии $\bar{t}_n(\bar{u})$, которая определяется через L -операторы $\bar{L}_k(\bar{u})$ аналогично (1.38).

Как видно из (1.42), для того, чтобы доказать (1.41), нужно знать правила сопряжения для операторов $b_n(u)$ и $d_n(u)$. Напомним, что голоморфные и антиголоморфные генераторы представления основной серии сопряжены друг другу (см. (1.7)), отсюда следует аналогичное

свойство для матричных элементов L -оператора

$$(L_k)_{ij}^\dagger(u) = -(\bar{L}_k)_{ij}(-\bar{u}).$$

В силу последней формулы и коммутативности матричных элементов L -операторов, соответствующих разным пространствам $L^2(\mathbb{C})$, получаем правила эрмитового сопряжения элементов матрицы монодромии $t_n(u)$

$$b_n^\dagger(u) = (-1)^n \bar{b}_n(-\bar{u}), \quad d_n^\dagger(u) = (-1)^n \bar{d}_n(-\bar{u}). \quad (1.43)$$

Используя (1.43) и соотношения $\gamma^* = \bar{\gamma}$, $u^* = \bar{u}$, $g^* = 1 - \bar{g}$, несложно показать, что в результате эрмитового сопряжения выражения (1.42) для $B_n(u)$ получается оператор $\bar{B}_n(\bar{u})$.

1.3 Полученные результаты

1.3.1 Одночастичные собственные функции

В соответствии с (1.27), в случае одного узла задача диагонализации $B(u)$ эквивалентна диагонализации оператора H^s , определенного в (1.28). Таким образом, задачу на общие собственные функции $B(u)$ и $\bar{B}(\bar{u})$ можно записать в следующем виде

$$H^s \Psi_x(z) = x^2 \Psi_x(z), \quad \bar{H}^{\bar{s}} \Psi_x(z) = \bar{x}^2 \Psi_x(z),$$

где для краткости введено обозначение

$$\Psi_x(z) \equiv \Psi_{(x, \bar{x})}(z).$$

Собственные функции строятся при помощи оператора отражения $\mathcal{K}(s, x)$, действующего на функциях одной переменной. Он является решением системы из двух уравнений отражения: с голоморфными L -оператором и K -матрицей (1.17), (1.23)

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(s, x) L(u + x - 1, u - s) K(u) L(u + s - 1, u - x) \\ & = L(u + s - 1, u - x) K(u) L(u + x - 1, u - s) \mathcal{K}(s, x) \end{aligned} \quad (1.44)$$

и их антиголоморфными аналогами

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(s, x) \bar{L}(\bar{u} + \bar{x} - 1, \bar{u} - \bar{s}) \bar{K}(\bar{u}) \bar{L}(\bar{u} + \bar{s} - 1, \bar{u} - \bar{x}) \\ & = \bar{L}(\bar{u} + \bar{s} - 1, \bar{u} - \bar{x}) \bar{K}(\bar{u}) L(\bar{u} + \bar{x} - 1, \bar{u} - \bar{s}) \mathcal{K}(s, x). \end{aligned} \quad (1.45)$$

В (1.44), (1.45) используется параметризация L -оператора, введенная в (1.18), а K -матрицы определены в (1.23). Отметим, что $\mathcal{K}(s, x)$ зависит не только от параметров s, x , но и от их антиголоморфных аналогов \bar{s}, \bar{x} . Однако, для того, чтобы не загромождать обозначения, зависимость величин от антиголоморфных параметров по возможности указываться не будет.

Соотношение (1.44) эквивалентно трем операторным уравнениям (1.74) на оператор отражения. Одно из них содержит оператор H^s (1.28)

$$H^s \mathcal{K}(s, x) = \mathcal{K}(s, x) H^x.$$

Аналогично, из (1.45) следует

$$\bar{H}^{\bar{s}} \mathcal{K}(s, x) = \mathcal{K}(s, x) \bar{H}^{\bar{x}}.$$

Действуя последними двумя уравнениями на функцию, тождественно равную единице, получаем

$$H^s \mathcal{K}(s, x) \cdot 1 = \mathcal{K}(s, x) H^x \cdot 1 = x^2 \mathcal{K}(s, x) \cdot 1, \quad (1.46)$$

$$\bar{H}^{\bar{s}} \mathcal{K}(s, x) \cdot 1 = \mathcal{K}(s, x) \bar{H}^{\bar{x}} \cdot 1 = \bar{x}^2 \mathcal{K}(s, x) \cdot 1. \quad (1.47)$$

Таким образом, $\mathcal{K}(s, x) \cdot 1$ является общей собственной функцией операторов H^s и $\bar{H}^{\bar{s}}$, то есть общей собственной функцией $B(u)$ и $\bar{B}(\bar{u})$.

Теперь сформулируем основные результаты, касающиеся оператора отражения и собственных функций. В разделе 1.4 получена явная формула для действия $\mathcal{K}(s, x)$ на функцию $\Psi(z)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(s, x) \Psi)(z) &= \frac{[i]^{x-s} \Gamma(x-s+1)}{\pi} [z+\gamma]^{g-s} [z-\gamma]^{1-s-g} \\ &\times \int d^2w \frac{[w+\gamma]^{x-g} [w-\gamma]^{x+g-1}}{[z-w]^{x-s+1}} \Psi(w), \end{aligned} \quad (1.48)$$

где $\Gamma(a)$ – гамма-функция (1.10), связанная с полем комплексных чисел, а степенная функция $[z]^a$ определена в (1.2). Также оператор отражения может быть представлен в виде

$$\mathcal{K}(s, x) = [z+\gamma]^{g-s} [z-\gamma]^{1-s-g} [\hat{p}]^{x-s} [z+\gamma]^{x-g} [z-\gamma]^{x+g-1}, \quad (1.49)$$

где оператор $[\hat{p}]^\alpha$ введен в (1.8). Напомним, что оператор $[\hat{p}]^{2\ell-1}$ играет важную роль в теории представлений $SL(2, \mathbb{C})$: он сплетает эквивалентные представления, задаваемые спинами $(\ell, \bar{\ell})$ и $(1-\ell, 1-\bar{\ell})$. Вдобавок, операторы этого типа используются при построении общего $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантного решения уравнения Янга-Бакстера [60].

Отметим интересное свойство оператора отражения

$$\mathcal{K}(s, x) \mathcal{K}(x, y) = \mathcal{K}(s, y).$$

Его легко проверить, переписав \mathcal{K} -операторы в явном виде и используя (1.13).

В разделе 1.6 получены различные интегральные представления для собственных функций. Согласно формулам (1.46), (1.47), функции Ψ_x могут быть представлены в виде

$$\Psi_x(z) = \pi [-2i\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x) \mathcal{K}(s, x) \cdot 1, \quad (1.50)$$

где нормировочный множитель подобран таким образом, чтобы функции обладали симметрией (1.56) относительно отражения спектральной переменной. Эта симметрия обсуждалась в разделе 1.2.2. При помощи явной формулы (1.48) для оператора отражения и формулы дополнения (A.4) для гамма-функции выражение (1.50) можно переписать в интегральной форме

$$\begin{aligned} \Psi_x(z) &= [2\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x, 1-s+x) \\ &\times \int \frac{d^2w}{[z+\gamma]^{s-g} [z-\gamma]^{s+g-1} [w-z]^{x-s+1} [w+\gamma]^{g-x} [w-\gamma]^{1-x-g}}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

где для краткости используется компактное обозначение (A.1) для произведения гамма-функций

$$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots$$

В приложении A показано, как подобные интегралы представляются в виде диаграмм. Благодаря этому графическому представлению доказательства интегральных соотношений сводятся к простым диаграммным преобразованиям.

Используя упомянутую графическую технику, можно получить еще одно интегральное представление

$$\begin{aligned} \Psi_x(z) &= [2\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x, 1-s+x) \\ &\times \int \frac{d^2w}{[w-z]^{x+s} [w-\gamma]^{g-x} [w+\gamma]^{1-x-g}}. \end{aligned}$$

На основе последней формулы в разделе 1.6.2 собственные функции выражены через гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел [57, 100]

$$\Psi_x(z) = \frac{\pi \Gamma(g+x, g-x)}{\Gamma(s+g)} {}_2F_1^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} s+x|\bar{s}+\bar{x}, s-x|\bar{s}-\bar{x} \\ s+g|\bar{s}+\bar{g} \end{matrix} \left| \frac{1}{2} - \frac{z}{2\gamma} \right. \right]. \quad (1.52)$$

В разделе 1.6.3 получено интегральное представление типа Меллина-Барнса для собственных функций

$$\Psi_x(z) = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}y \frac{[-1]^{y-s} \Gamma(\varepsilon-y \pm x, 1-s-\varepsilon+y, g-\varepsilon+y)}{[2\gamma]^{\varepsilon-y-s} [z+\gamma]^{s-g} [z-\gamma]^{g-\varepsilon+y}} \quad (1.53)$$

где ε – произвольное число из интервала $(0, 1/2)$. Для гамма-функций используются обозначения (A.1), (A.2)

$$\Gamma(a \pm b) = \Gamma(a+b) \Gamma(a-b).$$

Спектральные переменные и переменные интегрирования имеют вид

$$\begin{aligned} (x, \bar{x}) &= \left(\frac{k}{2} + i\eta, -\frac{k}{2} + i\eta \right), & k \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ (y, \bar{y}) &= \left(\frac{m}{2} + i\tau, -\frac{m}{2} + i\tau \right), & m \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где фиксированный параметр $\sigma \in \{0, 1/2\}$ определяется спиновыми параметрами (s, \bar{s}) . Через $\int \mathcal{D}y$ обозначается сумма по дискретной части переменной y и интеграл по непрерывной части

$$\int \mathcal{D}y = \sum_{m \in \mathbb{Z} + \sigma} \int_{\mathbb{R}} d\tau. \quad (1.55)$$

При помощи диаграммной техники в разделе 1.6.1 доказано, что в выбранной нормировке собственные функции инвариантны относительно отражения спектральной переменной

$$\Psi_x(z) = \Psi_{-x}(z). \quad (1.56)$$

В разделе 1.7 доказано, что собственные функции $\Psi_x(z), \Psi_y(z)$, задаваемые спектральными переменными вида (1.54), образуют ортогональную систему относительно скалярного произведения (1.1)

$$\langle \Psi_y | \Psi_x \rangle = \mu^{-1}(x) \frac{\delta^{(2)}(x - y) + \delta^{(2)}(x + y)}{2}. \quad (1.57)$$

Нормировочный коэффициент имеет вид

$$\mu(x) = \frac{1}{4\pi^4} \left| \frac{x}{\gamma} \right|^2.$$

Для пары чисел вида

$$(v, \bar{v}) = \left(\frac{h}{2} + i\rho, -\frac{h}{2} + i\rho \right), \quad h \in \mathbb{Z}, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

дельта-функция $\delta^{(2)}(v)$ определяется как произведение символа Кронекера от дискретной части и дельта-функции от вещественной непрерывной части

$$\delta^{(2)}(v) = \delta_{h,0} \delta(\rho). \quad (1.58)$$

Таким образом, дельта-функции в (1.57) имеют вид

$$\delta^{(2)}(x - y) = \delta_{k,m} \delta(\eta - \tau).$$

При доказательстве соотношения ортогональности используется диаграммная техника, из-

ложенная в приложении A.

При помощи представления Меллина-Барнса (1.53) в разделе 1.7 доказана полнота построенного набора собственных функций

$$\int \mathcal{D}x \mu(x) \Psi_x(z) \overline{\Psi_x(w)} = \delta^2(z - w), \quad (1.59)$$

где $\delta^2(z)$ – дельта-функция в комплексной плоскости

$$\delta^2(z) = \delta(\operatorname{Re} z) \delta(\operatorname{Im} z). \quad (1.60)$$

Заметим, что мера интегрирования $\mu(x)$ в (1.59) согласуется с соотношением ортогональности (1.57).

1.3.2 n -частичные собственные функции

В случае спиновой цепочки из n узлов операторы $B(u)$, $\bar{B}(\bar{u})$ действуют на функциях n комплексных переменных z_1, \dots, z_n . Напомним, что их общие собственные функции задаются $2n$ спектральными переменными

$$\mathbf{x}_n = (x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n)$$

и определяются следующим образом

$$\begin{aligned} B_n(u) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) &= \left(u - \frac{1}{2}\right) (u^2 - x_1^2) \cdots (u^2 - x_n^2) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n), \\ \bar{B}_n(\bar{u}) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) &= \left(\bar{u} - \frac{1}{2}\right) (\bar{u}^2 - \bar{x}_1^2) \cdots (\bar{u}^2 - \bar{x}_n^2) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n), \end{aligned}$$

где $\mathbf{z}_n = (z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$.

В основе конструкции собственных функций лежат два основных строительных блока: оператор отражения (1.49) и интегральный оператор $\mathcal{R}_{kj}(x, \bar{x})$, действующий на функциях $\Psi(z_k, z_j)$

$$[\mathcal{R}_{kj}(x, \bar{x}) \Psi](z_k, z_j) = c(x - s) \int d^2w \frac{[z_k - z_j]^{1-2s}}{[z_k - w]^{1-s+x} [w - z_j]^{1-s-x}} \Psi(w, z_j),$$

где $x = \frac{h}{2} + i\nu$, $\bar{x} = -\frac{h}{2} + i\nu$, $h \in \mathbb{Z} + \sigma$, $\nu \in \mathbb{R}$, и константа $c(x - s)$ дается формулой (1.9) при $\alpha = x - s$. Этот оператор можно представить в более компактном виде ($z_{kj} = z_k - z_j$)

$$\mathcal{R}_{kj}(x, \bar{x}) = [z_{kj}]^{1-2s} [\hat{p}_k]^{x-s} [z_{kj}]^{s+x-1},$$

где оператор $[\hat{p}]^\alpha$ определен в (1.8). Для краткости мы по традиции не будем указывать

зависимость от антиголоморфного параметра: $\mathcal{R}_{kj}(x) \equiv \mathcal{R}_{kj}(x, \bar{x})$.

Собственные функции строятся индуктивно

$$\Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) = \Lambda_n(x_n) \Psi_{\mathbf{x}_{n-1}}(\mathbf{z}_{n-1})$$

при помощи *повышающих операторов*

$$\begin{aligned} \Lambda_k(x) &= \lambda_k(x) \mathcal{R}_{k k-1}(x) \mathcal{R}_{k-1 k-2}(x) \dots \mathcal{R}_{21}(x) \mathcal{K}_1(s, x) \mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{23}(x) \dots \mathcal{R}_{k-1 k}(x), \\ \Lambda_1(x) &= \lambda_1(x) \mathcal{K}_1(s, x), \end{aligned} \quad (1.61)$$

где оператор $\mathcal{K}_1(s, x)$ действует на пространстве функций переменной z_1 , и нормировочная константа имеет вид

$$\lambda_k(x) = \pi^{4k-3} [-2i\gamma]^{s-x} c^{2(k-1)} (-x-s) \Gamma(g-x). \quad (1.62)$$

Таким образом, собственная функция представляется в виде

$$\Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) = \Lambda_n(x_n) \Lambda_{n-1}(x_{n-1}) \dots \Lambda_1(x_1) \cdot 1. \quad (1.63)$$

То есть, она получается посредством действия произведения повышающих операторов на функцию, тождественно равную 1. Нормировочные константы (1.62) выбраны таким образом, чтобы функции были инвариантны относительно перестановок и отражений спектральных переменных [96]. То есть для любой перестановки $\tau \in \mathfrak{S}_n$ и любого отражения σ_k имеют место соотношения

$$\Psi_{\tau \mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) = \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n), \quad \Psi_{\sigma_k \mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) = \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n), \quad (1.64)$$

где $\tau \mathbf{x}_n = (x_{\tau(1)}, \bar{x}_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}, \bar{x}_{\tau(n)})$ и $\sigma_k \mathbf{x}_n = (x_1, \bar{x}_1, \dots, -x_k, -\bar{x}_k, \dots, x_n, \bar{x}_n)$. Напомним, что эти симметрии уже обсуждались в разделе 1.2.2.

Интегральный оператор $\Lambda_k(x_k)$ переводит функцию $\Psi_{\mathbf{x}_{k-1}}$ в $\Psi_{\mathbf{x}_k}$

$$\Psi_{\mathbf{x}_k}(\mathbf{z}_k) = [\Lambda_k(x_k) \Psi_{\mathbf{x}_{k-1}}](\mathbf{z}_k) = \int d^2 \mathbf{w}_{k-1} \Lambda(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_{k-1}; x_k) \Psi_{\mathbf{x}_{k-1}}(\mathbf{w}_{k-1}),$$

где $d^2 \mathbf{w}_{k-1} = \prod_{m=1}^{k-1} d^2 w_m$. При помощи явных формул для $\mathcal{R}_{kj}(x)$ and $\mathcal{K}_1(s, x)$ его ядро $\Lambda(\mathbf{z}_k, \mathbf{w}_{k-1}; x)$ можно выразить через k -кратный интеграл от произведения степенных функций (1.2). Таким образом, из рассматриваемой итеративной конструкции следует представление для собственной функции в терминах кратного интеграла от произведения степенных функций. На графическом языке, изложенном в приложении A, это представление в терминах фейнмановской диаграммы, где роль пропагатора играет степенная функция.

В работе [96] доказано, что собственные функции (1.63), задаваемые параметрами вида (1.35)

$$x_k = \frac{n_k}{2} + i\nu_k, \quad \bar{x}_k = -\frac{n_k}{2} + i\nu_k, \quad n_k \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \nu_k \in \mathbb{R}$$

образуют полный ортогональный набор в гильбертовом пространстве модели (1.15). Соотношение ортогональности имеет вид

$$\langle \Psi_{\mathbf{y}_n} | \Psi_{\mathbf{x}_n} \rangle = \mu^{-1}(\mathbf{x}_n) \delta^{(2)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n). \quad (1.65)$$

Скалярное произведение определено через кратный интеграл в (1.16)

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^2 \mathbf{z}_n \overline{\Phi(\mathbf{z}_n)} \Psi(\mathbf{z}_n),$$

а дельта-функция и коэффициент $\mu(\mathbf{x}_n)$ даются формулами

$$\delta^{(2)}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma_1, \dots, \sigma_n = \pm 1}} \delta^{(2)}(x_1 - \sigma_1 y_{\tau(1)}) \dots \delta^{(2)}(x_n - \sigma_n y_{\tau(n)}), \quad (1.66)$$

$$\mu(\mathbf{x}_n) = \frac{\prod_{k=1}^n |x_k|^2 \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i^2 - x_j^2|^2}{4^n \pi^{2n(n+1)} n! |\gamma|^{2n}} \quad (1.67)$$

Заметим, что дельта-функция (1.66) и коэффициент (1.67) обладают той же симметрией относительно перестановок и отражений спектральных переменных (1.64), что и собственные функции $\Psi_{\mathbf{y}_n}$, $\Psi_{\mathbf{x}_n}$.

Коэффициент $\mu(\mathbf{x}_n)$, возникающий в соотношении ортогональности, играет роль меры интегрирования в соотношении полноты

$$\int \mathcal{D}\mathbf{x}_n \mu(\mathbf{x}_n) \Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{z}_n) \overline{\Psi_{\mathbf{x}_n}(\mathbf{w}_n)} = \delta^2(z_1 - w_1) \dots \delta^2(z_n - w_n), \quad (1.68)$$

где $\int \mathcal{D}\mathbf{x}_n = \prod_{k=1}^n \int \mathcal{D}x_k$, интеграл по спектральной переменной введен в (1.55)

$$\int \mathcal{D}x_k = \sum_{n_k \in \mathbb{Z} + \sigma} \int_{\mathbb{R}} d\nu_k,$$

а $\delta^2(z)$ – дельта-функция в комплексной плоскости (1.60). В обозначениях Дирака формула (1.68) принимает компактный вид

$$\int \mathcal{D}\mathbf{x}_n \mu(\mathbf{x}_n) |\Psi_{\mathbf{x}_n}\rangle \langle \Psi_{\mathbf{x}_n}| = \mathbb{1},$$

где $\mathbb{1}$ – тождественный оператор в пространстве функций (1.15).

1.3.3 Обобщение уравнения отражения

В разделе 1.9 приведено доказательство общего уравнения отражения в случае группы симметрии $SL(2, \mathbb{C})$. Для записи этого соотношения удобно сделать замену переменных в операторе $\mathcal{K}(s, x)$ (1.49): $x \rightarrow s+u$, $s \rightarrow s-u$. В результате такой замены оператор отражения принимает вид

$$\mathbb{K}(u, s) = [z + \gamma]^{u-s+g} [z - \gamma]^{u-s+1-g} [\hat{p}]^{2u} [z + \gamma]^{u+s-g} [z - \gamma]^{u+s+g-1}.$$

Общее уравнение отражения имеет вид

$$\mathbb{R}_{12}(u-v) \mathbb{K}_1(u, s_1) \mathbb{R}_{12}(u+v) \mathbb{K}_2(v, s_2) = \mathbb{K}_2(v, s_2) \mathbb{R}_{12}(u+v) \mathbb{K}_1(u, s_1) \mathbb{R}_{12}(u-v). \quad (1.69)$$

Оператор $\mathbb{R}_{12}(u)$ действует в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$ двух представлений $SL(2, \mathbb{C})$ основной серии со спинами (s_1, \bar{s}_1) и (s_2, \bar{s}_2) . Он зависит от спектральных параметров (u, \bar{u}) , таких что $u - \bar{u} \in \mathbb{Z}$. Этот оператор является общим решением уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ [60, 61]. Его можно представить в компактном виде через интегральный оператор (1.8)

$$\mathbb{R}_{12}(u) = \mathbb{P}_{12} [z_{12}]^{u+1-s_1-s_2} [\hat{p}_1]^{u+s_2-s_1} [\hat{p}_2]^{u+s_1-s_2} [z_{12}]^{u+s_1+s_2-1},$$

где \mathbb{P}_{12} – оператор перестановки

$$\mathbb{P}_{12} \Psi(z_1, z_2) = \Psi(z_2, z_1),$$

а z_1 и z_2 – переменные функций в пространствах V_1 и V_2 . Оператор отражения $\mathbb{K}_1(u, s_1)$ определен в пространстве V_1 представления спина s_1 , а $\mathbb{K}_2(v, s_2)$ действует в пространстве V_2 представления спина s_2 .

Если в качестве одного или обоих пространств V_1 и V_2 взять двумерное представление, то \mathbb{R} -оператор вырождается в L -оператор (1.17) или R -матрицу Янга (1.21) [62]. Аналогичным образом, \mathbb{K} -оператор в двумерном случае вырождается в K -матрицу отражения (1.23). В соответствии с этим, уравнения (1.20) и (1.44) являются частными случаями уравнения отражения (1.69). В разделе 1.9 приведена соответствующая иерархия уравнений отражения и соотношений Янга-Бакстера.

1.4 Вывод формулы для оператора отражения

Оператор $\mathcal{K}(s, x)$ действует на функциях одной комплексной переменной $\Psi(z) \equiv \Psi(z, \bar{z})$. Он определяется двумя уравнениями: голоморфным уравнением отражения (1.44)

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(s, x) L(u + x - 1, u - s) K(u) L(u + s - 1, u - x) \\ & = L(u + s - 1, u - x) K(u) L(u + x - 1, u - s) \mathcal{K}(s, x) \end{aligned} \quad (1.70)$$

и его антиголоморфным аналогом (1.45). K -матрица и L -оператор $L(u_1, u_2)$ представляют собой матрицы 2×2 , они даются выражениями (1.23) и (1.18). Матричное равенство (1.70) эквивалентно четырем уравнениям на матричные элементы. Каждый матричный элемент, в свою очередь, является многочленом от u . Поэтому, для того, чтобы получить уравнения на оператор $\mathcal{K}(s, x)$, не зависящий от u , нужно приравнять коэффициенты полиномов из обеих частей равенства матричных элементов.

Чтобы вывести эту уравнения, перепишем L -операторы в (1.70) в следующем виде

$$\begin{aligned} L(u + x - 1, u - s) &= \begin{pmatrix} u + \frac{x-s}{2} + J & J_- \\ J_+ & u + \frac{x-s}{2} - J \end{pmatrix}, \\ L(u + s - 1, u - x) &= \begin{pmatrix} u - \frac{x-s}{2} + J & J_- \\ J_+ & u - \frac{x-s}{2} - J \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где J, J_{\pm} – генераторы представления алгебры Ли $sl(2)$ спина $(s + x)/2$

$$J = z\partial_z + \frac{s+x}{2}, \quad J_- = -\partial_z, \quad J_+ = z^2\partial_z + (s+x)z.$$

Для них выполняются стандартные коммутационные соотношения

$$[J_+, J_-] = 2J, \quad [J, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (1.71)$$

Заметим также, что оператор Казимира

$$C = 2J^2 + J_+J_- + J_-J_+ = \frac{(s+x)(s+x-2)}{2} \quad (1.72)$$

симметричен по s и x .

С другой стороны, произведения матриц левой и правой частях уравнения (1.70) отличаются лишь перестановкой параметров s и x . При помощи коммутационных соотношений (1.71) и формулы для оператора Казимира (1.72) несложно проверить, что все матричные элементы в (1.70) пропорциональны $(u - 1/2)$, с точностью до констант, симметричных по s и x .

Разделим каждый матричный элемент в (1.70) на $(u - 1/2)$ и приравняем коэффициенты

при степенях u в обеих частях получившегося равенства. В результате (1.70) сводится к трем соотношениям

$$\mathcal{K} N = N \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} H^x = H^s \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} I^{x,s} = I^{s,x} \mathcal{K},$$

где введены следующие обозначения

$$N = \frac{1}{2\gamma}(J_+ + \gamma^2 J_-), \quad (1.73)$$

$$H^s = \left(J + \frac{s-x}{2}\right)^2 - \gamma^2 J_-^2 - 2\gamma\left(g - \frac{1}{2}\right)J_-,$$

$$I^{s,x} = JJ_+ + \gamma^2 J_- J + \frac{s-x}{2}(J_+ - \gamma^2 J_-) + 2\gamma\left(g - \frac{1}{2}\right)J.$$

В купе с аналогичными антиголоморфными соотношениями, следующими из уравнения отражения (1.45), получаем полную систему уравнений на \mathcal{K} -оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{K} N &= N \mathcal{K}, & \mathcal{K} H^x &= H^s \mathcal{K}, & \mathcal{K} I^{x,s} &= I^{s,x} \mathcal{K}, \\ \mathcal{K} \bar{N} &= \bar{N} \mathcal{K}, & \mathcal{K} \bar{H}^{\bar{x}} &= \bar{H}^{\bar{s}} \mathcal{K}, & \mathcal{K} \bar{I}^{\bar{x},\bar{s}} &= \bar{I}^{\bar{s},\bar{x}} \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

где операторы (1.73) можно переписать в виде

$$N = (z^2 - \gamma^2)\partial_z + (s+x)z,$$

$$H^s = (z^2 - \gamma^2)\partial_z^2 + (2s+1)z\partial_z + 2\gamma\left(g - \frac{1}{2}\right)\partial_z + s^2,$$

$$\begin{aligned} I^{s,x} &= z(z^2 - \gamma^2)\partial_z^2 + (2s+1)z^2\partial_z + x(z^2 - \gamma^2)\partial_z \\ &\quad + 2\gamma\left(g - \frac{1}{2}\right)z\partial_z + s(s+x)z + N + \gamma\left(g - \frac{1}{2}\right)(s+x), \end{aligned}$$

и аналогичный вид имеют их антиголоморфные копии $\bar{N}, \bar{H}^{\bar{s}}, \bar{I}^{\bar{s},\bar{x}}$. Для того, чтобы решить эту систему, рассмотрим следующий анзац для оператора отражения

$$\mathcal{K}(s, x) = [z + \gamma]^{g-s} [z - \gamma]^{1-s-g} W(s, x) [z + \gamma]^{x-g} [z - \gamma]^{x+g-1}, \quad (1.75)$$

где $W(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ – неизвестный оператор. Правая часть (1.75) представляет собой композицию $W(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ и операторов умножения на степенные функции вида (1.2). Мотивация анзаца (1.75) дана в конце текущего раздела.

Подставляя (1.75) в уравнения (1.74) получаем эквивалентную систему

$$\begin{aligned} W \mathcal{N}^{x,s} &= \mathcal{N}^{s,x} W, & W \mathcal{H}^{x,s} &= \mathcal{H}^{s,x} W, & W \mathcal{I}^{x,s} &= \mathcal{I}^{s,x} W, \\ W \bar{\mathcal{N}}^{\bar{x},\bar{s}} &= \bar{\mathcal{N}}^{\bar{s},\bar{x}} W, & W \bar{\mathcal{H}}^{\bar{x},\bar{s}} &= \bar{\mathcal{H}}^{\bar{s},\bar{x}} W, & W \bar{\mathcal{I}}^{\bar{x},\bar{s}} &= \bar{\mathcal{I}}^{\bar{s},\bar{x}} W, \end{aligned} \quad (1.76)$$

где для $A^{s,x} = N, H^s, I^{s,x}$ оператор $\mathcal{A}^{s,x}$ отличается на преобразование подобия

$$\mathcal{A}^{s,x} = [z + \gamma]^{s-g} [z - \gamma]^{s+g-1} A^{s,x} [z + \gamma]^{g-s} [z - \gamma]^{1-s-g},$$

и аналогично для антиголоморфных операторов. Теперь цель – решить систему (1.76) на $W(\mathbf{s}, \mathbf{x})$.

Введем $SL(2, \mathbb{C})$ -генераторы

$$\begin{aligned} S^{s,x} &= z\partial_z + \ell, & S_-^{s,x} &= -\partial_z, & S_+^{s,x} &= z^2\partial_z + 2\ell z, \\ \bar{S}^{s,x} &= \bar{z}\partial_{\bar{z}} + \bar{\ell}, & \bar{S}_-^{s,x} &= -\partial_{\bar{z}}, & \bar{S}_+^{s,x} &= \bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + 2\bar{\ell}\bar{z}, \end{aligned} \quad (1.77)$$

соответствующие паре спинов

$$\ell = \frac{1+x-s}{2}, \quad \bar{\ell} = \frac{1+\bar{x}-\bar{s}}{2}.$$

Найдем, как преобразование подобия действует на дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} & [z + \gamma]^{s-g} [z - \gamma]^{s+g-1} \partial_z [z + \gamma]^{g-s} [z - \gamma]^{1-s-g} \\ &= \partial_z + \frac{(1-2s)z - 2i\alpha}{z^2 - \gamma^2}, \\ & [z + \gamma]^{s-g} [z - \gamma]^{s+g-1} \partial_z^2 [z + \gamma]^{g-s} [z - \gamma]^{1-s-g} \\ &= \partial_z^2 + 2 \frac{(1-2s)z - 2i\alpha}{z^2 - \gamma^2} \partial_z + \frac{(2s-1)(2sz^2 + \gamma^2) - 4\alpha^2 + 8siaz}{(z^2 - \gamma^2)^2}. \end{aligned}$$

Используя две последние формулы, выразим операторы в уравнениях (1.76) через введенные генераторы (1.77)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{s,x} &= S_+^{s,x} + \gamma^2 S_-^{s,x} - 2\gamma \left(g - \frac{1}{2} \right), \\ \mathcal{H}^{s,x} &= -S_+^{s,x} S_-^{s,x} + (2-s-x) S^{s,x} + 2\gamma \left(g - \frac{1}{2} \right) S_-^{s,x} - \gamma^2 (S_-^{s,x})^2 + \frac{s^2 + x^2 - s - x}{2}, \\ \mathcal{I}^{s,x} &= S_+^{s,x} S^{s,x} + \gamma^2 S^{s,x} S_-^{s,x} + \frac{3-s-x}{2} S_+^{s,x} \\ &+ \frac{1+s+x}{2} \gamma^2 S_-^{s,x} - 2\gamma \left(g - \frac{1}{2} \right) S^{s,x} - \gamma \left(g - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Формулы для $\bar{\mathcal{N}}^{\bar{s},\bar{x}}$, $\bar{\mathcal{H}}^{\bar{s},\bar{x}}$ и $\bar{\mathcal{I}}^{\bar{s},\bar{x}}$ имеют аналогичный вид, нужно лишь заменить голоморфные генераторы и параметры на антиголоморфные.

Так как коэффициенты при генераторах $S^{s,x}, S_{\pm}^{s,x}$ в (1.78) симметричны по перестановкам s и x , то системе (1.76) удовлетворяет оператор W , сплетающий генераторы $S^{s,x}, S_{\pm}^{s,x}$ и

$S^{x,s}, S_{\pm}^{x,s}$ (а также их антиголоморфные аналоги)

$$\begin{aligned} W S^{x,s} &= S^{s,x} W, & W S_{\pm}^{x,s} &= S_{\pm}^{s,x} W, \\ W \bar{S}^{\bar{x},\bar{s}} &= \bar{S}^{\bar{s},\bar{x}} W, & W \bar{S}_{\pm}^{\bar{x},\bar{s}} &= \bar{S}_{\pm}^{\bar{s},\bar{x}} W. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Перестановка $s \leftrightarrow x$ эквивалентна преобразованию спина $\ell \rightarrow 1-\ell$, значит $S^{s,x}, S_{\pm}^{s,x}$ и $S^{x,s}, S_{\pm}^{x,s}$ – это генераторы представлений основной серии, задаваемых параметрами $(\ell, \bar{\ell})$ и $(1-\ell, 1-\bar{\ell})$, которые, как обсуждалось в разделе 1.1, являются эквивалентными. Значит, решением системы (1.79) является оператор вида (1.12), сплетающий эти эквивалентные представления

$$W = [\hat{p}]^{2\ell-1} = [\hat{p}]^{x-s}.$$

Таким образом, оператор отражения имеет вид

$$\mathcal{K}(s, x) = [z + \gamma]^{g-s} [z - \gamma]^{1-s-g} [\hat{p}]^{x-s} [z + \gamma]^{x-g} [z - \gamma]^{x+g-1}. \quad (1.80)$$

В соответствии с определением (1.8) оператора $[\hat{p}]^{\alpha}$, действие \mathcal{K} -оператора на функцию $\Psi(z)$ дается следующей формулой

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(s, x) \Psi)(z) &= \frac{[i]^{x-s} \Gamma(x-s+1)}{\pi} [z + \gamma]^{g-s} [z - \gamma]^{1-s-g} \\ &\times \int d^2 w \frac{[w + \gamma]^{x-g} [w - \gamma]^{x+g-1}}{[z - w]^{x-s+1}} \Psi(w), \end{aligned} \quad (1.81)$$

Теперь объясним мотивацию анзаца (1.75) для оператора отражения. В случае спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{R})$ ВС-типа для оператора отражения получена формула (2.29) ($\gamma = i\beta$)

$$\mathcal{K}(s, x) = (2\gamma)^{s-x} (z + \gamma)^{g-s} \frac{\Gamma((z - \gamma)\partial_z + x + g)}{\Gamma((z - \gamma)\partial_z + s + g)} (z + \gamma)^{x-g}. \quad (1.82)$$

Комплексную степень оператора дифференцирования по z можно ввести формально следующим образом [101]

$$\partial_z^a = \frac{1}{(z - \gamma)^a} \frac{\Gamma((z - \gamma)\partial_z + 1)}{\Gamma((z - \gamma)\partial_z + 1 - a)}.$$

Этот оператор имитирует свойства обычной производной [101]. При помощи коммутационного соотношения

$$(z - \gamma) \partial_z (z - \gamma)^b = (z - \gamma)^b ((z - \gamma)\partial_z + b)$$

выражение (1.82) можно привести к виду

$$\mathcal{K}(s, x) = (2\gamma)^{s-x} (z + \gamma)^{g-s} (z - \gamma)^{1-s-g} \partial_z^{x-s} (z - \gamma)^{x+g-1} (z + \gamma)^{x-g}. \quad (1.83)$$

Если последнюю формулу переписать в терминах аналогичных объектов для представлений $SL(2, \mathbb{C})$ – псевдодифференциального оператора $[\hat{p}]^{\alpha} = [-i\partial_z]^{\alpha}$ и степенной функции (1.2), то, с точностью до нормировки, получается формула (1.80) для оператора отражения в слу-

чае BC-цепочки $SL(2, \mathbb{C})$.

Для $SL(2, \mathbb{R})$ -цепочки $\gamma = i\beta \in i\mathbb{R}_{>0}$, и Гильбертово пространство модели состоит из функций, аналитических в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$. В этом случае аналогичный анзац (1.83) для оператора отражения плохо определен, так как функции вида $(z - \gamma)^a$ не являются однозначными в верхней полуплоскости.

1.5 Индуктивное построение собственных функций B -оператора

В этом разделе строятся общие собственные функции (1.34) операторов $B_n(u)$ и $\bar{B}_n(\bar{u})$ для произвольного числа узлов цепочки n

$$\begin{aligned} B_n(u) \Psi_{\mathbf{x}_n}(z_n) &= \left(u - \frac{1}{2}\right) (u^2 - x_1^2) \cdots (u^2 - x_n^2) \Psi_{\mathbf{x}_n}(z_n), \\ \bar{B}_n(\bar{u}) \Psi_{\mathbf{x}_n}(z_n) &= \left(\bar{u} - \frac{1}{2}\right) (\bar{u}^2 - \bar{x}_1^2) \cdots (\bar{u}^2 - \bar{x}_n^2) \Psi_{\mathbf{x}_n}(z_n). \end{aligned} \quad (1.84)$$

Для собственных функций получено индуктивное выражение

$$\Psi_{\mathbf{x}_n}(z_n) = \Psi_{x_1, \dots, x_n}(z_1, \dots, z_n) = \Lambda_n(x_n) \Lambda_{n-1}(x_{n-1}) \cdots \Lambda_1(x_1) \cdot 1, \quad (1.85)$$

где для $k = 2, 3 \dots$ повышающий оператор $\Lambda_k(x)$ выражается следующим образом в терминах \mathcal{R} -операторов

$$\Lambda_k(x) = \lambda_k(x) \mathcal{R}_{k k-1}(x) \mathcal{R}_{k-1 k-2}(x) \cdots \mathcal{R}_{21}(x) \mathcal{K}_1(s, x) \mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{23}(x) \cdots \mathcal{R}_{k-1 k}(x), \quad (1.86)$$

а для $k = 1$ совпадает с оператором отражения (1.80): $\Lambda_1(x) = \lambda_1(x) \mathcal{K}_1(s, x)$. Нормировочный множитель $\lambda_k(x)$ определен в (1.62).

Оператор $\mathcal{R}_{kj}(x)$ представляет собой интегральный оператор, действующий на функциях $\Psi(z_k, z_j)$

$$[\mathcal{R}_{kj}(x, \bar{x}) \Psi](z_k, z_j) = c(x - s) \int d^2 w \frac{[z_k - z_j]^{1-2s}}{[z_k - w]^{1-s+x} [w - z_j]^{1-s-x}} \Psi(w, z_j), \quad (1.87)$$

где $x = \frac{h}{2} + i\nu$, $\bar{x} = -\frac{h}{2} + i\nu$, $h \in \mathbb{Z} + \sigma$, $\nu \in \mathbb{R}$, и множитель $c(x - s)$ определен в (1.9). В алгебраической форме этот оператор можно записать в терминах оператора (1.8)

$$\mathcal{R}_{kj}(x, \bar{x}) = [z_{kj}]^{1-2s} [\hat{p}_k]^{x-s} [z_{kj}]^{s+x-1},$$

где $z_{kj} = z_k - z_j$.

Функция $\Psi_{\mathbf{x}_n}(z_n)$ (1.85) является собственной для оператора $B_n(u)$ благодаря следую-

щему коммутационному соотношению между B - и Λ -операторами

$$B_n(u) \Lambda_n(x) \Psi(z_1 \dots z_{n-1}) = (u^2 - x^2) \Lambda_n(x) B_{n-1}(u) \Psi(z_1 \dots z_{n-1}), \quad (1.88)$$

которое выполняется на пространстве функций $\Psi(z_1 \dots z_{n-1})$, не зависящих от n -ой переменной. Действуя оператором $B_n(u)$ на Ψ_{x_n} и последовательно применяя (1.88)

$$\begin{aligned} & B_n(u) \Lambda_n(x_n) \Lambda_{n-1}(x_{n-1}) \cdots \Lambda_1(x_1) \cdot 1 \\ &= (u^2 - x_n^2) \Lambda_n(x_n) B_{n-1}(u) \Lambda_{n-1}(x_{n-1}) \Lambda_{n-2}(x_{n-2}) \cdots \Lambda_1(x_1) \cdot 1 \\ &= (u^2 - x_n^2) (u^2 - x_{n-1}^2) \Lambda_n(x_n) \Lambda_{n-1}(x_{n-1}) B_{n-2}(u) \Lambda_{n-2}(x_{n-2}) \cdots \Lambda_1(x_1) \cdot 1 = \dots \\ &= (u^2 - x_n^2) \dots (u^2 - x_2^2) \Lambda_n(x_n) \Lambda_{n-1}(x_{n-1}) \cdots \Lambda_2(x_2) B_1(u) \Lambda_1(x_1) \cdot 1, \end{aligned} \quad (1.89)$$

всё можно свести к уравнению на собственную функцию для 1 узла, которая, согласно разделу 1.3.1, имеет вид $\Lambda_1(x_1) \cdot 1$

$$B_1(u) \Lambda_1(x_1) \cdot 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right) (u^2 - x_1^2) \Lambda_1(x_1) \cdot 1.$$

Из (1.89) мы получаем желаемое соотношение (1.84) на собственные значения оператора $B(u)$ для функции $\Psi_{x_n}(z_n)$ (1.85). Отметим, что для оператора $\bar{B}_n(\bar{u})$ выполняется точный аналог формулы (1.88) (и его доказательство копирует вывод (1.88)), из него таким же образом получается второе уравнение в (1.84).

Таким образом, остается доказать формулу (1.88). Для этого рассмотрим соотношение, через которое определяется \mathcal{R} -оператор [60]

$$\mathcal{R}_{12}(x) L_1(u_1, u_2) L_2(u_1, u - x) = L_1(u_1, u - x) L_2(u_1, u_2) \mathcal{R}_{12}(x), \quad (1.90)$$

где параметризация L -оператора $L(u_1, u_2)$ введена в (1.18). Как видно из (1.90), \mathcal{R} -оператор переставляет аргументы в произведении двух голоморфных L -операторов. Также, он удовлетворяет аналогичному соотношению с их антиголоморфными копиями. Оператор $\mathcal{R}_{ij}(x)$ связан с общим $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантным решением (1.125) уравнения Янга-Бакстера [60, 61].

Определяющее соотношение (1.90) может быть переписано в эквивалентном виде

$$\mathcal{R}_{12}(x) L_2(u + x - 1, u_2) L_1(u_1, u_2) = L_2(u_1, u_2) L_1(u + x - 1, u_2) \mathcal{R}_{12}(x). \quad (1.91)$$

Уравнение (1.91) следующим образом выводится из (1.90). Во-первых, равенство (1.90) нужно обратить

$$L_2^{-1}(u_1, u - x) L_1^{-1}(u_1, u_2) \mathcal{R}_{12}^{-1}(x) = \mathcal{R}_{12}^{-1}(x) L_2^{-1}(u_1, u_2) L_1^{-1}(u_1, u - x).$$

Далее, умножая обе части последнего выражения слева и справа на $\mathcal{R}_{12}(x)$, а также используя

формулу обращения для L -оператора

$$L^{-1}(u_1, u_2) = -(u_1 u_2)^{-1} L(-u_2, -u_1),$$

которую легко вывести из факторизованного выражения (1.18), получаем

$$\mathcal{R}_{12}(x) L_2(x - u, -u_1) L_1(-u_2, -u_1) = L_2(-u_2, -u_1) L_1(x - u, -u_1) \mathcal{R}_{12}(x).$$

Формула (1.91) получается из последнего соотношения заменой спектрального параметра $u \rightarrow 1 - u$, так как при этом $u_2 = u - s$ заменяется на $-u_1 = 1 - u - s$, а $u_1 = u - 1 + s$ на $-u_2 = -u + s$. Эта замена не влияет на \mathcal{R} -оператор, так как он не зависит от спектрального параметра.

Так как B -оператор является элементом матрицы монодромии, то идея доказательства (1.88) состоит в том, чтобы вывести коммутационное соотношение между повышающим оператором (1.86) и произведением L -операторов и K -матрицы, которое почти совпадает с матрицей монодромии (1.19), и отличается от нее лишь видом L -операторов, соответствующих n -му пространству. Выделив в получившемся матричном соотношении равенство матричных элементов (1, 2) и подействовав им на функцию $\Psi(z_1 \dots z_{n-1})$, не зависящую от z_n , мы получим нужную формулу (1.88).

Заметим, что повышающий оператор (1.86) представляет собой произведение трех различных блоков, причем структура этого произведения повторяет на структуру матрицы монодромии. Первый блок – это произведение \mathcal{R} -операторов $\mathcal{R}_{12}(x) \dots \mathcal{R}_{k-1 k}(x)$, второй блок – оператор отражения $\mathcal{K}_1(s, x)$, и последний блок – произведение \mathcal{R} -операторов в обратном порядке $\mathcal{R}_{k k-1}(x) \dots \mathcal{R}_{21}(x)$. Коммутационное соотношение мы будем выводить поэтапно, в соответствии с разбиением повышающего оператора на эти блоки.

