На правах рукописи

ЗОЛОТОВ ВЛАДИМИР ОЛЕГОВИЧ

# МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГЕОМЕТРИЮ КОНЕЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

01.01.04 — Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2020

Работа выполнена в лаборатории геометрии и топологии Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель: Иванов Сергей Владимирович,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН

Официальные оппоненты: — Арсений Владимирович Акопян,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
— Берестовский Валерий Николаевич,
доктор физико-математических наук,
профессор, главный научный сотрудник
Института математики
им. С.Л. Соболева СО РАН

Ведущая организация: Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Защита диссертации состоится “10” марта 2021 года в 18:00 часов на заседании Диссертационного совета Д002.202.02 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан “___”__________ 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Малютин А. В.

# 1 Общая характеристика работы

## Цели и задачи работы

Задачей работы является изучение свойств метрических пространств, зависящих только от изометрических типов конечных подмножеств. Наибольшее внимание уделено Марковскому типу, его связи с пространствами Александрова кривизны $\geq 0$, а также классу конечно-плоских пространств.

## Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Рассмотрение свойств метрических пространств, зависящих только от изометрических типов конечных подмножеств, имеет богатую историю. К такого рода свойствам относятся свойство удвоения [19, 24, 16, 8, 25, 23, 36, 7], тип Энфло [30, 18, 15, 31], масштабированный тип Энфло [30, 29, 20], Марковский тип [30, 34, 35, 12, 32, 17, 28, 13, 14]. Ответы на следующие вопросы о метрическом пространстве определяются только его конечными подмножествами:

- вкладывается ли данное пространство изометрично или билипшицево в Евклидово пространство ограниченной размерности?
- Является ли пространство ультраметрическим? (зависит только от трех-точечных подпространств).
- Вкладывается ли данное пространство изометрично в некоторое дерево? (зависит только от четырех-точечных подпространств).

Помимо важности для теоретического исследования метрических пространств, конечно-точечные свойства важны для прикладных вопросов, где в большинстве случаев метрическое пространство либо дискретно по своей природе, либо представлено некой выборкой своих точек.

К задачам, решаемым с привлечением конечно-точечных свойств, относятся помимо вышеуказанных вопросов о вложимости [28, 12] вопросы о продолжимости липшицевых и би-липшицевых отображений [13, 32, 30], задача поиска ближайшего соседа, задачи кластеризации [19, 24], задачи маршрутизации [16, 8], задачи о построении сетей [25, 23], задачи поиска [36, 7].

Отдельно стоит выделить такие свойства, как ограниченность кривизны по Александрову (кривизна $\geq k$ и кривизна $\leq k$). Хотя их можно определить через условие на расстояния для четверок точек, в дополнение необходимо требовать, чтобы метрика была внутренней. (То есть чтобы расстояние между любыми двумя точками равнялось инфимуму длин путей, соединяющих эти две точки). Попытки избавиться от этого дополнительного требования приводят к ряду сложных открытых вопросов.

Следующий вопрос о характеризации конечных подмножеств пространств Александрова сформулирован С. Александер, В. Каповичем и А. Петруниным [11], см. также [12].

**Вопрос 1.1.** *Каково необходимое и достаточное условие на конечное метрическое пространство, чтобы оно допускало изометрическое вложение в пространство Александрова кривизны $\geq k$?*

Аналогичный вопрос для пространств Александрова кривизны $\leq k$ принадлежит М. Громову [21, Секция $1.19_+$], [22, §15(b)], см. также [39, 38].

Первый основной результат данной работы проливает некоторый свет на то, как устроены конечные подмножества Александровских пространств, см. Теорему 1.3. Но перед тем, как его привести, нам нужно определение, формализующее следующее неформальное описание: класс метрических пространств $K$ называется конечно-плоским, если с точки зрения конечных подмножеств он совпадает с классом компактных плоских многообразий.

**Определение 1.2.** *Будем говорить, что метрическое пространство $X$ является конечно-плоским, если для любого конечного $Y \subset X$ и любого $\epsilon > 0$ существует плоское компактное многообразие $M$ и вложение $f : Y \to M$ такое, что*

$$d_X(y_1, y_2) \leq d_M(f(y_1), f(y_2)) \leq (1+\epsilon) d_X(y_1, y_2),$$

*для любых $y_1, y_2 \in Y$.*

**Теорема 1.3.** *Следующие метрические пространства являются конечно-плоскими:*

1. *2-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами,*
2. *факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп,*
3. *компактные плоские орбиобразия,*
4. *компактные плоские многообразия (тривиальное утверждение),*
5. *факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий,*

*6. 2-пространства Вассерштейна над связными компактными группами Ли с би-инвариантными метриками.*

*Верно и обратное: если $Y$ конечное подмножество плоского многообразия $M$, $\epsilon > 0$, и $K$ один из классов пространств (1)–(6), то существует $X \in K$ и $f : Y \to X$ такое, что*

$$d_M(y_1, y_2) \le d_X(f(y_1), f(y_2)) \le (1+\epsilon) d_M(y_1, y_2).$$

Отметим, что все пространства, участвующие в Теореме 1.3, являются пространствами Александрова кривизны $\ge 0$. Для пространств Вассерштейна это следует из [37, Предложения 2.10]. Для компактных плоских многообразий и связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками неотрицательность кривизны по Александрову следует из неотрицательности секционной кривизны. Для факторов Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп, компактных плоских орбиобразий и факторов связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий неотрицательность кривизны по Александрову можно получить при помощи предложения, данного в [6, Секции 4.6].

Из Теоремы 1.3 следует, что любые свойства классов пространств, зависящие только от конечных подмножеств, совпадают для классов пространств (1)–(6), рассматриваемых в Теореме 1.3. В частности, мы применим Теорему 1.3 к вычислению констант Марковского типа для вышеуказанных классов Александровских пространств. Но перед этим мы остановимся более подробно на истории пространств Александрова, Марковского типа и связи между ними.

## Пространства Александрова кривизны, ограниченной снизу

Понятие пространства Александрова кривизны, ограниченной снизу, было введено А. Д. Александровым [5, 9] в пятидесятых годах, см. также [10]. Оно обобщает понятие риманова многообразия секционной кривизны, ограниченной снизу. Грубо говоря, метрическое пространство является пространством Александрова кривизны $\ge k$, если (локально) каждый треугольник в этом пространстве имеет углы больше либо равные углам треугольника с теми же длинами сторон, но взятого в пространстве постоянной кривизны $= k$ (т.е. сфере, Евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского).

Ключевой в истории пространств Александрова кривизны, ограниченной снизу, является работа Ю. Д. Бураго, М. Л. Громова и Г. Я. Перельмана [6]. Один из основных результатов этой статьи — теорема о глобализации (теорема Топоногова), которая гласит, что если вышеуказанное условие на углы выполнено локально, то оно выполнено и глобально. Одним из следствий этого результата является то, что пределы полных римановых многообразий кривизны $\geq k$ являются пространствами Александрова кривизны $\geq k$ (Предел в данном контексте подразумевается относительно метрики на множестве метрических пространств, называемой метрикой Громова–Хаусдорфа).

Более того, в [6] показано, что класс пространств Александрова кривизны $\geq k$, размерности $n \in \mathbb{N}$ и диаметра, не превосходящего $D > 0$, является компактом (относительно метрики Громова–Хаусдорфа). Вышеуказанные свойства имеют большую важность для приложении к теории римановых многообразий, так как позволяют рассматривать крайние случаи, либо эксплуатировать компактность при доказательстве утверждений про римановы многообразия кривизны $\geq k$.