Из соотношения (1.90) следует, что при коммутации оператора $\mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{23}(x) \dots \mathcal{R}_{n-1 n}(x)$ с произведением $L_1(u_1, u_2) \dots L_{n-1}(u_1, u_2) L_n(u_1, u - x)$ параметр $u - x$ переносится из крайнего правого L -оператора в крайний левый

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{23}(x) \dots \mathcal{R}_{n-1 n}(x) L_1(u_1, u_2) \dots L_{n-1}(u_1, u_2) L_n(u_1, u - x) = \\ & = L_1(u_1, u - x) L_2(u_1, u_2) \dots L_n(u_1, u_2) \mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{23}(x) \dots \mathcal{R}_{n-1 n}(x). \end{aligned}$$

В свою очередь, из (1.91) следует, что при коммутации того же произведения \mathcal{R} -операторов с $L_n(u + x - 1, u_2) L_{n-1}(u_1, u_2) \dots L_1(u_1, u_2)$ параметр $u + x - 1$ переносится из крайнего левого аргумента в крайний правый

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{23}(x) \dots \mathcal{R}_{n-1 n}(x) L_n(u + x - 1, u_2) L_{n-1}(u_1, u_2) \dots L_1(u_1, u_2) = \\ & = L_n(u_1, u_2) L_{n-1}(u_1, u_2) \dots L_1(u + x - 1, u_2) \mathcal{R}_{12}(x) \mathcal{R}_{23}(x) \dots \mathcal{R}_{n-1 n}(x). \end{aligned}$$

Следовательно, при коммутации рассматриваемого произведения \mathcal{R} -операторов со всей матрицей монодромии параметры $u + x - 1$ и $u - x$ переносятся из крайнего левого и крайнего

правого аргумента в центр

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{12}(x) \cdots \mathcal{R}_{n-1n}(x) L_n(u+x-1, u_2) \cdots L_1(u_1, u_2) K(u) L_1(u_1, u_2) \cdots L_n(u_1, u-x) \\ & = L_n(u_1, u_2) \cdots L_1(u+x-1, u_2) K(u) L_1(u_1, u-x) \cdots L_n(u_1, u_2) \mathcal{R}_{12}(x) \cdots \mathcal{R}_{n-1n}(x) \end{aligned}$$

На следующем шаге посредством коммутации с \mathcal{K} -оператором происходит перестановка L -операторов в центре

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_1(s, x) L_1(u+x-1, u_2) K(u) L_1(u_1, u-x) \\ & = L_1(u_1, u-x) K(u) L_1(u+x-1, u_2) \mathcal{K}_1(s, x), \end{aligned}$$

при этом используется уравнение отражения (1.44). Далее, в результате коммутации со вторым произведением \mathcal{R} -операторов $\mathcal{R}_{nn-1}(x)\mathcal{R}_{n-1n-2}(x) \cdots \mathcal{R}_{21}(x)$ параметры $u+x-1$ и $u-x$ переносятся из центра произведения в крайний правый и крайний левый аргументы

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{nn-1}(x) \cdots \mathcal{R}_{21}(x) L_n(u_1, u_2) \cdots L_1(u_1, u-x) K(u) L_1(u+x-1, u_2) \cdots L_n(u_1, u_2) \\ & = L_n(u_1, u-x) \cdots L_1(u_1, u_2) K(u) L_1(u_1, u_2) \cdots L_n(u+x-1, u_2) \mathcal{R}_{nn-1}(x) \cdots \mathcal{R}_{21}(x). \end{aligned}$$

Таким образом, получено коммутационное соотношение между повышающим оператором

$$\Lambda_n(x) = \mathcal{R}_{nn-1}(x)\mathcal{R}_{n-1n-2}(x) \cdots \mathcal{R}_{21}(x)\mathcal{K}_1(s, x) \mathcal{R}_{12}(x)\mathcal{R}_{23}(x) \cdots \mathcal{R}_{n-1n}(x)$$

и произведением L -операторов и K -матрицы

$$\begin{aligned} & \Lambda_n(x) L_n(u+x-1, u_2) \cdots L_1(u_1, u_2) K(u) L_1(u_1, u_2) \cdots L_n(u_1, u-x) = \\ & = L_n(u_1, u-x) \cdots L_1(u_1, u_2) K(u) L_1(u_1, u_2) \cdots L_n(u+x-1, u_2) \Lambda_n(x). \end{aligned}$$

В терминах матрицы монодромии

$$T_n(u) = L_n(u) \cdots L_1(u) K(u) L_1(u) \cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} A_n(u) & B_n(u) \\ C_n(u) & D_n(u) \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

его можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} & \Lambda_n(x) L_n(u+x-1, u_2) T_{n-1}(u) L_n(u_1, u-x) = \\ & = L_n(u_1, u-x) T_{n-1}(u) L_n(u+x-1, u_2) \Lambda_n(x) \end{aligned}$$

Рассматривая элемент (1, 2) последнего матричного равенства, находим

$$\Lambda_n(x) \begin{pmatrix} u+x+z_n\partial_n & -\partial_n \end{pmatrix} T_{n-1}(u) \begin{pmatrix} -\partial_n \\ u-x-z_n\partial_n \end{pmatrix} = B_n(u) \Lambda_n(x)$$

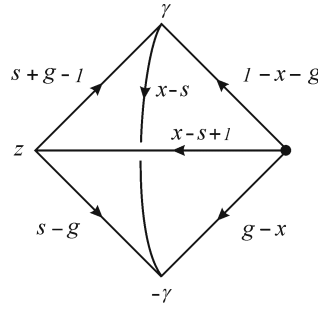


Рисунок 1.1 – Диаграммное представление собственной функции $\Psi_x(z)$

Если подействовать этим операторным соотношением на функцию $\Psi(z_1 \dots z_{n-1})$, не зависящую от z_n , получается уравнение

$$\Lambda_n(x) \begin{pmatrix} u+x & 0 \\ u-x & \end{pmatrix} T_{n-1}(u) \begin{pmatrix} 0 \\ u-x \end{pmatrix} \Psi(z_1 \dots z_{n-1}) = B_n(u) \Lambda_n(x) \Psi(z_1 \dots z_{n-1}).$$

Чтобы получить нужное соотношение (1.88), остается подставить $T_{n-1}(u)$ в явном виде (1.92) и перемножить три матрицы в левой части.

1.6 Интегральные представления для одночастичных собственных функций

1.6.1 Диаграммные представления

В этом разделе будут введены два интегральных представления для собственных функций в случае цепочки из 1 узла. При помощи графической техники, изложенной в приложении А, оба интегральных выражения могут быть представлены через диаграммы.

Как показано в разделе 1.3.1, собственные функции (1.34) для цепочки из 1 узла ($n = 1$) строятся при помощи оператора отражения (1.49)

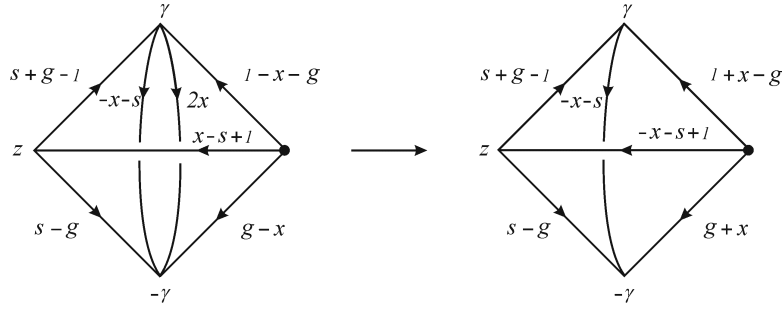
$$\Psi_x(z) = \pi [-2i\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x) \mathcal{K}(s, x) \cdot 1. \quad (1.93)$$

Ниже мы покажем, что в принятой нормировке собственные функции инвариантны относительно отражения спектральной переменной $x \rightarrow -x$.

Действие оператора отражения дается формулой (1.81)

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}(s, x) \Psi)(z) &= \frac{[i]^{x-s} \Gamma(x-s+1)}{\pi} [z+\gamma]^{g-s} [z-\gamma]^{1-s-g} \\ &\times \int d^2w \frac{[w+\gamma]^{x-g} [w-\gamma]^{x+g-1}}{[z-w]^{x-s+1}} \Psi(w). \end{aligned}$$

Используя ее в (1.93), получаем первое интегральное представление для собственной функ-

Рисунок 1.2 – Симметрия $\Psi_x(z)$ относительно замены $x \rightarrow -x$

ции

$$\begin{aligned} \Psi_x(z) &= [2\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x, 1-s+x) \\ &\times \int \frac{d^2w}{[z+\gamma]^{s-g} [z-\gamma]^{s+g-1} [w-z]^{x-s+1} [w+\gamma]^{g-x} [w-\gamma]^{1-x-g}}, \end{aligned} \quad (1.94)$$

где для произведения гамма-функций используется компактное обозначение [A.1](#). С точностью до нормировочного множителя перед интегралом собственную функцию можно представить при помощи диаграммы [1.1](#).

Теперь докажем при помощи графической техники симметрию относительно отражения спектральной переменной $x \rightarrow -x$

$$\Psi_x(z) = \Psi_{-x}(z). \quad (1.95)$$

Разделив на диаграмме с [Рис. 1.1](#) вертикальный пропагатор, соответствующий множителю $[2\gamma]^{s-x}$, на две части:

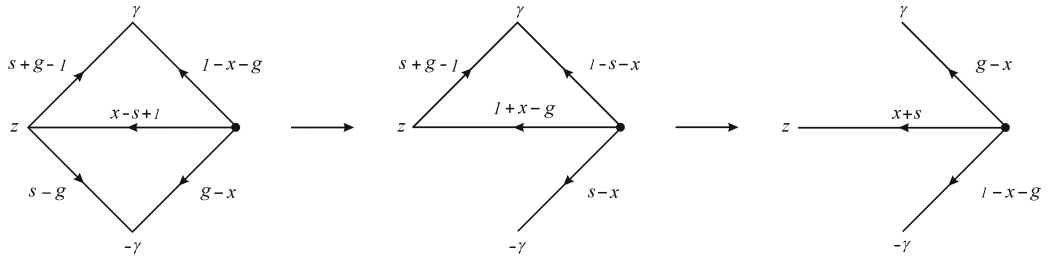
$$[2\gamma]^{s-x} = [2\gamma]^{s+x} [2\gamma]^{-2x},$$

получаем левую диаграмму на [Рис. 1.2](#). Используя редуцированное кросс-соотношение, изображенное на [Рис. A.4](#), получаем вторую диаграмму на [Рис. 1.2](#). С точностью до нормировочного коэффициента, эта диаграмма соответствует функции $\Psi_{-x}(z)$. Восстанавливая коэффициент из [\(1.94\)](#) и учитывая гамма-множители, возникающие из редуцированного кросс-соотношения [\(A.9\)](#), получаем нужную формулу [\(1.95\)](#).

При помощи диаграммной техники из [\(1.94\)](#) можно вывести еще одно интегральное представление для собственных функций. Для этого нужно два раза воспользоваться редуцированным кросс-соотношением [\(A.9\)](#). В результате получаем

$$\begin{aligned} \Psi_x(z) &= [2\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x, 1-s+x) \\ &\times \int \frac{d^2w}{[w-z]^{x+s} [w-\gamma]^{g-x} [w+\gamma]^{1-x-g}}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Соответствующие графические преобразования показаны на [Рис. 1.3](#).

Рисунок 1.3 – Вывод второго интегрального представления для $\Psi_x(z)$

1.6.2 Выражение через гипергеометрическую функцию

Собственную функцию для цепочки из одного узла (1.96) можно выразить через гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел [57, 100]

$${}_2F_1^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} a|\bar{a}, b|\bar{b} \\ c|\bar{c} \end{matrix} \middle| v \right] = \frac{\Gamma(c)}{\pi \Gamma(b, c-b)} \int d^2t \frac{[t]^{b-1} [1-t]^{c-b-1}}{[1-tv]^a}, \quad (1.97)$$

где $a - \bar{a}, b - \bar{b}, c - \bar{c} \in \mathbb{Z}$. Она удовлетворяет паре гипергеометрических дифференциальных уравнений [100]

$$\left(v(1-v)\partial_v^2 + [c - (a+b+1)v]\partial_v - ab \right) F(v) = 0, \quad (1.98)$$

$$\left(\bar{v}(1-\bar{v})\partial_{\bar{v}}^2 + [\bar{c} - (\bar{a} + \bar{b} + 1)\bar{v}]\partial_{\bar{v}} - \bar{a}\bar{b} \right) F(v) = 0, \quad (1.99)$$

где $\bar{v} \equiv v^*$ – комплексное сопряжение v . Заметим, что при замене переменной

$$v = \frac{1}{2} - \frac{z}{2\gamma} \quad (1.100)$$

спектральная задача для оператора H^s (1.28)

$$\left((z^2 - \gamma^2)\partial_z^2 + (2s+1)z\partial_z + 2i\alpha\partial_z + s^2 \right) \Psi_x(z) = x^2 \Psi_x(z)$$

переходит в гипергеометрическое уравнение (1.98) с параметрами

$$a = s+x, \quad b = s-x, \quad c = s+g.$$

Так как $\gamma^* = \bar{\gamma}$, то при той же замене (1.100) спектральная задача для оператора $\bar{H}^{\bar{s}}$ (1.29) переходит в уравнение (1.99) с параметрами

$$\bar{a} = \bar{s} + \bar{x}, \quad \bar{b} = \bar{s} - \bar{x}, \quad \bar{c} = \bar{s} + \bar{g}.$$

Соответственно, если использовать такую замену переменной интегрирования во втором

интегральном представлении для собственных функций (1.96)

$$t = -\frac{2\gamma}{w - \gamma}, \quad d^2w = \frac{[2\gamma]}{[t]^2} d^2t,$$

получается выражение в терминах гипергеометрической функции (1.97)

$$\Psi_x(z) = \frac{\pi \Gamma(g+x, g-x)}{\Gamma(s+g)} {}_2F_1^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} s+x|\bar{s}+\bar{x}, s-x|\bar{s}-\bar{x} \\ s+g|\bar{s}+\bar{g} \end{matrix} \middle| \frac{1}{2} - \frac{z}{2\gamma} \right].$$

Оно копирует аналогичную формулу для собственных функций $SL(2, \mathbb{R})$ цепочки в случае одного узла. Напомним, что последние выражаются через гипергеометрической функцию Гаусса с такими же параметрами и аргументом. Отметим также, что для собственных функций симметрия гипергеометрической функции по перестановке параметров [100]

$${}_2F_1^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} a|\bar{a}, b|\bar{b} \\ c|\bar{c} \end{matrix} \middle| v \right] = {}_2F_1^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} b|\bar{b}, a|\bar{a} \\ c|\bar{c} \end{matrix} \middle| v \right]$$

означает инвариантность относительно отражения спектральной переменной $x \rightarrow -x$.

1.6.3 Представление Меллина-Барнса

В этой секции строится еще одно интегральное представление для собственных функций

$$\Psi_x(z) = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}y \frac{[-1]^{y-s} \Gamma(\varepsilon - y \pm x, 1 - s - \varepsilon + y, g - \varepsilon + y)}{[2\gamma]^{\varepsilon-y-s} [z+\gamma]^{s-g} [z-\gamma]^{g-\varepsilon+y}} \quad (1.101)$$

где ε – произвольное число из интервала $(0, 1/2)$, и для произведений гамма-функций используются обозначения (A.1), (A.2). Спектральные переменные и переменные интегрирования имеют вид

$$\begin{aligned} (x, \bar{x}) &= \left(\frac{k}{2} + i\eta, -\frac{k}{2} + i\eta \right), & k \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ (y, \bar{y}) &= \left(\frac{m}{2} + i\tau, -\frac{m}{2} + i\tau \right), & m \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и через $\int \mathcal{D}y$ обозначается следующее

$$\int \mathcal{D}y = \sum_{m \in \mathbb{Z} + \sigma} \int_{\mathbb{R}} d\tau.$$

Заметим, что в представлении (1.101) становится очевидной симметрия собственных функций относительно отражения спектральной переменной $x \rightarrow -x$.

Для доказательства (1.101) воспользуемся интегральным представлением для степенной функции [58]

$$\int \mathcal{D}y \Gamma(a+y, b-y) [z]^{-y-a} = 2\pi \Gamma(a+b) \frac{1}{[1+z]^{a+b}}. \quad (1.102)$$

В (1.102) предполагается, что $a - \bar{a}, b - \bar{b} \in \mathbb{Z} + \sigma$ и

$$\operatorname{Re}(a + \bar{a}) > 0, \quad \operatorname{Re}(b + \bar{b}) > 0, \quad (1.103)$$

то есть контур интегрирования по переменной $\tau \in \mathbb{R}$ разделяет серии полюсов гамма-функций под интегралом.

Выведем *представление Меллина-Барнса* (1.101) из уже полученной интегральной формулы (1.94)

$$\begin{aligned} \Psi_x(z) &= [2\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x, 1-s+x) \\ &\times \int \frac{d^2w}{[z+\gamma]^{s-g} [z-\gamma]^{s+g-1} [w-z]^{x-s+1} [w+\gamma]^{g-x} [w-\gamma]^{1-x-g}}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Во-первых, сделаем замену переменной интегрирования $z \rightarrow -(z-\gamma)/(w-\gamma)$ в (1.102) и перепишем при помощи получившейся формулы степенную функцию

$$\frac{1}{[w-z]^{x-s+1}} = \frac{1}{2\pi \Gamma(x-s+1)} \int \mathcal{D}y \frac{[-1]^{y-s} \Gamma(1-s-\varepsilon+y, x+\varepsilon-y)}{[z-\gamma]^{1-s-\varepsilon+y} [w-\gamma]^{x+\varepsilon-y}}. \quad (1.105)$$

Учитывая ограничение (1.103) и параметризацию переменных $(x, \bar{x}), (s, \bar{s})$, мы полагаем $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Подставляя результат (1.105) в (1.104), получаем кратный интеграл

$$\Psi_x(z) = \frac{[2\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x)}{2\pi} \int d^2w \mathcal{D}y \frac{[-1]^{y-s} \Gamma(1-s-\varepsilon+y, x+\varepsilon-y)}{[z+\gamma]^{s-g} [z-\gamma]^{g+y-\varepsilon} [w+\gamma]^{g-x} [w-\gamma]^{1+\varepsilon-g-y}}.$$

Чтобы получить (1.101) остается проинтегрировать по w при помощи правила цепочки (A.6)

$$\int d^2w \frac{1}{[w+\gamma]^{g-x} [w-\gamma]^{1+\varepsilon-g-y}} = \frac{\pi [-1]^{g-x}}{\Gamma(1+\varepsilon-g-y, g-x, 1-\varepsilon+x+y)} \frac{1}{[2\gamma]^{\varepsilon-x-y}}.$$

1.7 Ортогональность одночастичных собственных функций

Напомним, что скалярное произведение (1.1) в гильбертовом пространстве мидели в случае цепочки из одного узла имеет вид

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^2z \overline{\Phi(z)} \Psi(z), \quad (1.106)$$

где интегрирование ведется по всей комплексной плоскости. В этом разделе мы докажем, что собственные функции $\Psi_x(z)$ ортогональны относительно скалярного произведения (1.106)

$$\langle \Psi_y | \Psi_x \rangle = \mu^{-1}(x) \frac{\delta^{(2)}(x-y) + \delta^{(2)}(x+y)}{2} \quad (1.107)$$

где спектральные переменные имеют вид (1.35)

$$\begin{aligned} (x, \bar{x}) &= \left(\frac{k}{2} + i\eta, -\frac{k}{2} + i\eta \right), & k \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \eta \in \mathbb{R}, \\ (y, \bar{y}) &= \left(\frac{m}{2} + i\tau, -\frac{m}{2} + i\tau \right), & m \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.108)$$

а дельта функция $\delta^{(2)}$ определена в (1.58). То есть, в правой части (1.107)

$$\delta^{(2)}(x-y) = \delta_{km} \delta(\eta - \tau).$$

Напомним, что собственные функции Ψ_x обладают симметрией $x \rightarrow -x$, которая была доказана в разделе 1.6.1. Поэтому, скалярное произведение также должно быть инвариантно относительно замены $x \rightarrow -x$. Таким образом, формулу (1.107) достаточно доказать в области $x \neq -y$, в которой вторая дельта-функция $\delta^{(2)}(x+y)$ равна нулю, и в конце восстановить полное выражение по симметрии.

Для доказательства используем интегральное представление (1.94)

$$\begin{aligned} \Psi_x(z) &= [2\gamma]^{s-x} \Gamma(g-x, 1-s+x) \\ &\times \int \frac{d^2w}{[z+\gamma]^{s-g} [z-\gamma]^{s+g-1} [w-z]^{x-s+1} [w+\gamma]^{g-x} [w-\gamma]^{1-x-g}} \end{aligned}$$

и диаграммную технику, изложенную в приложении А. Используя правило комплексного сопряжения степенных функций (1.14)

$$([z]^\alpha)^* = [z]^{\bar{\alpha}^*} = z^{\bar{\alpha}^*} \bar{z}^{\alpha^*}$$

и условия на параметры (1.3), (1.31)

$$s^* + \bar{s} = 1, \quad g^* + \bar{g} = 1$$

получаем диаграмму для скалярного произведения $\langle \Psi_y | \Psi_x \rangle$, изображенную в левом верхнем углу на Рис. 1.4. Как всегда, интеграл представляется через диаграмму с точностью до нормировочного коэффициента с гамма-функциями.

Первое преобразование на Рис. 1.4 – сокращение линий, соединяющих центральную вершину с γ и $-\gamma$, и применение правила цепочки (А.6), изображенного на Рис. А.2. На следующем шаге применяется соотношение звезда-треугольник (А.7), которое показано на Рис. А.3. Вновь используя два раза правило цепочки на последнем шаге, получаем триви-

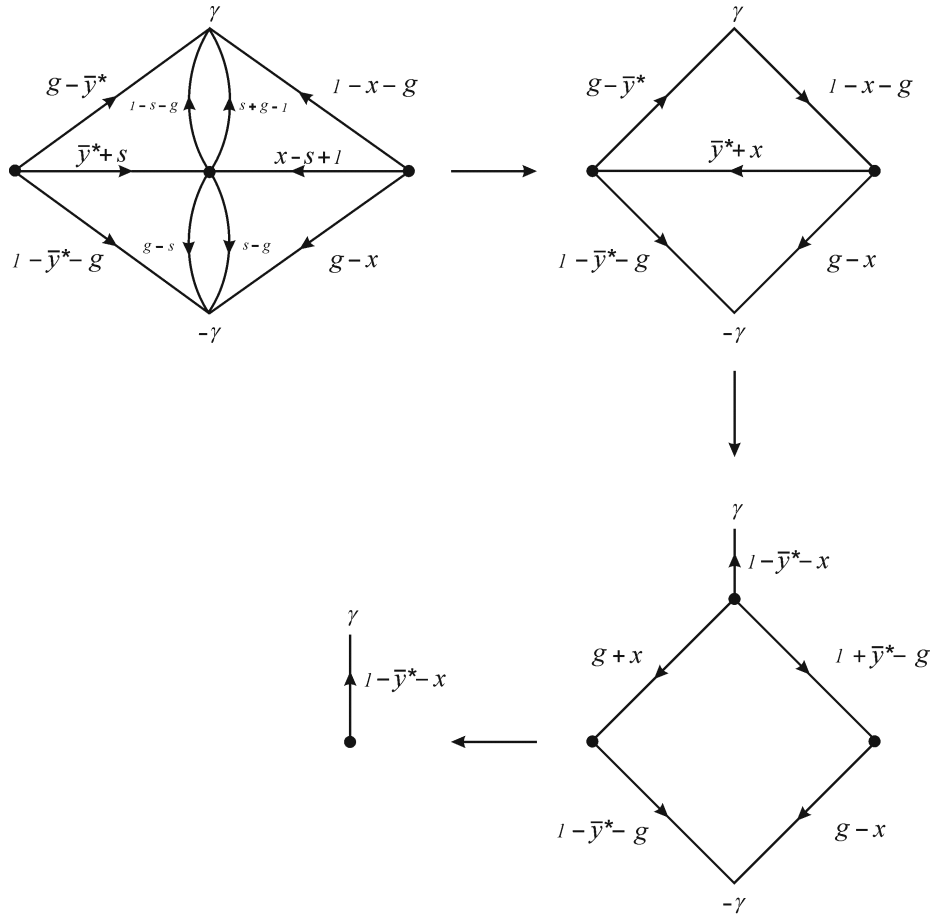


Рисунок 1.4 – Вывод соотношения ортогональности собственных функций в случае цепочки из 1 узла

альную диаграмму в левом нижнем углу, состоящую из одного пропагатора. Ей соответствует интегральное выражение

$$\int d^2w [w - \gamma]^{-1+\bar{y}^*+x} = \int d^2w [w]^{-1+\bar{y}^*+x}.$$

Для того, чтобы вычислить последний интеграл, нужно перейти в полярные координаты $w = re^{i\varphi}$ и использовать параметризацию (1.108) спектральных переменных (x, \bar{x}) и (y, \bar{y}) . В результате получаем

$$\int d^2w [w]^{-1+\bar{y}^*+x} = 2\pi^2 \delta_{km} \delta(\eta - \tau) = 2\pi^2 \delta^{(2)}(x - y).$$

Учитывая множители с гамма-функциями, возникающие при диаграммных преобразованиях, и применяя формулу дополнения (A.4), получаем следующее выражение для скалярного произведения

$$\langle \Psi_y | \Psi_x \rangle = \frac{2\pi^4 [-1]^{x+y} [2\gamma]}{\Gamma(1+x+y) \Gamma(1-x-y)} \delta^{(2)}(x - y). \quad (1.109)$$

При помощи разностного уравнения для гамма-функции (A.3)

$$\Gamma(a+1) = -a\bar{a}\Gamma(a)$$

и формулы дополнения (A.4) соотношение (1.109) можно переписать в виде

$$\langle \Psi_y | \Psi_x \rangle = -\frac{2\pi^4 [2\gamma]}{(x+y)(\bar{x}+\bar{y})} \delta^{(2)}(x-y) \quad (1.110)$$

$$= 2\pi^4 \left| \frac{\gamma}{x} \right|^2 \delta^{(2)}(x-y). \quad (1.111)$$

Напомним, что формула (1.111) получена в предположении $x \neq -y$. Лишь при таком условии преобразования на Рис. 1.4 имеют смысл. Об этом свидетельствует выражение перед дельта-функцией в (1.110). Это выражение представляет из себя произведение всех множителей, возникающих при промежуточных преобразованиях, и, как видно, оно сингулярно в точке $x = -y$. Сняв условие $x = -y$ и восстанавливая по симметрии полную формулу на основе (1.111), получаем соотношение ортогональности (1.107).

1.8 Полнота набора одночастичных собственных функций

Докажем соотношение полноты

$$\int \mathcal{D}x \mu(x) \Psi_x(z) \overline{\Psi_x(w)} = \delta^2(z-w), \quad (1.112)$$

где, как и раньше,

$$(x, \bar{x}) = \left(\frac{k}{2} + i\eta, -\frac{k}{2} + i\eta \right), \quad \int \mathcal{D}x = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \sigma} \int_{\mathbb{R}} d\eta, \quad (1.113)$$

и $\delta^2(z)$ – дельта-функция в комплексной плоскости

$$\delta^2(z) = \delta(\operatorname{Re} z) \delta(\operatorname{Im} z).$$

Выражение для меры интегрирования

$$\mu(x) = \frac{1}{4\pi^4} \left| \frac{x}{\gamma} \right|^2$$

следует из соотношения ортогональности (1.107). Для дальнейших целей его удобно переписать в виде

$$\mu(x) = \frac{\Gamma(s \pm x, 1 - s \pm x)}{4\pi^4 [2\gamma] \Gamma(\pm 2x)}, \quad (1.114)$$

используя разностное уравнение (A.3) и формулу дополнения (A.4) для гамма-функции.

Для доказательства соотношения полноты (1.112) используется представление Меллина-Барнса для собственных функций (1.101)

$$\Psi_x(z) = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}y \frac{[-1]^{y-s} \Gamma(\varepsilon - y \pm x, 1 - s - \varepsilon + y, g - \varepsilon + y)}{[2\gamma]^{\varepsilon-y-s} [z + \gamma]^{s-g} [z - \gamma]^{g-\varepsilon+y}}, \quad (1.115)$$

где $\varepsilon \in (0, 1/2)$, а переменная интегрирования имеет вид

$$(y, \bar{y}) = \left(\frac{m}{2} + i\tau, -\frac{m}{2} + i\tau \right), \quad m \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Далее ε имеет смысл параметра регуляризации, и в конце вычисления он будет устремлен к нулю.

Чтобы написать аналогичное интегральное выражение для комплексно-сопряженной функции $\overline{\Psi_x(w)}$, используем условия (1.3), (1.31) на параметры (s, \bar{s}) и (g, \bar{g})

$$s^* + \bar{s} = 1, \quad g^* + \bar{g} = 1,$$

а также правила комплексного сопряжения степенных функций (1.14) и гамма-функций (A.5). В результате получаем

$$\overline{\Psi_x(w)} = \frac{1}{2} \int \mathcal{D}y' \frac{[-1]^{y'-g} \Gamma(\varepsilon + y' \pm x, s - \varepsilon - y', 1 - g - \varepsilon - y')}{[2\gamma]^{\varepsilon+y'+s-1} [w + \gamma]^{g-s} [w - \gamma]^{1-g-\varepsilon-y'}}, \quad (1.116)$$

где переменная интегрирования имеет тот же вид, что в (1.115)

$$(y', \bar{y}') = \left(\frac{m'}{2} + i\tau', -\frac{m'}{2} + i\tau' \right), \quad m' \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \tau' \in \mathbb{R}.$$

Подставляя явные формулы (1.114), (1.115) и (1.116) в левую часть соотношения полноты (1.112) и рассматривая предел $\varepsilon \rightarrow 0_+$, получаем кратный интеграл

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x \mu(x) \Psi_x(z) \overline{\Psi_x(w)} &= \frac{1}{16\pi^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}y \frac{[-1]^{y-s} \Gamma(1 - s - \varepsilon + y, g - \varepsilon + y)}{[z + \gamma]^{s-g} [z - \gamma]^{g-\varepsilon+y}} \\ &\times \int \mathcal{D}y' \frac{[-1]^{y'-g} \Gamma(s - \varepsilon - y', 1 - g - \varepsilon - y')}{[2\gamma]^{2\varepsilon-y+y'} [w + \gamma]^{g-s} [w - \gamma]^{1-\varepsilon-g-y'}} \\ &\times \int \mathcal{D}x \frac{\Gamma(s \pm x, 1 - s - 4\varepsilon \pm x, \varepsilon - y \pm x, \varepsilon + y' \pm x)}{\Gamma(\pm 2x)}, \end{aligned} \quad (1.117)$$

где в интеграле по x введена дополнительная регуляризация

$$\Gamma(1 - s \pm x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \Gamma(1 - s - 4\varepsilon \pm x).$$

Для того, чтобы проинтегрировать по x , используем комплексный аналог интеграла Густаф-

сона ВС-типа [54, 102]

$$\int \mathcal{D}x \frac{\prod_{j=1}^4 \Gamma(a_j \pm x)}{\Gamma(\pm 2x)} = \frac{4\pi \prod_{1 \leq j < k \leq 4} \Gamma(a_j + a_k)}{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)}, \quad (1.118)$$

где переменная интегрирования дается той же формулой (1.113), и параметры a_j, \bar{a}_j имеют вид

$$a_j = \frac{n_j}{2} + \nu_j, \quad \bar{a}_j = -\frac{n_j}{2} + \nu_j, \quad n_j \in \mathbb{Z} + \sigma, \quad \nu_j \in \mathbb{C}. \quad (1.119)$$

Соотношение (1.118) выполняется в том случае, если контур интегрирования $\eta \in \mathbb{R}$ разделяет серии полюсов [54]

$$i\eta = \frac{|k - n_j|}{2} + \nu_j + p, \quad i\eta = -\frac{|k + n_j|}{2} - \nu_j - p, \quad p \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

и ν_j удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) < 1.$$

В нашем случае эти условия выполняются, так как в интеграле по x (1.117) параметры a_j принимают значения

$$a_1 = s, \quad a_2 = 1 - s - 4\varepsilon, \quad a_3 = \varepsilon - y, \quad a_4 = \varepsilon + y',$$

так что в соответствии с (1.119)

$$\nu_1 = \frac{1}{2} + i\nu_s, \quad \nu_2 = \frac{1}{2} - i\nu_s - 4\varepsilon, \quad \nu_3 = \varepsilon - i\tau, \quad \nu_4 = \varepsilon + i\tau',$$

и необходимое неравенство выполняется

$$\operatorname{Re}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) = 1 - 2\varepsilon < 1.$$

Таким образом, взяв интеграл по x при помощи соотношения Густафсона (1.118) и используя формулу дополнения для гамма-функций (A.4), получаем

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}x \frac{\Gamma(s \pm x, 1 - s - 4\varepsilon \pm x, \varepsilon - y \pm x, \varepsilon + y' \pm x)}{\Gamma(\pm 2x)} \\ &= 4\pi [-1]^{y-y'} \Gamma(1 - 4\varepsilon, 2\varepsilon \pm (y - y')) \\ & \times \Gamma(s + \varepsilon - y, s + \varepsilon + y', 1 - s - 3\varepsilon - y, 1 - s - 3\varepsilon + y'). \end{aligned} \quad (1.120)$$

Теперь перепишем произведение трех гамма-функций по второй строчке последней фор-

мулы

$$\Gamma(1 - 4\varepsilon, 2\varepsilon \pm (y - y')) = \frac{4\varepsilon}{(2\varepsilon + y - y')(2\varepsilon - y + y')} \frac{\Gamma(1 - 4\varepsilon)}{\Gamma(1 + 4\varepsilon)} \Gamma(2\varepsilon + \Delta \pm (y - y')), \quad (1.121)$$

где $(\Delta, \bar{\Delta}) = (1, 0)$. Докажем, что первая дробь в (1.121) стремится к дельта-функции при $\varepsilon \rightarrow 0_+$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{4\varepsilon}{(2\varepsilon + y - y')(2\varepsilon - y + y')} = 2\pi \delta_{m,m'} \delta(\tau - \tau') = 2\pi \delta^{(2)}(y - y'). \quad (1.122)$$

Разложим эту дробь в следующую сумму

$$\begin{aligned} \frac{4\varepsilon}{(2\varepsilon + y - y')(2\varepsilon - y + y')} &= \frac{1}{2\varepsilon + y - y'} + \frac{1}{2\varepsilon - y + y'} \\ &= -\frac{i}{-i\frac{m-m'}{2} + \tau - \tau' - 2i\varepsilon} + \frac{i}{-i\frac{m-m'}{2} + \tau - \tau' + 2i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.123)$$

В случае $m \neq m'$ в пределе $\varepsilon \rightarrow 0_+$ оба слагаемых в (1.123) не содержат сингулярностей, попадающих на контур интегрирования по τ и τ' (вещественную ось), и взаимно сокращаются. При $m = m'$ используем теорему Сохоцкого-Племеля

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \left(\frac{1}{\tau - i\varepsilon} - \frac{1}{\tau + i\varepsilon} \right) = 2\pi i \delta(\tau).$$

Следовательно, общий результат дается формулой (1.122).

Из (1.120), (1.121) и (1.122) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}x \frac{\Gamma(s \pm x, 1 - s - 4\varepsilon \pm x, \varepsilon - y \pm x, \varepsilon + y' \pm x)}{\Gamma(\pm 2x)} = 8\pi^2 [-1]^{2s} \delta^{(2)}(y - y'). \quad (1.124)$$

Остальная часть выражения (1.117) не содержит полюсов, попадающих на контуры интегрирования по τ и τ' в пределе $\varepsilon \rightarrow 0_+$. Таким образом, возьмем предел в (1.117), используя (1.124), далее проинтегрируем дельта-функцию по y' и для преобразования подынтегрального выражения применим формулу дополнения для гамма-функции (A.4). В результате находим

$$\int \mathcal{D}x \mu(x) \Psi_x(z) \overline{\Psi_x(w)} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{[z + \gamma]^{g-s} [w + \gamma]^{s-g}}{|w - \gamma|^2} \int \mathcal{D}y \left[\frac{w - \gamma}{z - \gamma} \right]^{y+g}.$$

Для того, чтобы получить соотношение полноты (1.112), остается применить формулу

$$\int \mathcal{D}y \left[\frac{v}{u} \right]^{y+g} = 2\pi^2 |v|^2 \delta^2(u - v),$$

которую легко доказать, используя полярные координаты $v/u = r e^{i\varphi}$.

1.9 Обобщенное уравнение отражения

В работе [60] был построен оператор $\mathbb{R}_{12}(u)$ – общее решение уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$. Этот оператор действует в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$ двух представлений основной серии $SL(2, \mathbb{C})$, задаваемых спинами (s_1, \bar{s}_1) и (s_2, \bar{s}_2) . Он является функцией спектральных параметров (u, \bar{u}) , таких что $u - \bar{u} \in \mathbb{Z}$, а также спинов представлений (зависимость от антиголоморфных параметров для краткости не указывается). В компактном виде его можно представить через интегральный оператор (1.8)

$$\mathbb{R}_{12}(u) = \mathbb{P}_{12} [z_{12}]^{u+1-s_1-s_2} [\hat{\rho}_1]^{u+s_2-s_1} [\hat{\rho}_2]^{u+s_1-s_2} [z_{12}]^{u+s_1+s_2-1}, \quad (1.125)$$

где \mathbb{P}_{12} – оператор перестановки

$$\mathbb{P}_{12} \Psi(z_1, z_2) = \Psi(z_2, z_1),$$

а z_1 и z_2 – переменные функций в пространствах V_1 и V_2 . Уравнение Янга-Бакстера для \mathbb{R} -оператора имеет вид

$$\mathbb{R}_{12}(u-v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{23}(v) = \mathbb{R}_{23}(v) \mathbb{R}_{13}(u) \mathbb{R}_{12}(u-v). \quad (1.126)$$

Оно представляет из себя операторное равенство в тензорном произведении трех представлений $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, оператор \mathbb{R}_{ij} действует нетривиально в пространствах V_i и V_j , а в третьем пространстве – как тождественный оператор.

В [62] показано, что в случае двумерных представлений $V_1 = V_2 = \mathbb{C}^2$ общий \mathbb{R} -оператор вырождается в R -матрицу Янга (1.21) – простейшее решение уравнения Янга-Бакстера в случае группы симметрии $SL(2, \mathbb{C})$

$$R_{12}(u) = R(u) = u + P, \quad P a \otimes b = b \otimes a.$$

Соответственно, равенство (1.126) при $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{C}^2$ переходит в уравнение Янга-Бакстера (1.22) для R -матрицы

$$R_{12}(u-v) R_{13}(u) R_{23}(v) = R_{23}(v) R_{13}(u) R_{12}(u-v).$$

Напомним, что уравнение отражения (1.20) имеет вид

$$R_{12}(u-v) K_1(u + \frac{1}{2}) R_{12}(u+v) K_2(v + \frac{1}{2}) = K_2(v + \frac{1}{2}) R_{12}(u+v) K_1(u + \frac{1}{2}) R_{12}(u-v), \quad (1.127)$$

где мы сделали сдвиг параметров $u \rightarrow u + \frac{1}{2}$, $v \rightarrow v + \frac{1}{2}$. Это матричное равенство в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, причем $K_1(u) = K(u) \otimes \mathbb{1}$, $K_2(u) = \mathbb{1} \otimes K(u)$, где K -матрица определена в (1.23). Естественно предположить, что уравнение отражения обобщается на случай бесконечномерных

представлений основной серии аналогично уравнению Янга-Бакстера

$$\mathbb{R}_{12}(u-v) \mathbb{K}_1(u, s_1) \mathbb{R}_{12}(u+v) \mathbb{K}_2(v, s_2) = \mathbb{K}_2(v, s_2) \mathbb{R}_{12}(u+v) \mathbb{K}_1(u, s_1) \mathbb{R}_{12}(u-v). \quad (1.128)$$

То есть, R -матрица заменяется на \mathbb{R} -оператор, а K -матрица – на некоторый оператор \mathbb{K} . Тожество (1.128) – это операторное равенство в тензорном произведении $V_1 \otimes V_2$ двух представлений основной серии спина (s_1, \bar{s}_1) и (s_2, \bar{s}_2) . Оператор отражения $\mathbb{K}_1(u, s_1)$ определен на пространстве V_1 представления спина s_1 , а оператор $\mathbb{K}_2(v, s_2)$ аналогичного вида действует на пространстве V_2 спина s_2 .

Установим связь между \mathbb{K} -оператором из (1.128) и оператором $\mathcal{K}(s, x)$ (1.80) – решением уравнения отражения (1.70) с L -оператором и K -матрицей. Используем для начала эвристические соображения, а затем строго докажем уравнение (1.128) для полученного \mathbb{K} -оператора. Естественно предположить, что при $V_1 = \mathbb{C}^2$ оператор $\mathbb{K}_1(u, s_1)$ вырождается в матрицу $K_1(u + \frac{1}{2})$, и, аналогично, при $V_2 = \mathbb{C}^2$ оператор $\mathbb{K}_2(v, s_2)$ вырождается в $K_2(v + \frac{1}{2})$, поскольку тогда при $V_1 = V_2 = \mathbb{C}^2$ равенство (1.128) переходит в (1.127).

В случае уравнения Янга-Бакстера общий \mathbb{R} -оператор строится как решение следующего соотношения с L -оператором [60]

$$\mathbb{R}_{12}(u-v) L_1(u) L_2(v) = L_2(v) L_1(u) \mathbb{R}_{12}(u-v), \quad (1.129)$$

где через $L_1(u)$ и $L_2(v)$ обозначены L -операторы, соответствующие представлениям $T^{(s_1, \bar{s}_1)}$ и $T^{(s_2, \bar{s}_2)}$

$$L_1(u) = \begin{pmatrix} u + s_1 + z_1 \partial_1 & -\partial_1 \\ z_1^2 \partial_1 + 2s_1 z_1 & u - s_1 - z_1 \partial_1 \end{pmatrix}, \quad L_2(v) = \begin{pmatrix} v + s_2 + z_2 \partial_2 & -\partial_2 \\ z_2^2 \partial_2 + 2s_2 z_2 & v - s_2 - z_2 \partial_1 \end{pmatrix}.$$

Соотношение (1.129) является частным случаем (1.126) при $V_3 = \mathbb{C}^2$. Операторы $\mathbb{R}_{13}(u)$ и $\mathbb{R}_{23}(v)$ вырождаются [62] в $L_1(u + \frac{1}{2})$ и $L_2(v + \frac{1}{2})$, и (1.129) получается в результате сдвига $u \rightarrow u - \frac{1}{2}$, $v \rightarrow v - \frac{1}{2}$.

Аналогичным образом можно получить и определяющее уравнение на \mathbb{K} -оператор. Примем в (1.128) $V_1 = \mathbb{C}^2$, а в качестве V_2 – пространство произвольного представления $T^{(s, \bar{s})}$. В соответствии с нашим предположением, оператор $\mathbb{K}_1(u, s_1)$ вырождается в K -матрицу $K(u + \frac{1}{2})$. Таким образом, (1.128) принимает вид определяющего уравнения на оператор $\mathbb{K}(v, s) = \mathbb{K}_2(v, s_2)$ (индекс 2 за ненадобностью опускаем)

$$L(u-v+\frac{1}{2}) K(u+\frac{1}{2}) L(u+v+\frac{1}{2}) \mathbb{K}(v, s) = \mathbb{K}(v, s) L(u+v+\frac{1}{2}) K(u+\frac{1}{2}) L(u-v+\frac{1}{2}).$$

Делая в последнем равенстве сдвиг $u \rightarrow u - \frac{1}{2}$ и переписывая L -операторы в параметризации (1.18), получаем

$$\begin{aligned} L(u-v+s-1, u-v-s) K(u) L(u+v+s-1, u+v-s) \mathbb{K}(v, s) \\ = \mathbb{K}(v, s) L(u+v+s-1, u+v-s) K(u) L(u-v+s-1, u-v-s). \end{aligned} \quad (1.130)$$

Получившееся соотношение есть ни что иное, как уравнение отражения (1.70) на \mathcal{K} -оператор

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}(s, x) L(u + x - 1, u - s) K(u) L(u + s - 1, u - x) \\ & = L(u + s - 1, u - x) K(u) L(u + x - 1, u - s) \mathcal{K}(s, x) \end{aligned} \quad (1.131)$$

переписанное в другой параметризации. Действительно, после замены переменных $x \rightarrow s + v$, $s \rightarrow s - v$ равенство (1.131) переходит в (1.130), где

$$\mathbb{K}(v, s) = \mathcal{K}(s - v, s + v) \quad (1.132)$$

$$= [z + \gamma]^{v-s+g} [z - \gamma]^{v-s+1-g} [\hat{p}]^{2v} [z + \gamma]^{v+s-g} [z - \gamma]^{v+s+g-1}. \quad (1.133)$$

Таким образом, мы показали, что оператор $\mathbb{K}(v, s)$ должен отличаться от $\mathcal{K}(s, x)$ лишь заменой переменных.

Докажем теперь строго общее уравнение отражения (1.128) для \mathbb{R} - и \mathbb{K} -операторов (1.125) и (1.133). Перепишем (1.128) в явном виде, подставив в него (1.125)

$$\begin{aligned} & [z_{12}]^{u-v+1-s_1-s_2} [\hat{p}_1]^{u-v+s_2-s_1} [\hat{p}_2]^{u-v+s_1-s_2} [z_{12}]^{u-v+s_1+s_2-1} \\ & \quad \times \mathbb{K}_1(u, s_1) [z_{21}]^{u+v+1-s_1-s_2} [\hat{p}_2]^{u+v+s_2-s_1} [\hat{p}_1]^{u+v+s_1-s_2} [z_{21}]^{u+v+s_1+s_2-1} \mathbb{K}_1(v, s_2) \\ & = \mathbb{K}_1(v, s_2) [z_{12}]^{u+v+1-s_1-s_2} [\hat{p}_1]^{u+v+s_2-s_1} [\hat{p}_2]^{u+v+s_1-s_2} [z_{12}]^{u+v+s_1+s_2-1} \mathbb{K}_1(u, s_1) \\ & \quad \times [z_{21}]^{u-v+1-s_1-s_2} [\hat{p}_2]^{u-v+s_2-s_1} [\hat{p}_1]^{u-v+s_1-s_2} [z_{21}]^{u-v+s_1+s_2-1}. \end{aligned}$$

После замены переменных

$$u + s_1 = x, \quad u - s_1 = -s, \quad v + s_2 = y, \quad v - s_2 = -s'$$

последнее равенство принимает эквивалентный вид

$$\begin{aligned} & [z_{12}]^{1-s-y} [\hat{p}_1]^{s'-s} [\hat{p}_2]^{x-y} [z_{12}]^{x+s'-1} \mathcal{K}_1(s, x) [z_{12}]^{1-s-s'} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{x+y-1} \mathcal{K}_1(s', y) \\ & = \mathcal{K}_1(s', y) [z_{12}]^{1-s-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x+y-1} \mathcal{K}_1(s, x) [z_{12}]^{1-s-y} [\hat{p}_1]^{x-y} [\hat{p}_2]^{s'-s} [z_{12}]^{x+s'-1}. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Первый шаг доказательства (1.134) основан на следующем соотношении

$$\begin{aligned} & [z_{12}]^{x+s'-1} \mathcal{K}_1(s, x) [z_{12}]^{1-s-s'} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{x+y-1} \mathcal{K}_1(s', y) \\ & = \mathcal{K}_1(s, 1-s') [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \mathcal{K}_1(1-x, y) [z_{12}]^{x+s'-1}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

То есть, при переносе оператора $[z_{12}]^{x+s'-1}$ слева направо во всем остальном выражении происходит замена параметров $x \rightarrow 1 - s'$, $s' \rightarrow 1 - x$. Применяя это преобразование в левой части (1.134) и сокращая в получившемся равенстве операторы $[z_{12}]^{x+s'-1}$ в обеих частях,

преобразуем (1.134) к

$$\begin{aligned} & [z_{12}]^{1-s-y} [\hat{p}_1]^{s'-s} [\hat{p}_2]^{x-y} \mathcal{K}_1(s, 1-s') [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \mathcal{K}_1(1-x, y) \\ & = \mathcal{K}_1(s', y) [z_{12}]^{1-s-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x+y-1} \mathcal{K}_1(s, x) [z_{12}]^{1-s-y} [\hat{p}_1]^{x-y} [\hat{p}_2]^{s'-s}. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Далее мы применяем в правой части (1.136) похожее преобразование

$$\begin{aligned} & \mathcal{K}_1(s', y) [z_{12}]^{1-s-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x+y-1} \mathcal{K}_1(s, x) [z_{12}]^{1-s-y} \\ & = [z_{12}]^{1-s-y} \mathcal{K}_1(s', 1-s) [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x-s} \mathcal{K}_1(1-y, x). \end{aligned} \quad (1.137)$$

При переносе оператора $[z_{21}]^{1-s-y}$ справа налево параметр y заменяется на $1-s$, а параметр s – на $1-y$. Сокращая в обеих частях получившегося равенства оператор $[z_{21}]^{1-s-y}$, преобразуем (1.136) к

$$\begin{aligned} & [\hat{p}_1]^{s'-s} [\hat{p}_2]^{x-y} \mathcal{K}_1(s, 1-s') [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \mathcal{K}_1(1-x, y) \\ & = \mathcal{K}_1(s', 1-s) [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x-s} \mathcal{K}_1(1-y, x) [\hat{p}_1]^{x-y} [\hat{p}_2]^{s'-s}. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Теперь используем две эквивалентных друг другу формулы

$$\begin{aligned} & [\hat{p}_1]^{s'-s} \mathcal{K}_1(s, 1-s') = \mathcal{K}_1(s', 1-s) [\hat{p}_1]^{s'-s}, \\ & \mathcal{K}_1(1-y, x) [\hat{p}_1]^{x-y} = [\hat{p}_1]^{x-y} \mathcal{K}_1(1-x, y), \end{aligned} \quad (1.139)$$

которые несложно получить, многократно применяя соотношение звезда-треугольник в операторной форме (A.8). Таким образом, (1.138) сводится к

$$\begin{aligned} & [\hat{p}_2]^{x-y} \mathcal{K}_1(s', 1-s) [\hat{p}_1]^{s'-s} [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \mathcal{K}_1(1-x, y) \\ & = \mathcal{K}_1(s', 1-s) [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-y} \mathcal{K}_1(1-x, y) [\hat{p}_2]^{s'-s}. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Операторы вида $[\hat{p}_2]^\alpha$ коммутируют с \mathcal{K}_1 , поэтому в обеих частях (1.140) можем сократить операторы $\mathcal{K}_1(s', 1-s)$ и $\mathcal{K}_1(1-x, y)$. В результате (1.140) принимает вид

$$\begin{aligned} & [\hat{p}_2]^{x-y} [\hat{p}_1]^{s'-s} [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \\ & = [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-y} [\hat{p}_2]^{s'-s}. \end{aligned} \quad (1.141)$$

Таким образом, мы свели равенство (1.134), эквивалентное уравнению отражения (1.128), к простому тождеству (1.141), которое доказывается при помощи многократного применения

соотношения звезда-треугольник (A.8).

$$\begin{aligned}
& [\hat{p}_2]^{x-y} [\hat{p}_1]^{s'-s} [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \\
&= [\hat{p}_2]^{x-y} [z_{12}]^{x-s'} [\hat{p}_1]^{x-s} [z_{12}]^{s'-s} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \\
&= [\hat{p}_2]^{x-y} [z_{12}]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s'} [\hat{p}_1]^{x-s} [z_{12}]^{y-s} [\hat{p}_2]^{s'-s} \\
&= [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_2]^{x-s'} [z_{12}]^{x-y} [\hat{p}_1]^{x-s} [z_{12}]^{y-s} [\hat{p}_2]^{s'-s} \\
&= [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_2]^{x-s'} [\hat{p}_1]^{y-s} [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-y} [\hat{p}_2]^{s'-s}.
\end{aligned}$$

Теперь докажем равенство (1.135), использованное при доказательстве (1.134)

$$\begin{aligned}
& [z_{12}]^{x+s'-1} \mathcal{K}_1(s, x) [z_{12}]^{1-s-s'} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{x+y-1} \mathcal{K}_1(s', y) \\
&= \mathcal{K}_1(s, 1-s') [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x-s'} [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} \mathcal{K}_1(1-x, y) [z_{12}]^{x+s'-1}.
\end{aligned}$$

Используя явную формулу для \mathcal{K} -оператора (1.80) и сокращая в обеих частях множители $[z_{1+}]^{g-s} [z_{1-}]^{1-g-s}$ и $[z_{1+}]^{y-g} [z_{1-}]^{y+g-1}$, ее можно переписать в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}
& [z_{12}]^{x+s'-1} [\hat{p}_1]^{x-s} [z_{12}]^{1-s-s'} \mathcal{K}_1(1-x, 1-g; 1-s') [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{x+y-1} [\hat{p}_1]^{y-s'} \\
&= [\hat{p}_1]^{1-s-s'} [z_{12}]^{x-s} \mathcal{K}_1(s', 1-g; x) [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_1]^{x+y-1} [z_{12}]^{x+s'-1}. \quad (1.142)
\end{aligned}$$

Получившееся равенство доказывается при помощи соотношения звезда-треугольник (A.8) и формулы

$$[\hat{p}_1]^{x+s'-1} \mathcal{K}_1(1-x, 1-g; 1-s') = \mathcal{K}_1(s', 1-g; x) [\hat{p}_1]^{x+s'-1},$$

эквивалентной (1.139). Вывод (1.142):

$$\begin{aligned}
& [z_{12}]^{x+s'-1} [\hat{p}_1]^{x-s} [z_{12}]^{1-s-s'} \mathcal{K}_1(1-x, 1-g; 1-s') [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{x+y-1} [\hat{p}_1]^{y-s'} \\
&= [\hat{p}_1]^{1-s-s'} [z_{12}]^{x-s} [\hat{p}_1]^{x+s'-1} \mathcal{K}_1(1-x, 1-g; 1-s') [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{x+y-1} [\hat{p}_1]^{y-s'} \\
&= [\hat{p}_1]^{1-s-s'} [z_{12}]^{x-s} \mathcal{K}_1(s', 1-g; x) [\hat{p}_2]^{y-s} [\hat{p}_1]^{x+s'-1} [z_{12}]^{x+y-1} [\hat{p}_1]^{y-s'} \\
&= [\hat{p}_1]^{1-s-s'} [z_{12}]^{x-s} \mathcal{K}_1(s', 1-g; x) [\hat{p}_2]^{y-s} [z_{12}]^{y-s'} [\hat{p}_1]^{x+y-1} [z_{12}]^{x+s'-1}.
\end{aligned}$$

Вывод второго ключевого тождества (1.137), использованного при доказательстве общего уравнения отражения, повторяет вывод (1.135).

Глава 2. $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантная спиновая цепочка ВС-типа

2.1 Определение модели

Определим модель, вновь следуя подходу Склянина [26]. Конструкция интегралов движения копирует рассмотренный ранее случай цепочки $SL(2, \mathbb{C})$ (раздел 1.2). Все необходимые для этого объекты, включая L -оператор, R -матрицу, K -матрицу и матрицу монодромии, для спиновых цепочек $SL(2, \mathbb{R})$ и $SL(2, \mathbb{C})$ формально совпадают. Соответственно, собственные функции и имеют ту же индуктивную структуру, что и в случае $SL(2, \mathbb{C})$ (раздел 1.3.2), и выражаются через \mathcal{R} - и \mathcal{K} -операторы, определяемые такими же соотношениями: уравнением Янга-Бакстера (1.90) и уравнением отражения (1.70).

L -оператор имеет вид (1.17)

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + S & S_- \\ S_+ & u - S \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где u – спектральный параметр, а S, S_{\pm} – в данном случае генераторы произвольного представления группы $SL(2, \mathbb{R})$, удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям

$$[S_+, S_-] = 2S, \quad [S, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}.$$

Напомним, что L -оператор является решением соотношения

$$R(u - v) (L(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes L(v)) = (\mathbf{1} \otimes L(v)) (L(u) \otimes \mathbf{1}) R(u - v)$$

с R -матрицей Янга (1.21), действующей в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$

$$R(u) = u + P, \quad P a \otimes b = b \otimes a. \quad (2.2)$$

В рассматриваемой модели генераторы S, S_{\pm} реализуются через дифференциальные операторы

$$S = z\partial_z + s, \quad S_- = -\partial_z, \quad S_+ = z^2\partial_z + 2sz,$$

действующие на функциях $\psi(z)$, аналитических в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Они являются антиэрмитовыми операторами

$$S^\dagger = -S, \quad S_-^\dagger = -S_-, \quad S_+^\dagger = -S_+ \quad (2.3)$$

относительно скалярного произведения

$$\langle \chi | \psi \rangle = \int \mathcal{D}z \overline{\chi(z)} \psi(z), \quad (2.4)$$

где мера интегрирования имеет вид

$$\mathcal{D}z = \frac{2s-1}{\pi} (2 \operatorname{Im} z)^{2s-2} d \operatorname{Re} z d \operatorname{Im} z. \quad (2.5)$$

Спиновый параметр s принимает вещественные значения, причем

$$s > \frac{1}{2}.$$

Генераторы целого или полуцелого спина соответствуют *дискретной серии* унитарных неприводимых представлений группы $SL(2, \mathbb{R})$ [33].

Как уже было упомянуто в случае цепочки $SL(2, \mathbb{C})$, L -оператор, помимо параметризации через u и s

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + z\partial_z + s & -\partial_z \\ z^2\partial_z + 2sz & u - z\partial_z - s \end{pmatrix},$$

можно также задать при помощи двух эквивалентных параметров

$$u_1 = u - 1 + s, \quad u_2 = u - s,$$

которые возникают естественным образом при факторизации

$$\begin{aligned} L(u_1, u_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & -\partial_z \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + 1 + z\partial_z & -\partial_z \\ z^2\partial_z + (u_1 - u_2 + 1)z & u_2 - z\partial_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вторым ключевым ингредиентом при определении модели является K -матрица

$$K(u) = \begin{pmatrix} i\beta(g - \frac{1}{2}) & u - \frac{1}{2} \\ -\beta^2(u - \frac{1}{2}) & i\beta(g - \frac{1}{2}) \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

содержащая два дополнительных параметра β, g . Она совпадает с K -матрицей (1.23) с точностью до замены $\beta = -i\gamma$. Напомним, что матрица $K(u)$ удовлетворяет уравнению отражения

$$\begin{aligned} R(u-v) (K(u) \otimes \mathbf{1}) R(u+v-1) (\mathbf{1} \otimes K(v)) \\ = (\mathbf{1} \otimes K(v)) R(u+v-1) (K(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v) \end{aligned} \quad (2.8)$$

с R -матрицей Янга (2.2).

Открытая спиновая цепочка $SL(2, \mathbb{R})$ ВС-типа, состоящая из n узлов, представляет из себя модель, описывающую систему из n взаимодействующих частиц с координатами z_j . Гильбертово пространство модели – пространство функций $\Psi(z_1, \dots, z_n)$, аналитических в верхней полуплоскости по каждой из переменных. Скалярное произведение определяется через кратный интеграл

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int \mathcal{D}z_1 \dots \mathcal{D}z_n \overline{\Phi(z_1, \dots, z_n)} \Psi(z_1, \dots, z_n). \quad (2.9)$$

Обозначим L -оператор, соответствующий k -ой частице (k -му узлу цепочки), через $L_k(u)$

$$L_k(u) = \begin{pmatrix} u + z_k \partial_{z_k} + s & -\partial_{z_k} \\ z_k^2 \partial_{z_k} + 2s z_k & u - z_k \partial_{z_k} - s \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Отметим, что спиновый параметр по всех узлах принимает одно и то же значение, то есть рассматривается случай однородной цепочки. Используя введенные объекты, определим матрицу монодромии по аналогии с (1.19)

$$T_n(u) = L_n(u) \cdots L_1(u) K(u) L_1(u) \cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} A_n(u) & B_n(u) \\ C_n(u) & D_n(u) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Из (1.24), (2.8) следует уравнение отражения для матрицы монодромии

$$\begin{aligned} R(u-v) (T_n(u) \otimes \mathbf{1}) R(u+v-1) (\mathbf{1} \otimes T_n(v)) \\ = (\mathbf{1} \otimes T_n(v)) R(u+v-1) (T_n(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v). \end{aligned}$$

В свою очередь, его следствием является коммутация

$$[B_n(u), B_n(v)] = 0. \quad (2.12)$$

В разделе 1.2.2 показано, что оператор $B_n(u)$, как полином от u , имеет вид

$$B_n(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right) (u^{2n} + u^{2n-2} H_1 + \dots + H_n), \quad (2.13)$$

то есть он пропорционален $(u - \frac{1}{2})$, и $B_n(u) / (u - \frac{1}{2})$ является четным многочленом. Из (2.12) следует, что коэффициенты H_k полинома $B(u)$ коммутируют друг с другом

$$[H_k, H_m] = 0.$$

Таким образом, набор операторов H_k определяет квантовую интегрируемую модель. Как и в случае спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{C})$, нашей главной целью является диагонализация $B_n(u)$ – производящей функции интегралов движения.

2.1.1 Ограничения на параметры K -матрицы

В дальнейшем мы будем полагать, что β, g – вещественные положительные числа

$$\beta > 0, \quad g > 0. \quad (2.14)$$

Объясним, откуда берутся ограничения (2.14). По аналогии со случаем $SL(2, \mathbb{C})$, оператор $B(u)$ при $n = 1$ имеет вид

$$B(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right)(u^2 - H^s)$$

где единственный нетривиальный коэффициент представляет собой одночастичный гамильтониан

$$\begin{aligned} H^s &= S^2 + \beta^2 S_-^2 - 2i\beta \left(g - \frac{1}{2}\right) S_- \\ &= (z^2 + \beta^2)\partial_z^2 + (2s + 1)z\partial_z + 2i\beta \left(g - \frac{1}{2}\right) \partial_z + s^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Одним из требований, накладывающих ограничения на эти параметры β, g , является эрмитовость гамильтониана H^s относительно скалярного произведения (2.4). Используя антиэрмитовость генераторов $S^\dagger = -S$, $S_-^\dagger = -S_-$, получаем, что H^s формально самосопряжен

$$(H^s)^\dagger = H^s$$

при условии

$$\beta^2 \in \mathbb{R}, \quad g \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует два варианта:

$$\beta \in i\mathbb{R} \quad \text{либо} \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Для того, чтобы диагонализировать $B(u)$, нужно найти собственные функции гамильтониана

$$H^s \Psi_\lambda(z) = -\lambda^2 \Psi_\lambda(z). \quad (2.17)$$

Напомним, что, согласно определению модели, эти функции должны быть аналитическими в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и интегрируемыми с квадратом относительно скалярного произведения (2.4).

После замены переменной

$$w = \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}, \quad z = i\beta(1 - 2w)$$

оператор (2.15) принимает вид

$$H^s = -w(1-w)\partial_w^2 - \left[(s+g) - (2s+1)w \right] \partial_w + s^2.$$

Таким образом, спектральную задачу (2.17) можно переписать в форме гипергеометрического уравнения

$$\left(w(1-w)\partial_w^2 + [c - (a+b+1)w] \partial_w - ab \right) \Psi_\lambda = 0 \quad (2.18)$$

с параметрами

$$a = s + i\lambda, \quad b = s - i\lambda, \quad c = s + g.$$

То есть, одночастичные собственные функции можно выразить через гипергеометрическую функцию ${}_2F_1(a, b, c; w)$, свойства которой хорошо изучены [103].

Заметим, что оператор H^s (2.15) инвариантен относительно замены $(\beta, g) \rightarrow (-\beta, 1-g)$. Поэтому, общее решение уравнения (2.18) представляется в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda^{\text{gen}}(z) = & A {}_2F_1\left(s + i\lambda, s - i\lambda, s + g; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right) \\ & + B {}_2F_1\left(s + i\lambda, s - i\lambda, 1 + s - g; \frac{1}{2} - \frac{iz}{2\beta}\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Теперь вспомним две возможных области значений (2.16) для параметра β . Так как у функции ${}_2F_1(a, b, c; w)$ есть разрез вдоль действительной оси от $w = 1$ до ∞ , то в случае $\beta \in i\mathbb{R}$ оба линейно независимых решения в (2.19) аналитичны в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$. С другой стороны, если $\beta \in \mathbb{R}$, то лишь первое слагаемое удовлетворяет этому требованию. Для простоты мы рассматриваем второй случай и без потери общности полагаем $\beta > 0$.

Второе условие в (2.14) также вводится для упрощения. Как будет показано в разделе 2.5.1, оно исключает возможность дискретного спектра.

2.1.2 Самосопряженность квантовых интегралов движения

Так как матрицы монодромии для $SL(2, \mathbb{R})$ и $SL(2, \mathbb{C})$ цепочек формально совпадают, то для B -оператора по-прежнему верна формула (1.42) (с точностью до замены $\gamma = i\beta$)

$$\begin{aligned} B_n(u) = & (-1)^n i\beta \left(g - \frac{1}{2} \right) (d_n(-u) b_n(u) - b_n(-u) d_n(u)) \\ & + (-1)^n \left(u - \frac{1}{2} \right) (d_n(-u) d_n(u) + \beta^2 b_n(-u) b_n(u)), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $b_n(u)$ и $d_n(u)$ – элементы матрицы монодромии $t_n(u)$ для $SL(2, \mathbb{R})$ цепочки А-типа [36]

$$t_n(u) = L_1(u) \cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} a_n(u) & b_n(u) \\ c_n(u) & d_n(u) \end{pmatrix}.$$

Положим для удобства спектральный параметр u вещественным: $u \in \mathbb{R}$. Из антиэрмитовости генераторов (2.3) получаем следующее правило сопряжения элементов L -оператора (2.10) относительно скалярного произведения (2.9)

$$(L_k)_{ij}^\dagger(u) = -(L_k)_{ij}(-u).$$

Из него следуют формулы для сопряжения b - и d -элементов матрицы $t_n(u)$

$$b_n^\dagger(u) = (-1)^n b_n(-u), \quad d_n^\dagger(u) = (-1)^n d_n(-u). \quad (2.21)$$

С учетом введенных условий (2.14) на параметры β , g , из соотношений (2.20) и (2.21) следует самосопряженность B -оператора: $B_n^\dagger(u) = B(u)$. Отсюда следует, что интегралы движения

$$H_k = \frac{1}{(2k)!} \left. \frac{\partial^{2k}}{\partial u^{2k}} \right|_{u=0} \frac{B_n(u)}{u - \frac{1}{2}},$$

определяемые формулой (2.13), также являются самосопряженными операторами.

2.2 Полученные результаты

2.2.1 Одночастичная задача

Сформулируем основные результаты, касающиеся цепочки из одного узла. Как обсуждалось в предыдущем разделе, в этом случае спектральная задача для B -оператора

$$B(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right) (u^2 - H^s) \quad (2.22)$$

сводится к аналогичной задаче

$$H^s \Psi_\lambda(z) = -\lambda^2 \Psi_\lambda(z). \quad (2.23)$$

для одночастичного гамильтониана

$$\begin{aligned} H^s &= S^2 + \beta^2 S_-^2 - 2i\beta \left(g - \frac{1}{2}\right) S_- \\ &= (z^2 + \beta^2) \partial_z^2 + (2s + 1)z \partial_z + 2i\beta \left(g - \frac{1}{2}\right) \partial_z + s^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Установлено, что при условиях (2.14) на параметры K -матрицы собственные функции оператора H^s аналитичны в верхней полуплоскости и задаются формулой

$$\Psi_\lambda(z) = {}_2F_1\left(s + i\lambda, s - i\lambda, s + g; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right). \quad (2.25)$$

Заметим, что так как $s + g > 1/2$, то это решение хорошо определено. Также отметим, что функция (2.25) симметрична относительно замены $\lambda \rightarrow -\lambda$, поэтому соответствующее собственное значение $-\lambda^2$ (2.23) невырождено.

Как и в случае спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{C})$ ВС-типа, собственные функции для одного узла выражаются через \mathcal{K} -оператор, действующий на функциях одной переменной z и удовлетворяющий уравнению отражения с K -матрицей (2.7) и L -оператором (2.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s, x) L(u + x - 1, u - s) K(u) L(u + s - 1, u - x) \\ = L(u + s - 1, u - x) K(u) L(u + x - 1, u - s) \mathcal{K}(s, x). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Кроме того, оператор отражения играет важную роль в индуктивной конструкции многочастичных собственных функций. Через него выражается повышающий оператор, переводящий собственную функцию для цепочки из $n - 1$ узла в функцию для n узлов.

Как было показано в разделе 1.4, одним из следствий матричного уравнения (2.26) является соотношение

$$H^s \mathcal{K}(s, x) = \mathcal{K}(s, x) H^x. \quad (2.27)$$

То есть, оператор $\mathcal{K}(s, x)$ сплетает гамильтонианы (2.24), соответствующие различным спинам. Действуя обеими частями уравнения (2.27) на функцию, тождественно равную 1, получаем

$$H^s \mathcal{K}(s, x) \cdot 1 = x^2 \mathcal{K}(s, x) \cdot 1.$$

Таким образом, $\mathcal{K}(s, x) \cdot 1$ является собственной функцией гамильтониана H^s , а значит и B -оператора (2.22).

В рассматриваемом случае спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{R})$ для оператора отражения получены три формулы. Первая найдена в разделе 2.3.1, посвященном решению определяющего уравнения (2.26)

$$\mathcal{K}(s, x) = \frac{\Gamma(N + \frac{x-s}{2} + g)}{\Gamma(N + \frac{s-x}{2} + g)}, \quad N = \frac{1}{2i\beta} [(z^2 + \beta^2)\partial_z + (s+x)z]. \quad (2.28)$$

В разделе 2.3.2 формула (2.28) переписана в виде

$$\mathcal{K}(s, x) = (2i\beta)^{s-x} (z + i\beta)^{g-s} \frac{\Gamma((z - i\beta)\partial_z + x + g)}{\Gamma((z - i\beta)\partial_z + s + g)} (z + i\beta)^{x-g}. \quad (2.29)$$

Явное выражение для действия операторов такого вида на функцию $\psi(z)$, аналитическую в верхней полуплоскости, можно записать при помощи стандартного бета-интеграла [103]. Для представления (2.29) это выражение имеет вид

$$[\mathcal{K}(s, x) \psi](z) = \frac{(2i\beta)^{s-x}}{\Gamma(s-x)} (z+i\beta)^{g-s} \int_0^1 dt (1-t)^{s-x-1} t^{g+x-1} \times (t(z-i\beta) + 2i\beta)^{x-g} \psi(t(z-i\beta) + i\beta), \quad (2.30)$$

а для (2.28) оно дается формулой (2.66). При помощи (2.30) в разделе 2.4 доказано, что собственные функции, построенные с использованием оператора отражения, совпадают с функциями $\Psi_\lambda(z)$ (2.25)

$$\mathcal{K}(s, i\lambda) \cdot 1 = C(s, i\lambda) {}_2F_1\left(s+i\lambda, s-i\lambda, s+g; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right) \quad (2.31)$$

с точностью до нормировочного коэффициента

$$C(s, i\lambda) = \frac{\Gamma(g+i\lambda)}{\Gamma(g+s)}.$$

Наконец, в разделе 2.3.3 выведено третье представление для оператора отражения через интеграл по верхней полуплоскости

$$[\mathcal{K}(s, x) \psi](z) = e^{2\pi is} (2i\beta)^{s-x} \frac{\Gamma(g+x) \Gamma(3s-g)}{\Gamma^2(2s)} (z+i\beta)^{g-s} \times \int \mathcal{D}w \mathcal{D}v (z-\bar{v})^{-g-x} (i\beta-\bar{v})^{x-s} (v-\bar{w})^{g-3s} (w+i\beta)^{x-g} \psi(w). \quad (2.32)$$

Как и в случае спиновой цепочки с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$, интегралы вида (2.32) можно представить через диаграммы. Соответствующая графическая техника описана в приложении Б. Диаграммное представление для оператора отражения (2.32) и собственных функций (2.25) приведено на Рис. 2.1 и Рис. Б.4. При помощи диаграммного подхода доказательство различных свойств собственных функций сводится к простым графическим преобразованиям. Эта техника играла ключевую роль при изучении других спиновых цепочек с группой симметрии $SL(2, \mathbb{R})$ [36, 68].

Аналог формулы для оператора отражения (2.28) уже был получен в разделе 3.3 работы [74]. В конце раздела 2.3.1 доказана эквивалентность выражения для \mathcal{K} -оператора (3.23) из [74] и представления (2.28).

В разделе 1.7 доказано, что собственные функции $\Psi_\lambda(z)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ образуют ортогональный набор относительно скалярного произведения (2.4)

$$\langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle = \mu^{-1}(\lambda) \frac{\delta(\lambda - \rho) + \delta(\lambda + \rho)}{2},$$

где $\delta(\lambda)$ – дельта-функция Дирака на вещественной оси, и нормировочный коэффициент

имеет вид

$$\mu(\lambda) = \frac{1}{4\pi (2\beta)^{2s} \Gamma(2s)} \left| \frac{\Gamma^2(s + i\lambda) \Gamma(g + i\lambda)}{\Gamma(s + g) \Gamma(2i\lambda)} \right|^2.$$

Приведены два доказательства: с использованием асимптотики собственных функций и на языке диаграмм.

В разделе 1.8 при помощи представления Меллина-Барнса для гипергеометрической функции доказано соотношение полноты

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda \mu(\lambda) \Psi_{\lambda}(z) \overline{\Psi_{\lambda}(w)} = \frac{e^{i\pi s}}{(z - \bar{w})^{2s}}. \quad (2.33)$$

Правая часть (2.33) представляет собой ядро тождественного оператора в гильбертовом пространстве модели

$$\psi(z) = \int \mathcal{D}z \frac{e^{i\pi s}}{(z - \bar{w})^{2s}} \psi(w), \quad (2.34)$$

называемое *воспроизводящим ядром* [36].

2.2.2 Многочастичная задача

Сформулируем полученные результаты для случая n частиц. Схема построения собственных функций копирует конструкцию для спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{C})$, описанную в разделе 1.5. В соответствии с (2.13), спектральная задача для B -оператора имеет вид

$$B_n(u) \Psi_{\lambda_n}(z_n) = \left(u - \frac{1}{2}\right) \prod_{j=1}^n (u^2 + \lambda_j^2) \Psi_{\lambda_n}(z_n), \quad (2.35)$$

где используются следующие компактные обозначения для наборов координатных и спектральных переменных

$$z_n = (z_1, \dots, z_n), \quad \lambda_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Как и в случае $SL(2, \mathbb{C})$, собственные функции строятся при помощи оператора отражения и \mathcal{R} -оператора $\mathcal{R}_{ij}(x)$, который действует на функциях переменных z_i и z_j и переставляет аргументы в произведении двух L -операторов

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{ij}(s, x) L_i(u + s - 1, u - s) L_j(u + s - 1, u - x) \\ &= L_i(u + s - 1, u - x) L_j(u + s - 1, u - s) \mathcal{R}_{ij}(s, x). \end{aligned}$$

В случае $SL(2, \mathbb{R})$ его можно представить в формальном виде следующим образом [61]

$$\mathcal{R}_{ij}(s, x) = \frac{\Gamma((z_i - z_j)\partial_{z_i} + s + x)}{\Gamma((z_i - z_j)\partial_{z_i} + 2s)}. \quad (2.36)$$

Явную формулу для действия этого оператора на функцию можно получить при помощи бета-интеграла.

Собственные функции (2.35) строятся индуктивно при помощи повышающего оператора

$$\Lambda_n(x) = \mathcal{R}_{n\,n-1}(x) \cdots \mathcal{R}_{21}(x) \mathcal{K}_1(x) \mathcal{R}_{12}(x) \cdots \mathcal{R}_{n-1\,n}(x), \quad (2.37)$$

переводящего функцию для $n - 1$ узла в функцию для n узлов. Оператор $\mathcal{K}_1(x)$ действует на функциях переменной z_1 , и в (2.37) для краткости не указывается зависимость от спина s . Чтобы получить собственную функцию, нужно подействовать произведением Λ -операторов на функцию, тождественно равную единице,

$$\Psi_{\lambda_n}(\mathbf{z}_n) = \Lambda_n(i\lambda_n) \Lambda_{n-1}(i\lambda_{n-1}) \cdots \Lambda_1(i\lambda_1) \cdot 1. \quad (2.38)$$

Отметим, что в простейшем случае единичной K -матрицы это выражение получено в [68].

Уравнение (2.35) для функции (2.38) следует из соотношения

$$B_n(u) \Lambda_n(i\lambda) \Psi(z_1 \dots z_{n-1}) = (u^2 + \lambda^2) \Lambda_n(i\lambda) B_{n-1}(u) \Psi(z_1 \dots z_{n-1}), \quad (2.39)$$

и уравнения для одночастичной функции

$$B_1(u) \Lambda_1(i\lambda_1) \cdot 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right) (u^2 + \lambda_1^2) \Lambda_1(i\lambda_1) \cdot 1.$$

Равенство (2.39) выполняется для произвольной функции $\Psi(z_1 \dots z_{n-1})$, не зависящей от z_n . Его вывод копирует доказательство аналогичного соотношения (1.88), приведенное в разделе 1.5. Вывод (2.35) в точности повторяет выкладку (1.89).

Так как собственное число B -оператора в (2.35) симметрично относительно перестановок спектральных переменных и отражений $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$, то по аналогии со случаем $SL(2, \mathbb{C})$ логично предположить, что собственные функции обладают той же симметрией

$$\Psi_{\tau\lambda_n}(\mathbf{z}_n) = \Psi_{\lambda_n}(\mathbf{z}_n), \quad \Psi_{\sigma_k\lambda_n}(\mathbf{z}_n) = \Psi_{\lambda_n}(\mathbf{z}_n), \quad (2.40)$$

где $\tau \in \mathfrak{S}_n$ – перестановка, $\tau\lambda_n = (\lambda_{\tau(1)}, \dots, \lambda_{\tau(n)})$ и $\sigma_k\lambda_n = (\lambda_1, \dots, -\lambda_k, \dots, \lambda_n)$.

Кроме того, на основании одночастичного случая уместно предположить, что полный ортогональный набор собственных функций оператора $B_n(u)$ в гильбертовом пространстве рассматриваемой задачи образуют функции Ψ_{λ_n} с вещественными значениями спектральных переменных $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Это предположение в том числе согласуется с вещественностью собственных чисел самосопряженных операторов H_k (2.13), которые, согласно (2.35), являются симметрическими многочленами от $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$. С учетом симметрий (2.40), соотно-

шения ортогональности и полноты должны иметь вид

$$\langle \Psi_{\rho_n} | \Psi_{\lambda_n} \rangle = \mu^{-1}(\lambda_n) \delta(\lambda_n, \rho_n), \quad (2.41)$$

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda_1 \dots d\lambda_n \mu(\lambda_n) \Psi_{\lambda_n}(z_n) \overline{\Psi_{\lambda_n}(w_n)} = \prod_{k=1}^n \frac{e^{i\pi s}}{(z_k - \bar{w}_k)^{2s}}, \quad (2.42)$$

где симметричная дельта функция определяется следующим образом

$$\delta(\lambda_n, \rho_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\substack{\tau \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma_1, \dots, \sigma_n = \pm 1}} \delta(\lambda_1 - \sigma_1 \rho_{\tau(1)}) \dots \delta(\lambda_n - \sigma_n \rho_{\tau(n)}).$$

Мера интегрирования в соотношении полноты $\mu(\lambda_n)$ находится из соотношения ортогональности. Проверка свойств (2.40), (2.41) и (2.42) в случае $n \geq 2$ является открытой задачей.

2.3 Оператор отражения

2.3.1 Решение уравнения отражения

Оператор $\mathcal{K}(s, x)$, действующий на функциях $\psi(z)$, является решением уравнения отражения

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s, x) L(u+x-1, u-s) K(u) L(u+s-1, u-x) \\ = L(u+s-1, u-x) K(u) L(u+x-1, u-s) \mathcal{K}(s, x), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где 2×2 матрицы $L(u_1, u_2)$ и $K(u)$ определены в (2.6) и (2.7). В разделе 1.4 это матричное соотношение было сведено к системе из трех операторных уравнений

$$\mathcal{K} N = N \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} H^x = H^s \mathcal{K}, \quad \mathcal{K} I^{x,s} = I^{s,x} \mathcal{K}, \quad (2.44)$$

где операторы N , H^x и $I^{x,s}$ определяются следующим образом

$$N = \frac{1}{2i\beta} (J_+ - \beta^2 J_-), \quad (2.45)$$

$$H^s = \left(J + \frac{s-x}{2} \right)^2 + \beta^2 J_-^2 - 2i\beta \left(g - \frac{1}{2} \right) J_-, \quad (2.46)$$

$$I^{s,x} = J J_+ - \beta^2 J_- J + \frac{s-x}{2} (J_+ + \beta^2 J_-) + 2i\beta \left(g - \frac{1}{2} \right) J \quad (2.47)$$

через генераторы представления алгебры Ли $sl(2)$ спина $\frac{s+x}{2}$

$$J = z\partial_z + \frac{s+x}{2}, \quad J_- = -\partial_z, \quad J_+ = z^2\partial_z + (s+x)z,$$

удовлетворяющие стандартным коммутационным соотношениям

$$[J_+, J_-] = 2J, \quad [J, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}. \quad (2.48)$$

Заметим, что первый оператор симметричен по s, x

$$N = \frac{1}{2i\beta} [(z^2 + \beta^2)\partial_z + (s+x)z].$$

Второй оператор H^s не зависит от x и совпадает с одночастичным гамильтонианом (2.24).

Согласно (2.44), оператор отражения коммутирует с N . Поэтому, его можно искать в виде некоторой функции от N

$$\mathcal{K} = f(N).$$

Выведем уравнения на функцию f из двух оставшихся соотношений в (1.74). Обозначим

$$N_{\pm} = -J \pm \frac{1}{2i\beta}(J_+ + \beta^2 J_-).$$

Операторы N, N_{\pm} являются линейными комбинациями генераторов J, J_{\pm} , и для них выполняются те же коммутационные соотношения (2.48)

$$[N_+, N_-] = 2N, \quad [N, N_{\pm}] = \pm N_{\pm}. \quad (2.49)$$

Из второго соотношения в (2.49) получаем

$$f(N) N_{\pm} = N_{\pm} f(N \pm 1). \quad (2.50)$$

Теперь выразим старые генераторы через новые

$$J_+ = \frac{i\beta}{2}(N_+ - N_- + 2N),$$

$$J_- = \frac{i}{2\beta}(N_+ - N_- - 2N), \quad J = -\frac{1}{2}(N_+ + N_-)$$

и, используя эти соотношения, перепишем операторы H^s (2.46) и $I^{s,x}$ (2.47) через новые

генераторы

$$\begin{aligned}
H^s &= \left(N + \frac{x-s}{2} - 1 + g \right) N_+ + \left(-N + \frac{x-s}{2} - g \right) N_- \\
&\quad - 2N^2 - (2g-1)N + \frac{s^2 + x^2 - s - x}{2}, \\
\frac{1}{i\beta} I^{s,x} &= - \left(N + \frac{x-s}{2} - 1 + g \right) N_+ + \left(-N + \frac{x-s}{2} - g \right) N_- + N.
\end{aligned}$$

При помощи двух последних формул и соотношения (2.50) равенства

$$f(N) H^x = H^s f(N), \quad f(N) I^{x,s} = I^{s,x} f(N)$$

можно свести к одному разностному уравнению

$$\frac{f(N+1)}{f(N)} = \frac{N + \frac{x-s}{2} + g}{N + \frac{s-x}{2} + g}. \quad (2.51)$$

Его решение выражается через гамма-функцию

$$\mathcal{K}(s, x) = f(N) = \frac{\Gamma\left(N + \frac{x-s}{2} + g\right)}{\Gamma\left(N + \frac{s-x}{2} + g\right)}. \quad (2.52)$$

Если умножить (2.52) на любую периодическую функцию от N с периодом, равным единице, то получившееся выражение также будет решением (2.51). В частности, (2.52) остается решением (2.51) при замене $(\beta, g) \rightarrow (-\beta, 1-g)$ (при этом N заменяется на $-N$ в соответствии с (2.45)), так как изначальное уравнение (2.43) инвариантно относительно этого преобразования. Тем не менее, требованиям квантовой задачи удовлетворяет именно решение (2.52), поскольку в рассматриваемом нами случае $\beta > 0$ (условие (2.14)) получаемые при помощи него собственные функции (2.31) одночастичного гамильтониана H^s (2.24) аналитичны в верхней полуплоскости, подробности приведены в разделе 2.4.

Теперь покажем, что выражение (2.52) эквивалентно формуле для оператора отражения (3.23) из [74]. В первую очередь, отметим, что K -матрица, рассматриваемая в той работе

$$\tilde{K}\left(u + \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 u & q_3 u \\ q_4 u & q_1 - q_2 u \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

зависит от пяти параметров (включая спектральный), в отличие от трехпараметрической матрицы (2.7)

$$K\left(u + \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} i\beta\left(g - \frac{1}{2}\right) & u \\ -\beta^2 u & i\beta\left(g - \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Тем не менее, дополнительные параметры можно убрать, сопрягая (2.53)

$$\tilde{K}\left(u + \frac{1}{2}\right) = G \begin{pmatrix} q_1 & u \\ (q_2^2 + q_3 q_4) u & q_1 \end{pmatrix} G^{-1} \quad (2.54)$$

матрицей

$$G = e^{-(q_2/q_3)\sigma_-} q_3^{\sigma_3/2}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для L -оператора (2.1)

$$L(u) = \begin{pmatrix} u + S & S_- \\ S_+ & u - S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + z\partial_z + s & -\partial_z \\ z^2\partial_z + 2sz & u - z\partial_z - s \end{pmatrix}$$

сопряжением матрицей G эквивалентно преобразованию координаты z

$$G^{-1} L(u) G = e^{(q_2/q_3)\partial_z} q_3^{z\partial_z} L(u) q_3^{-z\partial_z} e^{-(q_2/q_3)\partial_z}, \quad (2.55)$$

где

$$e^{(q_2/q_3)\partial_z} \psi(z) = \psi(z - q_2/q_3), \quad q_3^{z\partial_z} \psi(z) = \psi(q_3 z).$$

Таким образом, далее мы отождествляем

$$q_1 = i\beta \left(g - \frac{1}{2}\right), \quad q_2^2 + q_3 q_4 = -\beta^2. \quad (2.56)$$

Тогда соответствующие матрицы монодромии вида (2.11)

$$T(u) = L_n(u) \cdots L_1(u) K(u) L_1(u) \cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}(u) = L_n(u) \cdots L_1(u) \tilde{K}(u) L_1(u) \cdots L_n(u) = \begin{pmatrix} \tilde{A}(u) & \tilde{B}(u) \\ \tilde{C}(u) & \tilde{D}(u) \end{pmatrix}$$

связаны через преобразование подобия

$$\tilde{T}(u) = Z G T(u) G^{-1} Z^{-1}, \quad (2.57)$$

где Z – оператор аффинного преобразования координат

$$Z = e^{(q_2/q_3)(\partial_{z_1} + \dots + \partial_{z_n})} q_3^{z_1\partial_{z_1} + \dots + z_n\partial_{z_n}}.$$

Одним из следствий соотношения (2.57) является

$$q_3 \tilde{B}(u) = Z B(u) Z^{-1},$$

то есть операторы $\tilde{B}(u)$ и $B(u)$ эквивалентны с точностью до замены координат.

Теперь заметим, что определяющее соотношение (2.26) для найденного нами оператора отражения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s, x) M(u+v) K(u) M(u-v) \\ = M(u-v) K(u) M(u+v) \mathcal{K}(s, x), \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $M(u)$ – L -оператор с генераторами спина $(s+x)/2$

$$M(u) = \begin{pmatrix} u+J & J_- \\ J_+ & u-J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+z\partial_z + \frac{s+x}{2} & -\partial_z \\ z^2\partial_z + (s+x)z & u-z\partial_z - \frac{s+x}{2} \end{pmatrix},$$

и $v = (x-s)/2$. Перепишем в (2.58) матрицу $K(u)$ через $\tilde{K}(u)$ при помощи (2.54), далее используем (2.55) и свойство L -оператора

$$M(u) M(1-u) = (u-s)(1-u-s)\mathbf{1}$$

и сдвинем переменную $u \rightarrow u + \frac{1}{2}$, в результате получим

$$\begin{aligned} M\left(\frac{1}{2} + v - u\right) \tilde{\mathcal{K}}(s, x) M\left(\frac{1}{2} + v + u\right) \tilde{K}\left(u + \frac{1}{2}\right) \\ = \tilde{K}\left(u + \frac{1}{2}\right) M\left(\frac{1}{2} + v + u\right) \tilde{\mathcal{K}}(s, x) M\left(\frac{1}{2} + v - u\right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

где

$$\tilde{\mathcal{K}}(s, x) = q_3^J e^{-(q_2/q_3)J_-} \mathcal{K}(s, x) e^{(q_2/q_3)J_-} q_3^{-J}.$$

Уравнение (2.59) эквивалентно (3.13) из [74], и согласно формуле (3.23) из того же источника, его решение имеет вид

$$\tilde{\mathcal{K}}(s, x) = e^{bJ_+} e^{aJ_-} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + J + 2\frac{q_1}{c} + \frac{x-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + J + 2\frac{q_1}{c} - \frac{x-s}{2}\right)} e^{-aJ_-} e^{-bJ_+},$$

где числа a, b, c определяются системой уравнений

$$q_2 = \frac{1}{2}(1+2ab)c, \quad q_3 = -(1+ab)bc, \quad q_4 = ac. \quad (2.60)$$

Таким образом, согласно [74]

$$\mathcal{K}(s, x) = e^{(q_2/q_3)J_-} q_3^{-J} e^{bJ_+} e^{aJ_-} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + J + 2\frac{q_1}{c} + \frac{x-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + J + 2\frac{q_1}{c} - \frac{x-s}{2}\right)} e^{-aJ_-} e^{-bJ_+} q_3^J e^{-(q_2/q_3)J_-}. \quad (2.61)$$

Напомним, что оператор N представляется в виде (2.45)

$$N = \frac{1}{2i\beta}(J_+ - \beta^2 J_-)$$

Чтобы доказать эквивалентность представления (2.61) для \mathcal{K} -оператора и полученной формулы (2.52), нужно сопрячь гамма-функции в (2.61) экспоненциальными множителями, используя тождества

$$e^{\lambda J_{\pm}} J e^{-\lambda J_{\pm}} = J \mp \lambda J_{\pm}, \quad e^{\lambda J_{\pm}} J_{\mp} e^{-\lambda J_{\pm}} = J_{\mp} \pm 2\lambda J - \lambda^2 J_{\pm}, \quad q_3^{-J} J_{\pm} q_3^J = q_3^{\mp 1} J_{\pm},$$

которые несложно доказать, дифференцируя левые части по λ и используя коммутационные соотношения для генераторов J , J_{\pm} . Далее нужно подставить явные выражения (2.56) через β и g , а также $c = 2\sqrt{q_2^2 + q_3 q_4} = 2i\beta$ (согласно (2.60)).

2.3.2 Представление через бета-интеграл

В этом разделе получена явная формула для действия \mathcal{K} -оператора (2.52)

$$\mathcal{K}(s, x) = \frac{\Gamma(N + \frac{x-s}{2} + g)}{\Gamma(N + \frac{s-x}{2} + g)}, \quad N = \frac{1}{2i\beta} [(z^2 + \beta^2)\partial_z + (s+x)z]. \quad (2.62)$$

Вдобавок, чтобы связать одночастичные собственные функции (2.31) с гипергеометрической функцией, для этого оператора будет выведена формула

$$\mathcal{K}(s, x) = (2i\beta)^{s-x} (z+i\beta)^{g-s} \frac{\Gamma((z-i\beta)\partial_z + x + g)}{\Gamma((z-i\beta)\partial_z + s + g)} (z+i\beta)^{x-g}. \quad (2.63)$$

В обоих случаях используется бета-интеграл Эйлера [103].

Во-первых, заметим, что

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2i\beta} [(z^2 + \beta^2)\partial_z + (s+x)z] \\ &= (z+i\beta)^{-s-x} \left(\frac{1}{2i\beta} (z^2 + \beta^2)\partial_z + \frac{s+x}{2} \right) (z+i\beta)^{s+x}. \end{aligned}$$

Используя последнюю формулу, выражение (2.62) можно преобразовать к виду

$$\mathcal{K} = (z+i\beta)^{-s-x} \frac{\Gamma(\frac{1}{2i\beta}(z^2 + \beta^2)\partial_z + x + g)}{\Gamma(\frac{1}{2i\beta}(z^2 + \beta^2)\partial_z + s + g)} (z+i\beta)^{s+x}.$$

Переписывая отношение двух гамма-функций через бета-интеграл, получаем

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\Gamma(s-x)} (z+i\beta)^{-s-x} \int_0^1 dt (1-t)^{s-x-1} t^{g+x-1} t^{\frac{1}{2i\beta}(z^2+\beta^2)\partial_z} (z+i\beta)^{s+x}. \quad (2.64)$$

При замене переменной

$$\zeta = \frac{z-i\beta}{z+i\beta}, \quad z = i\beta \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

оператор в подынтегральном выражении в (2.64) заметно упрощается

$$t^{\frac{1}{2i\beta}(z^2+\beta^2)\partial_z} = t^{\zeta\partial_\zeta}.$$

Подействуем этим оператором на произвольную функцию $\psi(z)$

$$t^{\frac{1}{2i\beta}(z^2+\beta^2)\partial_z} \psi(z) = t^{\zeta\partial_\zeta} \psi\left(i\beta \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \psi\left(i\beta \frac{z+i\beta+t(z-i\beta)}{z+i\beta-t(z-i\beta)}\right). \quad (2.65)$$

Заметим, что при $\text{Im } z \geq 0$, $t \in [0, 1]$ и $\beta > 0$ верно следующее неравенство

$$\text{Im}\left(i\beta \frac{z+i\beta+t(z-i\beta)}{z+i\beta-t(z-i\beta)}\right) \geq 0,$$

которое переходит в равенство тогда и только тогда, когда $\text{Im } z = 0$, $t = 1$. Следовательно, если функция $\psi(z)$ аналитична в верхней полуплоскости, то преобразованный аргумент в правой части (2.65) также лежит в области аналитичности. Действуя на такую функцию оператором (2.64), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \psi(z) &= \frac{(2i\beta)^{s+x}}{\Gamma(s-x)} \int_0^1 dt (1-t)^{s-x-1} t^{g+x-1} \\ &\times (z+i\beta-t(z-i\beta))^{-s-x} \psi\left(i\beta \frac{z+i\beta+t(z-i\beta)}{z+i\beta-t(z-i\beta)}\right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Таким образом, найдена явная формула для \mathcal{K} -оператора (2.62).

Для того, чтобы вывести формулу (2.63), сделаем замену переменной $t \rightarrow u$ в (2.66)

$$u = \frac{2i\beta t}{z+i\beta-t(z-i\beta)}. \quad (2.67)$$

В результате интегральная формула принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \psi(z) &= \frac{(2i\beta)^{s-x}}{\Gamma(s-x)} (z+i\beta)^{g-s} \int_C du (1-u)^{s-x-1} u^{g+x-1} \\ &\times (u(z-i\beta) + 2i\beta)^{x-g} \psi(u(z-i\beta) + i\beta), \end{aligned}$$

где контур C (соединяющий точки $u = 0$ и $u = 1$) – образ отрезка $[0, 1]$ при отображении $t \mapsto$

$u(t)$. Произведение двух последних множителей под интегралом можно переписать в виде

$$(u(z - i\beta) + 2i\beta)^{x-g} \psi(u(z - i\beta) + i\beta) = u^{(z-i\beta)\partial_z} (z + i\beta)^{x-g} \psi(z).$$

Покажем, что контур C можно деформировать до отрезка $[0, 1]$, не задевая особых точек подынтегральной функции. При $\text{Im } z \geq 0$, $t \in [0, 1]$ и $\beta > 0$ новая переменная u (2.67) обладает следующими свойствами

$$\text{Re } u \in [0, 1], \quad \text{sign}(\text{Im } u) = \text{sign}(\text{Re } z).$$

Поэтому,

$$\text{Im}(u(z - i\beta) + i\beta) = \beta(1 - \text{Re } u) + \text{Im } z \text{Re } u + \text{Re } z \text{Im } u \geq 0,$$

и устремляя $|\text{Im } u| \searrow 0$, мы остаемся в области аналитичности функции

$$(u(z - i\beta) + 2i\beta)^{x-g} \psi(u(z - i\beta) + i\beta).$$

Таким образом, деформируя контур, получаем формулу

$$\mathcal{K} \psi(z) = \frac{(2i\beta)^{s-x}}{\Gamma(s-x)} (z + i\beta)^{g-s} \int_0^1 du (1-u)^{s-x-1} u^{g+x-1} u^{(z-i\beta)\partial_z} (z + i\beta)^{x-g} \psi(z), \quad (2.68)$$

эквивалентную (2.63).

2.3.3 Диаграммное представление

В приложении Б описана полезная диаграммная техника, позволяющая вычислять интегралы при помощи простых диаграммных преобразований. Все диаграммы, соответствующие спиновой цепочке $SL(2, \mathbb{R})$, являются графическим представлением интегралов по верхней полуплоскости с мерой (2.5).

В этом разделе получена диаграмма для ядра оператора отражения, она приведена на Рис. 2.1. Ей соответствует следующее интегральное выражение

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}(s, x) \psi](z) &= e^{2\pi i s} (2i\beta)^{s-x} \frac{\Gamma(g+x)\Gamma(3s-g)}{\Gamma^2(2s)} (z + i\beta)^{g-s} \\ &\times \int \mathcal{D}w \mathcal{D}v \frac{\psi(w)}{(z - \bar{v})^{g+x} (i\beta - \bar{v})^{s-x} (v - \bar{w})^{3s-g} (w + i\beta)^{g-x}}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Как и все остальные диаграммы, она содержит всю информацию с точностью до коэффициента перед интегралом.