## Марковский тип

Понятие Марковского типа было введено К. Боллом [13] как инструмент для продолжения липшицевых отображений. Грубо говоря, метрическое пространство обладает Марковским типом $p$, если существует $K > 0$ такое, что для произвольного симметричного Марковского процесса на $X$ и любого $T \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_p(T) \leq K^p T \mathcal{E}_p(1), \tag{1.0.1}$$

где $\mathcal{E}_p(T)$ обозначает математическое ожидание $p$-ой степени расстояния, проходимого процессом за $T$ шагов. Константой Марковского типа $p$, соответствующей времени $T$, пространства $X$ называют инфимум таких $K$, для которых для всевозможных симметричных Марковских процессов на $X$ выполняются неравенства (1.0.1) (при фиксированном $T$), ее обозначают $M_p(X,T)$. Константой Марковского типа $p$ пространства $X$ называют инфимум таких $K$, для которых для всевозможных симметричных Марковских процессов на $X$ неравенства (1.0.1) выполняются для всех $T \in \mathbb{N}$, ее обозначают $M_p(X)$.

Кроме того, что Марковский тип является одним из ключевых инструментов для продолжения липшицевых отображений между пространствами, см. [13, 32, 33], он используется в как средство доказательства невложимости метрических пространств при ограничении на билипшицево искажение, см. [14, 28].

## Александровские пространства неотрицательной кривизны и Марковский тип 2

С.-И. Охта и М. Пишо [35] показали, что любое геодезическое метрическое пространство, обладающее Марковским типом 2 с константой 1, является пространством неотрицательной кривизны по Александрову. Встал вопрос о том, верно ли обратное (см. [12, 34]).

**Вопрос 1.4.** *Верно ли, что любое Александровское пространство неотрицательной кривизны обладает Марковским типом 2 с константой 1?*

Вопрос 1.4 интересен не только сам по себе, но и как возможный подход к вопросу 1.1. Его частичное положительное решение дано в работах [3, 2], которые являются основой для диссертации. В данном тексте эти результаты сформулированы как Теорема 1.5.

**Теорема 1.5.** *Пусть $X$ принадлежит одному из следующих классов метрических пространств:*

1. *2-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами,*
2. *факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп,*
3. *компактные плоские орбиобразия,*
4. *компактные плоские многообразия,*
5. *факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по изометрическим действиям компактных групп Ли. (В частности в этот класс входят стандартные Евклидовые сферы, рассматриваемые с их внутренними метриками).*

*Тогда $X$ обладает Марковским типом 2 с константой 1.*

Теорема 1.5 отвечает на вопросы, сформулированные в работах [12, 35]. До работы [3] не было даже известно, обладает ли окружность, рассматриваемая со своей внутренней метрикой, Марковским типом 2 с константой 1. Но было известно, что все Александровские пространства неотрицательной кривизны обладают Марковским типом с какими-то константами, однородно ограниченными сверху. Первая оценка такого типа была найдена С.-И. Охта в [34], где он показал, что любое Александровское пространство кривизны $\geq 0$ обладает Марковским типом 2 с константой $\sqrt{6}$. Эта константа была улучшена А. Наором и Ю. Пересом до $1+\sqrt{2}$ (этот результат также опубликован в [34]). Позднее эта константа была улучшена до $\sqrt{1\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-1}}$ А. Андони, А. Наором и О. Нейманом, см. [12].

Для доказательства Теоремы 1.5 мы используем следующую теорему, которая предоставляет инструмент, позволяющий оценивать константы Марковского типа метрических пространств.

Для метрического пространства $X$ мы обозначаем через $\mathscr{P}_p(X)$ $p$-пространство Вассерштейна над $X$.