Для того, чтобы вывести (2.69), используем формулу (2.68). Оператор отражения рас-

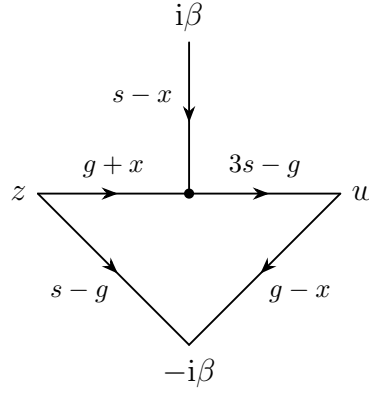


Рисунок 2.1 – Ядро оператора отражения

кладывается в произведение трех операторов, поэтому его ядро факторизуется аналогичным образом

$$\mathcal{K} \psi(z) = \int \mathcal{D}w (z + i\beta)^{g-s} \mathcal{K}(z, \bar{w}) (w + i\beta)^{x-g} \psi(w). \quad (2.70)$$

Для нахождения функции $\mathcal{K}(z, \bar{w})$ используем воспроизводящее ядро (2.34) и перепишем интеграл (2.68) в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \psi(z) &= \frac{(2i\beta)^{s-x}}{\Gamma(s-x)} (z + i\beta)^{g-s} \int_0^1 du (1-u)^{s-x-1} u^{g+x-1} \\ &\times u^{(z-i\beta)\partial_z} \int \mathcal{D}w \frac{e^{i\pi s}}{(z-\bar{w})^{2s}} (w + i\beta)^{x-g} \psi(w). \end{aligned}$$

Далее используем формулу

$$u^{(z-i\beta)\partial_z} \frac{1}{(z-\bar{w})^{2s}} = \frac{1}{(u(z-i\beta) + i\beta - \bar{w})^{2s}}.$$

Таким образом, функция $\mathcal{K}(z, \bar{w})$, определяемая формулой (2.70), выражается в следующем виде

$$\mathcal{K}(z, \bar{w}) = e^{i\pi s} \frac{(2i\beta)^{s-x}}{\Gamma(s-x)} \int_0^1 du \frac{(1-u)^{s-x-1} u^{g+x-1}}{(u(z-i\beta) + i\beta - \bar{w})^{2s}}. \quad (2.71)$$

Наконец, используя тождество (Б.6), доказанное в приложении Б

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}v \frac{1}{(z-\bar{v})^b (i\beta - \bar{v})^{c-b} (v - \bar{w})^{2s+a-c}} \\ &= e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(a)\Gamma(2s)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(2s+a-c)} \int_0^1 du \frac{(1-u)^{c-b-1} u^{b-1}}{(u(z-i\beta) + i\beta - \bar{w})^a}, \end{aligned}$$

перепишем формулу (2.71) через интеграл по верхней полуплоскости

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z, \bar{w}) &= e^{2i\pi s} (2i\beta)^{s-x} \frac{\Gamma(g+x)\Gamma(3s-g)}{\Gamma^2(2s)} \\ &\times \int \mathcal{D}v \frac{1}{(z-\bar{v})^{g+x} (i\beta-\bar{v})^{s-x} (v-\bar{w})^{3s-g}}. \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение для $\mathcal{K}(z, \bar{w})$ в формулу (2.70), получаем (2.69).

2.4 Связь оператора отражения с гипергеометрической функцией

В этом разделе будет доказано, что при действии оператора отражения на функцию, тождественно равную 1, получается гипергеометрическая функция

$$\mathcal{K}(s, x) \cdot 1 = C(s, x) {}_2F_1\left(s+x, s-x, s+g; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right), \quad (2.72)$$

где нормировочный коэффициент имеет вид

$$C(s, x) = \frac{\Gamma(g+x)}{\Gamma(g+s)}.$$

Используя представление (2.63) для \mathcal{K} -оператора, или, что то же самое, формулу (2.68), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s, x) \cdot 1 &= \frac{(2i\beta)^{s-g}}{\Gamma(s-x)} (z+i\beta)^{g-s} \\ &\times \int_0^1 du (1-u)^{s-x-1} u^{g+x-1} \left(1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right]u\right)^{x-g}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Последнее интегральное выражение – это в точности представление Эйлера для гипергеометрической функции

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(s, x) \cdot 1 &= \frac{\Gamma(x+g)}{\Gamma(s+g)} \left(1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right]\right)^{g-s} \\ &\times {}_2F_1\left(g-x, g+x, g+s; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Интеграл в (2.73) сходится при условиях

$$\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} x, \quad \operatorname{Re}(x+g) > 0.$$

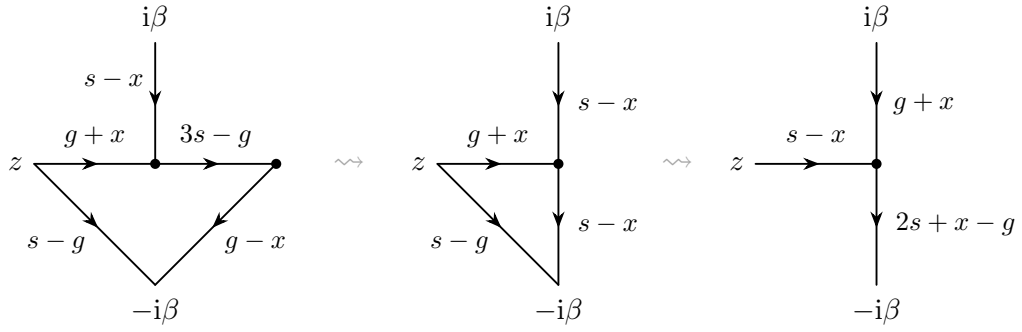


Рисунок 2.2 – Вывод представления Эйлера для гипергеометрической функции из выражения $\mathcal{K}(s, x) \cdot 1$

Эти условия выполняются при рассматриваемых нами значениях параметров

$$s > \frac{1}{2}, \quad x = i\lambda \in i\mathbb{R}, \quad g > 0.$$

Для того, чтобы получить желаемую формулу (2.72), остается лишь применить преобразование Эйлера в (2.74)

$$(1-w)^{a+b-c} {}_2F_1(a, b, c; w) = {}_2F_1(c-a, c-b, c; w).$$

Кроме того, выражение $\mathcal{K}(s, x) \cdot 1$ можно представить через гипергеометрическую функцию при помощи графического метода. Соответствующие диаграммные преобразования представлены на Рис. 2.2. Сначала используется правило цепочки (Рис. Б.2), а затем – преобразование Эйлера (Рис. Б.3). Последняя диаграмма соответствует интегральному представлению (Б.4)

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(s+x, s-x, s+g; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right) &= (2i\beta)^{s+x} e^{i\pi s} \frac{\Gamma(s+g)\Gamma(2s+x-g)}{\Gamma(s+x)\Gamma(2s)} \\ &\times \int \mathcal{D}w \frac{1}{(z-\bar{w})^{s-x} (i\beta-\bar{w})^{g+x} (w+i\beta)^{2s+x-g}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Формула (2.75) доказана в приложении Б.

2.5 Ортогональность одночастичных собственных функций

Напомним, что в случае цепочки из одного узла скалярное произведение имеет вид (2.4)

$$\langle \chi | \psi \rangle = \int \mathcal{D}z \overline{\chi(z)} \psi(z), \quad (2.76)$$

где интегрирование ведется по верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, и мера дается выражением

$$\mathcal{D}z = \frac{2s-1}{\pi} (2\text{Im } z)^{2s-2} d\text{Re } z d\text{Im } z.$$

В этом разделе приведены два доказательства ортогональности собственных функций

$$\Psi_\lambda(z) = {}_2F_1\left(s + i\lambda, s - i\lambda, s + g; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.77)$$

относительно этого скалярного произведения

$$\langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle = \mu^{-1}(\lambda) \frac{\delta(\lambda - \rho) + \delta(\lambda + \rho)}{2}. \quad (2.78)$$

Нормировочный коэффициент

$$\mu(\lambda) = \frac{1}{4\pi (2\beta)^{2s} \Gamma(2s)} \left| \frac{\Gamma^2(s + i\lambda) \Gamma(g + i\lambda)}{\Gamma(s + g) \Gamma(2i\lambda)} \right|^2$$

играет роль меры интегрирования в соотношении полноты, которое доказывается в разделе (2.6). Отметим, что собственные функции (2.77) инвариантны относительно отражения $\lambda \rightarrow -\lambda$, и дельта-функция в соотношении (2.78) соответствующим образом симметризована.

2.5.1 Доказательство через асимптотику

Для начала докажем соотношение (2.78) при помощи стандартной техники [104] из квантовой механики. Идея состоит в том, чтобы обрезать интеграл, через который выражается скалярное произведение

$$\langle \chi | \psi \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \langle \chi | \psi \rangle_R,$$

и переписать получившееся выражение через граничные члены

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle &= \lim_{R \rightarrow \infty} \langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^2 - \lambda^2} \left[\langle \Psi_\rho | H^s \Psi_\lambda \rangle_R - \langle H^s \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle_R \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^2 - \lambda^2} \left[\text{граничные члены} \right], \end{aligned}$$

где на последнем шаге применено интегрирование по частям. В результате остается лишь исследовать асимптотику граничных членов.

Для вычислений используем полярные координаты

$$z = r e^{i\varphi}.$$

В нашем случае роль параметра обрезания R играет полярный радиус

$$\langle \chi | \psi \rangle_R = \frac{2s-1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} \int_0^R dr r^{2s-1} \overline{\chi(re^{i\varphi})} \psi(re^{i\varphi}).$$

Так как гамильтониан (2.24) выражается через спиновые операторы

$$H^s = S^2 + \beta^2 S_-^2 - 2i\beta \left(g - \frac{1}{2} \right) S_-, \quad S = z\partial_z + s, \quad S_- = -\partial_z, \quad (2.79)$$

посчитаем граничные члены, возникающие от каждого такого оператора при интегрировании по частям.

Переписывая производные в полярных координатах

$$\partial_z = \frac{e^{-i\varphi}}{2} \partial_r + \frac{e^{-i\varphi}}{2ir} \partial_\varphi, \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2} \partial_r - \frac{e^{i\varphi}}{2ir} \partial_\varphi,$$

можно следующим образом выразить действие спиновых операторов на голоморфные функции

$$S\psi(z) = (z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}} + s)\psi(z) = (r\partial_r + s)\psi(z), \quad (2.80)$$

$$S_-\psi(z) = -(\partial_z + \partial_{\bar{z}})\psi(z) = \left(\frac{\sin \varphi}{r} \partial_\varphi - \cos \varphi \partial_r \right) \psi(z). \quad (2.81)$$

Теперь рассмотрим вронскианы относительно полярного радиуса и угла

$$W_r[\chi, \psi] = \chi \partial_r \psi - \psi \partial_r \chi,$$

$$W_\varphi[\chi, \psi] = \chi \partial_\varphi \psi - \psi \partial_\varphi \chi.$$

Используя (2.80), (2.81) и интегрируя по частям, получаем соотношения

$$\langle \chi | S\psi \rangle_R = \langle -S\chi | \psi \rangle_R + \frac{2s-1}{\pi} R^{2s} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} (\bar{\chi} \psi) \Big|_{r=R}, \quad (2.82)$$

$$\langle \chi | S_-\psi \rangle_R = \langle -S_-\chi | \psi \rangle_R - \frac{2s-1}{\pi} R^{2s-1} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} \cos \varphi (\bar{\chi} \psi) \Big|_{r=R}. \quad (2.83)$$

Заметим, что если функции χ, ψ убывают достаточно быстро, то граничные члены в (2.82) стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, так что спиновые операторы антиэрмитовы относительно

скалярного произведения (2.76). Применяя соотношения (2.82), (2.83) два раза, находим

$$\langle \chi | S^2 \psi \rangle_R = \langle S^2 \chi | \psi \rangle_R + \frac{2s-1}{\pi} R^{2s+1} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} W_r[\bar{\chi}, \psi] \Big|_{r=R}, \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \langle \chi | S_-^2 \psi \rangle_R &= \langle S_-^2 \chi | \psi \rangle_R + \frac{2s-1}{\pi} R^{2s-1} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} \cos^2 \varphi W_r[\bar{\chi}, \psi] \Big|_{r=R} \\ &+ \frac{2s-1}{2\pi} R^{2s-2} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-1} \cos \varphi W_\varphi[\psi, \bar{\chi}] \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Таким образом, при интегрировании по частям гамильтониана (2.79)

$$\langle \Psi_\rho | H^s \Psi_\lambda \rangle_R = \langle H^s \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle_R + \text{границные члены},$$

границные члены даются формулами (2.83), (2.84), (2.85).

Для нахождения их асимптотики при $R \rightarrow \infty$ используем хорошо известную формулу для гипергеометрической функции [103]

$${}_2F_1(a, b, c; w) \sim \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-w)^{-a} + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-w)^{-b}, \quad |w| \rightarrow \infty.$$

Из нее следует, что для собственных функций

$$\Psi_\lambda(z) = {}_2F_1\left(s + i\lambda, s - i\lambda, s + g; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right)$$

и их производных верны следующие асимптотические формулы при $|z| \rightarrow \infty$

$$\Psi_\lambda(z) \sim c(\lambda) z^{-s+i\lambda} + c(-\lambda) z^{-s-i\lambda}, \quad (2.86)$$

$$\partial_r \Psi_\lambda(z) \sim \frac{-s+i\lambda}{|z|} c(\lambda) z^{-s+i\lambda} + \frac{-s-i\lambda}{|z|} c(-\lambda) z^{-s-i\lambda}, \quad (2.87)$$

$$\partial_\varphi \Psi_\lambda(z) \sim i(-s+i\lambda) c(\lambda) z^{-s+i\lambda} + i(-s-i\lambda) c(-\lambda) z^{-s-i\lambda},$$

где коэффициент имеет вид

$$c(\lambda) = \frac{\Gamma(2i\lambda) \Gamma(s+g)}{\Gamma(s+i\lambda) \Gamma(g+i\lambda)} (2\beta)^{s-i\lambda} e^{\frac{i\pi s}{2} + \frac{\pi\lambda}{2}}. \quad (2.88)$$

Напомним, что мы ограничились случаем $g > 0$ (2.14). Заметим, что при $g < 0$ у коэффициента $c(\lambda)$ есть нули

$$\lambda = i(n+g), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

в нижней полуплоскости $\text{Im } \lambda < 0$, которые могут соответствовать дискретному спектру (как видно из асимптотики (2.86)).

Подставляя полученные асимптотические формулы для собственных функций в граничные члены (2.83), (2.84) и (2.85), заключаем, что единственный граничный член, дающий

ненулевой вклад при $R \rightarrow \infty$, возникает из матричного элемента оператора S^2 (2.84)

$$\langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle_R \sim \frac{R^{2s+1}}{\rho^2 - \lambda^2} \frac{2s-1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} W_r [\bar{\Psi}_\rho, \Psi_\lambda] \Big|_{r=R}. \quad (2.89)$$

Из формул (2.86), (2.87) следует асимптотика для вронскиана

$$W_r [\bar{\Psi}_\rho, \Psi_\lambda] \sim W_{\lambda, \rho} + W_{-\lambda, -\rho} + W_{-\lambda, \rho} + W_{\lambda, -\rho}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

где введено обозначение

$$W_{\lambda, \rho} = \frac{i(\lambda + \rho)}{|z|^{2s+1}} \overline{c(\rho)} c(\lambda) \bar{z}^{-i\rho} z^{i\lambda}.$$

Подставляя ее в (2.89), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{R^{2s+1}}{\rho^2 - \lambda^2} \frac{2s-1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} W_r [\bar{\Psi}_\rho, \Psi_\lambda] \Big|_{r=R} \\ & \sim \overline{c(\rho)} c(\lambda) \frac{iR^{i(\lambda-\rho)}}{\rho - \lambda} \frac{2s-1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} e^{-(\lambda+\rho)\varphi} \\ & + \overline{c(-\rho)} c(-\lambda) \frac{iR^{i(\rho-\lambda)}}{\lambda - \rho} \frac{2s-1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} e^{(\lambda+\rho)\varphi} \\ & + [\text{те же слагаемые с заменой } \lambda \rightarrow -\lambda]. \end{aligned}$$

Интегралы в правой части последнего выражения можно вычислить при помощи формулы [103]

$$\frac{2s-1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi (2 \sin \varphi)^{2s-2} e^{2a\varphi} = e^{\pi a} \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s+ia)\Gamma(s-ia)}.$$

Таким образом, асимптотическую формулу при $R \rightarrow \infty$ для регуляризованного скалярного произведения (2.89) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle_R & \sim \frac{i\Gamma(2s)}{\Gamma\left(s + \frac{i(\lambda+\rho)}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{i(\lambda+\rho)}{2}\right)} \\ & \times \frac{1}{\rho - \lambda} \left(e^{-\frac{\pi(\lambda+\rho)}{2}} \overline{c(\rho)} c(\lambda) R^{i(\lambda-\rho)} - e^{\frac{\pi(\lambda+\rho)}{2}} \overline{c(-\rho)} c(-\lambda) R^{i(\rho-\lambda)} \right) \\ & + [\text{те же слагаемые с заменой } \lambda \rightarrow -\lambda]. \end{aligned}$$

Отметим, что сингулярности при $\rho = \pm\lambda$ сокращаются благодаря симметрии коэффициента (2.88)

$$e^{-\pi\lambda} |c(\lambda)|^2 = e^{\pi\lambda} |c(-\lambda)|^2. \quad (2.90)$$

Значит, если представить быстро осциллирующие экспоненты в виде

$$R^{\pm i(\lambda - \rho)} = \cos[(\lambda - \rho) \ln R] \pm i \sin[(\lambda - \rho) \ln R],$$

то по лемме Римана-Лебега сумма слагаемых с косинусами стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Для оставшихся членов используем хорошо известную формулу для дельтаобразной последовательности

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin[(\lambda - \rho) \ln R]}{\lambda - \rho} = \pi \delta(\lambda - \rho),$$

а также тождество (2.90) и выражение (2.88) для $c(\lambda)$. В результате получаем искомое соотношение ортогональности

$$\langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle = 2\pi (2\beta)^{2s} \Gamma(2s) \left| \frac{\Gamma(s+g) \Gamma(2i\lambda)}{\Gamma^2(s+i\lambda) \Gamma(g+i\lambda)} \right|^2 (\delta(\lambda - \rho) + \delta(\lambda + \rho)). \quad (2.91)$$

2.5.2 Доказательство при помощи диаграммной техники

Идея второго доказательства ортогональности состоит в следующем: используем интегральное представление (2.75)

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(z) &= (2i\beta)^{s+i\lambda} e^{i\pi s} \frac{\Gamma(s+g) \Gamma(2s+i\lambda-g)}{\Gamma(s+i\lambda) \Gamma(2s)} \\ &\times \int \mathcal{D}w \frac{1}{(z-\bar{w})^{s-i\lambda} (i\beta-\bar{w})^{g+i\lambda} (w+i\beta)^{2s+i\lambda-g}} \end{aligned} \quad (2.92)$$

и явным образом вычисляем регуляризованное скалярное произведение собственных функций при помощи диаграммной техники, описанной в приложении Б. Подставив указанную интегральную формулу в скалярное произведение, получаем выражение

$$\langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle = \frac{\Gamma^2(s+g) \Gamma(2s+i\lambda-g) \Gamma(2s-i\rho-g)}{\Gamma^2(2s) \Gamma(s+i\lambda) \Gamma(s-i\rho)} e^{2\pi i s} (2i\beta)^{s+i\lambda} (2i\beta)^{s-i\rho} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_1,$$

где интеграл A_1 представляется диаграммой на Рис. 2.3. Поскольку скалярное произведение выражается через расходящийся интеграл, мы ввели регуляризацию, сдвинув некоторые степенные показатели в подынтегральном выражении на ε .

Далее, используя правило цепочки (Рис. Б.2) для двух центральных линий, получаем диаграмму, изображенную на Рис. 2.4a

$$A_1 = e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(i(\rho - \lambda) + \varepsilon) \Gamma(2s)}{\Gamma(s+i\rho + \varepsilon) \Gamma(s-i\lambda)} A_2.$$

После применения преобразования Эйлера (Рис. Б.3) для правой вершины она трансформи-

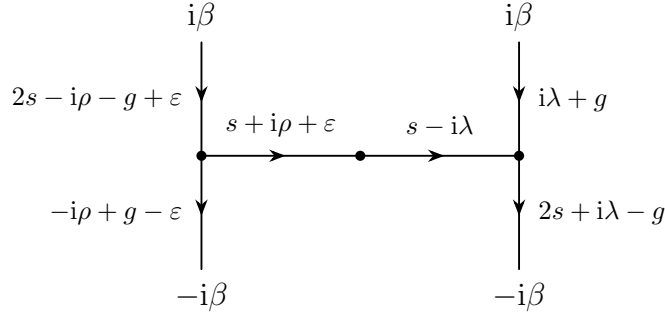
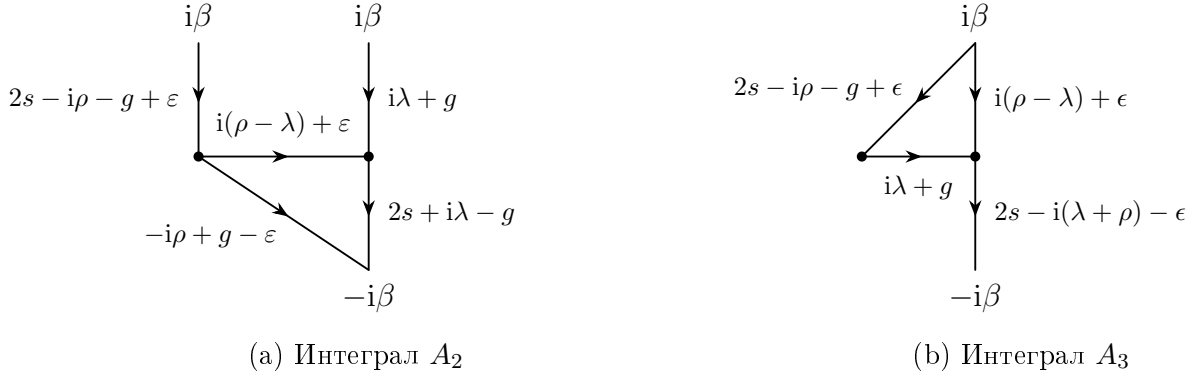
Рисунок 2.3 – Интеграл A_1 

Рисунок 2.4 – Диаграммные преобразования скалярного произведения

руется в диаграмму с Рис. 2.4b

$$A_2 = (2i\beta)^{-2i\lambda} \frac{\Gamma(2s - i(\rho + \lambda) - \epsilon)\Gamma(i(\rho + \lambda) + \epsilon)}{\Gamma(2s - g + i\lambda)\Gamma(g - i\lambda)} A_3.$$

Воспользовавшись два раза правилом цепочки, как показано на Рис. 2.5, находим выражение для интеграла A_3

$$A_3 = e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(i(\lambda - \rho) + \epsilon)\Gamma(2s)}{\Gamma(2s - g - i\rho + \epsilon)\Gamma(g + i\lambda)} e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(-i(\lambda + \rho) + \epsilon)\Gamma(2s)}{\Gamma(2s - i(\rho + \lambda) - \epsilon)\Gamma(2\epsilon)} (2i\beta)^{i(\rho + \lambda) - \epsilon}.$$

После всех перечисленных преобразований скалярное произведение собственных функций переписывается в виде

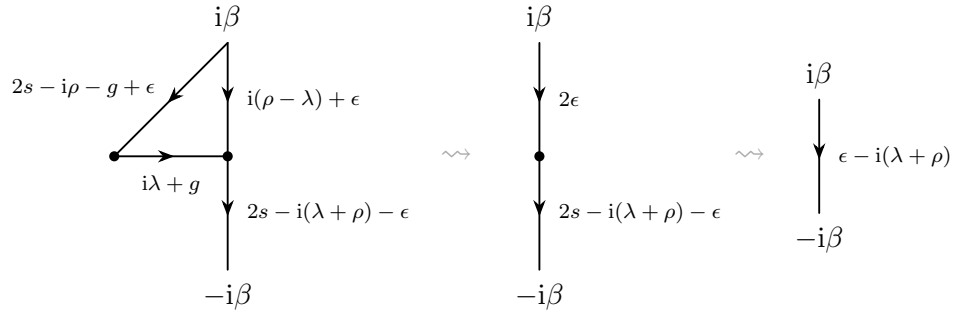
$$\langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle = (2\beta)^{2s} \frac{\Gamma^2(g + s)\Gamma(2s)}{\Gamma(g \pm i\lambda)\Gamma(s \pm i\lambda)\Gamma(s \pm i\rho)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\pm i(\lambda + \rho) + \epsilon)\Gamma(\pm i(\lambda - \rho) + \epsilon)}{\Gamma(2\epsilon)}, \quad (2.93)$$

где для краткости введено обозначение

$$f(a \pm b) = f(a + b)f(a - b). \quad (2.94)$$

Для того, чтобы вычислить предел в (2.93), используем теорему Сохоцкого-Племеля

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2\epsilon}{(x \pm i\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{i}{x + i\epsilon} - \frac{i}{x - i\epsilon} \right) = 2\pi\delta(x).$$

Рисунок 2.5 – Вычисление интеграла A_3

В результате получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma(\pm i(\lambda + \rho) + \varepsilon) \Gamma(\pm i(\lambda - \rho) + \varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} = 2\pi \Gamma(\pm 2i\lambda) \left(\delta(\lambda - \rho) + \delta(\lambda + \rho) \right).$$

Таким образом, окончательное выражение

$$\langle \Psi_\rho | \Psi_\lambda \rangle = 2\pi (2\beta)^{2s} \frac{\Gamma(2s) \Gamma^2(g + s) \Gamma(\pm 2i\lambda)}{\Gamma(g \pm i\lambda) \Gamma^2(s \pm i\lambda)} \left(\delta(\lambda - \rho) + \delta(\lambda + \rho) \right)$$

совпадает с формулой (2.91), выведенной в предыдущем разделе.

2.6 Полнота набора одночастичных собственных функций

Текущий раздел посвящен доказательству соотношения полноты

$$I(z, \bar{w}) = \int_{\mathbb{R}} d\lambda \mu(\lambda) \Psi_\lambda(z) \overline{\Psi_\lambda(w)} = \frac{e^{i\pi s}}{(z - \bar{w})^{2s}}, \quad (2.95)$$

где формула для меры интегрирования

$$\mu(\lambda) = \frac{1}{4\pi (2\beta)^{2s} \Gamma(2s)} \left| \frac{\Gamma^2(s + i\lambda) \Gamma(g + i\lambda)}{\Gamma(s + g) \Gamma(2i\lambda)} \right|^2 \quad (2.96)$$

следует из соотношения ортогональности (2.78). Правая часть (2.95) представляет из себя ядро тождественного оператора, то есть для любой функции $\psi(z)$ аналитичной в верхней полуплоскости выполняется соотношение [36]

$$\psi(z) = \int \mathcal{D}w \frac{e^{i\pi s}}{(z - \bar{w})^{2s}} \psi(w).$$

План доказательства следующий. Сначала докажем (2.95) в предположении

$$\text{Im } z > \beta, \quad \text{Im } w > \beta. \quad (2.97)$$

Затем покажем, что интеграл в (2.95) является аналитической функцией переменных z и \bar{w} в области $\text{Im } z > 0, \text{Im } w > 0$. Тогда результат, полученный на первом шаге, может быть аналитически продолжен на всю эту область.

Для того, чтобы вычислить интеграл (2.95), используем представление Барнса для гипергеометрической функции [105]

$$\Psi_\lambda(z) = \frac{\Gamma(s+g)}{\Gamma(s \pm i\lambda)} \int_{\mathbb{R}+ic} \frac{d\rho}{2\pi} \frac{\Gamma(s \pm i\lambda + i\rho) \Gamma(-i\rho)}{\Gamma(s+g+i\rho)} \left(-\frac{iz}{2\beta} - \frac{1}{2}\right)^{i\rho}. \quad (2.98)$$

Здесь и далее для краткости используем обозначение (2.94)

$$f(a \pm b) = f(a+b)f(a-b).$$

Горизонтальный контур интегрирования в (2.98) разделяет серии полюсов

$$\rho = -in, \quad \rho = \pm\lambda + i(n+s), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

то есть $c \in (0, s)$.

Для доказательства также понадобятся два интегральных соотношения с гамма-функциями. Первое имеет вид [103]

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda \Gamma(a+i\lambda) \Gamma(b-i\lambda) z^{i\lambda} = 2\pi \Gamma(a+b) \frac{z^b}{(1+z)^{a+b}}. \quad (2.99)$$

Оно выполняется при условии $\text{Re } a, \text{Re } b > 0$, то есть когда контур \mathbb{R} разделяет серии полюсов

$$\lambda = i(a+n), \quad \lambda = -i(b+n), \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Его можно доказать при помощи вычетов, либо используя преобразование Меллина [106]. Второе соотношение

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda \frac{\Gamma(a_1 \pm i\lambda) \Gamma(a_2 \pm i\lambda) \Gamma(a_3 \pm i\lambda)}{\Gamma(\pm 2i\lambda)} = 4\pi \Gamma(a_1+a_2) \Gamma(a_1+a_3) \Gamma(a_2+a_3) \quad (2.100)$$

представляет из себя предельный случай интеграла де Бранжа-Вильсона [103]. В (2.100) предполагается $\text{Re } a_j > 0$ и что контур \mathbb{R} разделяет серии полюсов

$$\lambda = \pm i(a_j + n), \quad j = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Отметим, что интеграл де Бранжа-Вильсона является простейшим случаем интеграла Густафсона ВС-типа [71].

Подставим представление Барнса в интеграл (2.95)

$$I = C \int_{\mathbb{R}} d\lambda \frac{\Gamma(g \pm i\lambda)}{\Gamma(\pm 2i\lambda)} \int_{\mathbb{R}+ic} d\rho \frac{\Gamma(s \pm i\lambda + i\rho) \Gamma(-i\rho)}{\Gamma(s + g + i\rho)} \left(-\frac{iz}{2\beta} - \frac{1}{2}\right)^{i\rho} \times \int_{\mathbb{R}-ic} d\nu \frac{\Gamma(s \pm i\lambda - i\nu) \Gamma(i\nu)}{\Gamma(s + g - i\nu)} \left(\frac{i\bar{w}}{2\beta} - \frac{1}{2}\right)^{-i\nu}. \quad (2.101)$$

Все константы собраны в одном множителе

$$C = \frac{1}{16\pi^3 (2\beta)^{2s} \Gamma(2s)}.$$

Кратный интеграл (2.101) абсолютно сходится при условиях (2.97), что несложно доказать, используя формулу дополнения Эйлера

$$\Gamma(2i\lambda) \Gamma(-2i\lambda) = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{sh}(2\pi\lambda)}$$

и оценки для гамма-функции [106]

$$|\Gamma(a + ib)| \leq \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{6a}} |a + ib|^{a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|b|},$$

$$|\Gamma^{-1}(a + ib)| \leq \frac{e^{a+\frac{1}{6a}}}{\sqrt{2\pi}} |a + ib|^{-a+\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2}|b|},$$

где $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Таким образом, можно поменять порядок интегрирования и сначала проинтегрировать по λ .

Для того, чтобы взять интеграл по λ , используем формулу (2.100). Контур \mathbb{R} разделяет серии полюсов нужным образом благодаря условию $g > 0$ (2.14). Как было замечено в разделе 2.5.1, последнее ограничение означает отсутствие дискретного спектра в рассматриваемой квантовой задаче. Подставляя выражение для интеграла по λ в (2.101), получаем

$$I = 4\pi C \int_{\mathbb{R}-ic} d\nu \Gamma(i\nu) \left(\frac{i\bar{w}}{2\beta} - \frac{1}{2}\right)^{-i\nu} \int_{\mathbb{R}+ic} d\rho \Gamma(2s - i\nu + i\rho) \Gamma(-i\rho) \left(-\frac{iz}{2\beta} - \frac{1}{2}\right)^{i\rho}.$$

Теперь проинтегрируем по ρ при помощи (2.99), предварительно сдвинув переменную $\rho = \rho' + ic$. В результате левая часть соотношения полноты принимает вид

$$I = 8\pi^2 C \int_{\mathbb{R}-ic} d\nu \Gamma(i\nu) \Gamma(2s - i\nu) \left(\frac{i\bar{w}}{2\beta} - \frac{1}{2}\right)^{-i\nu} \left(-\frac{iz}{2\beta} + \frac{1}{2}\right)^{i\nu-2s},$$

Применяя тождество (2.99) в последнем выражении, получаем формулу (2.95), которую требовалось доказать.

Теперь докажем, что интеграл $I(z, \bar{w})$ (2.95) является аналитической функцией z и \bar{w} в

области

$$\operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Im} w > 0.$$

Используем теорему Морера. Поскольку подынтегральное выражение непрерывно на множестве

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Im} w > 0$$

и аналитично по z, \bar{w} , то достаточно доказать равномерную сходимость интеграла при z и w принимающих значения в произвольных компактных подмножествах верхней полуплоскости. Согласно признаку равномерной сходимости Вейерштрасса, найдем мажоранту модуля подынтегрального выражения (2.95), интеграл от которой равномерно сходится по λ .

Так как подынтегральное выражение инвариантно относительно замены $\lambda \rightarrow -\lambda$, достаточно исследовать его асимптотику при $\lambda \rightarrow \infty$. Используя асимптотическую формулу для гамма-функции [103]

$$|\Gamma(a + i\lambda)| \sim \sqrt{2\pi} \lambda^{a-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}\lambda}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

получаем асимптотику для меры (2.96)

$$|\mu(\lambda)| \sim M \lambda^{4s+2g-2} e^{-\pi\lambda},$$

где M – некоторая константа. При условиях

$$\operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin i(0, \beta),$$

используя асимптотику для гипергеометрической функции из теоремы 3.1 в [107], находим

$$|\Psi_\lambda(z)| \sim f(z) \lambda^{\frac{1}{2}-s-g} e^{\lambda|\operatorname{Im} \zeta|}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (2.102)$$

где $f(z)$ – непрерывная функция, и

$$\zeta = \ln \left(\frac{z}{i\beta} + \sqrt{-\frac{z^2}{\beta^2} - 1} \right), \quad z = i\beta \operatorname{ch} \zeta.$$

Так как $\operatorname{Im} z > 0$, то

$$|\operatorname{Im} \zeta| < \frac{\pi}{2}.$$

В альтернативном случае

$$\operatorname{Im} z > 0, \quad z \notin i(\beta, \infty) \quad (2.103)$$

из теоремы 3.2 в том же источнике получаем следующую асимптотику для собственных

функций

$$|\Psi_\lambda(z)| \sim \tilde{f}(z) \lambda^{\frac{1}{2}-s-g} e^{\lambda(\pi+\operatorname{Im}\xi)}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (2.104)$$

где $\tilde{f}(z)$ – непрерывная функция, и

$$\xi = \ln \left(-\frac{z}{i\beta} - i\sqrt{1 + \frac{z^2}{\beta^2}} \right), \quad z = -i\beta \operatorname{ch} \xi.$$

В этом случае в силу ограничений (2.103) имеем

$$-\pi \leq \operatorname{Im} \xi < -\frac{\pi}{2}.$$

Так как, согласно [107], асимптотики (2.102) и (2.104) равномерны по z , то заключаем, что для z, w , принимающих значения в компактных подмножествах верхней полуплоскости, и достаточно больших λ имеет место следующая оценка

$$|\mu(\lambda) \Psi_\lambda(w) \Psi_\lambda(z)| < A \lambda^{2s-1} e^{-\delta\lambda},$$

где A, δ – вещественные положительные числа. Значит мы можем использовать упомянутый выше признак Вейерштрасса. Таким образом, $I(z, \bar{w})$ – аналитическая функция переменных z, \bar{w} , и ограничение (2.97) можно снять.

Глава 3. $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантная спиновая цепочка А-типа

3.1 Янгиан для $gl(N, \mathbb{C})$ и представления основной серии группы $SL(N, \mathbb{C})$

Янгиан $Y(gl(N, \mathbb{C}))$ алгебры Ли $gl(N, \mathbb{C})$ – это ассоциативная \mathbb{C} -алгебра с единицей, порожденная генераторами $t_{ij}^{(r)}$ (где $r \in \mathbb{Z}_+$ и $i, j \in \{1, \dots, N\}$) и определяющим соотношениям [77]

$$[t_{ij}^{(r+1)}, t_{kl}^{(s)}] - [t_{ij}^{(r)}, t_{kl}^{(s+1)}] = t_{kj}^{(s)} t_{il}^{(r)} - t_{kj}^{(r)} t_{il}^{(s)}. \quad (3.1)$$

где $t_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$, и δ_{ij} – символ Кронекера. Рассмотрим формальный ряд по переменной u вида

$$t_j^i(u) = \sum_{r=0}^{\infty} t_{ij}^{(r)} u^{-r} \quad (3.2)$$

и представим его как элемент (i, j) матрицы $t(u)$ размера $N \times N$. Здесь и далее элемент в i -ой строке и j -ом столбце любой матрицы M обозначается M_j^i . Пространство размерности N , на котором действует $t(u)$, называется *вспомогательным*. Переменная u называется спектральным параметром. Соотношения (3.1) эквивалентны матричному соотношению в тензорном произведении двух копий вспомогательного пространства

$$R(u-v) (t(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes t(v)) = (\mathbf{1} \otimes t(v)) (t(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v), \quad (3.3)$$

где $\mathbf{1}$ – единичная матрица размера $N \times N$. Матрица $R(u-v)$ называется R -матрицей Янга. Она действует в тензорном произведении двух копий вспомогательного пространства и имеет вид

$$R(u) = \mathbf{1} + \frac{P}{u}, \quad Pa \otimes b = b \otimes a. \quad (3.4)$$

Упомянутая ранее R -матрица (1.21) является частным случаем (3.4) при $N = 2$ (с точностью до умножения на u). Как и (1.21), R -матрица для произвольного N удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (1.22).

Далее мы будем придерживаться таких же матричных обозначений, как в (3.2): индекс строки будем писать сверху, а индекс столбца – снизу. Определим *квантовый минор* порядка m следующим образом

$$t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} \text{sgn}(\tau) t_{j_1}^{i_{\tau(1)}}(u-m+1) t_{j_2}^{i_{\tau(2)}}(u-m+2) \dots t_{j_m}^{i_{\tau(m)}}(u), \quad (3.5)$$

где \mathfrak{S}_m – симметрическая группа, $\text{sgn}(\tau)$ – знак перестановки τ . Квантовые миноры антисимметричны относительно перестановок верхних и нижних индексов: для любой переста-

новки $\kappa \in \mathfrak{S}_m$ имеем

$$t_{j_1 \dots j_m}^{i_{\kappa(1)} \dots i_{\kappa(m)}}(u) = \text{sgn}(\kappa) t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u), \quad t_{j_{\kappa(1)} \dots j_{\kappa(m)}}^{i_1 \dots i_m}(u) = \text{sgn}(\kappa) t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(u). \quad (3.6)$$

Угловые квантовые миноры определяются стандартным образом

$$A_m(u) = t_{1 \dots m}^{1 \dots m}(u), \quad m = 1, \dots, N. \quad (3.7)$$

Коэффициенты при степенях u в $A_1(u), \dots, A_N(u)$ порождают максимальную коммутативную подалгебру в $Y(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$, называемую подалгеброй Гельфанда-Цетлина. Квантовый детерминант $A_N(u)$ порождает центр янгиана.

В представлении алгебры $Y(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ элементы $t_{ij}^{(r)}$ переходят в операторы на линейном пространстве, называемом *квантовым пространством*. Обозначим через

$$E_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

набор стандартных генераторов универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. Отображение

$$t_j^i(u) \mapsto \delta_{ij} + E_{ji} u^{-1} \quad (3.8)$$

является сюръективным гомоморфизмом из $Y(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ в $U(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$. Используя его, можно построить представление $Y(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ из представления $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$. Матрица $t(u)$ в этом представлении называется L -оператором. Более сложные представления янгиана можно получить, перемножая n L -операторов, матричные элементы которых действуют в разных копиях квантового пространства (при этом вспомогательное пространство у всех L -операторов одно и то же). Получаемая таким образом реализация матрицы $t(u)$ называется матрицей монодромии. В простейшем случае $N = 2$ L -оператор и матрица монодромии были рассмотрены в разделе 1.2, они определяются формулами (1.17) и (1.38). Соответствующая квантовомеханическая модель называется $GL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочкой из n узлов [78, 60].

Рассматриваемая нами квантовая модель определяется *унитарными представлениями основной серии* группы $SL(N, \mathbb{C})$ [34, 35]. Обозначим через Z_N множество комплексных нижнетреугольных матриц размера $N \times N$ с единицами на диагонали, и через H_N – множество комплексных верхнетреугольных матриц размера $N \times N$ с определителем, равным 1. Представление T^σ группы $SL(N, \mathbb{C})$, задаваемое параметрами

$$\sigma = (\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_N, \bar{\sigma}_N) \quad (3.9)$$

определено на пространстве $L^2(Z_N)$ квадратично-интегрируемых функций на Z_N

$$[T^\sigma(g)\Phi](z) \equiv \alpha_\sigma (h_g(z)^{-1}) \Phi(z\bar{g}), \quad (3.10)$$

где $z\bar{g}$ и $h_g(z)$ – матрицы из LU-разложения матрицы $g^{-1}z$:

$$g^{-1}z = z\bar{g} \cdot h_g(z), \quad z\bar{g} \in Z_n, \quad h_g(z) \in H_n,$$

а α_σ – характер на группе H_n вида

$$\alpha_\sigma(h) \equiv \prod_{k=1}^n (h_k^k)^{-\sigma_k-k} (h_k^{k*})^{-\bar{\sigma}_k-k}.$$

По аналогии с простейшим случаем $N = 2$ из раздела 1.1 будем называть параметры $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ *голоморфными*, а $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n$ – *антиголоморфными*. Напомним, что числа σ_j и $\bar{\sigma}_j$ в общем случае не являются комплексно сопряженными друг другу, и сопряжение произвольного числа a обозначается через a^* . Исключения составляют комплексные переменные z_{ij} – элементы нижнетреугольной матрицы z : $\bar{z}_{ij} = z_{ij}^*$, а также функции этих переменных: $\overline{\Phi(z)} = \Phi^*(z)$. Также отметим, что набор (3.9) специально обозначен символом σ , выделенным жирным шрифтом, для того, чтобы не путать его с параметром σ из (1.5).

Представление основной серии определено корректно при условии

$$\bar{\sigma}_{k,k+1} - \sigma_{k,k+1} = n_k \in \mathbb{Z}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (3.11)$$

где $\sigma_{k,k+1} \equiv \sigma_k - \sigma_{k+1}$. Скалярное произведение в пространстве $L^2(Z_N)$ имеет вид

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^{N(N-1)} z \overline{\Phi(z)} \Psi(z),$$

где $d^{N(N-1)} z = \prod_{1 \leq j < i \leq N} d^2 z_{ij}$, и интегрирование по z_{ij} ведется по всей комплексной плоскости. Условие унитарности представления T^σ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\sigma_{k,k+1}^* + \bar{\sigma}_{k,k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) получаем следующую параметризацию для параметров σ

$$\sigma_{k,k+1} = -\frac{n_k}{2} + i\nu_k, \quad \bar{\sigma}_{k,k+1} = \frac{n_k}{2} + i\nu_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (3.13)$$

где $n_k \in \mathbb{Z}$, $\nu_k \in \mathbb{R}$.

Унитарные представления основной серии неприводимы. Представления T^σ и $T^{\sigma'}$, где

$$\sigma' = (\sigma'_1, \bar{\sigma}'_1, \dots, \sigma'_N, \bar{\sigma}'_N),$$

унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда наборы σ и σ' отличаются на перестановку, то есть

$$(\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_N, \bar{\sigma}_N) = (\sigma'_{\omega(1)}, \bar{\sigma}'_{\omega(1)}, \dots, \sigma'_{\omega(N)}, \bar{\sigma}'_{\omega(N)})$$

для некоторой $\omega \in \mathfrak{S}_N$.

Для того, чтобы найти соответствующие представления алгебры Ли, нужно рассмотреть инфинитезимальный предел формулы (3.10). Генераторы алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$ – матрицы \mathbf{e}_{ij} вида

$$(\mathbf{e}_{ij})_b^a = \delta_{ia}\delta_{jb} - \frac{\delta_{ij}\delta_{ab}}{N}.$$

Напомним, что верхний индекс a обозначает строку, а нижний индекс b – столбец. Подставим в (3.10) элемент g в виде $g = \mathbf{1} + \epsilon \mathbf{e}_{ki}$ и разложим получившееся выражение в ряд по ϵ

$$[T^\sigma(\mathbf{1} + \epsilon \mathbf{e}_{ki})\Phi](z) = \Phi(z) + \epsilon [E_{ki}\Phi](z) + \epsilon^* [\bar{E}_{ki}\Phi](z) + O(|\epsilon|^2)_{\epsilon \rightarrow 0}.$$

Как и в простейшем случае $N = 2$, генераторы E_{ki} называются голоморфными, а генераторы \bar{E}_{ki} – антиголоморфными. Голоморфные генераторы можно выразить при помощи следующей компактной матричной формулы [60]

$$E = -z(D + \hat{\sigma})z^{-1}. \quad (3.14)$$

Матрицы E , $\hat{\sigma}$ и D размера $N \times N$ имеют вид

$$E_k^i = E_{ki}, \quad \hat{\sigma}_d^c = \delta_{dc}\sigma_c, \quad D_d^c = \begin{cases} \sum_{k=d}^N z_{kd}\partial_{kc}, & d > c \\ 0, & d \leq c \end{cases}, \quad (3.15)$$

где z_{ij} , $i > j$ – нетривиальные элементы нижнетреугольной матрицы z , и $\partial_{kc} \equiv \frac{\partial}{\partial z_{kc}}$. Аналогичным образом можно представить и антиголоморфные генераторы, нужно лишь заменить голоморфные переменные и параметры на антиголоморфные, и обозначения E , E_{ki} – на \bar{E} , \bar{E}_{ki} . Унитарность представления эквивалентна антиэрмитовости генераторов

$$E_{ki}^\dagger = -\bar{E}_{ki}. \quad (3.16)$$

Отметим, что при выводе формулы (3.14) используется дополнительное условие на параметры

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_N = \bar{\sigma}_1 + \dots + \bar{\sigma}_N = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (3.17)$$

Его можно наложить благодаря тому, что представление T^σ зависит только от разностей $\sigma_{k,k+1} = \sigma_k - \sigma_{k+1}$ в силу унимодулярности матриц из $SL(N, \mathbb{C})$

$$\prod_{k=1}^N (h_g)_k^k(z) = \det h_g(z) = \det z = 1, \quad g \in SL(N, \mathbb{C}), \quad z \in Z_N.$$

При $N = 2$, с учетом (3.17), выражение (3.14) переходит в формулы для генераторов представления $SL(2, \mathbb{C})$ (1.6)

$$E_{11} = -E_{22} = S = z\partial_z + s, \quad E_{21} = S_- = -\partial_z, \quad E_{12} = S_+ = z^2\partial_z + 2sz,$$

где $z = z_{21}$, $s = \sigma_2 = 1 - \sigma_1$.

Тем не менее, при помощи явного вычисления можно проверить, что для генераторов, задаваемых формулой (3.14), выполняются коммутационные соотношения алгебры Ли $gl(N, \mathbb{C})$

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}, \quad [\bar{E}_{ij}, \bar{E}_{kl}] = \delta_{jk} \bar{E}_{il} - \delta_{il} \bar{E}_{kj},$$

вне зависимости от того, выполняется условие (3.17) или нет. Вдобавок, голоморфные генераторы коммутируют с антиголоморфными: $[E_{ij}, \bar{E}_{kl}] = 0$. Мы будем рассматривать параметры σ вида

$$\sigma_j = \frac{s_j + \varkappa}{2} + i\eta_j, \quad \bar{\sigma}_j = \frac{-s_j + \varkappa}{2} + i\eta_j, \quad s_j \in \mathbb{Z}, \quad \varkappa, \eta_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Несложно проверить, что они удовлетворяют условию (3.13). При этом, случаю $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки соответствуют не все наборы параметров (3.18), а лишь те, для которых выполняется условие (3.17).

3.2 Определение модели

Гильбертово пространство $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки из n узлов представляет собой тензорное произведение n копий пространства $L^2(Z_N)$

$$H = V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n, \quad V_k = L^2(Z_N), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

Узлу цепочки с номером k соответствует пространство V_k . Скалярное произведение в пространстве (3.19) определяется через кратный интеграл

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^{N(N-1)} z^{(1)} \dots d^{N(N-1)} z^{(n)} \overline{\Phi(z^{(1)}, \dots, z^{(n)})} \Psi(z^{(1)}, \dots, z^{(n)}), \quad (3.20)$$

где $z^{(k)}$ – матричнозначная переменная функций в пространстве V_k (нижнетреугольная матрица с единицами на диагонали), и, как мы ранее определили

$$d^{N(N-1)} z^{(k)} = \prod_{1 \leq j < i \leq N} d^2 z_{ij}^{(k)}.$$

Как и в случае $SL(2, \mathbb{C})$ спиновой цепочки, рассмотренном в разделе 1, основным объектом, задающим квантовую модель, является L -оператор. Голоморфный и антиголоморфный L -операторы $L(u)$ и $\bar{L}(\bar{u})$ выражаются через матрицу E (3.14), содержащую генераторы представления T^σ (3.10) группы $SL(N, \mathbb{C})$, и через ее антиголоморфную копию \bar{E} следующим образом

$$L(u) = u\mathbf{1} + E, \quad \bar{L}(\bar{u}) = \bar{u}\mathbf{1} + \bar{E}, \quad (3.21)$$

где u и \bar{u} – независимые параметры, в общем случае не являющиеся комплексно сопряженными друг к другу. Благодаря гомоморфности отображения (3.8) между янгианом и универсальной обертывающей алгебры Ли $gl(N, \mathbb{C})$ L -оператор удовлетворяет RLL -соотношению

$$R(u-v) (L(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes L(v)) = (\mathbf{1} \otimes L(v)) (L(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v). \quad (3.22)$$

Матрица монодромии цепочки из n узлов выражается через произведение L -операторов

$$t(u) = L_1(u) L_2(u) \dots L_n(u),$$

где $L_k(u)$ – L -оператор (3.21), задаваемый генераторами представления основной серии в пространстве V_k . Из (3.22) следует RTT -соотношение (3.3) для матрицы монодромии

$$R(u-v) (t(u) \otimes \mathbf{1}) (\mathbf{1} \otimes t(v)) = (\mathbf{1} \otimes t(v)) (t(u) \otimes \mathbf{1}) R(u-v).$$

Таким образом, матрица $t(u)$ реализует представление янгиана, и ее угловые миноры (3.7)

$$A_m(u) \equiv t_{1\dots m}^{1\dots m}(u), \quad m = 1, \dots, N$$

образуют коммутативное семейство операторов. Аналогичным образом через L -оператор $\bar{L}(\bar{u})$ определяется антиголоморфная матрица монодромии $\bar{t}(\bar{u})$ и ее угловые миноры. Антиголоморфные объекты обладают теми же свойствами, что и их голоморфные аналоги. Вдобавок, голоморфные и антиголоморфные миноры коммутируют. Квантовый детерминант $A_N(u)$, порождающий центр янгиана, в рассматриваемых нами неприводимых представлениях основной серии пропорционален тождественному оператору $\mathbf{1}$.

Примем для удобства

$$\bar{u} = -u^*.$$

По определению, оператор $A_m(u)$ является полиномом от u степени nm с единичным старшим коэффициентом. Интегралы движения модели выражаются через коэффициенты полиномов $A_m(u)$, $\bar{A}_m(\bar{u})$ следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \partial_u^k|_{u=0} A_m(u) + \frac{(-1)^{nm+k}}{k!} \partial_{\bar{u}}^k|_{\bar{u}=0} \bar{A}_m(\bar{u} + m - 1), \\ \frac{i}{k!} \partial_u^k|_{u=0} A_m(u) - \frac{(-1)^{nm+k} i}{k!} \partial_{\bar{u}}^k|_{\bar{u}=0} \bar{A}_m(\bar{u} + m - 1), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$m = 1, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, nm.$$

Эрмитовость операторов (3.23) относительно скалярного произведения (3.20) следует из правила сопряжения миноров

$$A_m^\dagger(u) = (-1)^{nm} \bar{A}_m(\bar{u} + m - 1), \quad (3.24)$$

вывод которого приведен в конце текущего раздела.

В работе [86] показано, что в конечномерных неприводимых представлениях $sl(N, \mathbb{C})$ набор общих собственных векторов угловых миноров L -оператора $A_m(u)$ совпадает со стандартным базисом, введенным И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлином в [87]. При этом массивы (3.26) называются *схемами Гельфанда-Цетлина*. Таким образом, собственные функции (3.25) являются обобщением *базиса Гельфанда-Цетлина* на случай бесконечномерных представлений основной серии. Элемент ρ_{mk} , находящийся на k -ой позиции в $(N - m + 1)$ -ом ряду канонически определенной схемы Гельфанда-Цетлина, выражается через параметры λ_{mk} следующим образом [86]

$$\rho_{mk} = -\lambda_{mk} + k - 1.$$

В конечномерном случае числа ρ_{mk} целые, и на них наложены условия

$$\rho_{mk} \geq \rho_{m-1,k} \geq \rho_{m,k+1}.$$

Как было замечено в работах [108, 90], в случае бесконечномерных представлений эти ограничения отсутствуют.

Наконец, объясним, как доказывается формула (3.24). Ее вывод основан на соотношении для матричных элементов L -оператора

$$(L_j^i)^\dagger(u) = -\bar{L}_j^i(\bar{u}),$$

которое следует из формулы сопряжения генераторов представления (3.16). При помощи него можно получить соотношение для матрицы монодромии

$$(t_j^i)^\dagger(u) = (-1)^n \bar{t}_j^i(\bar{u}).$$

Используя это тождество и определение квантового минора (3.5), несложно получить формулу

$$\left(t_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}\right)^\dagger(u) = (-1)^{nm} \bar{t}_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m}(\bar{u} + m - 1),$$

частным случаем которой является нужное соотношение (3.24).

3.3 Формулы для индуктивного построения собственных функций

Обозначим

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_N, \bar{\sigma}_N), \quad \boldsymbol{\sigma}' = (\sigma_2, \bar{\sigma}_2, \dots, \sigma_N, \bar{\sigma}_N).$$

Напомним, что представление основной серии T^σ (3.10) группы $SL(N, \mathbb{C})$ определено на пространстве квадратично-интегрируемых функций нижнетреугольных матриц z с единицами на диагонали: $z = \|z_{ij}\|_{1 \leq j < i \leq N}$. Ключевую роль при индуктивном построении собственных

функций (3.25) играет тот факт, что генераторы представления T^σ могут быть выражены через генераторы представления $T^{\sigma'}$ группы $SL(N-1, \mathbb{C})$. Явные формулы в терминах L -оператора (3.21) имеют вид [89]

$$\begin{aligned} L_1^1(u) &= u - \sigma_1 + N - 1 + \sum_{k=2}^N z_{k1} \partial_{k1}, \\ L_j^1 &= -\partial_{j1}, \\ L_1^i(u) &= z_{i1}(u - \sigma_1 + N - 1) - \sum_{k=2}^N z_{k1} (\mathcal{L}_{k-1}^{i-1}(u) - z_{i1} \partial_{k1}), \\ L_j^i(u) &= \mathcal{L}_{j-1}^{i-1}(u) - z_{i1} \partial_{j1}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где $2 \leq i, j \leq N$, и матрица $\mathcal{L}(u)$ – это L -оператор для $SL(N-1, \mathbb{C})$

$$\mathcal{L}(u) = u\mathbf{1} + \mathcal{E}.$$

Матрица \mathcal{E} вида (3.14) содержит генераторы представления $T^{\sigma'}$

$$\mathcal{E} = -z'(D' + \hat{\sigma}')z'^{-1},$$

где $z' = \|z_{i+1, j+1}\|_{1 \leq j < i \leq N-1}$, $(D')_c^d = D_{c+1}^{d+1}$ и $(\hat{\sigma}')_c^d = \hat{\sigma}_{c+1}^{d+1}$ являются подматрицами размера $(N-1) \times (N-1)$ в матрицах z , D , $\hat{\sigma}$ вида (3.15), соответствующих представлению T^σ .

Будем говорить, что L -оператор, соответствующий группе $SL(N, \mathbb{C})$, имеет ранг N . При нахождении собственных функций на индукционном шаге от $SL(N-1, \mathbb{C})$ к $SL(N, \mathbb{C})$ нужно выразить угловые квантовые миноры L -оператора $L(u)$ ранга N через миноры L -оператора $\mathcal{L}(u)$ ранга $N-1$. На следующем индукционном шаге от $SL(N, \mathbb{C})$ к $SL(N+1, \mathbb{C})$ нужны формулы для действия некоторых неугловых миноров $L(u)$ на собственные функции угловых. Для того, чтобы получить эти формулы, нужно выразить соответствующие неугловые миноры через миноры $\mathcal{L}(u)$. Отметим, что все приведенные в этом разделе формулы для голоморфных L -операторов выполняются также и в антиголоморфном секторе (поскольку для антиголоморфного L -оператора выполняются аналоги формул (3.27)). Нужно лишь заменить переменные и параметры на их антиголоморфные аналоги.

Все перечисленные выше выражения можно найти при помощи формул (3.27). Ниже мы приведем формулы для голоморфных L -операторов. Но аналогичные соотношения выполняются и в антиголоморфном секторе, нужно лишь заменить переменные и параметры на их антиголоморфные аналоги. Рекуррентные формулы для миноров имеют вид

$$\begin{aligned} L_{1\dots m}^{1\dots m}(u) &= \mathcal{L}_{1\dots, m-1}^{1\dots, m-1}(u) \left(u - \sigma_1 + N - m + \sum_{k=m+1}^N z_{k1} \partial_{k1} \right) \\ &\quad + \sum_{b=m}^{N-1} \sum_{a=1}^{m-1} (-1)^{m+a} \mathcal{L}_{1\dots, \hat{a}, \dots, m-1, b}^{1\dots, m-1}(u) z_{b+1, 1} \partial_{a+1, 1}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

где $1 \leq m \leq N$, и обозначение \widehat{a} означает, что индекс a пропущен;

$$L_{1,i_1,\dots,i_{m-1}}^{1\dots m}(u) = \mathcal{L}_{i_1-1,\dots,i_{m-1}-1}^{1,\dots,m-1}(u) \left(u - \sigma_1 + N - m + \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i_1,\dots,i_{m-1}}}^N z_{k1} \partial_{k1} \right) + \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq i_1-1,\dots,i_{m-1}-1}}^{N-1} \sum_{a=1}^{m-1} (-1)^{m+a} \mathcal{L}_{i_1-1,\dots,\widehat{i_a-1},\dots,i_{m-1}-1}^{1,\dots,m-1}(u) z_{b+1,1} \partial_{i_a1}, \quad (3.29)$$

где $2 \leq m \leq N$ и $2 \leq i_1 < \dots < i_{m-1} \leq N$;

$$L_{i_1,\dots,i_m}^{1\dots m}(u) = \sum_{a=1}^m (-1)^a \mathcal{L}_{i_1-1,\dots,\widehat{i_a-1},\dots,i_m-1}^{1,\dots,m-1}(u) \partial_{i_a1}, \quad (3.30)$$

где $1 \leq m \leq N$ и $2 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$. Доказательство этих соотношений приведено далее в текущем разделе.

Рассмотрим натуральное число N' . Для любых натуральных чисел r, a, b , таких что $1 \leq a \leq r < b \leq N'$, обозначим через $B_{rab}(u)$ минор L -оператора ранга N' вида

$$B_{rab}(u) \equiv L_{1,\dots,\widehat{a},\dots,r,b}^{1\dots r}(u). \quad (3.31)$$

У него среди нижних индексов $1, \dots, r$ пропущен индекс a и добавлен b , больший чем r . Миноры этого типа для L -оператора ранга $N - 1$ стоят в правой части (3.28) под знаком двойной суммы. В соответствии с работой [86] введем обозначение

$$B_r(u) \equiv B_{r,r,r+1}(u) = L_{1,\dots,r-1,r+1}^{1\dots r}(u), \quad 1 \leq r \leq N' - 1. \quad (3.32)$$

Результат действия миноров (3.31) на собственные функции (3.25) можно выразить через операторы $B_r(u)$:

$$B_{rab}(u) \Psi_{\lambda} = (-1)^{b-r-1} \sum_{\substack{s_a, s_{a+1}, \dots, s_{b-1} \\ s_k=1, \dots, k}} \frac{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq s_r}}^r (u - \lambda_{rl}) \prod_{i=a}^{\overleftarrow{r}} B_i(\lambda_{is_i}) \prod_{j=r+1}^{\overrightarrow{b-1}} B_j(\lambda_{js_j}) \Psi_{\lambda}}{\prod_{k=a}^{b-2} (\lambda_{k+1, s_{k+1}} - \lambda_{ks_k} - 1_{k < r}) \prod_{k=a}^{b-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq s_k}}^k (\lambda_{ks_k} - \lambda_{kl})}, \quad (3.33)$$

где

$$\begin{aligned}
\prod_{i=a}^{\overleftarrow{r}} B_i(\lambda_{is_i}) &\equiv B_r(\lambda_{rs_r}) B_{r-1}(\lambda_{r-1,s_{r-1}}) \cdots B_a(\lambda_{as_a}), \\
\prod_{j=r+1}^{\overrightarrow{b-1}} B_j(\lambda_{js_j}) &\equiv B_{r+1}(\lambda_{r+1,s_{r+1}}) B_{r+2}(\lambda_{r+2,s_{r+2}}) \cdots B_{b-1}(\lambda_{b-1,s_{b-1}}), \\
1_{k < r} &\equiv \begin{cases} 1, & k < r \\ 0, & k \geq r \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Результат применения оператора $B_r(\lambda_{ri})$ к функции Ψ_λ является общей собственной функцией угловых миноров A_j , $j = 1, \dots, N'$ со сдвинутым на 1 параметром λ_{ri}

$$A_r(u) [B_r(\lambda_{ri}) \Psi_\lambda] = \prod_{k=1}^r (u - \lambda_{rk} - \delta_{ki}) \Psi_\lambda, \quad A_j(u) [B_r(\lambda_{ri}) \Psi_\lambda] = \prod_{k=1}^j (u - \lambda_{jk}) \Psi_\lambda, \quad j \neq r. \tag{3.35}$$

Соотношения (3.33) и (3.35) доказаны в конце текущего раздела. Отметим, что для их вывода используется лишь определение базиса Гельфанда-Цетлина Ψ_λ (3.25), коммутационные соотношения между минорами (3.47) и интерполяция Лагранжа. Поэтому, данные формулы верны для любого представления алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$ (не только основной серии), в котором угловые миноры L -оператора диагонализуются.

Таким образом, для индукционного шага $SL(N, \mathbb{C}) \rightarrow SL(N+1, \mathbb{C})$ нужно на предыдущем шаге $SL(N-1, \mathbb{C}) \rightarrow SL(N, \mathbb{C})$ получить формулу для действия миноров $B_m(u)$, $\bar{B}_m(\bar{u})$ L -оператора ранга N на собственные функции Ψ_λ его угловых миноров. Минор $B_1(u)$ равен $-\partial_{21}$. Для $m \geq 2$, приняв $i_1 = 2, \dots, i_{m-2} = m-1, i_{m-1} = m+1$ в (3.29), получаем

$$\begin{aligned}
B_m(u) &= L_{1, \dots, m-1, m+1}^{1, \dots, m}(u) = \mathcal{L}_{1, \dots, m-2, m}^{1, \dots, m-1}(u) \left(u - \sigma_1 + N - m + z_{m1} \partial_{m1} + \sum_{k=m+2}^N z_{k1} \partial_{k1} \right) \\
&- \sum_{k=m+1}^{N-1} \mathcal{L}_{1, \dots, m-2, k}^{1, \dots, m-1}(u) z_{k+1,1} \partial_{m+1,1} + \sum_{a=1}^{m-2} (-1)^{m+a+1} \mathcal{L}_{1, \dots, \hat{a}, \dots, m-1, m}^{1, \dots, m-1}(u) z_{m1} \partial_{a+1,1} \\
&- \mathcal{L}_{1, \dots, m-1}^{1, \dots, m-1}(u) z_{m1} \partial_{m+1,1} + \sum_{k=m+1}^{N-1} \sum_{a=1}^{m-2} (-1)^{m+a} \mathcal{L}_{1, \dots, \hat{a}, \dots, m-2, m, k}^{1, \dots, m-1}(u) z_{k+1,1} \partial_{a+1,1}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

В двойной сумме в (3.36) есть миноры $\mathcal{L}_{1, \dots, \hat{a}, \dots, m-2, m, k}^{1, \dots, m-1}(u)$ порядка $m-1$, у которых снизу пропущены два индекса среди $1, \dots, m-1$ — индексы a и $m-1$. Для L -оператора любого ранга N' результат применения миноров такого типа к собственной функции угловых миноров Ψ_λ можно выразить через действие операторов $B_{rab}(u)$ (3.31). Для любых натуральных

чисел r, a_1, a_2, b_1, b_2 , таких что $1 \leq a_1 < a_2 \leq r < b_1 < b_2 \leq N'$, верна формула

$$L_{1, \dots, \widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_2}, \dots, r, b_1, b_2}^{1 \dots r}(\lambda_{ri}) \Psi_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \frac{\sum_{k=1}^2 [B_{ra_k b_k}(\lambda_{ri}) B_{ra_{\widetilde{k}} b_{\widetilde{k}}}(\lambda_{rj}) - B_{ra_k b_{\widetilde{k}}}(\lambda_{ri}) B_{ra_{\widetilde{k}} b_k}(\lambda_{rj})] \Psi_\lambda}{(\lambda_{rj} - \lambda_{ri} + 1) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^r (\lambda_{rj} - \lambda_{rl})}, \quad (3.37)$$

где $1 \leq i \leq r$ и $\widetilde{1} = 2, \widetilde{2} = 1$. Она доказана в конце этого раздела. Для фиксированных r, a_1, a_2, b_1, b_2 есть r соотношений вида (3.37). С другой стороны, из определения L -оператора и квантовых миноров следует, что $L_{1, \dots, \widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_2}, \dots, r, b_1, b_2}^{1 \dots r}(u)$ является полиномом от u степени $r - 2$. Поэтому, результат действия этого минора на Ψ_λ для произвольного u можно вычислить при помощи соотношений (3.37) и интерполяции Лагранжа. Как и тождества (3.33), (3.35), равенство (3.37) выполняется не только для представлений основной серии, но и для любого представления $sl(N', \mathbb{C})$, в котором угловые миноры L -оператора диагонализуются.

Выведем теперь рекуррентные формулы для квантовых миноров L -оператора (3.28), (3.29) и (3.30). При помощи рекуррентных соотношений (3.27) получаем постолбцовое разбиение L -оператора ранга N

$$L(u) = \left((u - \sigma_1 + N - 1)z - \sum_{b=1}^{N-1} z_{b+1,1} (\mathcal{L}'_b(u) - z \partial_{b+1,1}) \quad \mathcal{L}'_1(u) - z \partial_{21} \quad \dots \quad \mathcal{L}'_{N-1}(u) - z \partial_{N1} \right),$$

где

$$z \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ z_{21} \\ \vdots \\ z_{N1} \end{pmatrix}, \quad z \partial_{k1} = \begin{pmatrix} \partial_{k1} \\ z_{21} \partial_{k1} \\ \vdots \\ z_{N1} \partial_{k1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}'_p(u) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{L}_p(u) \end{pmatrix}, \quad p = 1, \dots, N-1,$$

и $\mathcal{L}_p(u)$ – это p -ый столбец L -оператора $\mathcal{L}(u)$ ранга $N - 1$.

Для любого натурального числа k и столбцов $F_1(u), \dots, F_k(u)$ длины большей либо равной k с операторнозначными элементами, зависящими от спектрального параметра u , введем детерминант без сдвигов спектральных параметров

$$\det(F_1(u), \dots, F_k(u)) \equiv \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\tau) F_1^{\tau(1)}(u) \dots F_k^{\tau(k)}(u), \quad (3.38)$$

где $F_j^i(u)$ – это i -ый элемент столбца $F_j(u)$. Для $i \in \{1, \dots, N\}$ обозначим i -ый столбец $L(u)$ через $L_i(u)$. По определению (3.5), угловые квантовые миноры записываются при помощи

обозначения (3.38) следующим образом

$$\begin{aligned}
L_{1\dots m}^{1\dots m}(u) &= \det(L_1(u-m+1), L_2(u-m+2), \dots, L_m(u)) \\
&= (u - \sigma_1 + N - m) \det(z, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&\quad - \sum_{b=1}^{N-1} z_{b+1,1} \det(\mathcal{L}'_b(u-m+1) - z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}). \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (3.39)

$$\begin{aligned}
&\det(z, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \mathcal{L}'_2(u-m+3) - z\partial_{31}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&= \det(z, \mathcal{L}'_1(u-m+2), \mathcal{L}'_2(u-m+3) - z\partial_{31}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&\quad - \det(z, z\partial_{21}, \mathcal{L}'_2(u-m+3) - z\partial_{31}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}). \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Из определения (3.38) следует, что второе слагаемое в правой части (3.40) равно нулю, поскольку второй столбец-аргумент функции \det пропорционален первому. Проводя аналогичные манипуляции для 3-го, 4-го, \dots , n -го аргументов в первом слагаемом из правой части (3.40), получаем

$$\begin{aligned}
&\det(z, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \mathcal{L}'_2(u-m+3) - z\partial_{31}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&= \det(z, \mathcal{L}'_1(u-m+2), \mathcal{L}'_2(u-m+3), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)) \\
&= \det(\mathcal{L}'_1(u-m+2), \mathcal{L}'_2(u-m+3), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)) = \mathcal{L}'_{1,\dots,m-1}^{1,\dots,m-1}(u). \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Предпоследний переход в (3.41) основан на том, что первый элемент в столбце z равен 1, и верхний элемент в каждом столбце $\mathcal{L}'_p(u)$ нулевой.

Рассмотрим теперь слагаемые из суммы в (3.39)

$$\begin{aligned}
&\det(\mathcal{L}'_b(u-m+1) - z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&= \det(\mathcal{L}'_b(u-m+1) - z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)) \\
&\quad + \sum_{a=1}^{m-1} \det[\mathcal{L}'_b(u-m+1) - z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \dots, \\
&\quad \mathcal{L}'_{a-1}(u-m+a) - z\partial_{a1}, -z\partial_{a+1,1}, \mathcal{L}'_{a+1}(u-m+a+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)]. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathcal{L}'_k(u-m+k+1) - z\partial_{k+1,1} = \mathcal{L}'_k(u-m+k+1) - \partial_{k+1,1}z + e_{k+1} = \mathcal{L}'_k(u-m+k+2) - \partial_{k+1,1}z, \quad (3.43)$$

где e_{k+1} – столбец с единицей в $(k+1)$ -ой позиции и нулями в остальных позициях. Раскладывая по линейности первый член в правой части (3.42) и используя (3.43) для каждого

слагаемого суммы $\sum_{a=1}^{m-1}$, получаем

$$\begin{aligned}
& \det (\mathcal{L}'_b(u-m+1) - z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&= \det (\mathcal{L}'_b(u-m+1), \mathcal{L}'_1(u-m+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)) \\
&- \det (z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)) \\
&+ \sum_{a=1}^{m-1} \det [\mathcal{L}'_b(u-m+2) - \partial_{b+1,1}z, \mathcal{L}'_1(u-m+3) - \partial_{21}z, \dots, \\
&\mathcal{L}'_{a-1}(u-m+a+1) - \partial_{a1}z, -z\partial_{a+1,1}, \mathcal{L}'_{a+1}(u-m+a+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)]. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю, так как верхние элементы у всех столбцов-аргументов функции \det нулевые. В сумме по a в аргументах функции \det можно зачеркнуть добавки $\partial_{b+1,1}z, \partial_{21}z, \dots, \partial_{a1}z$, так как они пропорциональны столбцу z из $(a+1)$ -го аргумента. Таким образом, выражение (3.44) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& \det (\mathcal{L}'_b(u-m+1) - z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&= - \det (z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)) \\
&+ \sum_{a=1}^{m-1} \det [\mathcal{L}'_b(u-m+2), \mathcal{L}'_1(u-m+3), \dots, \mathcal{L}'_{a-1}(u-m+a+1), \\
&-z\partial_{a+1,1}, \mathcal{L}'_{a+1}(u-m+a+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)]. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Используя тот факт, что первый элемент в столбце z равен единице, а в столбце $\mathcal{L}'_p(u) -$ нулю, переписываем (3.45) в виде

$$\begin{aligned}
& \det (\mathcal{L}'_b(u-m+1) - z\partial_{b+1,1}, \mathcal{L}'_1(u-m+2) - z\partial_{21}, \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u) - z\partial_{m1}) \\
&= - \det (\mathcal{L}'_1(u-m+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)) \partial_{b+1,1} \\
&+ \sum_{a=1}^{m-1} (-1)^{a+1} \det [\mathcal{L}'_b(u-m+2), \mathcal{L}'_1(u-m+3), \dots, \mathcal{L}'_{a-1}(u-m+a+1), \\
&\mathcal{L}'_{a+1}(u-m+a+2), \dots, \mathcal{L}'_{m-1}(u)] \partial_{a+1,1} \tag{3.46} \\
&= -\mathcal{L}'_{1,\dots,m-1}(u) \partial_{b+1,1} + \sum_{a=1}^{m-1} (-1)^{a+1} \mathcal{L}'_{b,1,\dots,a-1,a+1,\dots,m-1}(u) \partial_{a+1,1} \\
&= -\mathcal{L}'_{1,\dots,m-1}(u) \partial_{b+1,1} + \sum_{a=1}^{m-1} (-1)^{a+m+1} \mathcal{L}'_{1,\dots,a-1,a+1,\dots,m-1,b}(u) \partial_{a+1,1}.
\end{aligned}$$

Подставляя результаты вычислений (3.41) и (3.46) в (3.39), получаем нужную формулу (3.28).

Рассмотрим натуральные числа i_1, \dots, i_{m-1} , такие что $2 \leq i_1 < \dots < i_{m-1} \leq N$. Выра-

жение для минора $L_{1,i_1,\dots,i_{m-1}}^{1\dots m}(u)$ в терминах (3.38) принимает тот же вид, что и (3.39)

$$L_{1,i_1,\dots,i_{m-1}}^{1\dots m}(u) = \det[(u - \sigma_1 + n - m)z - \sum_{b=1}^{n-1} z_{b+1,1}(\mathcal{L}'_b(u - m + 1) - z\partial_{b+1,1}), \\ \mathcal{L}'_{i_1-1}(u - m + 2) - z\partial_{i_1,1}, \dots, \mathcal{L}'_{i_{m-1}-1}(u) - z\partial_{i_{m-1},1}],$$

Таким образом, вывод формулы (3.29) повторяет выкладки (3.39)–(3.46).

Рассмотрим целочисленные индексы i_1, \dots, i_m , такие что $2 \leq i_1 < \dots < i_m \leq N$. Минор $L_{i_1,\dots,i_m}^{1\dots m}(u)$ представляется в том же виде, что и слагаемые в сумме $\sum_{b=1}^{n-1}$ из (3.39)

$$L_{i_1,\dots,i_m}^{1\dots m}(u) = \det[\mathcal{L}'_{i_1-1}(u - m + 1) - z\partial_{i_1,1}, \dots, \mathcal{L}'_{i_m-1}(u) - z\partial_{i_m,1}]$$

Вычисления, аналогичные выкладкам (3.42)–(3.46) приводят к нужному результату (3.30).

Наконец, выведем формулы (3.33), (3.35) и (3.37) для действия неугловых миноров на функции Ψ_λ . Рассмотрим L -оператор ранга N . Коммутационные соотношения между его квантовыми минорами в общем случае имеют вид [77]:

$$\left[L_{b_1\dots b_r}^{a_1\dots a_r}(u), L_{b'_1\dots b'_m}^{a'_1\dots a'_m}(v) \right] \\ = \sum_{k=1}^{\min(r,m)} \frac{k!}{\prod_{i=1}^k (u - v + m - i)} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \leq r \\ j_1 < \dots < j_k \leq m}} \left(L_{b'_1\dots b'_{i_1}\dots b'_{i_k}\dots b'_m}^{a'_1\dots a'_m}(v) L_{b_1\dots b'_{j_1}\dots b'_{j_k}\dots b_r}^{a_1\dots a_r}(u) \right. \\ \left. - L_{b_1\dots b_r}^{a_1\dots a_{j_1}\dots a'_{j_k}\dots a_r}(u) L_{b'_1\dots b'_m}^{a'_1\dots a_{i_1}\dots a_{i_k}\dots a'_m}(v) \right). \quad (3.47)$$

Следует отметить, что в [77] определяющие соотношения янгиана задаются через R -матрицу $\tilde{R}(u) = \mathbb{1} - u^{-1}P$, которая отличается от (3.4) на знак перед вторым слагаемым. Таким образом, чтобы получить коммутационные соотношения в нашей нотации, нужно сравнить определение квантовых миноров из упомянутого источника с (3.5) и использовать тот факт, что для L -оператора $\tilde{L}(u) \equiv L(-u)$ выполняется RL -соотношение с матрицей $\tilde{R}(u)$.

Приняв $(a_1, \dots, a_r) = (1, \dots, r)$, $(a'_1, \dots, a'_m) = (1, \dots, m)$ в (3.47) и воспользовавшись антисимметрией квантовых миноров (3.6), получаем

$$(u - v + m - \mu + 1)_\mu L_{b_1\dots b_r}^{1\dots r}(u) L_{b'_1\dots b'_m}^{1\dots m}(v) = (u - v + m - \mu)_\mu L_{b'_1\dots b'_m}^{1\dots m}(v) L_{b_1\dots b_r}^{1\dots r}(u) \\ + \sum_{k=1}^{\mu} k!(u - v + m - \mu)_{\mu-k} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \leq r \\ j_1 < \dots < j_k \leq m}} L_{b'_1\dots b'_{i_1}\dots b'_{i_k}\dots b'_m}^{1\dots m}(v) L_{b_1\dots b'_{j_1}\dots b'_{j_k}\dots b_r}^{1\dots r}(u), \quad (3.48)$$

где $\mu \equiv \min(r, m)$, и для $h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ обозначение

$$(x)_h = \prod_{j=0}^{h-1} (x + j)$$

называется *символом Похгаммера*. Приравнивая в (3.48)

$$(b_1, \dots, b_r) = (1, \dots, \widehat{a}, \dots, r, b), \quad (b'_1, \dots, b'_m) = (1, \dots, m),$$

где a и b удовлетворяют условию $1 \leq a \leq r < b \leq N$, и снова пользуясь антисимметрией (3.6), находим коммутационные соотношения между угловыми минорами $A_m(u)$ и минорами $B_{rab}(u)$ (3.31). Для m из интервала $a \leq m < r$ они принимают вид

$$(u - v + 1)B_{rab}(u)A_m(v) = (u - v)A_m(v)B_{rab}(u) + (-1)^{m-r}B_{mab}(v)A_r(u) + \sum_{c=m+1}^r (-1)^{m-c-1}B_{mac}(v)B_{rcb}(u), \quad (3.49)$$

в случае $r \leq m < b$ получаем

$$(u - v + m - r + 1)B_{rab}(u)A_m(v) = (u - v + m - r)A_m(v)B_{rab}(u) + (-1)^{m-r}B_{mab}(v)A_r(u) + \sum_{c=r+1}^m (-1)^{m-c}B_{mcb}(v)B_{rac}(u), \quad (3.50)$$

и, наконец, при $m < a$ или $m \geq b$ рассматриваемые миноры коммутируют

$$[B_{rab}(u), A_m(v)] = 0. \quad (3.51)$$

Действуя обеими частями тождества (3.50) при $a = m = r$, $b = r + 1$, $u = \lambda_{ri}$ на функцию Ψ_λ и используя свойство $A_r(\lambda_{ri})\Psi_\lambda = 0$ (следствие (3.25)), получаем первое соотношение в (3.35). Остальные равенства в (3.35) следуют из коммутации $B_r(u) = B_{r,r,r+1}(u)$ и $A_j(v)$ при $j \neq r$ (формула (3.51)).

Рассмотрим целые числа a, b, r, m , такие что $1 \leq a \leq r < m < b \leq N$. Подействовав на Ψ_λ обеими частями (3.50) при $u = \lambda_{rk}$, $k = 1, \dots, r$, $v = \lambda_{mi}$, $i = 1, \dots, m$, получим

$$A_m(\lambda_{mi})B_{rab}(\lambda_{rk})\Psi_\lambda = -\frac{1}{\lambda_{rk} - \lambda_{mi} + m - r} \sum_{c=r+1}^m (-1)^{m-c} B_{mcb}(\lambda_{mi})B_{rac}(\lambda_{rk})\Psi_\lambda. \quad (3.52)$$

По определению, квантовый минор $B_{rab}(u)$ является полиномом от u степени $r - 1$. Следовательно, при помощи интерполяции Лагранжа равенство (3.52) можно обобщить на случай произвольных значений $B_{rab}(u)$

$$A_m(\lambda_{mi})B_{rab}(u)\Psi_\lambda = -\sum_{k=1}^r \left(\prod_{l \neq k} \frac{u - \lambda_{rl}}{\lambda_{rk} - \lambda_{rl}} \right) \frac{1}{\lambda_{rk} - \lambda_{mi} + m - r} \sum_{c=r+1}^m (-1)^{m-c} B_{mcb}(\lambda_{mi})B_{rac}(\lambda_{rk})\Psi_\lambda. \quad (3.53)$$

Действуя на Ψ_λ обеими частями (3.50) при $v = \lambda_{mi}$ и подставляя выражение (3.53) для

$A_m(\lambda_{mi})B_{rab}(u)\Psi_\lambda$, получаем

$$B_{mab}(\lambda_{mi})\Psi_\lambda = \sum_{k=1}^r \sum_{c=r+1}^m \frac{(-1)^{c-r} B_{mcb}(\lambda_{mi}) B_{rac}(\lambda_{rk}) \Psi_\lambda}{(\lambda_{rk} - \lambda_{mi} + m - r) \prod_{l \neq k} (\lambda_{rk} - \lambda_{rl})}. \quad (3.54)$$

Теперь найдем выражение для $B_{rab}(\lambda_{ri})\Psi_\lambda$, аналогичное (3.54). Переставив в (3.49) индексы r и m и действуя обеими частями этого соотношения на Ψ_λ при $u = \lambda_{mk}$ и $v = \lambda_{ri}$, получаем

$$A_r(\lambda_{ri})B_{mab}(\lambda_{mk})\Psi_\lambda = -\frac{1}{\lambda_{mk} - \lambda_{ri}} \sum_{c=r+1}^m (-1)^{r-c-1} B_{rac}(\lambda_{ri}) B_{mcb}(\lambda_{mk}) \Psi_\lambda.$$

При помощи интерполяции Лагранжа это соотношение обобщается на случай произвольных значений аргумента минора B_{mab}

$$\begin{aligned} & A_r(\lambda_{ri})B_{mab}(u)\Psi_\lambda \\ &= -\sum_{k=1}^m \left(\prod_{l \neq k} \frac{u - \lambda_{ml}}{\lambda_{mk} - \lambda_{ml}} \right) \frac{1}{\lambda_{mk} - \lambda_{ri}} \sum_{c=r+1}^m (-1)^{r-c-1} B_{rac}(\lambda_{ri}) B_{mcb}(\lambda_{mk}) \Psi_\lambda. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Далее, подействовав на Ψ_λ обеими частями тождества (3.49) (с переставленными индексами r и m) при $v = \lambda_{ri}$ и подставляя в полученную формулу выражение (3.55) для $A_r(\lambda_{ri})B_{mab}(u)\Psi_\lambda$, находим

$$B_{rab}(\lambda_{ri})\Psi_\lambda = \sum_{k=1}^m \sum_{c=r+1}^m \frac{(-1)^{m-c-1} B_{rac}(\lambda_{ri}) B_{mcb}(\lambda_{mk}) \Psi_\lambda}{(\lambda_{mk} - \lambda_{ri}) \prod_{l \neq k} (\lambda_{mk} - \lambda_{ml})}. \quad (3.56)$$

Примем в (3.56) $m = r + 1$ и переименуем переменную суммирования $k \rightarrow s_{r+1}$. В результате равенство примет вид

$$B_{rab}(\lambda_{ri})\Psi_\lambda = -\sum_{s_{r+1}=1}^{r+1} \frac{B_{r,a,r+1}(\lambda_{ri}) B_{r+1,r+1,b}(\lambda_{r+1,s_{r+1}}) \Psi_\lambda}{(\lambda_{r+1,s_{r+1}} - \lambda_{ri}) p_{r+1,s_{r+1}}(\lambda)}, \quad (3.57)$$

где

$$p_{jk}(\lambda) \equiv \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq k}}^j (\lambda_{jk} - \lambda_{j\alpha}).$$

Используя многократно (3.54), выражение $B_{r,a,r+1}(\lambda_{ri})\Psi_\lambda$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & B_{r,a,r+1}(\lambda_{ri})\Psi_\lambda \\ &= (-1)^{r-a} \sum_{s_{r-1}=1}^{r-1} \dots \sum_{s_a=1}^a \frac{B_{r,r,r+1}(\lambda_{ri}) \prod_{t=a}^{r-1} B_{t,t,t+1}(\lambda_{ts_t}) \Psi_\lambda}{(\lambda_{r-1,s_{r-1}} - \lambda_{ri} + 1) \prod_{q=a}^{r-2} (\lambda_{qs_q} - \lambda_{q+1,s_{q+1}} + 1) \prod_{q=a}^{r-1} p_{qs_q}(\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

где упорядоченное произведение операторов было введено в (3.34). При действии оператора $B_{r+1,r+1,b}(v)$ на собственную функцию Ψ_λ не меняет собственных чисел угловых миноров $A_j(u)$, $j = 1, \dots, r$, так как, в соответствии с (3.51), B -минор с ними коммутирует. Поэтому, Ψ_λ в (3.58) можно безболезненно заменить на $B_{r+1,r+1,b}(\lambda_{r+1,s_{r+1}})\Psi_\lambda$. В результате получаем соотношение

$$\begin{aligned} & B_{r,a,r+1}(\lambda_{ri})B_{r+1,r+1,b}(\lambda_{r+1,s_{r+1}})\Psi_\lambda \\ &= (-1)^{r-a} \sum_{s_{r-1}=1}^{r-1} \dots \sum_{s_a=1}^a \frac{B_{r,r,r+1}(\lambda_{ri}) \prod_{t=a}^{\overleftarrow{r-1}} B_{t,t,t+1}(\lambda_{ts_t}) B_{r+1,r+1,b}(\lambda_{r+1,s_{r+1}})\Psi_\lambda}{(\lambda_{r-1,s_{r-1}} - \lambda_{ri} + 1) \prod_{q=a}^{r-2} (\lambda_{qs_q} - \lambda_{q+1,s_{q+1}} + 1) \prod_{q=a}^{r-1} p_{qs_q}(\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Перепишем в последней формуле выражение $B_{r+1,r+1,b}(\lambda_{r+1,s_{r+1}})\Psi_\lambda$, последовательно применяя (3.56) при $m = r + 2, r + 3, \dots, b - 1$

$$\begin{aligned} & B_{r+1,r+1,b}(\lambda_{r+1,s_{r+1}})\Psi_\lambda \\ &= (-1)^{b-r} \sum_{s_{r+2}=1}^{r+2} \dots \sum_{s_{b-1}=1}^{b-1} \frac{\prod_{c=r+1}^{\overrightarrow{b-1}} B_{c,c,c+1}(\lambda_{cs_c})\Psi_\lambda}{(\lambda_{r+1,s_{r+1}} - \lambda_{ri}) \prod_{d=r+2}^{b-1} (\lambda_{ds_d} - \lambda_{d-1,s_{d-1}}) \prod_{d=r+1}^{b-1} p_{ds_d}(\lambda)}. \end{aligned}$$

Подставляя преобразованное таким образом выражение (3.59) в (3.57), выражаем элемент $B_{rab}(\lambda_{ri})\Psi_\lambda$ через миноры B_j (3.32)

$$\begin{aligned} & B_{rab}(\lambda_{ri})\Psi_\lambda \\ &= (-1)^{b-a-1} \sum_{s_{r-1}=1}^{r-1} \dots \sum_{s_a=1}^a \sum_{s_{r+1}=1}^{r+1} \dots \sum_{s_{b-1}=1}^{b-1} \frac{1}{(\lambda_{r-1,s_{r-1}} - \lambda_{ri} + 1)(\lambda_{r+1,s_{r+1}} - \lambda_{ri})} \\ & \quad \times \frac{B_r(\lambda_{ri}) \prod_{t=a}^{\overleftarrow{r-1}} B_t(\lambda_{ts_t}) \prod_{c=r+1}^{\overrightarrow{b-1}} B_c(\lambda_{cs_c})\Psi_\lambda}{\prod_{q=a}^{r-2} (\lambda_{qs_q} - \lambda_{q+1,s_{q+1}} + 1) \prod_{d=r+2}^{b-1} (\lambda_{ds_d} - \lambda_{d-1,s_{d-1}}) \prod_{q=a}^{r-1} p_{qs_q}(\lambda) \prod_{d=r+1}^{b-1} p_{ds_d}(\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Используя тот факт, что $B_{rab}(u)$ является полиномом от u степени $r - 1$, получаем нужную формулу (3.33) из (3.60) при помощи интерполяции Лагранжа.

Остается вывести формулу (3.37) для действия оператора $L(u)_{1,\dots,\widehat{a_1},\dots,\widehat{a_2},\dots,r,b_1,b_2}^{1\dots r}$ на Ψ_λ . Обозначим $a = (a_1, a_2)$, где $1 \leq a_1 < a_2 \leq r$, и $b = (b_1, b_2)$, где $r < b_1 < b_2 \leq N$. Вдобавок, введем обозначение $B_{rab}(u) \equiv L(u)_{1,\dots,\widehat{a_1},\dots,\widehat{a_2},\dots,r,b_1,b_2}^{1\dots r}$. Приняв в (3.48)

$$\begin{aligned} r &= m, \\ (b_1, \dots, b_r) &= (1, \dots, \widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_2}, \dots, r, b_1, b_2), \\ (b'_1, \dots, b'_r) &= (1, \dots, \widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_2}, \dots, r, a_1, a_2) \end{aligned}$$

и используя антисимметрию квантовых миноров (3.6), можно получить следующее соотношение

$$(u - v + 1)(u - v + 2)B_{rab}(u)A_r(v) = (u - v)(u - v + 1)A_r(v)B_{rab}(u) + 2B_{rab}(v)A_r(u) + (u - v) \sum_{\alpha=1}^2 [B_{ra_\alpha b_{\bar{\alpha}}}(v)B_{ra_{\bar{\alpha}} b_\alpha}(u) - B_{ra_\alpha b_\alpha}(v)B_{ra_{\bar{\alpha}} b_{\bar{\alpha}}}(u)], \quad (3.61)$$

где $\tilde{1} = 2, \tilde{2} = 1$. Действуя на Ψ_λ обеими частями (3.61) при $v = \lambda_{ri}, u = \lambda_{rj}, j \neq i$, находим

$$A_r(\lambda_{ri})B_{rab}(\lambda_{rj})\Psi_\lambda = - \frac{\sum_{\alpha=1}^2 [B_{ra_\alpha b_{\bar{\alpha}}}(\lambda_{ri})B_{ra_{\bar{\alpha}} b_\alpha}(\lambda_{rj}) - B_{ra_\alpha b_\alpha}(\lambda_{ri})B_{ra_{\bar{\alpha}} b_{\bar{\alpha}}}(\lambda_{rj})]\Psi_\lambda}{\lambda_{rj} - \lambda_{ri} + 1}. \quad (3.62)$$

По определению, минор $B_{rab}(u)$ является полиномом от u степени $r - 2$. Значит, при помощи интерполяции Лагранжа равенство (3.62) можно обобщить на случай произвольного аргумента минора B_{rab}

$$A_r(\lambda_{ri})B_{rab}(u)\Psi_\lambda = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^r \frac{u - \lambda_{rk}}{\lambda_{rj} - \lambda_{rk}} \right) \frac{\sum_{\alpha=1}^2 [B_{ra_\alpha b_{\bar{\alpha}}}(\lambda_{ri})B_{ra_{\bar{\alpha}} b_\alpha}(\lambda_{rj}) - B_{ra_\alpha b_\alpha}(\lambda_{ri})B_{ra_{\bar{\alpha}} b_{\bar{\alpha}}}(\lambda_{rj})]\Psi_\lambda}{\lambda_{rj} - \lambda_{ri} + 1}. \quad (3.63)$$

Наконец, чтобы получить доказываемую формулу (3.37), нужно подействовать на Ψ_λ обеими частями (3.61) и подставить в полученное равенство выражение для $A_r(\lambda_{ri})B_{rab}(u)\Psi_\lambda$, найденное в (3.63).

3.4 Построение собственных функций

Условимся называть собственную функцию Ψ_λ (3.25) квантовых миноров L -оператора для $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки собственной функцией ранга N . Из формулы для минора $A_1(u) = L(u)_1^1$ в (3.27) следует, что Ψ_λ являются однородными функциями переменных $z_{k1}, k = 2, \dots, N$. Голоморфная и антиголоморфная степени однородности равны, соответственно, $\sigma_1 - N + 1 - \lambda_{11}$ и $\bar{\sigma}_1 - N + 1 - \bar{\lambda}_{11}$. При построении собственных функций на индукционном шаге от $SL(N - 1, \mathbb{C})$ к $SL(N, \mathbb{C})$ рассматривается следующий анзац

$$\Psi_\lambda(z) = \int \mathcal{D}\gamma K_\gamma(\lambda) \Phi_\gamma(z') [z_{21}]^{\sigma_1 - N + 1 - \lambda_{11} - \sum_{k=3}^N b_k(\gamma, \lambda)} [z_{31}]^{b_3(\gamma, \lambda)} \dots [z_{N1}]^{b_N(\gamma, \lambda)}. \quad (3.64)$$

В последней формуле $z = \{z_{ij}\}_{1 \leq j < i \leq N}$ - нижнетреугольная матрица размера $N \times N$ с единицами на диагонали, $z' \equiv \{z_{ij}\}_{2 \leq j < i \leq N}$ - подматрица z размера $(N - 1) \times (N - 1)$, а $\Psi_\lambda(z), \Phi_\gamma(z')$

– собственные функции ранга N и $N - 1$. Степенная функция

$$[x]^\alpha = x^\alpha \bar{x}^{\bar{\alpha}}$$

определена в разделе 1.1. Ядро интеграла $K_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$, зависящее от параметров $\gamma_{ij}, \bar{\gamma}_{ij}, \lambda_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}$, а также показатели степени $b_k(\gamma, \lambda), \bar{b}_k(\bar{\gamma}, \bar{\lambda})$ являются неизвестными величинами, которые нужно найти. Интеграл по параметрам функции ранга $N - 1$

$$(\gamma_{ij}, \bar{\gamma}_{ij}) = \left(\frac{k_{ij}}{2} + i\nu_{ij}, -\frac{k_{ij}}{2} + i\nu_{ij} \right)$$

определяется аналогично (1.113)

$$\int \mathcal{D}\gamma \equiv \prod_{1 \leq j \leq i \leq N} \int \mathcal{D}\gamma_{ij}, \quad \int \mathcal{D}\gamma_{ij} \equiv \sum_{k_{ij} \in \mathbb{Z}_{\mathcal{C}_{ij}}} \int d\nu_{ij}.$$

Контур интегрирования \mathcal{C}_{ij} должны быть подобраны таким образом, чтобы все замены переменных интегрирования в последующих вычислениях были корректными. Функция (3.64) удовлетворяет условию однородности. Анзац, аналогичный (3.64) был впервые предложен в работе [24], посвященной индуктивному построению волновых функций в похожей квантовой модели – открытой цепочке Тоды (индукция по числу узлов). По сути, выражение (3.64) представляет из себя разложение функции $\Psi_\lambda(z)$ по базису собственных функций Φ_γ угловых миноров L -оператора $\mathcal{L}(u)$ ранга $N - 1$.

В первую очередь найдем показатели $b_i(\gamma, \lambda), \bar{b}_i(\bar{\gamma}, \bar{\lambda})$. Подставим анзац для собственной функции ранга N (3.64) в уравнение (3.25) на собственные значения углового минора $A_m(u) = L(u)_{1 \dots m}^{1 \dots m}$ для $m = 2, \dots, N$ и перепишем $A_m(u)$ при помощи формулы (3.28). По определению, минор $\mathcal{L}(u)_{1 \dots, \bar{a}, \dots, m-1, b}^{1 \dots, m-1}$ в (3.28) является многочленом от u степени $m - 2$, поэтому, в правой части этой формулы только первый член имеет ненулевой коэффициент при u^{m-1} . Таким образом, приравнивая после всех подстановок в (3.25) коэффициенты при u^{m-1} , получаем следующую систему уравнений на $b_i(\gamma, \lambda)$

$$\sum_{k=m+1}^N b_k(\gamma, \lambda) = \sum_{l=1}^{m-1} \gamma_{m-1, l} - \sum_{s=1}^m \lambda_{ms} + \sigma_1 - N + m, \quad m = 2, \dots, N - 1.$$

Следовательно, показатели степени имеют вид

$$\begin{aligned} b_i(\gamma, \lambda) &= \sum_{l=1}^{i-2} \gamma_{i-2, l} - \sum_{l=1}^{i-1} \gamma_{i-1, l} - \sum_{s=1}^{i-1} \lambda_{i-1, s} + \sum_{s=1}^i \lambda_{is} - 1, \quad i = 3, \dots, N - 1, \\ b_N(\gamma, \lambda) &= \sum_{l=1}^{N-2} \gamma_{N-2, l} - \sum_{s=1}^{N-1} \lambda_{N-1, s} + \sigma_1 - 1. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Аналогичным образом, из уравнений на собственные значения антиголоморфных миноров получаются формулы для $\bar{b}_i(\bar{\gamma}, \bar{\lambda})$, копирующие (3.65) с точностью до замены голоморфных

параметров на антиголоморфные.