**Теорема 1.6.** *Пусть $p \geq 1$ и $X$, $Y$ метрические пространства такие, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1. *$X$ и $Y$ являются геодезическими пространствами, и $X$ накрывает $Y$ посредством конечнолистного, локально изометрического накрытия,*

2. *$Y$ является фактор-пространством $X$ под действием конечной группы, действующей изометриями,*

3. *$Y$ является $p$-пространством Вассерштейна над $X$.*

*Тогда для каждого $T \in \mathbb{N}$ мы имеем $M_p(X,T) \geq M_p(Y,T)$ и $M_p(X) \geq M_p(Y)$. Более того, в случае (3) выполняется $M_p(\mathscr{P}_p(X),T) = M_p(X,T)$, где $\mathscr{P}_p(X)$ обозначает $p$-пространство Вассерштейна над $X$.*

Как видно из формулировки, область применимости Теоремы 1.6 не ограничивается пространствами Александрова неотрицательной кривизны, кроме того, она позволяет оценивать константы Марковского типа и для $p \neq 2$. Пользуясь этим, мы получаем следующие оценки на константы Марковского типа пространств Вассерштейна:

**Следствие 1.7.** *Для любых $p \in (2,\infty)$ и $T, d \in \mathbb{N}$ выполняется*

1. $M_p(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d),T) \leq 16 d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$,

2. $M_2(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \leq 4 d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sqrt{p-1}$.

## Нижняя оценка на достаточное билипшицево искажение для вложения сноуфлейков в пространства Вассерштейна

**Определение 1.8.** *Пусть $X, Y$ метрические пространства и $f : X \to Y$. Би-липшицевым искажением $f$ (обозначаемым $dist(f) \in [1,\infty]$) называется инфимум $D \geq 1$ таких, что существует $c = c(D) > 0$, для которого*

$$c d_X(x_1,x_2) \leq d_Y(f(x_1),f(x_2)) \leq D c d_X(x_1,x_2),$$

*для любых* $x_1, x_2 \in X$.

**Определение 1.9.** *Для метрического пространства* $X$ *и* $0 \leq \alpha < 1$ $\alpha$-*сноуфлейком* $X$ *(обозначаемым* $X^\alpha$*) называется метрическое пространство на множестве* $X$ *с метрикой, заданной равенством*

$$d_{X^\alpha}(x_1, x_2) = (d_X(x_1, x_2))^\alpha.$$

При помощи вышеуказанных оценок мы получаем следующее ограничение на вложимость сноуфлейков в пространства Вассерштейна, отвечая на вопрос [12].

**Следствие 1.10.** *Для каждого* $n > 1$ *существует* $n$*-точечное метрическое пространство* $X_n$ *такое, что для любого* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, *любого* $p \in (2, \infty)$ *и любого* $d \in \mathbb{N}$ $\alpha$*-сноуфлейк* $X_n$ *не допускает вложения в* $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ *с билипшицевым искажением менее, чем* $Cd^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}p^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{\alpha-\frac{1}{2}}$, *где* $C > 0$ *абсолютная константа.*

## Научная новизна

Все результаты являются новыми.

## Практическая и теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер. Теорема 1.5 и Следствие 1.10 отвечают на вопросы, заданные в работах [12, 35].

## Достоверность результатов и апробация работы

Для результатов работы даны точные доказательства. Результаты опубликованы в журналах категории $Q1$, докладывались на семинарах Лаборатории Геометрии ПОМИ РАН, геометрическом семинаре математического Института Кельна, международной конференции "Дни геометрии в Новосибирске — 2016" и периоде интенсивной активности "Metric Measure Spaces and Ricci Curvature" в институте Макса Планка в Бонне.

## Публикации

По теме диссертации автором опубликованы статьи [2, 3, 4], а также препринт [1]. В статье [4], выполненной в соавторстве, автору принадлежат основные определения: определение биполярного сравнения и $T$-древовидного сравнения. Постановка задачи, решением которой является

[4, Теор. 1.1], также принадлежит автору. Доказательства [4, Теор. 1.1], [4, Теор. 1.2] и [4, Теор. 1.6] принадлежат соавторам. На защиту выносятся только результаты работ [2, 3], выполненных без соавторов. Журналы, в которых опубликованы статьи [2, 3, 4], удовлетворяют рекомендациям ВАК.