Для того, чтобы найти $K_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$ из уравнений на собственные значения угловых миноров (3.25), нужно выразить эти миноры при помощи рекуррентных формул (3.28), подставить анзац для собственной функции ранга N (3.64) и подействовать минорами ранга $N - 1$ на функцию $\Phi_\gamma(z')$. Так как старший член полинома $A_m(u)$ является тождественным оператором, и уравнение на коэффициенты при u^{m-1} уже решено, то задача на собственные значения $A_m(u)$ эквивалентна системе из $m-1$ уравнений на $K_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$. Рассматривая спектральные задачи для всех голоморфных угловых миноров, получаем $(N-1)(N-2)/2$ уравнений на $K_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$, как функцию $(N-1)(N-2)/2$ голоморфных параметров $\{\gamma_{ij}, 1 \leq j \leq i \leq N-1\}$. Аналогично, спектральные задачи для антиголоморфных миноров дают $(N-1)(N-2)/2$ уравнений на $K_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$ как функцию $(N-1)(N-2)/2$ антиголоморфных параметров $\{\gamma_{ij}, 1 \leq j \leq i \leq N-1\}$. Изложенный план построения собственных функций при помощи индукции по рангу N будет проиллюстрирован на примере $N = 2, 3, 4$.

3.4.1 Собственные функции для $N = 2$

В случае $N = 2$ голоморфный L -оператор, соответствующий представлению основной серии (3.10) с параметрами σ_1, σ_2 , имеет вид

$$L(u) = \begin{pmatrix} u - \sigma_1 + 1 + z\partial & -\partial \\ z(z\partial + \sigma_2 + 1 - \sigma_1) & u - \sigma_2 - z\partial \end{pmatrix},$$

где $z \equiv z_{21}$, $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z}$, $\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Единственный нетривиальный угловой минор L -оператора равен

$$A_1(u) = u - \sigma_1 + 1 + z\partial.$$

Спектральная задача (3.25) выглядит следующим образом

$$A_1(u)\Psi_\lambda = (u - \lambda_{11})\Psi_\lambda, \quad \bar{A}_1(\bar{u})\Psi_\lambda = (\bar{u} - \bar{\lambda}_{11})\Psi_\lambda,$$

где $\bar{A}_1(\bar{u})$ – минор антиголоморфного L -оператора $\bar{L}(\bar{u})$, имеющего тот же вид, что и $L(u)$. Собственная функция Ψ_λ соответствует схемам Гельфанда-Цетлина (3.26) $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \bar{\lambda})$, где

$$\lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 \\ & \lambda_{11} \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & \bar{\sigma}_2 \\ & \bar{\lambda}_{11} \end{pmatrix},$$

где параметры представления основной серии σ_1, σ_2 и $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$ соответствуют собственному числу квантового детерминанта

$$A_2(u) = (u - \sigma_1)(u - \sigma_2) \mathbb{1}, \quad \bar{A}_2(u) = (\bar{u} - \bar{\sigma}_1)(\bar{u} - \bar{\sigma}_2) \mathbb{1}.$$

Функция Ψ_{λ} имеет вид

$$\Psi_{\lambda}(z) = \Gamma(1 - \sigma_1 + \lambda_{11}) [z]^{\sigma_1 - 1 - \lambda_{11}}, \quad (3.66)$$

где гамма-функция, связанная с полем \mathbb{C} , определена в (1.10)

$$\mathbf{\Gamma}(a) := \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1 - \bar{a})}.$$

Нормировочный коэффициент в (3.66) подобран так, что миноры вида (3.32)

$$B_1(u) = L_2^1(u) = -\partial, \quad \bar{B}_1(u) = \bar{L}_2^1(u) = -\bar{\partial}$$

сдвигают спектральные переменные у собственной функции

$$B_1(u) \Psi_{\lambda} = \Psi_{\lambda + e_{11}}, \quad \bar{B}_1(\bar{u}) \Psi_{\lambda} = -\Psi_{\lambda + \bar{e}_{11}}, \quad (3.67)$$

где введены следующие обозначения

$$\lambda \pm e_{11} = \left[\begin{pmatrix} \sigma_1 & \lambda_{11} \pm 1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & \bar{\lambda}_{11} \\ \bar{\sigma}_2 \end{pmatrix} \right], \quad \lambda \pm \bar{e}_{11} = \left[\begin{pmatrix} \sigma_1 & \lambda_{11} \\ \sigma_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & \bar{\lambda}_{11} \pm 1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.68)$$

Полный ортогональный (относительно скалярного произведения в $L^2(Z_2)$) набор функций (3.66) задается параметрами вида

$$(\lambda_{11}, \bar{\lambda}_{11}) = \left(\frac{k + \varkappa - 1}{2} + i\nu, \frac{-k + \varkappa - 1}{2} + i\nu \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{R},$$

где константа $\varkappa \in \mathbb{R}$ определяется параметрами представления основной серии в соответствии с формулой (3.18). Соотношение ортогональности имеет вид

$$\int d^2z \overline{\Psi_{\lambda}(z)} \Psi_{\lambda'}(z) = 2\pi^2 \delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}). \quad (3.69)$$

Напомним, что для пары чисел вида

$$(x, \bar{x}) = \left(\frac{h}{2} + i\rho, -\frac{h}{2} + i\rho \right), \quad h \in \mathbb{Z}, \rho \in \mathbb{R}$$

дельта-функция $\delta^{(2)}$ (1.58) определяется как

$$\delta^{(2)}(x) = \delta_{h,0} \delta(\rho),$$

где $\delta_{h,0}$ – символ Кронекера, а $\delta(\rho)$ – дельта-функция Дирака. То есть, в данном случае

$$\delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}) = \delta_{k,k'} \delta(\nu - \nu'),$$

где $\lambda'_{11} = (k' + \varkappa - 1)/2 + i\nu'$, $\bar{\lambda}'_{11} = (-k' + \varkappa - 1)/2 + i\nu'$. Формула (3.69) следует из интегрального

представления для дельта-функции

$$\int d^2z [z]^{x-1} = 2\pi^2 \delta^{(2)}(x) \quad (3.70)$$

и формул дополнения и сопряжения (A.4), (A.5), для гамма-функции.

Соотношение полноты [109]

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\nu \Psi_{\lambda}(z) \overline{\Psi_{\lambda}(z')} = 2\pi^2 \delta^2(z - z')$$

легко получить при помощи формулы суммирования Пуассона и стандартного интегрального разложения дельта-функции Драка по плоским волнам. Напомним, что $\delta^2(z)$ – это дельта-функция в комплексной плоскости

$$\delta^2(z) = \delta(\operatorname{Re} z) \delta(\operatorname{Im} z).$$

3.4.2 Индукционный шаг от $N = 2$ к $N = 3$

Обозначим

$$(x, y, z) \equiv (z_{21}, z_{31}, z_{32}).$$

Обозначим через $L(u)$ L -оператор, соответствующий представлению $SL(3, \mathbb{C})$ основной серии (3.10) с параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Используя рекуррентные формулы (3.28)–(3.30), запишем выражения для его квантовых миноров

$$\begin{aligned} A_1(u) &= u - \sigma_1 + 2 + x\partial_x + y\partial_y, \\ A_2(u) &= \mathcal{L}(u)_1^1 (u - \sigma_1 + 1 + y\partial_y) - \mathcal{L}(u)_2^1 y\partial_x \\ L_2^1(u) &= -\partial_x, \\ L_3^1(u) &= -\partial_y, \\ L_{13}^{12}(u) &= \mathcal{L}_2^1(u) (u - \sigma_1 + 1 + x\partial_x) - \mathcal{L}_1^1(u) x\partial_y, \\ L_{23}^{12}(u) &= -\mathcal{L}_2^1(u) \partial_x + \mathcal{L}_1^1(u) \partial_y, \end{aligned} \quad (3.71)$$

где $\mathcal{L}(u)$ – L -оператор, соответствующий представлению $SL(2, \mathbb{C})$ с параметрами σ_2, σ_3 . Матричные элементы $\mathcal{L}(u)$ представляют собой операторы, действующие на функциях переменной z . Переменные x, y “новые”, они появляются в представлении $SL(3, \mathbb{C})$. Аналогичные рекуррентные выражения имеют место для антиголоморфных миноров.

Спектральная задача для угловых миноров в случае $N = 3$ имеет вид

$$A_1(u) \Psi_{\lambda} = (u - \lambda_{11}) \Psi_{\lambda}, \quad A_2(u) \Psi_{\lambda} = (u - \lambda_{21})(u - \lambda_{22}) \Psi_{\lambda}.$$

Собственная функция определяется схемами Гельфанда-Цетлина $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \bar{\lambda})$, где

$$\lambda = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \sigma_2 & & \sigma_3 \\ & \lambda_{21} & & \lambda_{22} & \\ & & & & \lambda_{11} \end{pmatrix}, \quad \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_1 & & \bar{\sigma}_2 & & \bar{\sigma}_3 \\ & \bar{\lambda}_{21} & & \bar{\lambda}_{22} & \\ & & & & \bar{\lambda}_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.72)$$

В соответствии с (3.64), рассмотрим следующий анзац для собственных функций

$$\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(x, y, z) = \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda}) \Phi_{\boldsymbol{\gamma}}(z) [x]^{\sigma_1-2-\lambda_{11}-b_3(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda})} [y]^{b_3(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda})}, \quad (3.73)$$

где $\Phi_{\boldsymbol{\gamma}}$ – собственная функция $SL(2, \mathbb{C})$ -цепочки с L -оператором $\mathcal{L}(u)$, она определяется схемами

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma, \bar{\gamma}), \quad \gamma = \begin{pmatrix} \sigma_2 & & \sigma_3 \\ & \gamma_{11} & \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}_2 & & \bar{\sigma}_3 \\ & \bar{\gamma}_{11} & \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

и дается выражением (3.66). Показатель степени $b_3(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\lambda})$ дается формулой (3.65) при $N = 3$. Формула (3.73), фактически, представляет собой разложение функции ранга 3 по полному ортогональному базису функций ранга 2 (3.66). Как было упомянуто в предыдущем разделе, полный ортогональный набор $\Phi_{\boldsymbol{\gamma}}$ задается параметрами вида

$$(\gamma_{11}, \bar{\gamma}_{11}) = \left(\frac{k + \varkappa - 1}{2} + i\nu, \frac{-k + \varkappa - 1}{2} + i\nu \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{R},$$

где $\varkappa \in \mathbb{R}$ определяется параметрами представления основной серии (3.18). В связи с этим, принимаем в (3.73)

$$\int \mathcal{D}\gamma_{11} \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\nu.$$

Таким образом, задача состоит в нахождении ядра интеграла $K_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\lambda})$, зависящего от параметров (3.72), (3.74). Так как уравнение на собственные значения A_1 было решено в общем случае еще в начале раздела 3.4, то остается только спектральная задача для $A_2(u)$. Подействуем этим минором на $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$, используя рекуррентное выражение (3.71) для него, анзац для функции (3.73) и формулу (3.67) для действия минора L -оператора $\mathcal{L}(u)$ ранга 2. Получим

$$\begin{aligned} A_2(u)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} &= \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\boldsymbol{\gamma}}(u - \gamma_{11})(u - \sigma_1 + 1 + b_3) \Phi_{\boldsymbol{\gamma}}(z) [x]^{\sigma_1-2-\lambda_{11}-b_3} [y]^{b_3} \\ &\quad - \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\boldsymbol{\gamma}}(\sigma_1 - 2 - \lambda_{11} - b_3) \Phi_{\boldsymbol{\gamma}+e_{11}}(z) [x]^{\sigma_1-2-\lambda_{11}-b_3-\Delta} [y]^{b_3+\Delta}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

где обозначение для сдвига спектральной переменной $\boldsymbol{\gamma} + e_{11}$ введено в (3.68), и

$$(\Delta, \bar{\Delta}) = (1, 0).$$

Сделаем во втором интеграле в (3.75) замену переменных интегрирования

$$k \rightarrow k - 1, \nu \rightarrow \nu + \frac{i}{2}. \quad (3.76)$$

В результате выражение примет вид

$$A_2(u)\Psi_{\lambda} = \int \mathcal{D}\gamma_{11} (K_{\gamma}(u - \gamma_{11})(u - \sigma_1 + 1 + b_3) - K_{\gamma-e_{11}}(\sigma_1 - 1 - \lambda_{11} - b_3)) \times \Phi_{\gamma}(z) [x]^{\sigma_1-2-\lambda_{11}-b_3} y^{b_3}, \quad (3.77)$$

Сравнивая последний результат с правой частью уравнения на собственные значения $A_2(u)$, получаем конечно-разностное уравнение на K_{γ}

$$(u - \gamma_{11})(u - \sigma_1 + 1 + b_3)K_{\gamma} + (-\sigma_1 + 1 + \lambda_{11} + b_3)K_{\gamma-e_{11}} = (u - \lambda_{21})(u - \lambda_{22})K_{\gamma}.$$

В этом соотношении коэффициенты при u^2 и u^1 тождественно равны. Поэтому, его достаточно решить при любом частном значении u . Если принять $u = \gamma_{11}$ то уравнение сильно упростится

$$K_{\gamma-e_{11}}(\lambda) = \frac{(\gamma_{11} - \lambda_{21})(\gamma_{11} - \lambda_{22})}{\gamma_{11} + \lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{22}} K_{\gamma}(\lambda). \quad (3.78)$$

Те же вычисления с антиголоморфным минором $\bar{A}_2(\bar{u})$ приводят к аналогичному уравнению

$$K_{\gamma-\bar{e}_{11}}(\lambda) = -\frac{(\bar{\gamma}_{11} - \bar{\lambda}_{21})(\bar{\gamma}_{11} - \bar{\lambda}_{22})}{\bar{\gamma}_{11} + \bar{\lambda}_{11} - \bar{\lambda}_{21} - \bar{\lambda}_{22}} K_{\gamma}(\lambda). \quad (3.79)$$

Решение системы уравнений (3.78), (3.79) имеет вид

$$K_{\gamma}(\lambda) = [-1]^{\lambda_{21}+\lambda_{22}} \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \lambda_{21} - \lambda_{22} + 1) \prod_{i=1}^2 \Gamma(\lambda_{2i} - \gamma_{11}). \quad (3.80)$$

В некоторых членах суммы по k в (3.73) контуры интегрирования по ν содержат полюса гамма-функций из найденного выражения для $K_{\gamma}(\lambda)$ (3.80). Поэтому, в интегралах необходимо ввести ε -предписание. В результате окончательная формула для собственных функций угловых миноров L -оператора в случае $SL(3, \mathbb{C})$ имеет вид

$$\Psi_{\lambda}(z_{21}, z_{31}, z_{32}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\lambda) \Phi_{\gamma}(z_{32}) [z_{21}]^{-\gamma_{11}-1-\lambda_{11}+\underline{\lambda}_2} [z_{31}]^{\gamma_{11}+\sigma_1-1-\underline{\lambda}_2}, \quad (3.81)$$

где

$$K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\lambda) = [-1]^{\underline{\lambda}_2} \Gamma(1 - \sigma_1, -\underline{\lambda}_2) \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1) \Gamma(\underline{\lambda}_2 + \varepsilon, \gamma_1), \quad (3.82)$$

и введены обозначения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_m &= (\lambda_{m1}, \bar{\lambda}_{m1}, \dots, \lambda_{mm}, \bar{\lambda}_{mm}), \quad \boldsymbol{\lambda}_m + \varepsilon = (\lambda_{m1} + \varepsilon, \bar{\lambda}_{m1} + \varepsilon, \dots, \lambda_{mm} + \varepsilon, \bar{\lambda}_{mm} + \varepsilon), \\ \underline{\boldsymbol{\lambda}}_m &= \sum_{i=1}^m \lambda_{mi}, \quad \Gamma(\boldsymbol{\lambda}_m, \boldsymbol{\gamma}_j) = \prod_{a=1}^m \prod_{b=1}^j \Gamma(\lambda_{ma} - \gamma_{jb}), \quad \Gamma(\alpha, \pm \boldsymbol{\lambda}_m) = \prod_{i=1}^m \Gamma(\alpha \mp \lambda_{mi}). \end{aligned} \quad (3.83)$$

В ядро (3.82) добавлен нормировочный множитель $\Gamma(1 - \sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}_2)$. С учетом него миноры $B_j(u)$ (3.32) действуют на собственные функции следующим образом

$$B_1(u)\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = \Psi_{\boldsymbol{\lambda}+e_{11}}, \quad B_2(\lambda_{2i})\Psi_{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_{2i} - \lambda_{11})\Psi_{\boldsymbol{\lambda}+e_{2i}}. \quad (3.84)$$

Последние соотношения несложно получить, используя явные выражения (3.71) для этих миноров. Формулы для действия операторов $L_3^1(u) = B_{113}(u)$ и $L_{23}^{12}(u) = B_{213}(u)$ на $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ можно вывести при помощи (3.33) и проверить прямым вычислением, используя (3.71). Антиголоморфные аналоги тождеств (3.84) отличаются лишь знаком правой части. Заметим, что собственные функции обладают симметрией, которая обсуждалась в разделе 3.2: они инвариантны относительно перестановки спектральных переменных

$$(\lambda_{21}, \bar{\lambda}_{21}) \Leftrightarrow (\lambda_{22}, \bar{\lambda}_{22}).$$

Примем

$$(\lambda_{lj}, \bar{\lambda}_{lj}) = \left(\frac{m_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\mu_{lj}, \frac{-m_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\mu_{lj} \right), \quad 1 \leq j \leq l \leq 2, \quad (3.85)$$

где $m_{lj} \in \mathbb{Z}$ и $\mu_{lj} \in \mathbb{R}$. В разделе 3.5 показано, что собственные функции (3.81), задаваемые параметрами (3.85), образуют ортогональный набор относительно скалярного произведения в гильбертовом пространстве $L^2(Z_3)$

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^2 z_{21} d^2 z_{31} d^2 z_{32} \overline{\Phi(z_{21}, z_{31}, z_{32})} \Psi(z_{21}, z_{31}, z_{32}).$$

Соотношение ортогональности имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\boldsymbol{\lambda}} | \Psi_{\boldsymbol{\lambda}'} \rangle &= \mu_3^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}) \\ &\times \frac{1}{2} [\delta^{(2)}(\lambda_{21} - \lambda'_{21}) \delta^{(2)}(\lambda_{22} - \lambda'_{22}) + \delta^{(2)}(\lambda_{21} - \lambda'_{22}) \delta^{(2)}(\lambda_{22} - \lambda'_{21})]. \end{aligned} \quad (3.86)$$

где нормировочный коэффициент дается формулой

$$\mu_3(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2}{64\pi^8}. \quad (3.87)$$

Оно согласуется с упомянутой симметрией функций $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ относительно перестановки параметров $(\lambda_{21}, \bar{\lambda}_{21}) \Leftrightarrow (\lambda_{22}, \bar{\lambda}_{22})$. Отметим также, что при значениях параметров λ_{lj} (3.85) контур интегрирования по ν в формуле для $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ (3.81) не задевает полюсов гамма-функций (3.80)

при деформации (сдвиге), связанной с заменой переменных (3.76), и его можно вернуть в изначальное положение, в результате чего выражение (3.75) преобразуется к виду (3.77).

По аналогии с рассматриваемым в работах [51, 47] случаем $N = 2$ (при произвольном числе узлов) и полученными формулами (1.59), (1.68) для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки ВС-типа, можно предположить, что построен полный набор собственных функций, и соотношение полноты имеет вид

$$\int \mathcal{D}\lambda \mu_3(\lambda) \Psi_\lambda(z_{21}, z_{31}, z_{32}) \overline{\Psi_\lambda(w_{21}, w_{31}, w_{32})} = \delta^2(z_{21} - w_{21}) \delta^2(z_{31} - w_{31}) \delta^2(z_{32} - w_{32}),$$

где $\int \mathcal{D}\lambda = \int \mathcal{D}\lambda_{11} \int \mathcal{D}\lambda_{21} \int \mathcal{D}\lambda_{22}$. Однако, проверка этого соотношения остается открытой задачей.

Выражение (3.81) для собственных функций совпадает, с точностью до нормировки, с определением функции ${}_2G_2^{\mathbb{C}}$ из [58]. При помощи утверждения б) леммы 2.3 из [110] эту функцию можно выразить через гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел (1.97). Таким образом, полученное нами выражение для собственных функций через интеграл по спектральным переменным можно переписать в терминах интеграла по координатам z_{21}, z_{31}, z_{32} . Таким образом, можно сравнить наш результат с альтернативным интегральным представлением для базиса Гельфанда-Цетлина (57) в [92].

3.4.3 Индукционный шаг от $N = 3$ к $N = 4$

Обозначим

$$\xi \equiv z_{21}, \quad \eta \equiv z_{31}, \quad \zeta \equiv z_{41}, \quad \mathbf{z}' \equiv (z_{32}, z_{42}, z_{43}).$$

По аналогии с предыдущим индукционным шагом, обозначим через $L(u)$ L -оператор, задаваемый представлением основной серии $SL(4, \mathbb{C})$ (3.10) с параметрами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Из рекуррентных формул (3.28–3.30) получаются следующие выражения для миноров при $N = 4$ через миноры для $N = 3$

$$\begin{aligned} A_1(u) &= u - \sigma_1 + 3 + \xi \partial_\xi + \eta \partial_\eta + \zeta \partial_\zeta, \\ A_2(u) &= \mathcal{L}_1^1(u) (u - \sigma_1 + 2 + \eta \partial_\eta + \zeta \partial_\zeta) - \mathcal{L}_2^1(u) \eta \partial_\xi - \mathcal{L}_3^1(u) \zeta \partial_\xi, \\ A_3(u) &= \mathcal{L}_{12}^{12}(u) (u - \sigma_1 + 1 + \zeta \partial_\zeta) + \mathcal{L}_{23}^{12}(u) \zeta \partial_\xi - \mathcal{L}_{13}^{12}(u) \zeta \partial_\eta, \\ L_2^1(u) &= -\partial_\xi, \\ L_{13}^{12}(u) &= \mathcal{L}_2^1(u) (u - \sigma_1 + 2 + \xi \partial_\xi + \zeta \partial_\zeta) - \mathcal{L}_1^1(u) \xi \partial_\eta - \mathcal{L}_3^1(u) \zeta \partial_\eta, \\ L_{124}^{123}(u) &= \mathcal{L}_{13}^{12}(u) (u - \sigma_1 + 1 + \eta \partial_\eta) - \mathcal{L}_{23}^{12}(u) \eta \partial_\xi - \mathcal{L}_{12}^{12}(u) \eta \partial_\zeta, \end{aligned} \tag{3.88}$$

где $\mathcal{L}(u)$ – L -оператор, соответствующий представлению $SL(3, \mathbb{C})$ с параметрами $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

Спектральная задача для угловых миноров $L(u)$ имеет вид

$$\begin{aligned} A_1(u) \Psi_\lambda &= (u - \lambda_{11}) \Psi_\lambda, & A_2(u) \Psi_\lambda &= (u - \lambda_{21})(u - \lambda_{22}) \Psi_\lambda, \\ A_3(u) \Psi_\lambda &= (u - \lambda_{31})(u - \lambda_{32})(u - \lambda_{33}) \Psi_\lambda. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Анзац (3.64) выглядит следующим образом

$$\Psi_\lambda(\xi, \eta, \zeta, z') = \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_\gamma(\boldsymbol{\lambda}) \Phi_\gamma(z') [\xi]^{\sigma_1 - 3 - \lambda_{11} - b_3(\gamma, \lambda) - b_4(\gamma, \lambda)} [\eta]^{b_3(\gamma, \lambda)} [\zeta]^{b_4(\gamma, \lambda)}, \quad (3.90)$$

где Φ_γ – собственная функция угловых миноров $\mathcal{L}(u)$ (3.81), и показатели степени $b_i(\gamma, \lambda)$ даются выражением (3.65) при $N = 4$. Параметры γ_{ij} определяются формулой (3.85), и интеграл по ним имеет вид $\int \mathcal{D}\gamma = \int \mathcal{D}\gamma_{11} \int \mathcal{D}\gamma_{21} \int \mathcal{D}\gamma_{22}$, где $\int \mathcal{D}\gamma_{ij}$ означает сумму по дискретной части γ_{ij} и интеграл по непрерывной части. Формулу (3.90) можно интерпретировать как разложение $\Psi_\lambda(\xi, \eta, \zeta, z')$ по ортогональному базису $\Phi_\gamma(z')$ (в предположении, что набор функций Φ_γ полон). Поэтому, в подынтегральном выражении мы дополнительно выделили нормировочный коэффициент

$$\mu_3(\gamma) = \frac{|\gamma_{21} - \gamma_{22}|^2}{64\pi^8} = -\frac{(\gamma_{21} - \gamma_{22})(\bar{\gamma}_{21} - \bar{\gamma}_{22})}{64\pi^8}.$$

из соотношения ортогональности функций Φ_γ (3.86).

Как и на любом индукционном шаге, задача состоит в нахождении ядра $K_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$ интегрального анзаца (3.90). Подставим выражение для собственной функции (3.90) и угловых миноров (3.88) в уравнения на собственные значения $A_2(u)$, $A_3(u)$ (3.89). После выкладок, аналогичных (3.75)–(3.77), используя, в том числе, формулы (3.84) для действия неугловых миноров на собственные функции в случае $SL(3, \mathbb{C})$, получаем систему конечно-разностных уравнений на K_γ

$$\frac{(\gamma_{11} - \lambda_{21})(\gamma_{11} - \lambda_{22})(\gamma_{21} - \gamma_{22})}{\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2} K_\gamma \quad (3.91)$$

$$= (\gamma_{21} - \gamma_{22}) K_{\gamma - e_{11}} - K_{\gamma - e_{11} - e_{21}} + K_{\gamma - e_{11} - e_{22}},$$

$$(\gamma_{21} - \gamma_{11} - 1)(\gamma_{11} - \underline{\gamma}_2 - \underline{\lambda}_2 + \underline{\lambda}_3) K_{\gamma - e_{21}}$$

$$+ (\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2) K_{\gamma - e_{11} - e_{21}} = - \prod_{k=1}^3 (\gamma_{21} - \lambda_{3k}) K_\gamma,$$

$$(\gamma_{22} - \gamma_{11} - 1)(\gamma_{11} - \underline{\gamma}_2 - \underline{\lambda}_2 + \underline{\lambda}_3) K_{\gamma - e_{22}}$$

$$+ (\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2) K_{\gamma - e_{11} - e_{22}} = - \prod_{k=1}^3 (\gamma_{22} - \lambda_{3k}) K_\gamma, \quad (3.92)$$

где используются обозначения (3.68), (3.83). Решая уравнения на собственные значения антиголоморфных миноров $\bar{A}_2(\bar{u})$, $\bar{A}_3(\bar{u})$, получаем аналогичные уравнения на K_γ со сдвигами антиголоморфных параметров. Они отличаются от (3.91)–(3.92) лишь знаками при некоторых слагаемых.

Решение системы (3.91)–(3.92) и ее антиголоморфного аналога при помощи комплексного преобразования Меллина [58] приведено дальше в этом разделе. Ядро K_γ дается следующим выражением

$$K_\gamma(\boldsymbol{\lambda}) = c(\boldsymbol{\lambda}) [-1]^{\gamma_2} \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1) \Gamma(-\gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3 + 1) \\ \times \Gamma(\boldsymbol{\lambda}_3, \gamma_2) {}_4G_4^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} \lambda_{21}, \lambda_{22}, \gamma_{21}, \gamma_{22} \\ 1 - \lambda_{31}, 1 - \lambda_{32}, 1 - \lambda_{33}, -\gamma_{11} \end{matrix} ; 1 \right], \quad (3.93)$$

где $c(\boldsymbol{\lambda})$ – нормировочный коэффициент собственных функций (3.90), зависящий от λ_{ij} и $\bar{\lambda}_{ij}$, обозначение $\Gamma(\boldsymbol{\lambda}_3, \gamma_2)$ введено в (3.83), и ${}_4G_4^{\mathbb{C}}$ обобщенная гипергеометрическая функция над полем комплексных чисел [58]. Кроме того, приведена явная проверка того, что функция (3.93) действительно является решением системы (3.91–3.92) и ее антиголоморфного аналога. Для этого получены соотношения для ${}_pG_q^{\mathbb{C}}$, аналогичные тем, что были найдены для G-функции Мейера в [111].

Согласно (3.35), голоморфные и антиголоморфные миноры

$$B_2(\lambda_{2i}) = L_{13}^{12}(\lambda_{2i}), \quad B_3(\lambda_{3i}) = L_{124}^{123}(\lambda_{3i}) \quad (3.94)$$

сдвигают на 1 параметры λ_{2i} и λ_{3i} . Отсюда получаем условия на $c(\boldsymbol{\lambda})$. Они принимают вид

$$c(\boldsymbol{\lambda} + e_{2i}) = -\frac{\lambda_{2i} - \lambda_{11}}{\mathcal{M}_i(\lambda)} c(\boldsymbol{\lambda}), \quad c(\boldsymbol{\lambda} + \bar{e}_{2i}) = \frac{\bar{\lambda}_{2i} - \bar{\lambda}_{11}}{\widetilde{\mathcal{M}}_i(\bar{\lambda})} c(\boldsymbol{\lambda}), \quad i = 1, 2, \quad (3.95)$$

$$c(\boldsymbol{\lambda} + e_{3j}) = \frac{(\lambda_{3j} - \sigma_1 + 1) \prod_{k=1}^2 (\lambda_{3j} - \lambda_{2k})}{\mathcal{M}'_j(\lambda)} c(\boldsymbol{\lambda}), \quad (3.96)$$

$$c(\boldsymbol{\lambda} + \bar{e}_{3j}) = \frac{(\bar{\lambda}_{3j} - \bar{\sigma}_1 + 1) \prod_{k=1}^2 (\bar{\lambda}_{3j} - \bar{\lambda}_{2k})}{\widetilde{\mathcal{M}}'_j(\bar{\lambda})} c(\boldsymbol{\lambda}), \quad j = 1, 2, 3,$$

где $\mathcal{M}_i, \widetilde{\mathcal{M}}_i, \mathcal{M}'_i, \widetilde{\mathcal{M}}'_i$ – коэффициенты, возникающие при действии миноров (3.94)

$$B_2(\lambda_{2i}) \Psi_\lambda = \mathcal{M}_i(\lambda) \Psi_{\lambda + e_{2i}}, \quad \bar{B}_2(\bar{\lambda}_{2i}) \Psi_\lambda = \widetilde{\mathcal{M}}_i(\bar{\lambda}) \Psi_{\lambda + \bar{e}_{2i}}, \\ B_3(\lambda_{3i}) \Psi_\lambda = \mathcal{M}'_i(\lambda) \Psi_{\lambda + e_{3i}}, \quad \bar{B}_3(\bar{\lambda}_{3i}) \Psi_\lambda = \widetilde{\mathcal{M}}'_i(\bar{\lambda}) \Psi_{\lambda + \bar{e}_{3i}}. \quad (3.97)$$

Вывод условий (3.95) и (3.96) приведен в конце текущего раздела. Примем следующие значения для коэффициентов

$$\mathcal{M}_i(\lambda) = \lambda_{2i} - \lambda_{11}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}_i(\bar{\lambda}) = -(\bar{\lambda}_{2i} - \bar{\lambda}_{11}), \\ \mathcal{M}'_i(\lambda) = \prod_{k=1}^2 (\lambda_{3i} - \lambda_{2k}), \quad \widetilde{\mathcal{M}}'_i(\bar{\lambda}) = -\prod_{k=1}^2 (\bar{\lambda}_{3i} - \bar{\lambda}_{2k})$$

и рассмотрим решение (3.95), (3.96) вида

$$c(\boldsymbol{\lambda}) = [-1]^{\lambda_2} \prod_{j=1}^3 \Gamma(\lambda_{3j} - \sigma_1 + 1).$$

В результате окончательная формула для собственных функций угловых миноров L -оператора в случае $SL(4, \mathbb{C})$ следующая

$$\begin{aligned} \Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(z_{21}, z_{31}, z_{41}, \mathbf{z}') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}) \Phi_{\gamma}(\mathbf{z}') [z_{21}]^{-\gamma_{11} - \lambda_{11} + \lambda_2 - 1} \\ &\quad \times [z_{31}]^{\gamma_{11} - \gamma_2 - \lambda_2 + \lambda_3 - 1} [z_{41}]^{\sigma_1 - 1 + \gamma_2 - \lambda_3}, \end{aligned} \quad (3.98)$$

где $\mathbf{z}' = (z_{32}, z_{42}, z_{43})$, мера интегрирования и ядро интеграла представляются в виде

$$\begin{aligned} \mu_3(\gamma) &= \frac{|\gamma_{21} - \gamma_{22}|^2}{64\pi^8} = -\frac{(\gamma_{21} - \gamma_{22})(\bar{\gamma}_{21} - \bar{\gamma}_{22})}{64\pi^8} \\ K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}) &= [-1]^{\lambda_2 + \gamma_2} \Gamma(1 - \sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \lambda_2 + 1) \Gamma(1 - \gamma_{11} + \gamma_2 + \lambda_2 - \lambda_3) \\ &\quad \times \Gamma(\boldsymbol{\lambda}_3 + \varepsilon, \gamma_2) {}_4G_4^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} \lambda_{21} + \varepsilon, \lambda_{22} + \varepsilon, \gamma_{21}, \gamma_{22} \\ 1 - \lambda_{31}, 1 - \lambda_{32}, 1 - \lambda_{33}, -\gamma_{11} \end{matrix} ; 1 \right], \end{aligned} \quad (3.99)$$

и используются компактные обозначения (3.83). Переменные интегрирования параметризуются следующим образом

$$(\gamma_{lj}, \bar{\gamma}_{lj}) = \left(\frac{k_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\nu_{lj}, \frac{-k_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\nu_{lj} \right), \quad 1 \leq j \leq l \leq 2$$

где $k_{lj} \in \mathbb{Z}$, $\nu_{lj} \in \mathbb{R}$, и константа $\varkappa \in \mathbb{R}$ определяется параметрами представления основной серии в соответствии с (3.18). Напомним, что

$$\int \mathcal{D}\gamma = \prod_{1 \leq j \leq l \leq 2} \int \mathcal{D}\gamma_{lj}, \quad \int \mathcal{D}\gamma_{lj} = \sum_{k_{lj} \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\nu_{lj}.$$

Функция ${}_4G_4^{\mathbb{C}}$ представляется через интеграл [58]

$$\begin{aligned} {}_4G_4^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} \lambda_{21} + \varepsilon, \lambda_{22} + \varepsilon, \gamma_{21}, \gamma_{22} \\ 1 - \lambda_{31}, 1 - \lambda_{32}, 1 - \lambda_{33}, -\gamma_{11} \end{matrix} ; 1 \right] \\ = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\rho \Gamma(\rho + \varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(\rho, -\gamma_2) \Gamma(1 - \rho, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\varepsilon_1 - \rho - \gamma_{11}), \end{aligned} \quad (3.100)$$

где

$$(\rho, \bar{\rho}) = \left(\frac{k - \varkappa + 2}{2} + i\nu, \frac{-k - \varkappa + 2}{2} + i\nu \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{R}.$$

Для обхода полюсов в интегралах введены ε - и ε_1 -предписания.

Примем

$$(\lambda_{lj}, \bar{\lambda}_{lj}) = \left(\frac{m_{lj} + \varkappa - 4 + l}{2} + i\mu_{lj}, \frac{-m_{lj} + \varkappa - 4 + l}{2} + i\mu_{lj} \right), \quad 1 \leq j \leq l \leq 3, \quad (3.101)$$

где $m_{lj} \in \mathbb{Z}$, $\mu_{lj} \in \mathbb{R}$. В разделе 3.5 показано, что функции (3.98), задаваемые параметрами вида (3.101), ортогональны относительно скалярного произведения в $L^2(Z_4)$

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^{12}z \overline{\Phi(z)} \Psi(z),$$

где $z = \|z_{ij}\|_{1 \leq j < i \leq 4}$, и $d^{12}z = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} d^2z_{ij}$. Соотношение ортогональности имеет вид

$$\langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle = \mu_4^{-1}(\lambda) \delta^{(2)}(\lambda_1, \lambda'_1) \delta^{(2)}(\lambda_2, \lambda'_2) \delta^{(2)}(\lambda_3, \lambda'_3), \quad (3.102)$$

где нормировочный коэффициент $\mu(\lambda)$ и симметризованная дельта-функция $\delta^{(2)}(\lambda_m, \lambda'_m)$ даются выражениями

$$\mu_4(\lambda) = \frac{\prod_{m=1}^3 \prod_{1 \leq l < j \leq m} |\lambda_{ml} - \lambda_{mj}|^2}{192 \pi^4}, \quad (3.103)$$

$$\delta^{(2)}(\lambda_m, \lambda'_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} \delta^{(2)}(\lambda_{m1} - \lambda'_{m,\tau(1)}) \dots \delta^{(2)}(\lambda_{mm} - \lambda'_{m,\tau(m)}). \quad (3.104)$$

Проверка полноты построенного набора собственных функций

$$\int \mathcal{D}\lambda \mu_4(\lambda) \Psi_{\lambda}(z) \overline{\Psi_{\lambda}(w)} = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} \delta^2(z_{ij} - w_{ij})$$

остается открытой задачей.

Объясним теперь, как решается система конечно-разностных уравнений на $K_{\gamma}(\lambda)$ (3.91)–(3.92). Для начала упростим ее, выделив в K_{γ} произведение гамма-функций

$$K_{\gamma}(\lambda) = [-1]^{\underline{\gamma}_2} \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1) \Gamma(1 - \gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3) \Gamma(\lambda_3, \gamma_2) P_{\gamma}(\lambda), \quad (3.105)$$

Система принимает вид

$$\begin{aligned} (-\gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3) P_{\gamma} &= \prod_{k=1}^2 (\gamma_{11} - \lambda_{2k} + 1) P_{\gamma+e_{11}} \\ &+ \frac{\prod_{k=1}^3 (\gamma_{21} - \lambda_{3k}) P_{\gamma-e_{21}} - \prod_{k=1}^3 (\gamma_{22} - \lambda_{3k}) P_{\gamma-e_{22}}}{\gamma_{21} - \gamma_{22}}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$(\gamma_{21} - \gamma_{11}) P_{\gamma} = P_{\gamma-e_{11}} + P_{\gamma+e_{21}}, \quad (3.107)$$

$$(\gamma_{22} - \gamma_{11}) P_{\gamma} = P_{\gamma-e_{11}} + P_{\gamma+e_{22}}. \quad (3.108)$$

Представим P_{γ} как многомерное комплексное преобразование Меллина некоторой функ-

ции $P(x) \equiv P(x_{11}, x_{21}, x_{22})$

$$P_\gamma = \int d^2x_{11} d^2x_{21} d^2x_{22} [x_{11}]^{\gamma_{11}-1} [x_{21}]^{\gamma_{21}-1} [x_{22}]^{\gamma_{22}-1} P(x_{11}, x_{21}, x_{22}). \quad (3.109)$$

Подставляя (3.109) в уравнения (3.106–3.108) и их антиголоморфные копии и используя свойства

$$\begin{aligned} \alpha \int d^2t [t]^{\alpha-1} f(t) &= - \int d^2x [t]^{\alpha-1} t \partial_t f(t), \\ \bar{\alpha} \int d^2t [t]^{\alpha-1} f(t) &= - \int d^2x [t]^{\alpha-1} \bar{t} \partial_{\bar{t}} f(t), \end{aligned}$$

получаем следующую систему уравнений на $P(x)$

$$\begin{aligned} \left(x_{11} \partial_{11} - \sum_{k=1}^2 x_{2k} \partial_{2k} + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3 \right) (x_{21} \partial_{21} - x_{22} \partial_{22}) P &= \prod_{k=1}^3 (x_{21} \partial_{21} + \lambda_{3k}) \frac{P}{x_{21}} \\ &- \prod_{k=1}^3 (x_{22} \partial_{22} + \lambda_{3k}) \frac{P}{x_{22}} + \prod_{k=1}^2 (x_{11} \partial_{11} + \lambda_{2k} - 1) x_{11} (x_{21} \partial_{21} - x_{22} \partial_{22}) P, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$(x_{21} \partial_{21} - x_{11} \partial_{11}) P = -x_{11}^{-1} P - x_{21} P, \quad (3.111)$$

$$(x_{22} \partial_{22} - x_{11} \partial_{11}) P = -x_{11}^{-1} P - x_{22} P. \quad (3.112)$$

и

$$\begin{aligned} \left(\bar{x}_{11} \bar{\partial}_{11} - \sum_{k=1}^2 \bar{x}_{2k} \bar{\partial}_{2k} + \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 \right) (\bar{x}_{21} \bar{\partial}_{21} - \bar{x}_{22} \bar{\partial}_{22}) P &= \prod_{k=1}^3 (\bar{x}_{21} \bar{\partial}_{21} + \bar{\lambda}_{3k}) \frac{P}{\bar{x}_{21}} \\ &- \prod_{k=1}^3 (\bar{x}_{22} \bar{\partial}_{22} + \bar{\lambda}_{3k}) \frac{P}{\bar{x}_{22}} - \prod_{k=1}^2 (\bar{x}_{11} \bar{\partial}_{11} + \bar{\lambda}_{2k} - 1) \bar{x}_{11} (\bar{x}_{21} \bar{\partial}_{21} - \bar{x}_{22} \bar{\partial}_{22}) P, \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$(\bar{x}_{21} \bar{\partial}_{21} - \bar{x}_{11} \bar{\partial}_{11}) P = \bar{x}_{11}^{-1} P + \bar{x}_{21} P, \quad (3.114)$$

$$(\bar{x}_{22} \bar{\partial}_{22} - \bar{x}_{11} \bar{\partial}_{11}) P = \bar{x}_{11}^{-1} P + \bar{x}_{22} P, \quad (3.115)$$

где $\bar{\partial}_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{x}_{ij}}$ и $\bar{\lambda}_m = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_{mi}$. Для того, чтобы решить (3.111), (3.112) и (3.114), (3.115), сделаем замену переменных

$$y_1 \equiv x_{21}, \quad y_2 \equiv x_{22}, \quad y_3 \equiv x_{11} x_{21} x_{22}.$$

Дифференциальные операторы в (3.110)–(3.115) принимают вид

$$x_{21} \partial_{21} = y_1 \partial_{y_1} + y_3 \partial_{y_3}, \quad x_{22} \partial_{22} = y_2 \partial_{y_2} + y_3 \partial_{y_3}, \quad x_{11} \partial_{11} = y_3 \partial_{y_3}.$$

Пары уравнений (3.111), (3.112) и (3.114), (3.115) переписываются как

$$\begin{cases} \partial_{y_1} P = -y_2 y_3^{-1} P - P \\ \partial_{y_2} P = -y_1 y_3^{-1} P - P \end{cases}, \quad \begin{cases} \partial_{\bar{y}_1} P = \bar{y}_2 \bar{y}_3^{-1} P + P \\ \partial_{\bar{y}_2} P = \bar{y}_1 \bar{y}_3^{-1} P + P \end{cases}, \quad (3.116)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} P(x) &= A(y_3) \exp(-y_1 y_2 y_3^{-1} - y_1 - y_2) \exp(\bar{y}_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3^{-1} + \bar{y}_1 + \bar{y}_2) \\ &= A(x_{11} x_{21} x_{22}) \exp(-x_{11}^{-1} - x_{21} - x_{22}) \exp(\bar{x}_{11}^{-1} + \bar{x}_{21} + \bar{x}_{22}), \end{aligned} \quad (3.117)$$

где $A(y_3)$ – константа интегрирования системы дифференциальных уравнений (3.116). Подставляя (3.117) в (3.110) и (3.113) после некоторых преобразований получаем систему уравнений на $A(y_3)$

$$\left[y_3 \prod_{k=1}^2 (y_3 \partial_{y_3} + \lambda_{2k}) + \prod_{k=1}^3 (y_3 \partial_{y_3} - 1 + \lambda_{3k}) \right] A(y_3) = 0, \quad (3.118)$$

$$\left[\bar{y}_3 \prod_{k=1}^2 (\bar{y}_3 \partial_{\bar{y}_3} + \bar{\lambda}_{2k}) - \prod_{k=1}^3 (\bar{y}_3 \partial_{\bar{y}_3} - 1 + \bar{\lambda}_{3k}) \right] A(y_3) = 0. \quad (3.119)$$

Согласно формулам (1.15) и (3.10а–3.11b) в [58], функция

$$A(\zeta) = c(\boldsymbol{\lambda}) {}_2G_3^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} 1 - \lambda_{31}, 1 - \lambda_{32}, 1 - \lambda_{33} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22} \end{matrix}; \zeta \right] \quad (3.120)$$

является решением системы (3.118)–3.119, где $c(\boldsymbol{\lambda})$ – константа, зависящая от параметров $\boldsymbol{\lambda}$. Подставляя (3.117) в (3.109) с учетом (3.120) и используя соотношение (3.6) и (по крайней мере, формально) теорему 1.7 из упомянутого источника, находим

$$P_\gamma(\boldsymbol{\lambda}) = c(\boldsymbol{\lambda}) {}_4G_4^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} \lambda_{21}, \lambda_{22}, \gamma_{21}, \gamma_{22} \\ 1 - \lambda_{31}, 1 - \lambda_{32}, 1 - \lambda_{33}, -\gamma_{11} \end{matrix}; 1 \right]. \quad (3.121)$$

Подставляя это выражение для $P_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$ в (3.105), получаем формулу (3.93) для ядра $K_\gamma(\boldsymbol{\lambda})$.

Проверим теперь прямым вычислением, что функция ${}_4G_4^{\mathbb{C}}$ (3.121) действительно является решением системы (3.106)–(3.108). Проверка соответствующей антиголоморфной системы уравнений выглядит аналогично.

Рассмотрим функцию ${}_pG_p^{\mathbb{C}}$ [58]:

$${}_pG_p^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix}; z \right] = \frac{1}{2\pi i} \int \mathcal{D}\theta \tilde{K} \left[\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix}; \theta \right] [z]^{-\theta}, \quad (3.122)$$

где подынтегральное выражение имеет вид

$$\tilde{K} \left[\begin{array}{c} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_p \end{array}; \theta \right] = \prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + \theta) \prod_{l=1}^p \Gamma(b_l - \theta), \quad (3.123)$$

а переменная интегрирования и интеграл выглядят следующим образом

$$(\theta, \bar{\theta}) = \left(\frac{m}{2} + v, -\frac{m}{2} + v \right), \quad \int \mathcal{D}\theta = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\delta + i\mathbb{R}} dv, \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

Число $\delta \in \mathbb{R}$ должно быть выбрано таким образом, чтобы контур интегрирования по v разделял две серии полюсов, возникающих из двух произведений в (3.123). Обозначим для краткости через G функцию (3.122), через \tilde{K} – функцию (3.123), через $G(a_j \pm 1)$ – функцию (3.122) со сдвинутым на ± 1 параметром a_j , аналогично определим $\tilde{K}(a_j \pm 1)$ и обозначения для сдвигов параметров b_j . Равенства (3.107), (3.108) для функции (3.121) следуют из последнего соотношения в пункте 3.2 из [58], которое для $G = {}_4G_4^{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$G(a_i + 1) + G(b_j + 1) = (a_i + b_j) G. \quad (3.124)$$

Для того, чтобы проверить (3.106), выведем для ${}_pG_p^{\mathbb{C}}$ разностные соотношения, действуя по аналогии с рассуждениями из раздела 3 в [111]. Найдем такие коэффициенты E, F, D, C_j , $j = 1, \dots, p$, чтобы выполнялось равенство

$$(E + Fz)G + DG(b_1 - 1) + z \sum_{j=1}^p C_j G(a_j - 1) = 0. \quad (3.125)$$

Рассмотрим член zG . Если подставить в него представление (3.122) и сделать замену переменных суммирования и интегрирования

$$m \rightarrow m + 1, \quad v \rightarrow v + \frac{1}{2}, \quad (3.126)$$

то подынтегральное выражение преобразуется следующим образом

$$\tilde{K} z^{-\theta+1} \bar{z}^{-\bar{\theta}} \rightarrow \frac{\prod_{i=1}^p (a_i + \theta)}{\prod_{l=1}^p (b_l - \theta - 1)} \tilde{K} [z]^{-\theta},$$

Для слагаемого $DG(b_1 - 1)$ соответствующее подынтегральное выражение переписывается в виде

$$\tilde{K}(b_1 - 1) = \frac{\tilde{K}}{b_1 - \theta - 1}.$$

В интеграле, соответствующем слагаемому $zG(a_j - 1)$, сделаем также замену (3.126), в ре-

зультате подынтегральное выражение трансформируется следующим образом

$$\tilde{K}(a_j - 1) z^{-\theta+1} \bar{z}^{-\bar{\theta}} \rightarrow \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i + \theta)}{\prod_{l=1}^p (b_l - \theta - 1)} \tilde{K}[z]^{-\theta}.$$

Таким образом, равенство (3.125) выполняется при следующем условии на коэффициенты E, F, D, C_j

$$E + \frac{\prod_{i=1}^p (a_i + \theta)}{\prod_{l=1}^p (b_l - \theta - 1)} F + \frac{D}{b_1 - \theta - 1} + \sum_{j=1}^p \frac{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i + \theta)}{\prod_{l=1}^p (b_l - \theta - 1)} C_j = 0,$$

которое эквивалентно

$$\prod_{l=1}^p (b_l - \theta - 1) E + \prod_{i=1}^p (a_i + s) F + \prod_{l=2}^p (b_l - \theta - 1) D + \sum_{j=1}^p \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i + \theta) C_k = 0. \quad (3.127)$$

Последнее уравнение представляет собой условие обнуления многочлена от θ степени p . Число неизвестных $E, F, D, C_j, j = 1, \dots, p$ равно $p + 3$. Фиксируем $E = 1$. Рассматривая старший член в (3.127), получаем $F = (-1)^{p+1}$. Подставляя в (3.127) частные значения $s = -a_q, q = 1, \dots, p$, находим

$$C_j = - \frac{(b_1 + a_j - 1 + D) \prod_{l=2}^p (b_l + a_j - 1)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i - a_j)}.$$

Подставив найденные коэффициенты в (3.125) и приравняв $D = 0$, получаем следующее соотношение для функции ${}_p G_p^C$ (3.122)

$$(1 + (-1)^{p+1} z) G = z \sum_{j=1}^p \frac{\prod_{l=1}^p (b_l + a_j - 1)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i - a_j)} G(a_j - 1). \quad (3.128)$$

При $D = 1$, используя (3.128), можно вывести из (3.125) еще одну формулу, связывающую

сдвиги параметров b_l и a_i

$$G(b_1 - 1) = z \sum_{j=1}^p \frac{\prod_{l=2}^p (b_l + a_j - 1)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i - a_j)} G(a_j - 1). \quad (3.129)$$

По аналогии с (3.125), потребовав выполнения равенства вида

$$(E + Fz)G + (D + D'z)G(b_1 + 1) + z \sum_{j=1}^p C_j G(a_j - 1) = 0$$

для некоторых коэффициентов E, F, D, D', C_j , путем вычислений, схожих с (3.126)–(3.129), получаем следующее соотношение

$$\left[1 + (-1)^{p+1} \left(\sum_{l=1}^p b_l + \sum_{i=1}^p a_i - p + 2 \right) z \right] G = -(1 + (-1)^{p+1} z) G(b_1 + 1) + z \sum_{j=1}^p \frac{(b_1 + a_j + 1) \prod_{l=1}^p (b_l + a_j - 1)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i - a_j)} G(a_j - 1). \quad (3.130)$$

При четном p и $z = 1$, умножая соотношение (3.128) на $-(b_1 + 1)$ и складывая результат с (3.130), получаем

$$\left[\sum_{l=1}^p b_l + \sum_{i=1}^p a_i - p + 1 \right] G = - \sum_{j=1}^p \frac{a_j \prod_{l=1}^p (b_l + a_j - 1)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p (a_i - a_j)} G(a_j - 1). \quad (3.131)$$

Рассмотрим теперь интересующий нас случай $G = {}_4G_4^{\mathbb{C}}$ из (3.121). При соответствующих значениях $p = 4, z = 1$ равенства (3.128), (3.129) и (3.131) принимают вид

$$\sum_{l=1}^2 \frac{(-\gamma_{11} + \lambda_{2l} - 1) \prod_{j=1}^3 (\lambda_{2l} - \lambda_{3j})}{(\lambda_{2\bar{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1) + \sum_{r=1}^2 \frac{(-\gamma_{11} + \gamma_{2r} - 1) \prod_{j=1}^3 (\gamma_{2r} - \lambda_{3j})}{(\gamma_{2\bar{r}} - \gamma_{2r}) \prod_{j=1}^2 (\lambda_{2j} - \gamma_{2r})} G(\gamma_{2r} - 1) = 0 \quad (3.132)$$

(где $\tilde{1} = 2, \tilde{2} = 1$),

$$\begin{aligned}
G(\gamma_{11} + 1) &= \sum_{l=1}^2 \frac{\prod_{j=1}^3 (\lambda_{2l} - \lambda_{3j})}{(\lambda_{2\tilde{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1) \\
&+ \sum_{r=1}^2 \frac{\prod_{j=1}^3 (\gamma_{2r} - \lambda_{3j})}{(\gamma_{2\tilde{r}} - \gamma_{2r}) \prod_{j=1}^2 (\lambda_{2j} - \gamma_{2r})} G(\gamma_{2r} - 1)
\end{aligned} \tag{3.133}$$

и

$$\begin{aligned}
(-\gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3) G &= - \sum_{l=1}^2 \frac{\lambda_{2l}(-\gamma_{11} + \lambda_{2l} - 1) \prod_{j=1}^3 (\lambda_{2l} - \lambda_{3j})}{(\lambda_{2\tilde{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1) \\
&- \sum_{r=1}^2 \frac{\gamma_{2r}(-\gamma_{11} + \gamma_{2r} - 1) \prod_{j=1}^3 (\gamma_{2r} - \lambda_{3j})}{(\gamma_{2\tilde{r}} - \gamma_{2r}) \prod_{j=1}^2 (\lambda_{2j} - \gamma_{2r})} G(\gamma_{2r} - 1).
\end{aligned} \tag{3.134}$$

Вычитая из (3.134) равенство (3.133), умноженное на $\prod_{j=1}^2 (\gamma_{11} - \lambda_{2j} + 1)$, получаем

$$\begin{aligned}
&(-\gamma_{11} - \sum \lambda_{3j} + \sum \gamma_{2j} + \sum \lambda_{2j}) G - \prod_{j=1}^2 (\gamma_{11} - \lambda_{2j} + 1) G(\gamma_{11} + 1) \\
&= (\gamma_{11} - \sum \lambda_{2j} + 1) \sum_{l=1}^2 \frac{(\gamma_{11} - \lambda_{2l} + 1) \prod_{j=1}^3 (\lambda_{3j} - \lambda_{2l})}{(\lambda_{2\tilde{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1) \\
&+ \sum_{r=1}^2 \frac{\left[\prod_{j=1}^2 (\gamma_{11} - \lambda_{2j} + 1) - \gamma_{2r}(\gamma_{11} - \gamma_{2r} + 1) \right] \prod_{j=1}^3 (\lambda_{3j} - \gamma_{2r})}{(\gamma_{2\tilde{r}} - \gamma_{2r}) \prod_{j=1}^2 (\lambda_{2j} - \gamma_{2r})} G(\gamma_{2r} - 1).
\end{aligned} \tag{3.135}$$

При помощи (3.132) выражение

$$\sum_{l=1}^2 \frac{(\gamma_{11} - \lambda_{2l} + 1) \prod_{j=1}^3 (\lambda_{3j} - \lambda_{2l})}{(\lambda_{2\tilde{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1)$$

в (3.135) можно переписать через линейную комбинацию $G(\gamma_{21} - 1)$ и $G(\gamma_{22} - 1)$. Преобразовав таким образом тождество (3.135), мы получаем в точности соотношение (3.106), которое

требовалось проверить.

Наконец, выведем условия (3.95), (3.96) на коэффициент $c(\boldsymbol{\lambda})$. Как и в случае других вычислений, получим голоморфные условия, вывод антиголоморфных выглядит аналогично. По аналогии с формулами (3.75)–(3.77), подействуем на $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$ (3.90) минорами $B_2 = L(\lambda_{2i})_{13}^{12}$ и $B_3 = L(\lambda_{3i})_{124}^{123}$, используя рекуррентные формулы (3.88) для $SL(4, \mathbb{C})$ миноров через $SL(3, \mathbb{C})$ миноры и конечно-разностные соотношения (3.91)–(3.92). Тогда ожидаемые формулы (3.97) для действия операторов B_2, B_3 будут выполняться при следующих условиях на функцию $P_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda})$ (напомним, что через P_{γ} по формуле (3.105) выражается ядро интегрального анзаца для $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$)

$$(\lambda_{2i} - \gamma_{11})P_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda}) - P_{\gamma - e_{11}}(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{\mathcal{M}_i(\lambda)}{\lambda_{2i} - \lambda_{11}}P_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda} + e_{2i}), \quad i = 1, 2, \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} (-\gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3)P_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda}) - \sum_{m=1,2} (\gamma_{2m} - \gamma_{11} - 1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^3 (\gamma_{2m} - \lambda_{3k}) \frac{P_{\gamma - e_{2m}}(\boldsymbol{\lambda})}{\gamma_{2m} - \gamma_{2\tilde{m}}} \\ = \frac{\mathcal{M}'_i(\lambda)}{\lambda_{3i} - \sigma_1 + 1}P_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda} + e_{3i}), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.137)$$

где $\tilde{1} = 2, \tilde{2} = 1$. Коэффициенты $\mathcal{M}_i(\lambda), \mathcal{M}'_i(\lambda)$ (3.97) возникают при действии $L(\lambda_{2i})_{13}^{12}$ и $L(\lambda_{3i})_{124}^{123}$ на $\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}$. Подставляя явную формулу (3.121) для $P_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda})$ в (3.136) и используя (3.124), получаем уравнение (3.95) на $c(\boldsymbol{\lambda})$.

Остается показать, что при условии (3.96) на коэффициент $c(\boldsymbol{\lambda})$ выполняется равенство (3.137). Используя соотношение (3.129) при $p = 4, z = 1, b_1 = 1 - \lambda_{3i}$ для функции

$$G = {}_4G_4^{\mathbb{C}} \left[\begin{matrix} \lambda_{21}, \lambda_{22}, \gamma_{21}, \gamma_{22} \\ 1 - \lambda_{31}, 1 - \lambda_{32}, 1 - \lambda_{33}, -\gamma_{11} \end{matrix} ; 1 \right]$$

получаем

$$\begin{aligned} G(\lambda_{3i} + 1) &= \sum_{l=1}^2 \frac{(-\gamma_{11} + \lambda_{2l} - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\lambda_{2l} - \lambda_{3j})}{(\lambda_{2\tilde{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1) \\ &+ \sum_{r=1}^2 \frac{(-\gamma_{11} + \gamma_{2r} - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\gamma_{2r} - \lambda_{3j})}{(\gamma_{2\tilde{r}} - \gamma_{2r}) \prod_{j=1}^2 (\lambda_{2j} - \gamma_{2r})} G(\gamma_{2r} - 1), \end{aligned} \quad (3.138)$$

где $\tilde{1} = 2, \tilde{2} = 1$. Вычитая из (3.134) равенство (3.138), умноженное на $\prod_{j=1}^2 (\lambda_{3i} - \lambda_{2j})$, при-

ходим к следующему результату

$$\begin{aligned}
& (-\gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3) G - \prod_{j=1}^2 (\lambda_{3i} - \lambda_{2j}) G(\lambda_{3i} + 1) \\
&= (-\underline{\lambda}_2 + \lambda_{3i}) \sum_{l=1}^2 \frac{(-\gamma_{11} + \lambda_{2l} - 1) \prod_{j=1}^3 (\lambda_{2l} - \lambda_{3j})}{(\lambda_{2\bar{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1) \\
&+ \sum_{r=1}^2 \frac{(-\gamma_{11} + \gamma_{2r} - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\gamma_{2r} - \lambda_{3j}) \left[-\gamma_{2r}(\gamma_{2r} - \lambda_{3i}) - \prod_{j=1}^2 (\lambda_{2j} - \lambda_{3i}) \right]}{(\gamma_{2\bar{r}} - \gamma_{2r}) \prod_{j=1}^2 (\lambda_{2j} - \gamma_{2r})} G(\gamma_{2r} - 1).
\end{aligned} \tag{3.139}$$

При помощи (3.132) выражение

$$\sum_{l=1}^2 \frac{(-\gamma_{11} + \lambda_{2l} - 1) \prod_{j=1}^3 (\lambda_{2l} - \lambda_{3j})}{(\lambda_{2\bar{l}} - \lambda_{2l}) \prod_{j=1}^2 (\gamma_{2j} - \lambda_{2l})} G(\lambda_{2l} - 1)$$

из (3.139) можно переписать через линейную комбинацию $G(\gamma_{21} - 1)$ и $G(\gamma_{22} - 1)$, и в результате тождество (3.139) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
& (-\gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3) G - \prod_{j=1}^2 (\lambda_{3i} - \lambda_{2j}) G(\lambda_{3i} + 1) \\
&= \sum_{r=1}^2 \frac{(\gamma_{2r} - \gamma_{11} - 1) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\gamma_{2r} - \lambda_{3j})}{\gamma_{2r} - \gamma_{2\bar{r}}} G(\gamma_{2r} - 1).
\end{aligned}$$

Используя последнее соотношение и условие (3.96) на $c(\boldsymbol{\lambda})$

$$c(\boldsymbol{\lambda} + e_{3j}) = \frac{(\lambda_{3j} - \sigma_1 + 1) \prod_{k=1}^2 (\lambda_{3j} - \lambda_{2k})}{\mathcal{M}'_j(\lambda)} c(\boldsymbol{\lambda}),$$

несложно проверить, что функция

$$P_\gamma(\boldsymbol{\lambda}) = c(\boldsymbol{\lambda}) G = c(\boldsymbol{\lambda}) {}_4G_4^C \left[\begin{matrix} \lambda_{21}, \lambda_{22}, \gamma_{21}, \gamma_{22} \\ 1 - \lambda_{31}, 1 - \lambda_{32}, 1 - \lambda_{33}, -\gamma_{11} \end{matrix} ; 1 \right]$$

удовлетворяет условию (3.137), что и требовалось доказать.

3.5 Ортогональность собственных функций

3.5.1 Доказательство ортогональности в случае $N = 3$

Напомним, что скалярное произведение в $L^2(Z_3)$ имеет вид

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^2 z_{21} d^2 z_{31} d^2 z_{32} \overline{\Phi(z_{21}, z_{31}, z_{32})} \Psi(z_{21}, z_{31}, z_{32}).$$

Докажем соотношение ортогональности для собственных функций (3.81) квантовых миноров L -оператора в случае $SL(3, \mathbb{C})$

$$\langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle = \mu_3^{-1}(\lambda) \delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}) \delta^{(2)}(\lambda_2, \lambda'_2). \quad (3.140)$$

Нормировочный коэффициент и симметричная дельта-функция даются формулами (3.87) и (3.104)

$$\begin{aligned} \mu_3(\lambda) &= \frac{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2}{64\pi^8} \\ \delta^{(2)}(\lambda_m, \lambda'_m) &= \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} \delta^{(2)}(\lambda_{m1} - \lambda_{m,\tau(1)}) \dots \delta^{(2)}(\lambda_{mm} - \lambda_{m,\tau(m)}), \end{aligned}$$

где дельта-функция $\delta^{(2)}$ определена в (1.58). Собственные функции представляются следующим образом

$$\Psi_{\lambda}(z_{21}, z_{31}, z_{32}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\lambda) \Phi_{\gamma}(z_{32}) [z_{21}]^{-\gamma_{11}-1-\lambda_{11}+\underline{\lambda}_2} [z_{31}]^{\gamma_{11}+\sigma_1-1-\underline{\lambda}_2}, \quad (3.141)$$

где $\Phi_{\gamma}(z_{32})$ – собственная функция для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки (3.66), ядро интеграла выражается через гамма-функции

$$K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\lambda) = [-1]^{\underline{\lambda}_2} \Gamma(1 - \sigma_1, -\lambda_2) \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1) \Gamma(\lambda_2 + \varepsilon, \gamma_1), \quad (3.142)$$

и используются компактные обозначения (3.83). Переменная интегрирования и интеграл в (3.141) имеют вид

$$\begin{aligned} (\gamma_{11}, \bar{\gamma}_{11}) &= \left(\frac{k + \varkappa - 1}{2} + i\nu, \frac{-k + \varkappa - 1}{2} + i\nu \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{R}, \\ \int \mathcal{D}\gamma_{11} &\equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} d\nu. \end{aligned} \quad (3.143)$$

где константа $\varkappa \in \mathbb{R}$ связана с параметрами представления основной серии (3.18). Соотношение (3.140) выполняется при следующих значениях параметров $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'$

$$\begin{aligned} (\lambda_{lj}, \bar{\lambda}_{lj}) &= \left(\frac{m_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\mu_{lj}, \frac{-m_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\mu_{lj} \right), \\ (\lambda'_{lj}, \bar{\lambda}'_{lj}) &= \left(\frac{m'_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\mu'_{lj}, \frac{-m'_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\mu'_{lj} \right), \quad 1 \leq j \leq l \leq 2, \end{aligned} \quad (3.144)$$

где $m_{lj}, m'_{lj} \in \mathbb{Z}$ и $\mu_{lj}, \mu'_{lj} \in \mathbb{R}$.

Для того, чтобы вычислить скалярное произведение (3.140), найдем выражение для комплексно-сопряженной функции $\overline{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}}$. Используя правила комплексного сопряжения степенных функций и гамма-функции (1.14), (A.5), а также свойства параметров (3.18), (3.143), (3.144)

$$\bar{\sigma}_j^* = \varkappa - \sigma_j, \quad \bar{\gamma}_{11}^* = \varkappa - 1 - \gamma_{11}, \quad \bar{\lambda}_{lj}^* = \varkappa - 3 + l - \lambda_{lj},$$

получаем

$$\overline{\Psi_{\boldsymbol{\lambda}}(z_{21}, z_{31}, z_{32})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) \overline{\Phi_{\gamma}(z_{32})} [z_{21}]^{\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2} [z_{31}]^{-\gamma_{11} + \underline{\lambda}_2 - \sigma_1}, \quad (3.145)$$

где

$$K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) = [-1]^{\gamma_{11} + \lambda_{11}} \Gamma(\sigma_1, \boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(\underline{\lambda}_2 - \gamma_{11} - \lambda_{11}) \Gamma(\gamma_1 + \varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_2). \quad (3.146)$$

При помощи (3.141) и (3.145) скалярное произведение собственных функций переписывается как

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\boldsymbol{\lambda}} | \Psi_{\boldsymbol{\lambda}'} \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma_{11} \mathcal{D}\gamma'_{11} K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) K_{\gamma'}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}') \langle \Phi_{\gamma} | \Phi_{\gamma'} \rangle \int d^2 z_{31} [z_{31}]^{\gamma'_{11} - \gamma_{11} + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2 - 1} \\ &\quad \times \int d^2 z_{21} [z_{21}]^{\gamma_{11} - \gamma'_{11} + \lambda_{11} - \lambda'_{11} - \underline{\lambda}_2 + \underline{\lambda}'_2 - 1}, \end{aligned}$$

где скалярное произведение функций $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки имеет вид

$$\langle \Phi_{\gamma} | \Phi_{\gamma'} \rangle = \int d^2 z_{32} \overline{\Phi_{\gamma}(z_{32})} \Phi_{\gamma'}(z_{32}).$$

Применяя соотношение ортогональности для $N = 2$ (3.69)

$$\langle \Phi_{\gamma} | \Phi_{\gamma'} \rangle = 2\pi^2 \delta^{(2)}(\gamma_{11} - \gamma'_{11})$$

и формулу для дельта-функции (3.70)

$$\begin{aligned} \int d^2 z_{21} [z_{21}]^{\gamma_{11} - \gamma'_{11} + \lambda_{11} - \lambda'_{11} - \underline{\lambda}_2 + \underline{\lambda}'_2 - 1} &= 2\pi^2 \delta^{(2)}(\gamma_{11} - \gamma'_{11} + \lambda_{11} - \lambda'_{11} - \underline{\lambda}_2 + \underline{\lambda}'_2), \\ \int d^2 z_{31} [z_{31}]^{\gamma'_{11} - \gamma_{11} + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2 - 1} &= 2\pi^2 \delta^{(2)}(\gamma'_{11} - \gamma_{11} + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2), \end{aligned}$$

преобразуем скалярное произведение к следующему выражению

$$\langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle = 8\pi^6 \delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}) \delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\lambda) K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\lambda') \quad (3.147)$$

Подставим в получившееся подынтегральное выражение формулы (3.142) и (3.146) для $K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}$ и $K_{\gamma}^{(\varepsilon)}$. С учетом равенств $\gamma_{11} = \gamma'_{11}$ и $\underline{\lambda}_2 = \underline{\lambda}'_2$ (ввиду присутствия дельта функций в (3.147)), сократим две гамма-функции при помощи (A.4), и в результате интеграл примет вид

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\gamma_{11} K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\lambda) K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\lambda') &= \Gamma(1 - \sigma_1, -\lambda'_2) \Gamma(\sigma_1, \lambda_2) \int \mathcal{D}\gamma_{11} \Gamma(\lambda'_2 + \varepsilon, \gamma_1) \Gamma(\gamma_1 + \varepsilon, \lambda_2) \\ &= \frac{2\pi}{\Gamma(4\varepsilon)} \Gamma(1 - \sigma_1, -\lambda'_2) \Gamma(\sigma_1, \lambda_2) \Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2). \end{aligned} \quad (3.148)$$

Чтобы взять интеграл в последней формуле мы использовали простейший случай комплексного аналога интеграла Густафсона А-типа (формула (2.3а) в [54])

$$\frac{1}{2\pi} \int \mathcal{D}\rho \prod_{i=1,2} \Gamma(\alpha_i - \rho) \Gamma(\beta_i + \rho) = \frac{\prod_{i,j=1}^2 \Gamma(\alpha_i + \beta_j)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)}. \quad (3.149)$$

Подставив результат (3.148) в (3.147) и преобразуя гамма-функцию

$$\frac{1}{\Gamma(4\varepsilon)} = 4\varepsilon \frac{\Gamma(1 - 4\varepsilon)}{\Gamma(1 + 4\varepsilon)},$$

перепишем скалярное произведение в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle &= 16\pi^7 \Gamma(1 - \sigma_1, -\lambda'_2) \Gamma(\sigma_1, \lambda_2) \\ &\quad \times \delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}) \delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} 4\varepsilon \Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2). \end{aligned}$$

Чтобы получить из последнего равенства доказываемое соотношение (3.140), остается применить формулу

$$\delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} 4\varepsilon \Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2) = \frac{4\pi [-1]^{\lambda_2}}{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2} \delta^{(2)}(\lambda_2, \lambda'_2) \quad (3.150)$$

и свойство гамма-функции (A.4)

$$\Gamma(1 - \sigma_1, -\lambda_2) \Gamma(\sigma_1, \lambda_2) = [-1]^{\lambda_2 - 2\sigma_1} = [-1]^{\lambda_2}.$$

Докажем (3.150). Ввиду присутствия множителя ε , нетривиальный вклад в предел при $\varepsilon \rightarrow 0_+$ определяется сингулярной частью выражения $\Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2)$. Выделим сингулярную часть при помощи рекуррентной формулы $\Gamma(t + 1) = t \Gamma(t)$ для гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2) \rightarrow \prod_{i,j=1}^2 \frac{\Gamma(1 + \lambda'_{2i} - \lambda_{2j})}{\Gamma(1 - \lambda'_{2i} + \lambda_{2j})} \prod_{i,j=1}^2 \frac{1}{\lambda'_{2i} - \lambda_{2j} + 2\varepsilon}$$

и используем детерминантную формулу Коши

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda'_{21} - \lambda'_{22})(\lambda_{22} - \lambda_{21})}{\prod_{i,j=1}^2 (\lambda'_{2i} - \lambda_{2j} + 2\varepsilon)} &= \det_{i,j \in \{1,2\}} \left(\frac{1}{\lambda'_{2i} - \lambda_{2j} + 2\varepsilon} \right) \\ &= \frac{1}{(\lambda'_{21} - \lambda_{21} + 2\varepsilon)(\lambda'_{22} - \lambda_{22} + 2\varepsilon)} - \frac{1}{(\lambda'_{21} - \lambda_{22} + 2\varepsilon)(\lambda'_{22} - \lambda_{21} + 2\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Таким образом, левая часть (3.150) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} 4\varepsilon \Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2) &= \frac{\delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2)}{(\lambda'_{21} - \lambda'_{22})(\lambda_{22} - \lambda_{21})} \prod_{i,j=1}^2 \frac{\Gamma(1 + \lambda'_{2i} - \lambda_{2j})}{\Gamma(1 - \bar{\lambda}'_{2i} + \bar{\lambda}_{2j})} \\ &\times \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{4\varepsilon}{(\lambda'_{21} - \lambda_{21} + 2\varepsilon)(\lambda_{21} - \lambda'_{21} + 2\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{4\varepsilon}{(\lambda'_{21} - \lambda_{22} + 2\varepsilon)(\lambda_{22} - \lambda'_{21} + 2\varepsilon)} \right), \end{aligned}$$

где мы переписали дроби из (3.151) в эквивалентном виде ввиду присутствия дельта-функции $\delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2)$. Согласно формуле (1.122) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{4\varepsilon}{(\lambda'_{21} - \lambda_{21} + 2\varepsilon)(\lambda_{21} - \lambda'_{21} + 2\varepsilon)} = 2\pi \delta^{(2)}(\lambda_{21} - \lambda'_{21}),$$

и аналогично для второго слагаемого. Следовательно,

$$\delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} 4\varepsilon \Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2) = \frac{4\pi \delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2, \lambda'_2)}{(\lambda_{21} - \lambda_{22})(\lambda_{22} - \lambda_{21})} \prod_{i,j=1}^2 \frac{\Gamma(1 + \lambda_{2i} - \lambda_{2j})}{\Gamma(1 - \bar{\lambda}_{2i} + \bar{\lambda}_{2j})}. \quad (3.152)$$

После следующих преобразований с использованием рекуррентной формулы для гамма-функции Эйлера и свойства (A.4)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\lambda_{21} - \lambda_{22})(\lambda_{22} - \lambda_{21})} \prod_{i,j=1}^2 \frac{\Gamma(1 + \lambda_{2i} - \lambda_{2j})}{\Gamma(1 - \bar{\lambda}_{2i} + \bar{\lambda}_{2j})} \\ &= \frac{1}{(\lambda_{21} - \lambda_{22})(-\bar{\lambda}_{21} + \bar{\lambda}_{22})} \frac{\Gamma(1 + \lambda_{21} - \lambda_{22})}{\Gamma(-\bar{\lambda}_{21} + \bar{\lambda}_{22})} \frac{\Gamma(\lambda_{22} - \lambda_{21})}{\Gamma(1 - \bar{\lambda}_{22} + \bar{\lambda}_{21})} \\ &= \frac{1}{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2} \Gamma(1 + \lambda_{21} - \lambda_{22}) \Gamma(\lambda_{21} - \lambda_{22}) = \frac{[-1]^{\lambda_{21} - \lambda_{22}}}{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2} = \frac{[-1]^{\lambda_2}}{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2} \end{aligned}$$

получаем из (3.152) нужное соотношение (3.150).

3.5.2 Доказательство ортогональности в случае $N = 4$

Скалярное произведение в $L^2(Z_4)$ имеет стандартный вид

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int d^{12}z \overline{\Phi(z)} \Psi(z),$$

где $z = \|z_{ij}\|_{1 \leq j < i \leq 4}$ – матричнозначный аргумент функций, и $d^{12}z = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} d^2 z_{ij}$. Докажем соотношение ортогональности (3.102) для собственных функций $SL(4, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки Ψ_{λ} (3.98)

$$\langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle = \mu_4^{-1}(\lambda) \delta^{(2)}(\lambda_1, \lambda'_1) \delta^{(2)}(\lambda_2, \lambda'_2) \delta^{(2)}(\lambda_3, \lambda'_3), \quad (3.153)$$

где нормировочный коэффициент и симметричная дельта-функция определены в (3.103) и (3.104)

$$\mu_4(\lambda) = \frac{\prod_{m=1}^3 \prod_{1 \leq l < j \leq m} |\lambda_{ml} - \lambda_{mj}|^2}{192 \pi^4},$$

$$\delta^{(2)}(\lambda_m, \lambda'_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_m} \delta^{(2)}(\lambda_{m1} - \lambda'_{m,\tau(1)}) \dots \delta^{(2)}(\lambda_{mm} - \lambda'_{m,\tau(m)}),$$

а дельта-функция $\delta^{(2)}$ дается формулой (1.58). Соотношение (3.153) выполняется при следующих значениях параметров λ и λ'

$$\begin{aligned} (\lambda_{lj}, \bar{\lambda}_{lj}) &= \left(\frac{m_{lj} + \varkappa - 4 + l}{2} + i\mu_{lj}, \frac{-m_{lj} + \varkappa - 4 + l}{2} + i\mu_{lj} \right), \\ (\lambda'_{lj}, \bar{\lambda}'_{lj}) &= \left(\frac{m'_{lj} + \varkappa - 4 + l}{2} + i\mu'_{lj}, \frac{-m'_{lj} + \varkappa - 4 + l}{2} + i\mu'_{lj} \right), \quad 1 \leq j \leq l \leq 3. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Напомним, что собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda}(z_{21}, z_{31}, z_{41}, \mathbf{z}') &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\lambda) \Phi_{\gamma}(\mathbf{z}') [z_{21}]^{-\gamma_{11} - \lambda_{11} + \lambda_2 - 1} \\ &\quad \times [z_{31}]^{\gamma_{11} - \gamma_2 - \lambda_2 + \lambda_3 - 1} [z_{41}]^{\sigma_1 - 1 + \gamma_2 - \lambda_3}, \end{aligned} \quad (3.155)$$

где $\mathbf{z}' = (z_{32}, z_{42}, z_{43})$, и $\Phi_{\gamma}(\mathbf{z}')$ – собственная функция для $N = 3$ (3.81). Переменные γ , интеграл и мера интегрирования определяются как

$$\begin{aligned} (\gamma_{lj}, \bar{\gamma}_{lj}) &= \left(\frac{k_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\nu_{lj}, \frac{-k_{lj} + \varkappa - 3 + l}{2} + i\nu_{lj} \right), \quad 1 \leq j \leq l \leq 2, \quad (3.156) \\ \int \mathcal{D}\gamma &= \prod_{1 \leq j \leq l \leq 2} \int \mathcal{D}\gamma_{lj}, \quad \int \mathcal{D}\gamma_{lj} = \sum_{n_{lj} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}} \int d\mu_{lj}, \\ \mu_3(\gamma) &= \frac{|\gamma_{21} - \gamma_{22}|^2}{64\pi^8}. \end{aligned}$$

Ядро интеграла $K_\gamma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda})$ дается формулой (3.99). Оно выражается через гипергеометрическую функцию ${}_4G_4^C$, имеющую интегральное представление (3.100). Таким образом, явное выражение для ядра следующее

$$\begin{aligned} K_\gamma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{[-1]^{\lambda_2 + \gamma_2}}{2\pi} \Gamma(1 - \sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1 - \gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3) \Gamma(\boldsymbol{\lambda}_3 + \varepsilon, \gamma_2) \\ &\times \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1) \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\rho \Gamma(\rho + \varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(\rho, -\gamma_2) \Gamma(1 - \rho, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\varepsilon_1 - \rho - \gamma_{11}), \end{aligned} \quad (3.157)$$

где используются компактные обозначения (3.83), и

$$(\rho, \bar{\rho}) = \left(\frac{k - \varkappa + 2}{2} + i\nu, \frac{-k - \varkappa + 2}{2} + i\nu \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \nu \in \mathbb{R}. \quad (3.158)$$

Для удобства дальнейших вычислений сдвинем аргументы гамма-функций в (3.157) на $\varepsilon, \varepsilon_1$

$$\begin{aligned} \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1) &\rightarrow \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1 - 2\varepsilon_1), \\ \Gamma(\rho, -\gamma_2) &\rightarrow \Gamma(\rho - 3\varepsilon, -\gamma_2), \quad \Gamma(1 - \rho, \boldsymbol{\lambda}_3) \rightarrow \Gamma(1 - \rho + 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3). \end{aligned}$$

Поскольку полюса этих гамма-функций отделены от контуров интегрирования по ν_j и ν , эти инфинитезимальные сдвиги не повлияют на результат интегрирования в (3.157) и (3.155).

Ядро принимает вид

$$\begin{aligned} K_\gamma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{[-1]^{\lambda_2 + \gamma_2}}{2\pi} \Gamma(1 - \sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1 - \gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3) \Gamma(\boldsymbol{\lambda}_3 + \varepsilon, \gamma_2) \\ &\times \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 + 1 - 2\varepsilon_1) \int \mathcal{D}\rho \Gamma(\rho + \varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(\rho - 3\varepsilon, -\gamma_2) \\ &\times \Gamma(1 - \rho + 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\varepsilon_1 - \rho - \gamma_{11}). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Для того, чтобы вычислить скалярное произведение (3.153), получим выражение для комплексно-сопряженной собственной функции $\overline{\Psi_\lambda}$. Используя правила комплексного сопряжения степенных функций и гамма-функций (1.14), (A.5), а также свойства параметров (3.18), (3.154) и (3.156), находим

$$\begin{aligned} \overline{\Psi_\lambda(z_{21}, z_{31}, z_{41}, z')} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_\gamma^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) \overline{\Phi_\gamma(z')} [z_{21}]^{\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\lambda}_2 - 1} \\ &\times [z_{31}]^{-\gamma_{11} + \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}_3} [z_{41}]^{-\sigma_1 - \underline{\gamma}_2 + \underline{\lambda}_3}, \end{aligned} \quad (3.160)$$

где

$$\begin{aligned}
K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) &= \frac{[-1]^{\lambda_{11}-\gamma_{11}-\underline{\lambda}_3-\sigma_1}}{2\pi} \Gamma(\sigma_1, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\gamma_{11} - \underline{\gamma}_2 - \underline{\lambda}_2 + \underline{\lambda}_3) \Gamma(\gamma_2 + \varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3) \\
&\times \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \Gamma(\underline{\lambda}_2 - \lambda_{11} - \gamma_{11} - 2\varepsilon_1) \int \mathcal{D}\rho \Gamma(\varepsilon - \rho, \boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(1 - \rho - 3\varepsilon, \gamma_2) \\
&\times \Gamma(\rho + 2\varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\varepsilon_1 + \rho + \gamma_{11}). \quad (3.161)
\end{aligned}$$

Применяя (3.155) и (3.160), переписываем скалярное произведение собственных функций в виде

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\gamma' \mu_3(\gamma) \mu_3(\gamma') K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) K_{\gamma'}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}') \langle \Phi_{\gamma} | \Phi_{\gamma'} \rangle \\
&\times \int d^2 z_{21} [z_{21}]^{\gamma_{11}-\gamma'_{11}+\lambda_{11}-\lambda'_{11}-\underline{\gamma}_2+\underline{\gamma}'_2-1} \int d^2 z_{31} [z_{31}]^{-\gamma_{11}+\gamma'_{11}+\underline{\gamma}_2-\underline{\gamma}'_2+\underline{\lambda}_2-\underline{\lambda}'_2-\underline{\lambda}_3+\underline{\lambda}'_3-1} \\
&\times \int d^2 z_{41} [z_{41}]^{-\underline{\gamma}_2+\underline{\gamma}'_2+\underline{\lambda}_3-\underline{\lambda}'_3-1}, \quad (3.162)
\end{aligned}$$

где скалярное произведение собственных функций $SL(3, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки имеет вид

$$\langle \Phi_{\gamma} | \Phi_{\gamma'} \rangle = \int d^2 z_{32} d^2 z_{42} d^2 z_{43} \Phi_{\gamma}(z') \Phi_{\gamma'}(z').$$

Используя соотношение ортогональности для $N = 3$ (3.86)

$$\langle \Phi_{\gamma} | \Phi_{\gamma'} \rangle = \mu_3^{-1}(\gamma) \delta^{(2)}(\gamma_{11} - \gamma'_{11}) \delta^{(2)}(\gamma_2, \gamma'_2)$$

и интегральную формулу для дельта-функции (3.70)

$$\int d^2 z [z]^{x-1} = 2\pi^2 \delta^{(2)}(x),$$

переписываем (3.162) в форме

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle &= 8\pi^6 \delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}) \delta^{(2)}(\underline{\lambda}_2 - \underline{\lambda}'_2) \delta^{(2)}(\underline{\lambda}_3 - \underline{\lambda}'_3) \\
&\times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) K_{\gamma}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}'). \quad (3.163)
\end{aligned}$$

Теперь преобразуем интеграл в (3.163) с учетом условий

$$\lambda_{11} = \lambda'_{11}, \quad \underline{\lambda}_2 = \underline{\lambda}'_2, \quad \underline{\lambda}_3 = \underline{\lambda}'_3, \quad (3.164)$$

возникающих ввиду присутствия дельта-функций. Подставив выражения для $K_{\gamma}^{(\varepsilon)}$ и $K_{\gamma}^{(\varepsilon)*}$

(3.159), (3.161), перепишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_\gamma^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) K_\gamma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}') \\ &= \frac{[-1]^{\lambda_{11}-\sigma_1} \Gamma(\sigma_1, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1-\sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}'_3)}{4\pi^2} \int \mathcal{D}\rho \mathcal{D}\rho' \mathcal{D}\gamma_2 \mu_3(\gamma) \Gamma(\rho+2\varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1-\rho'+2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}'_3) \\ & \quad \times \Gamma(\varepsilon-\rho, \boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(\rho'+\varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}'_2) \Gamma(\gamma_2+\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\boldsymbol{\lambda}'_3+\varepsilon, \gamma_2) \Gamma(1-\rho-3\varepsilon, \gamma_2) \Gamma(\rho'-3\varepsilon, -\gamma_2) \\ & \quad \times I_1(\rho, \rho', \boldsymbol{\lambda}), \quad (3.165) \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}\gamma_2 = \mathcal{D}\gamma_{21} \mathcal{D}\gamma_{22}$, и выражение $I(\rho, \rho', \boldsymbol{\lambda})$ выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} I(\rho, \rho', \boldsymbol{\lambda}) &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \int \mathcal{D}\gamma_{11} \Gamma(\varepsilon_1 - \rho' - \gamma_{11}) \Gamma(\underline{\boldsymbol{\lambda}}_2 - \lambda_{11} - 2\varepsilon_1 - \gamma_{11}) \\ & \quad \times \Gamma(\gamma_{11} + \varepsilon_1 + \rho) \Gamma(\gamma_{11} + \lambda_{11} - \underline{\boldsymbol{\lambda}}_2 + 1 - 2\varepsilon_1). \end{aligned}$$

Переменная ρ' – аналог ρ (3.158) – имеет вид

$$(\rho', \bar{\rho}') = \left(\frac{k' - \varkappa + 2}{2} + i\nu', \frac{-k' - \varkappa + 2}{2} + i\nu' \right), \quad k' \in \mathbb{Z}, \nu' \in \mathbb{R}.$$

Используя интеграл Густафсона (3.149), находим следующее выражение для $I(\rho, \rho', \boldsymbol{\lambda})$

$$\begin{aligned} I(\rho, \rho', \boldsymbol{\lambda}) &= 2\pi \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \frac{\Gamma(\lambda_{11} - \underline{\boldsymbol{\lambda}}_2 + 1 - \varepsilon_1 - \rho', \underline{\boldsymbol{\lambda}}_2 - \lambda_{11} - \varepsilon_1 + \rho, 1 - 4\varepsilon_1, 2\varepsilon_1 + \rho - \rho')}{\Gamma(1 - 2\varepsilon_1 + \rho - \rho')} \\ &= 2\pi [-1]^{\rho-\rho'} \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \Gamma(\lambda_{11} - \underline{\boldsymbol{\lambda}}_2 + 1 - \varepsilon_1 - \rho', \underline{\boldsymbol{\lambda}}_2 - \lambda_{11} - \varepsilon_1 + \rho, 2\varepsilon_1 + \Delta \pm (\rho - \rho')) \\ & \quad \times \frac{4\varepsilon_1}{(\rho - \rho' + 2\varepsilon_1)(\rho' - \rho + 2\varepsilon_1)}, \quad (3.166) \end{aligned}$$

где $(\Delta, \bar{\Delta}) = (1, 0)$, и используются обозначения (A.1), (A.2) для произведения гамма-функций. На последнем шаге мы выделили бесконечно малую часть из $\Gamma(1 - 4\varepsilon_1)$ и сингулярные множители из гамма-функций

$$\begin{aligned} \Gamma(1 - 4\varepsilon_1) &= \frac{\Gamma(1 - 4\varepsilon_1)}{\Gamma(4\varepsilon_1)} = 4\varepsilon_1 \frac{\Gamma(1 - 4\varepsilon_1)}{\Gamma(1 + 4\varepsilon_1)} \sim 4\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 \rightarrow 0_+, \\ \frac{\Gamma(2\varepsilon_1 + \rho - \rho')}{\Gamma(1 - 2\varepsilon_1 + \rho - \rho')} &= \Gamma(2\varepsilon_1 \pm (\rho - \rho')) = \frac{\Gamma(2\varepsilon_1 + \Delta \pm (\rho - \rho'))}{(\rho - \rho' + 2\varepsilon_1)(\rho' - \rho + 2\varepsilon_1)}. \end{aligned}$$

Так как гамма-функции в (3.166) не содержат полюсов на контурах интегрирования по ν и ν' в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, то предел всего выражения сводится к пределу вида (1.122)

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0_+} \frac{4\varepsilon_1}{(\rho - \rho' + 2\varepsilon_1)(\rho' - \rho + 2\varepsilon_1)} = 2\pi \delta^{(2)}(\rho - \rho').$$

Таким образом,

$$I(\rho, \rho', \boldsymbol{\lambda}) = 4\pi^2 [-1]^{\boldsymbol{\lambda}_2 - \lambda_{11} + \rho} \delta^{(2)}(\rho - \rho'). \quad (3.167)$$

Подставляя результат (3.167) в (3.165), получаем

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_\gamma^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) K_\gamma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}') \\ &= \Gamma(\sigma_1, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1 - \sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}'_3) \int \mathcal{D}\rho [-1]^{\lambda_2 - \sigma_1 + \rho} \Gamma(\rho + 2\varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1 - \rho + 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}'_3) \\ & \quad \times \Gamma(\varepsilon - \rho, \boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(\rho + \varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}'_2) J_\varepsilon(\rho, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'), \end{aligned}$$

где

$$J_\varepsilon(\rho, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}') = \int \mathcal{D}\gamma_2 \mu_3(\gamma) \Gamma(\boldsymbol{\lambda}'_3 + \varepsilon, \gamma_2) \Gamma(1 - \rho - 3\varepsilon, \gamma_2) \Gamma(\gamma_2 + \varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\rho - 3\varepsilon, -\gamma_2).$$

Чтобы вычислить интеграл J_ε , используем формулу (3.5) из [54] для $N = 3$, при помощи соотношений (A.3), (A.5) для гамма-функции она переписывается в виде

$$\frac{1}{8\pi^2} \int \mathcal{D}u_1 \mathcal{D}u_2 |u_1 - u_2|^2 \prod_{j=1}^4 \prod_{i=1}^2 \Gamma(\alpha_j - u_i) \Gamma(u_i + \beta_j) = [-1]^{\sum_{j=1}^4 \alpha_j} \prod_{i,j=1}^4 \Gamma(\alpha_i + \beta_j).$$

Накладываемое на параметры условие $\sum_{i=1}^4 (\alpha_i + \beta_i) = 1$ выполняется для J_ε благодаря (3.164)

$$\underline{\boldsymbol{\lambda}'_3} + 3\varepsilon + 1 - \rho - 3\varepsilon - \underline{\boldsymbol{\lambda}_3} + 3\varepsilon + \rho - 3\varepsilon = 1.$$

Таким образом,

$$J_\varepsilon(\rho, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}') = \frac{[-1]^{\lambda_3 - \rho}}{8\pi^6} \Gamma(1 - \rho - 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(\rho - 2\varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}'_3) \Gamma(1 - 6\varepsilon) \Gamma(\boldsymbol{\lambda}'_3 + 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3).$$

Подставив найденное выражение для J_ε и сократив некоторые гамма-функции при помощи (A.4), получим

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_\gamma^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) K_\gamma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}') &= \frac{[-1]^{\lambda_3 + \lambda_2 - \sigma_1}}{8\pi^6} \Gamma(\sigma_1, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1 - \sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}'_3) \\ & \quad \times \Gamma(1 - 6\varepsilon) \Gamma(\boldsymbol{\lambda}'_3 + 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3) \int \mathcal{D}\rho \Gamma(\varepsilon - \rho, \boldsymbol{\lambda}_2) \Gamma(\rho + \varepsilon, -\boldsymbol{\lambda}'_2). \end{aligned}$$

Интеграл в правой части последнего равенства вновь вычисляется по формуле Густафсона (3.149), и в результате все тождество принимает вид

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\gamma \mu_3(\gamma) K_\gamma^{(\varepsilon)*}(\boldsymbol{\lambda}) K_\gamma^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{\lambda}') \\ = \frac{[-1]^{\lambda_3 + \lambda_2 - \sigma_1}}{4\pi^5} \Gamma(\sigma_1, \boldsymbol{\lambda}_3) \Gamma(1 - \sigma_1, -\boldsymbol{\lambda}'_3) \Gamma(1 - 6\varepsilon) \Gamma(\boldsymbol{\lambda}'_3 + 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_3) \frac{\Gamma(\boldsymbol{\lambda}'_2 + 2\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}_2)}{\Gamma(4\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Подставляя последний результат в (3.163) и выделяя в множителях $\Gamma(1 - 6\varepsilon)$, $1/\Gamma(4\varepsilon)$ инфи-

нитезимальную часть

$$\Gamma(1 - 6\varepsilon) = 6\varepsilon \frac{\Gamma(1 - 6\varepsilon)}{\Gamma(1 + 6\varepsilon)}, \quad \frac{1}{\Gamma(4\varepsilon)} = 4\varepsilon \frac{\Gamma(1 - 4\varepsilon)}{\Gamma(1 + 4\varepsilon)},$$

перепишем скалярное произведение собственных функций в виде

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\lambda} | \Psi_{\lambda'} \rangle &= 2\pi [-1]^{\lambda_3 + \lambda_2 - \sigma_1} \Gamma(\sigma_1, \lambda_3) \Gamma(1 - \sigma_1, -\lambda'_3) \delta^{(2)}(\lambda_{11} - \lambda'_{11}) \\ &\times \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} 4\varepsilon \Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2) \delta^{(2)}(\lambda_2 - \lambda'_2) 6\varepsilon \Gamma(\lambda'_3 + 2\varepsilon, \lambda_3) \delta^{(2)}(\lambda_3 - \lambda'_3). \end{aligned} \quad (3.168)$$

Чтобы получить соотношение ортогональности собственных функций (3.153), остается применить в (3.168) формулу (3.150) из предыдущего пункта

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} 4\varepsilon \Gamma(\lambda'_2 + 2\varepsilon, \lambda_2) \delta^{(2)}(\lambda_2 - \lambda'_2) = \frac{4\pi [-1]^{\lambda_2}}{|\lambda_{21} - \lambda_{22}|^2} \delta^{(2)}(\lambda_2, \lambda'_2),$$

и аналогичное тождество

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} 6\varepsilon \Gamma(\lambda'_3 + 2\varepsilon, \lambda_3) \delta^{(2)}(\lambda_3 - \lambda'_3) = \frac{24\pi^2}{\prod_{1 \leq i < j \leq 3} |\lambda_{3i} - \lambda_{3j}|^2} \delta^{(2)}(\lambda_3, \lambda'_3).$$

Доказательство последней формулы повторяет вывод (3.150): выделяется сингулярная часть, порождающая дельта-функцию

$$\Gamma(\lambda'_3 + 2\varepsilon, \lambda_3) \rightarrow \prod_{i,j=1}^3 \frac{\Gamma(1 + \lambda'_{3i} - \lambda_{3j})}{\Gamma(1 - \bar{\lambda}'_{3i} + \bar{\lambda}_{3j})} \prod_{i,j=1}^3 \frac{1}{\lambda'_{3i} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon},$$

далее используется детерминантная формула Коши

$$\begin{aligned} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\lambda'_{3i} - \lambda'_{3j})(\lambda_{3j} - \lambda_{3i})}{\prod_{i,j=1}^3 (\lambda'_{3i} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon)} &= \det_{i,j \in \{1,2,3\}} \left(\frac{1}{\lambda'_{3i} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon} \right) \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_3} \text{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda'_{3i} - \lambda_{3,\tau(i)} + 2\varepsilon} \end{aligned}$$

и соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \frac{6\varepsilon}{(\lambda_{3i} + \lambda_{3j} - \lambda'_{3i} - \lambda'_{3j} + 2\varepsilon)(\lambda'_{3i} - \lambda_{3i} + 2\varepsilon)(\lambda'_{3j} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon)} \\ = 4\pi^2 \delta^{(2)}(\lambda_{3i} - \lambda'_{3i}) \delta^{(2)}(\lambda_{3j} - \lambda'_{3j}), \end{aligned}$$

где $i \neq j$.