## Методология и методы исследования

Для доказательства Теоремы 1.6 автором введена новая техника поднятия Марковских цепей вдоль отображений. Она позволяет переносить верхние оценки на константы Марковского типа с накрывающего пространства на накрываемое, с пространства на его фактор по конечной группе изометрий, либо с пространства на пространство Вассерштейна над данным пространством.

В основе доказательства Теоремы 1.3 новая конструкция, позволяющая вкладывать пространства Вассерштейна над связными компактными группами Ли с би-инвариантными метриками в пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами.

## Положения, выносимые на защиту

1. Показано, что следующие метрические пространства являются конечно-плоскими: (а) 2-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами, (б) факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп, (в) компактные плоские орбиобразия, (г) факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий (Теорема 1.3).

2. Доказано, что компактные плоские многообразия, а также пространства, принадлежащие классам (а)–(г), обладают Марковским типом 2 с константой 1 (Теорема 1.5).

3. Разработан новый метод получения верхних оценок на константы Марковского типа (Теорема 1.6).

4. Получены верхние оценки на константы Марковского типа пространств Вассерштейна над Евклидовыми пространствами (Следствие 1.7).

5. Доказана нижняя оценка на достаточное билипшицевое искажение для вложения сноуфлейков в пространства Вассерштейна (Следствие 1.10).

## Благодарности

Я благодарен С. В. Иванову за руководство при выполнении данной работы, множество идей и огромное терпение. Я выражаю благодарность А. Лычаку за внимание к моим работам и важные подсказки. Я благодарен А. Наору за ценные комментарии к работе [3], которые привели в частности к получению Следствия 1.7(2). Я признателен А. В. Алпееву, П. А. Галашину и Н. Д. Лебедевой за плодотворные обсуждения.

# 2 Основное содержание работы

Диссертация состоит из пяти глав. Список литературы включает 48 названий.

Основные результаты изложены во Введении, Главе 1. Она лишь немного отличается от автореферата. В Главе 2 изложены предварительные сведения, необходимые определения и используемые обозначения. Глава 3 посвящена доказательству Теоремы 1.6, Следствий 1.7 и 1.10. В Главе 4 даны доказательства Теорем 1.3 и 1.5. Заключение дано в Главе 5.

# 3 Заключение

В работе показано, что следующие классы пространств Александрова кривизны $\geq 0$ являются конечно-плоскими: (а) 2-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами, (б) факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп, (в) компактные плоские орбиобразия, (г) факторы связных компактных групп Ли с биинвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий.

Компактные плоские многообразия и пространства, принадлежащие классам (а)–(г), удовлетворяют свойству биполярного сравнения и свойству $T$-древовидного сравнения для любого дерева $T$ на конечном наборе вершин. (Эти свойства были введены и изучены в [4].) Данные свойства тесно связаны с непрерывностью переноса массы и так называемым MTW-условием Ма–Трудингера–Ванга (см. [4]) и, вообще говоря, не выполняются для более общих Александровских пространств неотрицательной кривизны, см. [27].

**Определение 3.1.** *Пусть $T$ неориентированное дерево с конечным набором вершин $V(T)$ и ребер $E(T)$. Мы говорим, что метрическое пространство $X$ удовлетворяет свойству $T$-древовидного сравнения, если для лю-*

*бого отображения $f : V(T) \to X$ существует отображение в Гильбертово пространство $h : V(T) \to \mathbb{H}$ такое, что*

1. *$d_X(f(v_1), f(v_2)) \leq ||h(v_1) - h(v_2)||$, для любых $v_1, v_2 \in V(T)$.*

2. *$d_X(f(v_1), f(v_2)) = ||h(v_1) - h(v_2)||$, для любого ребра $\{v_1, v_2\} \in E(T)$.*

Следующий вопрос о внутренней характеризации конечных подмножеств компактных плоских многообразий остался открытым.