Докажем (3.152). Разложим дробь из левой части равенства

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{6\varepsilon}{(\lambda_{3i} + \lambda_{3j} - \lambda'_{3i} - \lambda'_{3j} + 2\varepsilon)(\lambda'_{3i} - \lambda_{3i} + 2\varepsilon)(\lambda'_{3j} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon)} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{6\varepsilon}{(\lambda'_{3i} - \lambda_{3i} + 2\varepsilon)(\lambda_{3i} - \lambda'_{3i} + 4\varepsilon)} \left(\frac{1}{\lambda'_{3j} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{3i} + \lambda_{3j} - \lambda'_{3i} - \lambda'_{3j} + 2\varepsilon} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\lambda'_{3i} - \lambda_{3i} + 2\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{3i} - \lambda'_{3i} + 4\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{\lambda'_{3j} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{3i} + \lambda_{3j} - \lambda'_{3i} - \lambda'_{3j} + 2\varepsilon} \right). \tag{3.169}
\end{aligned}$$

По аналогии с выводом формулы (1.122), при помощи простого обобщения теоремы Сохоцкого-Племеля

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x - i\varepsilon} + \frac{1}{x + ia\varepsilon} \right) = 2\pi i \delta(x), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\lambda'_{3i} - \lambda_{3i} + 2\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{3i} - \lambda'_{3i} + 4\varepsilon} \right) = 2\pi \delta^{(2)}(\lambda_{3i} - \lambda'_{3i}).$$

Таким образом, продолжая выкладку (3.169), получаем

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\lambda'_{3i} - \lambda_{3i} + 2\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{3i} - \lambda'_{3i} + 4\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{\lambda'_{3j} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{3i} + \lambda_{3j} - \lambda'_{3i} - \lambda'_{3j} + 2\varepsilon} \right) \\
&= 2\pi \delta^{(2)}(\lambda_{3i} - \lambda'_{3i}) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\lambda'_{3j} - \lambda_{3j} + 2\varepsilon} + \frac{1}{\lambda_{3j} - \lambda'_{3j} + 2\varepsilon} \right) \\
&= 4\pi^2 \delta^{(2)}(\lambda_{3i} - \lambda'_{3i}) \delta^{(2)}(\lambda_{3j} - \lambda'_{3j}),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. На последнем шаге мы использовали формулу для дельта-функции (1.122).

Заключение

В заключение обсудим основные результаты работы и перспективы развития темы.

Глава 1 посвящена диагонализации B -элемента матрицы монодромии (1.19) $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки ВС-типа с K -матрицей вида (1.23). Собственные функции B -оператора строятся индуктивно. Функция для цепочки из n узлов получается в результате действия повышающего интегрального оператора Λ_n (1.61) на функцию для цепочки из $n - 1$ узла. Λ_n разбивается в произведение локальных операторов двух типов. Первый тип – \mathcal{R} -оператор (1.87), действующий нетривиально в двух сомножителях $L^2(\mathbb{C})$ тензорного произведения (1.15) (гильбертова пространства модели) и определяемый соотношением (1.90) с L -оператором (1.17). Он является частным случаем общего решения уравнения Янга-Бакстера с группой симметрии $SL(2, \mathbb{C})$ [43, 60]. Второй тип – оператор отражения (\mathcal{K} -оператор) (1.48) в $L^2(\mathbb{C})$, удовлетворяющий уравнению отражения (1.44) с K -матрицей и L -оператором. $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантная спиновая цепочка ВС-типа с единичной K -матрицей изучалась в работе [53], в этом случае решением (1.44) является единичный \mathcal{K} -оператор. Модель, рассмотренная в настоящей диссертации, задается нетривиальной K -матрицей, соответственно, оператор отражения также принимает нетривиальный вид. Собственные функции для цепочки из одного узла получаются при действии \mathcal{K} -оператора на функцию, тождественно равную единице. Для них получены интегральные представления типа Меллина-Барнса (1.53) и Гаусса-Гивенталья (1.51), а также выражение через гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел (1.52). Для представления Гаусса-Гивенталья можно ввести диаграммную технику, изложенную в приложении А. При помощи нее доказана ортогональность набора одночастичных собственных функций (1.57) и их симметрия относительно отражения спектральной переменной (1.56). Полнота этого набора (1.59) доказана при помощи представления Меллина-Барнса и комплексного аналога интеграла Густафсона ВС-типа (1.118).

Обобщением понятия R -матрицы Янга (1.21) является \mathbb{R} -оператор (1.125), действующий в тензорном произведении двух представлений $SL(2, \mathbb{C})$ основной серии. Для семейства этих операторов выполняется уравнение Янга-Бакстера (1.126) в тензорном произведении трех таких представлений. В разделе 1.9 показано что \mathcal{K} -оператор представляет собой аналогичное обобщение K -матрицы. Он удовлетворяет соотношению (1.128) с \mathbb{R} -оператором – бесконечномерному аналогу уравнения отражения (1.20) для R - и K -матриц (операторы \mathcal{K} и \mathbb{K} связаны друг с другом заменой переменных (1.132)).

В главе 2 решается аналогичная задача построения собственных функций B -элемента матрицы монодромии (2.11) для $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантной спиновой цепочки, задаваемой K -матрицей (2.7) того же вида, что и в случае $SL(2, \mathbb{C})$. Собственные функции имеют такую же индуктивную структуру, как и в $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной модели. Соответствующий \mathcal{R} -оператор дается выражением (2.36). \mathcal{K} -оператор представляется в формальном виде (2.28) через отношение двух гамма-функций от операторного аргумента. В разделе 2.3.1 доказана

эквивалентность (2.28) и формального представления из [74, формула (3.23)]. При помощи (2.28) найдены два представления для \mathcal{K} в виде интегрального оператора (2.30) и (2.32), в первом интегрирование ведется по контуру, во втором – по верхней полуплоскости. Как и в предыдущей модели, оператор отражения переводит функцию, тождественно равную единице, в собственные функции B -оператора для цепочки из одного узла. Для последних получено выражение через гипергеометрическую функцию (2.31) (из которого следует симметрия относительно отражения спектральной переменной), интегральные представления типа Гаусса-Гивенталья (2.92) и Меллина-Барнса (2.98). Как и в предыдущей модели, в представлении Гаусса-Гивенталья можно ввести диаграммную технику, при помощи которой удобно доказывалась ортогональность одночастичных собственных функций (2.78). Для доказательства полноты (2.95) использовано представление Меллина-Барнса.

В работе [96] доказана ортогональность и полнота базиса собственных функций B -оператора для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки ВС-типа (в случае произвольного числа узлов), построенного в главе 1. Также доказаны свойства симметрии этих функций относительно перестановок и отражений спектральных переменных и относительно преобразования параметров $(s, g) \rightarrow (1 - s, 1 - g)$. Кроме того, для собственных функций B -элемента в случае произвольного числа узлов построено представление Меллина-Барнса путем их разложения по собственным функциям оператора $a(u) + \gamma b(u)$, где $a(u)$ и $b(u)$ – элементы матрицы монодромии (0.4) для цепочки типа А. Ввиду громоздкости диаграммы для ядра повышающего интегрального оператора в случае цепочек ВС-типа, для доказательства перечисленных свойств собственных функций в [96] вместо фейнмановской диаграммной техники был использован алгебраический подход, впервые примененный в [112] для спиновой цепочки А-типа. При помощи этого подхода диаграммные преобразования переформулированы на языке локальных операторных соотношений, таких как уравнение Янга-Бакстера для \mathcal{R} -оператора. Естественной задачей является разработка аналогичного алгебраического подхода для цепочки ВС-типа с группой симметрии $SL(2, \mathbb{R})$ и доказательство при помощи него перечисленных выше свойств для собственных функций B -оператора в этой модели.

Итеративное выражение для собственных функций в терминах повышающих интегральных операторов было получено для различных интегрируемых моделей, включая спиновые цепочки типа А с группой симметрии $SL(2, \mathbb{R})$ [69] и $SL(2, \mathbb{C})$ [43, 51] и гиперболическую систему Руйсенаарса [113, 114, 115, 116]. Кроме того, для каждой из этих моделей был построен дуальный повышающий оператор [117, 56, 112, 114]. Он также представляет собой интегральный оператор, связывающий собственные функции для $k - 1$ частиц и k частиц. Но, в отличие от изначально построенного повышающего оператора, интегрирование в соответствующей формуле ведется по спектральным переменным подынтегральной функции, а пространственные переменные остаются фиксированными. В спиновых цепочках А-типа при помощи него строится представление типа Меллина-Барнса для волновых функций [117, 56]. Открытую задачу представляет собой построение дуального повышающего оператора для моделей, рассмотренных в главах 1 и 2. Для ее решения можно использовать полученное в [96] представление Меллина-Барнса для собственных функций спиновой цепочки ВС-типа

и дуальный повышающий оператор для цепочки типа A .

Глава 3 посвящена построению интегрального представления типа Меллина-Барнса для собственных функций угловых квантовых миноров матрицы монодромии $SL(N, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки A -типа в случае одного узла. Этот набор собственных функций является обобщением понятия базиса Гельфанда-Цетлина на случай представлений основной унитарной серии, в которых отсутствуют векторы младшего и старшего веса. При $N = 3$ и $N = 4$ получены рекуррентные формулы (3.81) и (3.98), при помощи которых собственная функция для ранга N выражается через интеграл по спектральным переменным от собственной функции для ранга $N - 1$. Также в этих случаях доказаны соотношения ортогональности (3.86) и (3.102) для базисных элементов. Для $N = 3$ ядро интеграла представляется через произведение гамма-функций, связанных с полем \mathbb{C} . В случае $N = 4$ ядро интеграла выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию над полем комплексных чисел ${}_4G_4^{\mathbb{C}}$ в единице [58].

Преимущество представления Меллина-Барнса заключается в том, что его удобно использовать для доказательства полноты построенных наборов собственных функций. Соответствующий метод доказательства изложен в [70] на примере цепочки Тоды и спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{R})$ A -типа, а также в [47] для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки. Он основан на использовании интегралов Густафсона [71, 72, 73] и их обобщений на случай поля \mathbb{C} [52, 53, 54].

В качестве результата для произвольного ранга следует отметить формулы (3.28), (3.29), (3.30), при помощи которых квантовые миноры L -оператора для ранга N выражаются через миноры L -оператора для ранга $N - 1$, а также формулы (3.33) и (3.37) для действия неугловых миноров на собственные функции угловых. Последние соотношения выполняются для любого представления $SL(N, \mathbb{C})$ (не только основной серии), в котором угловые миноры L -оператора диагонализуются, поскольку для их вывода используются лишь коммутационные соотношения (3.47) между квантовыми минорами и интерполяция Лагранжа. При помощи (3.28) и (3.33) можно получить систему конечно-разностных уравнений для ядра интеграла $K_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda})$ в представлении Меллина-Барнса (3.64) в случае произвольного N .

Задачи для дальнейшего исследования включают в себя вопрос полноты построенных базисов Гельфанда-Цетлина, решение системы конечно-разностных уравнений для ядра $K_{\gamma}(\boldsymbol{\lambda})$ в случае произвольного ранга, а также вопрос эквивалентности интегральных представлений Меллина-Барнса и Гаусса-Гивенталья [92, 89] для базисных элементов.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Павлу Анатольевичу Валиневичу за постановку задачи и внимание к работе. Автор благодарен Сергею Эдуардовичу Деркачёву и Никите Максимовичу Белоусову за помощь и поддержку, без которой эта работа могла бы не выйти в свет.

Список литературы

- [1] *Bethe H.* Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette // Zeitschrift fur Physik. — 1931. — Vol. 71, no. 3—4. — P. 205—226.
- [2] *Lieb E. H., Liniger W.* Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State // Physical Review. — 1963. — Vol. 130, no. 4. — P. 1605—1616.
- [3] *Корепин В. Е.* Непосредственное вычисление S -матрицы в массивной модели Тирринга // ТМФ. — 1979. — Т. 41, № 2. — С. 169—189.
- [4] *Yang C. N., Yang C. P.* One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system // Phys. Rev. — 1966. — Vol. 150. — P. 321—327.
- [5] *Yang C. N., Yang C. P.* One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II: Properties of the ground state energy per lattice site for an infinite system // Phys. Rev. — 1966. — Vol. 150. — P. 327—339.
- [6] *Yang C. N., Yang C. P.* One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. III. Applications // Phys. Rev. — 1966. — Vol. 151. — P. 258—264.
- [7] *Baxter R. J.* Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. I: Some fundamental eigenvectors // Ann. Phys. — 1973. — Vol. 76. — P. 1—24.
- [8] *Baxter R. J.* Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. II: Equivalence to a generalized ice-type lattice model // Ann. Phys. — 1973. — Vol. 76. — P. 25—47.
- [9] *Baxter R. J.* Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. III: Eigenvectors of the transfer-matrix and Hamiltonian // Ann. Phys. — 1973. — Vol. 76. — P. 48—71.
- [10] *Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи. I // ТМФ. — 1979. — Т. 40, № 2. — С. 194—220.
- [11] *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга // УМН. — 1979. — Т. 34, № 5. — С. 13—63.
- [12] *Склянин Е. К.* Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шредингера // ДАН СССР. — 1978. — Т. 244, № 6. — С. 1337—1341.
- [13] *Склянин Е. К.* Квантовый вариант метода обратной задачи рассеяния // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1980. — Т. 95. — С. 55—128.

- [14] *Sklyanin E. K., Kulish P. P.* Quantum Spectral Transform Method. Recent Developments // Lecture Notes in Physics. — 1982. — Vol. 151. — P. 61.
- [15] *Sklyanin E. K.* Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics // arXiv:hep-th/9211111. — 1992.
- [16] *Faddeev L. D.* How algebraic Bethe ansatz works for integrable model // arXiv: hep-th/9605187. — 1996.
- [17] *Славнов Н. А.* Алгебраический анзац Бете. — Москва : МИАН, 2017. — С. 3—189.
- [18] *Замолодчиков А. Б., Фатеев В.А.* Факторизованная S-матрица и интегрируемая цепочка Гейзенберга спинов единица // Ядерная физика. — 1980. — Т. 32, № 2. — С. 581—590.
- [19] *Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu., Sklyanin E. K.* Yang-Baxter Equation and Representation Theory: I // Lett. Math. Phys. — 1981. — Vol. 5. — P. 393—403.
- [20] *Takhtajan L. A.* The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins // Physics Letters A. — 1982. — Vol. 87, no. 9. — P. 479—482.
- [21] *Babujian H. M.* Exact solution of the one-dimensional isotropic Heisenberg chain with arbitrary spins S // Physics Letters A. — 1982. — Vol. 90, no. 9. — P. 479—482.
- [22] *Sklyanin E. K.* The Quantum Toda Chain // Lect. Notes Phys. — 1985. — Vol. 226. — P. 196—233.
- [23] *Kharchev S., Lebedev D.* Integral representation for the eigenfunctions of quantum periodic Toda chain // Lett.Math.Phys. — 1999. — Vol. 50. — P. 53—77.
- [24] *Kharchev S., Lebedev D.* Eigenfunctions of $GL(N, \mathbb{R})$ Toda chain: The Mellin-Barnes representation // Письма в ЖЭТФ. — 2000. — Т. 71, № 6. — С. 338—343.
- [25] *Kharchev S., Lebedev D.* Integral representations for the eigenfunctions of quantum open and periodic Toda chains from QISM formalism // J. Phys. A: Math. Gen. — 2001. — Vol. 34. — P. 2247—2258.
- [26] *Sklyanin E. K.* Boundary Conditions for Integrable Quantum Systems // J. Phys. A. — 1988. — Vol. 21. — P. 2375—2389.
- [27] *Чередник И. В.* Факторизующиеся частицы на полупрямой и системы корней // ТМФ. — 1984. — Т. 61, № 1. — С. 35—44.
- [28] *Mezincescu L., Rafael I. N.* Analytical Bethe Ansatz for quantum-algebra-invariant spin chains // Nuclear Physics B. — 1992. — Vol. 372, no. 3. — P. 597—621.
- [29] *De Vega H. J., González-Ruiz A.* Exact solution of the $SU_q(n)$ -invariant quantum spin chains // Nuclear Physics B. — 1994. — Vol. 417, no. 3. — P. 553—578.

- [30] *Artz S., Mezincescu L., Nepomechie R. I.* Analytical Bethe ansatz for a $A_{2n-1}^{(2)}$, $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$ quantum-algebra-invariant open spin chains // J. Phys. A: Math. Gen. — 1995 — Vol. 28. — P. 5131.
- [31] *Yang W., Nepomechie R. I., Zhang Y.* Q-operator and T-Q relation from the fusion hierarchy // Physics Letters B. — 2006. — Vol. 633, no. 4–5. — P. 664–670.
- [32] *Kitanine N., Maillet J. M., Niccoli G.* Open spin chains with generic integrable boundaries: Baxter equation and Bethe ansatz completeness from separation of variables // J. Stat. Mech. — 2014. — P. 5015.
- [33] *Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. Том 5: интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. — 656 с.
- [34] *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп // Тр. МИАН СССР. — 1950. — Т. 36. — С. 3–288.
- [35] *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли. — Москва: Наука, 1983.
- [36] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Manashov A. N.* Separation of variables for the quantum $SL(2, \mathbb{R})$ spin chain // JHEP. — 2003.
- [37] *Лунатов Л. Н.* The bare Pomeron in quantum chromodynamics // ЖЭТФ. — 1986. — Т. 90, № 5. — С. 1536–1552.
- [38] *Lipatov L. N.* High-energy asymptotics of multicolor QCD and two-dimensional conformal field theories // Phys. Lett. B. — 1993. — Vol. 309, no. 3. — P. 394–396.
- [39] *Лунатов Л. Н.* Асимптотика многоцветной КХД при больших энергиях и точно решаемые спиновые модели // Письма в ЖЭТФ. — 1994. — Т. 59, № 9. — С. 571–574.
- [40] *Faddeev L. D., Korchemsky G. P.* High-energy QCD as a completely integrable model // Phys. Lett. B. — 1995. — Vol. 342, no. 1. — P. 311–322.
- [41] *De Vega H. J., Lipatov L. N.* Interaction of reggeized gluons in the Baxter-Sklyanin representation // Phys. Rev. D. — 2001. — Vol. 64, no. 11. — P. 114019.
- [42] *De Vega H. J., Lipatov L. N.* Exact resolution of the Baxter equation for reggeized gluon interactions // Phys. Rev. D. — 2002. — Vol. 66, no. 7. — P. 074013.
- [43] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Manashov A. N.* Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD: I. Baxter Q-operator and separation of variables // Nuclear Physics B. — 2001. — Vol. 617, no. 1. — P. 375–440.
- [44] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Kotanski J., Manashov A. N.* Noncompact Heisenberg spin magnets from high-energy QCD. 2. Quantization conditions and energy spectrum // Nucl. Phys. B. — 2002. — Vol. 645, no. 1. — P. 237–297.

- [45] *Sklyanin E. K.* Separation of Variables: New Trends // Progress of Theoretical Physics Supplement. — 1995. — Vol. 118. — P. 35–60.
- [46] *Kozłowski K.K.*, Unitarity of the SoV transform for the Toda chain // Comm. Math. Phys. — 2015. — Vol. 334. — P. 223–273.
- [47] *Manashov A. N.* Unitarity of the SoV Transform for $SL(2, \mathbb{C})$ Spin Chains // SIGMA. — 2023. — Vol. 19.
- [48] *Lipatov L. N.* Integrability of scattering amplitudes in N=4 SUSY // J. Phys. A. — 2009. — Vol. 42. — P. 304020.
- [49] *Bartels J., Lipatov L. N. and Prygarin A.* Integrable spin chains and scattering amplitudes // J. Phys. A. — 2011. — Vol. 44. P. 454013.
- [50] *Derkachov S., Kazakov V., Olivucci E.* Basso-Dixon Correlators in Two-Dimensional Fishnet CFT // JHEP. — 2019.
- [51] *Derkachov S. E., Manashov A. N.* Iterative construction of eigenfunctions of the monodromy matrix for $SL(2, \mathbb{C})$ magnet // J. Phys. A: Math. Theor. — 2014. — Vol. 47, no. 30. — P. 305204.
- [52] *Derkachov S. E., Manashov A. N., Valinevich P. A.* Gustafson integrals for $SL(2, \mathbb{C})$ spin magnet // Phys. A: Math. Theor. — 2017. — Vol. 50.
- [53] *Derkachov S. E., Manashov A. N., Valinevich P. A.* $SL(2, \mathbb{C})$ Gustafson Integrals // SIGMA. — 2018. — Vol. 14.
- [54] *Derkachov S. E., Manashov A. N.* On Complex Gamma-Function Integrals // SIGMA. — 2020. — Vol. 16.
- [55] *Givental A.* Stationary phase integrals, quantum Toda lattices, flag manifolds and the mirror conjecture // American Mathematical Society Translations: Series 2. — 1997. — Vol. 180. — P. 103–115.
- [56] *Валиневич П. А.* Представление Меллина–Барнса для $SL(2, \mathbb{C})$ -магнетика // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2020. — Т. 494. — С. 125–143.
- [57] *Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретак В. С.* Гипергеометрические функции над произвольным полем // УМН. — 2004. — Т. 59, № 5. — С. 29–100.
- [58] *Neretin Yu. A.* Barnes–Ismagilov Integrals and Hypergeometric Functions of the Complex Field // SIGMA. — 2020. — Vol. 16.
- [59] *Силантьев А. В.* Функция перехода для цепочки Тоды // ТМФ. — 2007. — Т. 150, № 3. — С. 371–390.

- [60] *Деркачѳв С. Э., Манашов А. Н.* Общее решение уравнения Янга–Бакстера с группой симметрии $SL(n, \mathbb{C})$ // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 4. — С. 1–94.
- [61] *Деркачѳв С. Э.* Факторизация R-матрицы. I // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2006. — Т. 335. — С. 134–163.
- [62] *Chicherin D., Derkachov S. E., Spiridonov V. P.* From principal series to finite-dimensional solutions of the Yang-Baxter equation // SIGMA. — 2016. — Vol. 12.
- [63] Kuznetsov V., Sklyanin E., Bäcklund Transformation for the BC-Type Toda Lattice // SIGMA. — 2007. — Vol. 3.
- [64] *Иоргов Н. З., Шадура В. Н.* Волновые функции цепочки Тоды с взаимодействием на границе // ТМФ. — 2005. — Т. 142, №. 2. — С. 346–364.
- [65] *Gorsky A., Kogan I. I., Korchemsky G.* High Energy QCD: Stringy Picture from Hidden Integrability // JHEP. — 2002. — Vol. 5. — P. 53.
- [66] *Braun V. M., Derkachov S. E., Manashov A. N.*, Integrability of three-particle evolution equations in QCD // Phys.Rev.Lett. — 1998. — Vol. 81. — P. 2020–2023.
- [67] *Belitsky A. V.* Fine structure of spectrum of twist-three operators in QCD // Phys.Lett. B. — 1999. — Vol. 453. — P. 59–72.
- [68] *Derkachov S. E., Korchemsky G. P., Manashov A. N.* Baxter Q -operator and separation of variables for the open $SL(2, \mathbb{R})$ spin chain // JHEP. — 2003. — Vol. 2003, no. 10. — P. 53.
- [69] *Belitsky A. V., Derkachov S. E., Manashov A. N.* Quantum mechanics of null polygonal Wilson loops // Nuclear Physics B. — 2014. — Vol. 882. — P. 303–351.
- [70] *Derkachov S. E., Kozlowski K. K., Manashov A. N.* Completeness of SoV representation for $SL(2, \mathbb{R})$ spin chains // SIGMA. — 2021. — Vol. 17.
- [71] *Gustafson R. A.* Some q -beta and Mellin-Barnes integrals on compact Lie groups and Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 341, no. 1. — P. 69–119.
- [72] *Gustafson R. A.* Some q -beta and Mellin-Barnes integrals with many parameters associated to the classical groups // SIAM. J. Math. Anal. — 1992. — Vol. 23, no. 2. — P. 525–551.
- [73] *Gustafson R. A.* Some q -beta integrals on $SU(n)$ and $Sp(n)$ that generalize the Askey-Wilson and Nasrallah-Rahman integrals // SIAM J. Math Anal. — 1994. — Vol. 25, no. 2. — P. 441–449.
- [74] *Frassek R., Giardinà C., Kurchan J.* Non-compact quantum spin chains as integrable stochastic particle processes // Journal of Statistical Physics. — 2020. — Vol. 180. — P. 135–171.

- [75] *Vlaar B., Weston R.*, A Q-operator for open spin chains I: Baxter's TQ relation // J. Phys. A: Math. Theor. — 2020. — Vol. 53. — P. 245205.
- [76] *Молев А. И., Назаров М. Л., Ольшанский Г. И.* Янгианы и классические алгебры Ли // УМН. — 1996. — Т.51, № 2. — С. 27—104.
- [77] *Молев А. И.* Янгианы и классические алгебры Ли. — Москва: Издательство МЦНМО, 2009.
- [78] *Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю.* О GL_3 -инвариантных решениях уравнения Янга-Бакстера и ассоциированных квантовых системах // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1982. — Т. 120. — С. 92—121.
- [79] *Kulish P. P., Reshetikhin N. Yu.* Diagonalization of $GL(N)$ invariant transfer matrices and quantum N-wave system (Lee model) // J. Phys. A: Math. Gen. — 1983. — Vol. 16. — P. L591—L596.
- [80] *Склянин Е. К.* Разделение переменных в квантовых интегрируемых моделях, порожденных янгианом $\mathcal{U}[sl(3)]$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1993. — Т. 205. — С. 166—178.
- [81] *Gromov N., Levkovich-Maslyuk F., Sizov G.* New construction of eigenstates and separation of variables for $SU(N)$ quantum spin chains // JHEP. — 2017.
- [82] *Cavaglià A., Gromov N., Levkovich-Maslyuk F.* Separation of variables and scalar products at any rank // JHEP. — 2019.
- [83] *Maillet J.M., Niccoli G.* On quantum separation of variables J. Math. Phys. — 2018. — Vol. 59, no. 9. — P. 091417.
- [84] *Maillet J.M., Niccoli G.*, On quantum separation of variables beyond fundamental representations // SciPost Phys. — 2021. — Vol. 10. — P. 26.
- [85] *Держачев С. Э., Валиневич П. А.* Метод разделения переменных в случае $SL(3, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки: собственные функции B -оператора Склянина // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2018. — Т. 473. — С. 110—146.
- [86] *Nazarov M. L., Tarasov V. O.* Yangians and Gelfand-Zetlin Bases // Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1994. — Vol. 30. — P. 459—478.
- [87] *Гельфанд И. М., Цетлин М. Л.* Конечномерные представления группы унимодулярных матриц // ДАН СССР. — 1950. — Т. 71, № 5. — С. 825—828.
- [88] *Derkachov S. E., Manashov A. N.* \mathcal{R} -Matrix and Baxter \mathcal{Q} -Operators for the Noncompact $SL(N, \mathbb{C})$ Invariant Spin Chain // SIGMA. — 2006. — Vol. 2.
- [89] *Валиневич П. А., Держачёв С. Э., Кулиш П. П., Уваров Е. М.* Построение собственных функций системы квантовых миноров матрицы монодромии $SL(n, \mathbb{C})$ -инвариантной спиновой цепочки // ТМФ. — 2016. — Т. 189, № 2. — С. 149—175.

- [90] *Граев М. И.* Континуальный аналог схем Гельфанда-Цетлина и реализация основной серии неприводимых унитарных представлений группы $GL(n, \mathbb{C})$ в пространстве функций на многообразии этих схем // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 412, № 2. — С. 154–158.
- [91] *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Конечномерные неприводимые представления унитарной и полной линейной группы и связанные с ними специальные функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 6. — С. 1329–1356.
- [92] *Валиневич П. А.* Построение базиса Гельфанда-Цетлина для представлений основной унитарной серии алгебры $sl_n(\mathbb{C})$ // ТМФ. — 2019. — Т. 198, № 1. — С. 162–174.
- [93] *Derkachov S. E., Manashov A. N.* Baxter operators for the quantum $sl(3)$ invariant spin chain // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — Vol. 39. — P. 13171.
- [94] *Антоненко П. В., Белоусов Н. М., Деркачев С. Э., Хорошкин С. М.* Оператор отражения и гипергеометрия I: $SL(2, \mathbb{R})$ спиновая цепочка // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2024. — Т. 532. — С. 5–46.
- [95] *Антоненко П. В., Белоусов Н. М., Деркачев С. Э., Валиневич П. А.* Оператор отражения и гипергеометрия II: $SL(2, \mathbb{C})$ спиновая цепочка // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2024. — Т. 532. — С. 47–79.
- [96] *Antonenko P., Derkachov S., Valinevich P.* BC-Type Open $SL(2, \mathbb{C})$ Spin Chain // Annales Henri Poincaré. — 2026. — DOI: [10.1007/s00023-025-01653-0](https://doi.org/10.1007/s00023-025-01653-0).
- [97] *Antonenko P. V.* The Gelfand-Tsetlin basis for infinite-dimensional representations of $gl_n(\mathbb{C})$ // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2022. — Vol. 55, no. 22. — P. 225201.
- [98] *Kulish P. P., Sklyanin E. K.* Algebraic structures related to the reflection equations // J. Phys. A. — 1992. — Vol. 25. — P. 5963–5976.
- [99] *Kulish P. P.* Yang-Baxter equation and reflection equations in integrable models // Lect. Notes Phys. — 1996. — Vol. 469. — P. 125–144.
- [100] *Molchanov V. F., Neretin Yu. A.* A pair of commuting hypergeometric operators on the complex plane and bispectrality // Journal of Spectral Theory. — 2021. — Vol. 11, no. 2. — P. 509–586.
- [101] *Chicherin D., Derkachov S., Karakhanyan D., Kirschner R.* Baxter operators for arbitrary spin // Nuclear Physics B. — 2012. — Vol. 854, no. 2. — P. 393–432.
- [102] *Sarkissian G. A., Spiridonov V. P.* The Endless Beta Integrals // SIGMA. — 2020. — Vol. 16.
- [103] *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — Washington: National Bureau of Standards, 1964.

- [104] Фаддеев Л. Д., Якубовский О. А., Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. — Ленинград: Издательство Ленинградского университета, 1980.
- [105] *Andrews G. E., Askey R., Roy R.* Special Functions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [106] *Paris R. B., Kaminski D.*, Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [107] *Khwaja S. F., Olde Daalhuis A. B.* Uniform asymptotic expansions for hypergeometric functions with large parameters IV // Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 12, no.6. — P. 667–710.
- [108] *Graev M. I.* Infinite-Dimensional Representations of the Lie Algebra $gl(n, \mathbb{C})$ Related to Complex Analogs of the Gelfand–Tsetlin Patterns and General Hypergeometric Functions on the Lie Group $GL(n, \mathbb{C})$ // Acta Applicandae Mathematicae. — 2004. — Vol. 81. — P. 93–120.
- [109] *Белусов Н. М., Деркачëв С. Э.* Полнота для $3j$ -символов группы $SL(2, \mathbb{C})$ // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2019. — Т. 487. — С. 40–52.
- [110] *Neretin Y. A.* An analog of the Dougall formula and of the de Branges–Wilson integral // The Ramanujan Journal. — 2021. — Vol. 54. — P. 93–106.
- [111] *Buschman R. G.* Contiguous relations for Meijer’s G-function // Indian J. pure appl. Math. — 1987. — Vol. 18, no. 6. — P. 536–547.
- [112] *Antonenko P., Derkachov S., Valinevich P.* A-Type Open $SL(2, \mathbb{C})$ Spin Chain // SIGMA. — 2025. — Vol. 21.
- [113] *Belousov N., Derkachov S., Kharchev S., Khoroshkin S.* Baxter operators in Ruijsenaars hyperbolic system I: commutativity of Q-operators // Annales Henri Poincaré. — 2023. — Vol. 25. — P. 3207–3258.
- [114] *Belousov N., Derkachov S., Kharchev S., Khoroshkin S.* Baxter operators in Ruijsenaars hyperbolic system II: bispectral wave functions // Annales Henri Poincaré. — 2023. — Vol. 25. — P. 3259–3296.
- [115] *Belousov N., Derkachov S., Kharchev S., Khoroshkin S.* Baxter operators in Ruijsenaars hyperbolic system III: Orthogonality and Completeness of Wave Functions // Annales Henri Poincaré. — 2023. — Vol. 25. — P. 3297–3332.
- [116] *Belousov N., Derkachov S., Kharchev S., Khoroshkin S.* Baxter operators in Ruijsenaars hyperbolic system IV: Coupling Constant Reflection Symmetry // Commun.Math.Phys. — 2024. — Vol. 405.

- [117] *Derkachov S. E., Manashov A. N.* Spin chains and Gustafson's integrals // J. Phys. A: Math. Theor. — 2017. — Vol. 50.
- [118] *Isaev A. P.* Multi-loop feynman integrals and conformal quantum mechanics // Nuclear Physics B. — 2003. — Vol. 662, no. 3. — P. 461–475.

Приложение А. Диаграммная техника для $SL(2, \mathbb{C})$ -инвариантной цепочки

Гамма-функция, связанная с полем комплексных чисел [57, 58], представляет собой отношение двух гамма-функций Эйлера. Она определяется следующим образом

$$\mathbf{\Gamma}(a) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1 - \bar{a})}$$

Отметим, что $\mathbf{\Gamma}(a)$ зависит от двух аргументов $(a, \bar{a}) \in \mathbb{C}^2$, таких что $a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$, но для краткости указывается только первый аргумент. Кроме того, для $\rho \in \mathbb{R}$ используется обозначение

$$\mathbf{\Gamma}(a + \rho) \equiv \frac{\Gamma(a + \rho)}{\Gamma(1 - \bar{a} - \rho)}.$$

Также, в тексте применяются следующие компактные обозначения для произведений гамма-функций

$$\mathbf{\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \mathbf{\Gamma}(\alpha_1) \mathbf{\Gamma}(\alpha_2) \dots, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{\Gamma}(a \pm b) = \mathbf{\Gamma}(a + b) \mathbf{\Gamma}(a - b). \quad (\text{A.2})$$

Пользуясь хорошо известными свойствами гамма-функции Эйлера, несложно доказать следующие соотношения

$$\mathbf{\Gamma}(a + 1) = -a\bar{a} \mathbf{\Gamma}(a), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{\Gamma}(a) = [-1]^a \mathbf{\Gamma}(\bar{a}) = [-1]^{a-\bar{a}} \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(1 - a)},$$

$$\mathbf{\Gamma}(a) \mathbf{\Gamma}(1 - a) = [-1]^a, \quad (\text{A.4})$$

а также правило комплексного сопряжения

$$\mathbf{\Gamma}(a)^* = [-1]^a \mathbf{\Gamma}(\bar{a}^*) = [-1]^a \frac{\Gamma(\bar{a}^*)}{\Gamma(1 - a^*)}. \quad (\text{A.5})$$

$$z \xrightarrow{a} w$$

Рисунок А.1 – Диаграммное представление функции $[z - w]^{-a}$

Сформулируем диаграммные правила. Степенная функция вида (1.2)

$$\frac{1}{[z - w]^a} \equiv \frac{1}{(z - w)^a (\bar{z} - \bar{w})^{\bar{a}}} = \frac{(\bar{z} - \bar{w})^{a-\bar{a}}}{|z - w|^{2a}}, \quad a - \bar{a} \in \mathbb{Z}$$

изображается при помощи направленной линии – Рис. А.1. При смене направления стрелки

возникает дополнительный знаковый множитель

$$\frac{1}{[z-w]^a} = \frac{(-1)^{a-\bar{a}}}{[w-z]^a} = \frac{[-1]^a}{[w-z]^a}.$$

Все диаграммные преобразования основаны на двух интегральных тождествах – *правиле цепочки* и *соотношении звезда-треугольник*, которые могут быть представлены в различных формах, в том числе в диаграммном виде. Их доказательства можно найти в [43].

Правило цепочки имеет вид

$$\int d^2w \frac{1}{[z-w]^a [w-z_0]^b} = \frac{\pi [-1]^c}{\Gamma(a, b, c)} \frac{1}{[z-z_0]^{a+b-1}}, \quad (\text{A.6})$$

where $c = 2 - a - b$, $\bar{c} = 2 - \bar{a} - \bar{b}$. В диаграммном виде оно изображено на Рис. A.2. Если вершина выделена жирной точкой, то по соответствующей переменной ведется интегрирование (по комплексной плоскости).

Рисунок A.2 – Правило цепочки, $a + b + c = 2$

Соотношение звезда-треугольник

$$\int d^2w \frac{1}{[w-z_1]^a [w-z_2]^b [w-z_3]^c} = \frac{\pi}{\Gamma(a, b, c)} \frac{1}{[z_{12}]^{1-c} [z_{31}]^{1-b} [z_{23}]^{1-a}}, \quad (\text{A.7})$$

изображено в диаграммном виде на Рис. A.3. Оно выполняется при условии $a + b + c = 2$. Его также можно переписать в операторном виде [118, 60, 51]

$$[\hat{p}]^a [z-z_0]^{a+b} [\hat{p}]^b = [z-z_0]^b [\hat{p}]^{a+b} [z-z_0]^a, \quad (\text{A.8})$$

где интегральный оператор $[\hat{p}]^a$ вида (1.8) действует на функциях переменной z .

Рисунок A.3 – Соотношение звезда-треугольник, $a + b + c = 2$

При помощи (A.7) можно вывести еще одну полезную интегральную формулу – *кросс-*

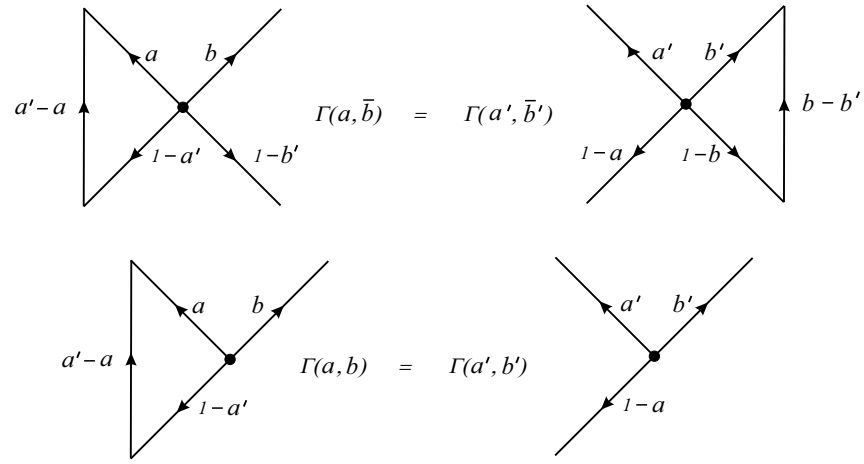


Рисунок А.4 – Кросс-соотношение и редуцированное кросс-соотношение, $a + b = a' + b'$

соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[z_2 - z_1]^{a'-a}} \int d^2w \frac{\Gamma(a, \bar{b})}{[w - z_1]^a [w - z_2]^{1-a'} [w - z_3]^b [w - z_4]^{1-b'}} \\ &= \frac{1}{[z_4 - z_3]^{b-b'}} \int d^2w \frac{\Gamma(a', \bar{b}')}{[w - z_1]^{a'} [w - z_2]^{1-a} [w - z_3]^{b'} [w - z_4]^{1-b}}, \end{aligned}$$

где $a + b = a' + b'$, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a}' + \bar{b}'$. Оно изображено на Рис. А.4 сверху. Его предельным случаем является *редуцированное кросс-соотношение* (Рис. А.4, снизу)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{[z_2 - z_1]^{a'-a}} \int d^2w \frac{\Gamma(a, b)}{[w - z_1]^a [w - z_2]^{1-a'} [w - z_3]^b} \\ &= \int d^2w \frac{\Gamma(a', b')}{[w - z_1]^{a'} [w - z_2]^{1-a} [w - z_3]^{b'}}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

где, опять же, $a + b = a' + b'$, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a}' + \bar{b}'$.

Наконец, приведем два интегральных представления для дельта-функции в комплексной плоскости. Первое имеет вид

$$\delta^2(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{[z]^{1-\varepsilon}}. \tag{A.10}$$

Второе

$$\int d^2w \frac{1}{[z_1 - w]^{2-\alpha} [w - z_2]^\alpha} = \frac{\pi^2}{\Gamma(\alpha, 2-\alpha)} \delta^2(z_1 - z_2) \tag{A.11}$$

следует из правила цепочки (А.6) и формулы (А.10).

Приложение Б. Диаграммная техника для $SL(2, \mathbb{R})$ -инвариантной цепочки

$$z \xrightarrow{\lambda} w = (z - \bar{w})^{-\lambda} \quad \bullet z = \int \mathcal{D}z$$

Рисунок Б.1 – Элементы диаграмм

Введем диаграммную технику, используемую для вычислений в случае спиновой цепочки $SL(2, \mathbb{R})$. Диаграммы являются графическим представлением интегралов от степенных функций. Функции $(z - \bar{w})^{-\lambda}$ сопоставляется направленная линия, изображенная на Рис. Б.1. Вершине, выделенной жирной точкой, соответствует интеграл по верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ с мерой

$$\mathcal{D}z = \frac{2s - 1}{\pi} (2 \text{Im } z)^{2s-2} d \text{Re } z d \text{Im } z$$

(Рис. Б.1, справа).

В основном тексте используются два диаграммных тождества. Первое – *правило цепочки* – приведено на Рис. Б.2. Ему соответствует следующая интегральная формула

$$\int \mathcal{D}v \frac{1}{(z - \bar{v})^\lambda (v - \bar{w})^\rho} = a(\lambda, \rho) \frac{1}{(z - \bar{w})^{\lambda + \rho - 2s}}, \quad (\text{Б.1})$$

где коэффициент имеет вид

$$a(\lambda, \rho) = e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(\lambda + \rho - 2s)\Gamma(2s)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\rho)}.$$

Доказательство (Б.1) можно найти в [36].

Второе тождество – *преобразование Эйлера* – изображено на Рис. Б.3. В явном виде оно записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}w \frac{1}{(z - \bar{w})^\lambda (i\beta - \bar{w})^\nu (w + i\beta)^\rho} &= C(\lambda, \nu, \rho) \\ \times (z + i\beta)^{2s - \lambda - \rho} \int \mathcal{D}w \frac{1}{(z - \bar{w})^\nu (i\beta - \bar{w})^\lambda (w + i\beta)^{4s - \lambda - \nu - \rho}}, \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

где введено обозначение

$$C(\lambda, \nu, \rho) = (2i\beta)^{2s - \nu - \rho} \frac{\Gamma(4s - \lambda - \nu - \rho)\Gamma(\lambda + \nu + \rho - 2s)}{\Gamma(\rho)\Gamma(2s - \rho)}.$$

Соотношение (Б.2) эквивалентно привычной формуле для преобразования Эйлера гипергео-

$$z \xrightarrow{\lambda} \bullet \xrightarrow{\rho} w = a(\lambda, \rho) \quad z \xrightarrow{\lambda + \rho - 2s} w$$

Рисунок Б.2 – Правило цепочки

$$\begin{array}{c}
 i\beta \\
 \downarrow \\
 \nu \\
 \downarrow \\
 \rho \\
 \downarrow \\
 -i\beta
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 z \xrightarrow{\lambda} \bullet
 \end{array}
 = C(\lambda, \nu, \rho)
 \begin{array}{c}
 i\beta \\
 \downarrow \\
 \lambda \\
 \downarrow \\
 \nu \\
 \downarrow \\
 4s - \lambda - \nu - \rho \\
 \downarrow \\
 -i\beta
 \end{array}$$

Рисунок Б.3 – Преобразование Эйлера

метрической функции

$${}_2F_1(a, b, c; x) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b, c; x). \quad (\text{Б.3})$$

Равносильность (Б.2) и (Б.3) следует из интегрального представления для гипергеометрической функции

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1\left(a, b, c; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right) &= (2i\beta)^a e^{i\pi s} \frac{\Gamma(c)\Gamma(2s+a-c)}{\Gamma(a)\Gamma(2s)} \\
 &\times \int \mathcal{D}w \frac{1}{(z-\bar{w})^b (i\beta-\bar{w})^{c-b} (w+i\beta)^{2s+a-c}},
 \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

которое приведено в графическом виде на Рис. Б.4. Через $A(a, b, c)$ обозначен коэффициент

$$A(a, b, c) = (2i\beta)^a e^{i\pi s} \frac{\Gamma(c)\Gamma(2s+a-c)}{\Gamma(a)\Gamma(2s)}.$$

В свою очередь, чтобы вывести (Б.4), рассмотрим стандартное представление Эйлера для гипергеометрической функции

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a}. \quad (\text{Б.5})$$

Подставляя (Б.5) в левую часть (Б.4), переписываем (Б.4) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}
 &\int \mathcal{D}w \frac{1}{(z-\bar{w})^b (i\beta-\bar{w})^{c-b} (w+i\beta)^{2s+a-c}} \\
 &= e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(a)\Gamma(2s)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(2s+a-c)} \int_0^1 dt \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(t(z-i\beta) + 2i\beta)^a}.
 \end{aligned}$$

$${}_2F_1\left(a, b, c; \frac{1}{2} + \frac{iz}{2\beta}\right) = A(a, b, c) \quad z \longrightarrow$$

Рисунок Б.4 – Диаграммное представление для гипергеометрической функции

Последнее тождество представляет собой частный случай более общего соотношения

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}w \frac{1}{(z - \bar{w})^b (i\beta - \bar{w})^{c-b} (w - \bar{v})^{2s+a-c}} \\ &= e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(a)\Gamma(2s)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)\Gamma(2s+a-c)} \int_0^1 dt \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(t(z - i\beta) + i\beta - \bar{v})^a} \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

при $v = i\beta$. Равенство (Б.6) доказывается следующим образом. Сначала используем формулу Фейнмана

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 dt \frac{t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}}{(tA_1 + (1-t)A_2)^{\alpha_1+\alpha_2}}$$

чтобы объединить два множителя в знаменателе

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}w \frac{1}{(z - \bar{w})^b (i\beta - \bar{w})^{c-b} (w - \bar{v})^{2s+a-c}} \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \\ & \quad \times \int \mathcal{D}w \frac{1}{(tz + (1-t)i\beta - \bar{w})^c (w - \bar{v})^{2s+a-c}}. \end{aligned}$$

Затем, применяя правило цепочки (Б.1) для интеграла по w в правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}w \frac{1}{(tz + (1-t)i\beta - \bar{w})^c (w - \bar{v})^{2s+a-c}} \\ &= e^{-i\pi s} \frac{\Gamma(a)\Gamma(2s)}{\Gamma(c)\Gamma(2s+a-c)} \frac{1}{(tz + (1-t)i\beta - \bar{v})^a}, \end{aligned}$$

получаем нужную формулу (Б.6).