**Вопрос 3.2.** *Пусть $X$ конечное метрическое пространство, удовлетворяющее свойству $T$-древовидного сравнения для любого дерева $T$ на конечном наборе вершин. Верно ли, что $X$ допускает почти изометрическое вложение в класс компактных плоских многообразий? (По Теореме 1.3 почти изометрическая вложимость в класс компактных плоских многообразий равносильна почти изометрической вложимости в любой из классов (а)–(г)).*

В работе показано, что компактные плоские многообразия и пространства, принадлежащие классам (а)–(г), обладают Марковским типом 2 с константой 1. В частности было показано, что сферы в Евклидовых пространствах, рассматриваемые с внутренней метрикой, обладают Марковским типом 2 с константой 1. Однако, полный ответ на Вопрос 1.4 получен не был. В частности не известен ответ для плоских конусов.

**Вопрос 3.3.** *Пусть $0 < \alpha < 2\pi$ и $\alpha \neq \frac{2\pi}{k}$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$. Рассмотрим $K_\alpha$ плоский конус с углом при вершине равным $\alpha$. При каких $\alpha$ конус $K_\alpha$ обладает Марковским типом 2 с константой 1?*

Ответ неизвестен ни для одного $\alpha$. Но известно, что при $\alpha$, близких к $2\pi$, существуют конечные подмножества $K_\alpha$, не допускающие почти изометрических вложений в классы пространств, рассматриваемых в Теореме 1.3, см. [27].

Получены верхние оценки на константы Марковского типа пространств Вассерштейна над Евклидовыми пространствами. В качестве следствия получена нижняя оценка на достаточное билипшицево искажение для вложения сноуфлейков в пространства Вассерштейна. Для дальнейших вопросов о вложимости в пространства Вассерштейна см. [12].

# Работы автора по теме:

[1] Zolotov, Vladimir. “Dimension of a snowflake of a finite Euclidean subspace.” arXiv preprint arXiv:1706.09998 (2017).

[2] Zolotov, Vladimir. “Finite flat spaces.” Mathematatika 65.4 (2019): 1010–1017.

[3] Zolotov, Vladimir. “Markov type constants, flat tori and Wasserstein spaces.” Geometriae Dedicata 195.1 (2018): 249–263.

[4] Lebedeva, Nina, Anton Petrunin, and Vladimir Zolotov. “Bipolar comparison.” Geometric and Functional Analysis 29.1 (2019): 258–282.

## Литература:

[5] Александров, Александр Данилович. “Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения.” Труды Математического института имени ВА Стеклова 38.0 (1951): 5–23.

[6] Бураго, Юрий Дмитриевич, Михаил Леонидович Громов и Григорий Яковлевич Перельман. “Пространства АД Александрова с ограниченными снизу кривизнами.” Успехи математических наук 47.2 (284 (1992): 3–51.

[7] Abraham, Ittai, and Cyril Gavoille. “Object location using path separators.” Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Principles of distributed computing. ACM, 2006.

[8] Abraham, Ittai, et al. “Routing in networks with low doubling dimension.” 26th IEEE International Conference on Distributed Computing Systems (ICDCS'06). IEEE, 2006.

[9] Alexandrov, A. D. “Uber eine Verallgemeinerung der Riemannscen Geometrie.” Schriftenreiche der Institut fur Mathematik 1 (1957): 33–84.

[10] Aleksandrov, A. D., Berestovskii, V. N. and Nikolaev, I. G. “Generalized Riemannian spaces.” Russian Mathematical Surveys 41 (1986): 1–54.

[11] S. Alexander, V. Kapovitch, and A. Petrunin. “Alexandrov meets Kirszbraun.” In Proceedings of the Gokova Geometry-Topology Conference 2010, pages 88—109. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[12] Andoni, Alexandr, Assaf Naor, and Ofer Neiman. “Snowflake universality of Wasserstein spaces.” Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. Vol. 51. No. 3. Societe Mathematique de France, 2018.

[13] Ball, Keith. “Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps.” Geometric & Functional Analysis GAFA 2.2 (1992): 137–172.

[14] Bartal, Yair, et al. "On metric Ramsey-type phenomena." Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing. ACM, 2003.

[15] Bourgain, Jean, Vitali Milman, and Haim Wolfson. "On type of metric spaces." Transactions of the American Mathematical Society 294.1 (1986): 295–317.

[16] Chan, Hubert TH, et al. "On hierarchical routing in doubling metrics." Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[17] Ding, Jian, James R. Lee, and Yuval Peres. "Markov type and threshold embeddings." Geometric and Functional Analysis 23.4 (2013): 1207–1229.

[18] Enflo, Per. "On the nonexistence of uniform homeomorphisms between L p-spaces." Arkiv för matematik 8.2 (1970): 103–105.

[19] Friggstad, Zachary, Mohsen Rezapour, and Mohammad R. Salavatipour. "Local search yields a PTAS for k-means in doubling metrics." SIAM Journal on Computing 48.2 (2019): 452–480.

[20] Giladi, Ohad, and Assaf Naor. "Improved bounds in the scaled Enflo type inequality for Banach spaces." arXiv preprint arXiv:1004.4221 (2010).

[21] Gromov, Mikhail. "Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces". Springer Science & Business Media, 2007.

[22] Gromov, Mikhail. "CAT(k)-spaces: construction and concentration." Journal of Mathematical Sciences 119.2 (2004): 178–200.

[23] Gupta, Anupam, Mohammad T. Hajiaghayi, and Harald Räcke. "Oblivious network design." Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

[24] Huang, Lingxiao, et al. "Epsilon-coresets for clustering (with outliers) in doubling metrics." 2018 IEEE 59th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2018.

[25] Har-Peled, Sariel, and Manor Mendel. "Fast construction of nets in low-dimensional metrics and their applications." SIAM Journal on Computing 35.5 (2006): 1148–1184.

[26] Khot, Subhash, and Assaf Naor. "Nonembeddability theorems via Fourier analysis." Mathematische Annalen 334.4 (2006): 821–852.

[27] Lebedeva, Nina. “On open flat sets in spaces with bipolar comparison.” Geometriae Dedicata (2018): 1–5.

[28] Linial, Nathan, Avner Magen, and Assaf Naor. “Girth and Euclidean distortion.” Geometric & Functional Analysis GAFA 12.2 (2002): 380–394.

[29] Mendel, Manor, and Assaf Naor. “Scaled enflo type is equivalent to rademacher type.” Bulletin of the London Mathematical Society 39.3 (2007): 493–498.

[30] Naor, Assaf. “An introduction to the Ribe program.” Japanese Journal of Mathematics 7.2 (2012): 167–233.

[31] Naor, Assaf, and Gideon Schechtman. “Remarks on non linear type and Pisier’s inequality.” Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 552 (2002): 213.

[32] Naor, Assaf, et al. “Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov-hyperbolic metric spaces.” Duke Mathematical Journal 134.1 (2006): 165–197.

[33] Naor, Assaf, and Yuval Rabani. “On Lipschitz extension from finite subsets.” Israel Journal of Mathematics 219.1 (2017): 115–161.

[34] Ohta, Shin-Ichi. “Markov Type of Alexandrov Spaces of Non-Negative Curvature.” Mathematika 55.1–2 (2009): 177–189.

[35] Ohta, Shin-Ichi, and Mikaël Pichot. “A note on Markov type constants.” Archiv der Mathematik 92.1 (2009): 80–88.

[36] Slivkins, Aleksandrs. “Distance estimation and object location via rings of neighbors.” Distributed Computing 19.4 (2007): 313–333.

[37] Sturm, Karl-Theodor. “On the geometry of metric measure spaces.” Acta mathematica 196.1 (2006): 65–131.

[38] Dylan Thurston, Length inequalities in trees and CAT(0) spaces, URL (version: 2014-04-22): https://mathoverflow.net/q/163706

[39] Foertsch, Thomas, Alexander Lytchak, and Viktor Schroeder. “Nonpositive curvature and the Ptolemy inequality.” International Mathematics Research Notices 2007.9 (2007): rnm100-rnm100.