

На правах рукописи

Власова Надежда Юрьевна

О СТЯГИВАЕМЫХ ПОДГРАФАХ ТРЁХСВЯЗНОГО ГРАФА

1.1.5 — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Научный руководитель:

КАРПОВ Дмитрий Валерьевич,

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

ПЯТКИН Артем Валерьевич,

доктор физико-математических наук, профессор РАН, главный научный сотрудник ФГБУН Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, профессор кафедры теоретической кибернетики ФГАОУ ВО Новосибирского национального исследовательского государственного университета.

НЕНАШЕВ Глеб Вячеславович,

доцент ФГБОУ ВО Санкт-Петербургского государственного университета, ученая степень PhD - Filosofie doktor получена в Стокгольмском университете (Stockholms universitet), в соответствии с Распоряжение Правительства РФ от 30.01.2023 N 186-Р признается в РФ и соответствует ученой степени кандидата наук.

Ведущая организация — ФГАОУ ВО “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)” (МФТИ).

Защита состоится 17 февраля 2025 г. в 15:00 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН на заседании диссертационного совета 24.1.207.01, расположенного по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, <https://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-24.1.207.01/>

Автореферат разослан “ ” 2024 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук

Проскурин Н. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы исследования. Теория графов – обширный и активно развивающийся раздел дискретной математики. Вершинная связность графов – один из подразделов теории графов. Основоположителем исследований по вершинной связности является Менгер. В дальнейшем исследования продолжили Уитни, Татт, Форд и Фалкерсон, Дирак, Халин, Мадер и другие. Особенно много работ по этому разделу появилось в 60-80 годы XX века.

Диссертация посвящена исследованию 5-вершинных стягиваемых множеств в трехсвязных графах. *Стягиваемое множество* R в n -связном графе G – это такое подмножество вершин G , что индуцированный подграф на множестве вершин R связан, а $\kappa(G - R) \geq n - 1$, где $\kappa(H)$ – вершинная связность графа H .

Вопросом удаления множеств вершин с сохранением высокой связности активно интересовался В. Мадер. В [5] он доказал следующую теорему про удаление множеств вершин (удаляется произвольное множество вершин, необязательно такое, что индуцированный подграф на нём связан).

Теорема 1 (W.Mader). *Для всех $n, k \in \mathbb{N}$ существует натуральное число $h_n(k)$ такое, что каждый n -связный конечный граф G с $v(G) \geq h_n(k)$ содержит множество $W \subset V(G)$ такое, что $|W| = k + 1$ и $\kappa(G - W) \geq n - 2$.*

В [5] В. Мадер также доказал, что при $n \geq 4$ существуют n -связные графы сколь угодно больших размеров, в которых $\kappa(G - W) \leq n - 2$ для всех множеств $W \subset V(G)$ с $|W| \geq 2$. Из чего очевидно следует, что при $n \geq 4$ существует бесконечно много графов, в которых нет стягиваемых множеств.

Касаемо удаления связных подграфов, В. Мадер доказал в [5], что для каждого $n \geq 18$ существуют n -связные конечные графы G сколь угодно большого размера, которые не содержат связного подграфа H , удовлетворяющего условиям $v(H) = 3$ и $\kappa(G - V(H)) \geq n - 2$. А также в [5] В. Мадер доказал, что в каждом n -связном графе достаточно большого размера существует связный подграф H на 4 вершинах такой, что $\kappa(G - V(H)) \geq n - 3$.

В статье [4] В. Мадер делает обзор результатов, относящихся к вопросу удаления множеств вершин с сохранением высокой связности. И упоминает в этом обзоре в том числе и задачу о поиске стягиваемых множеств. Как уже было сказано выше, при $n \geq 4$ существует бесконечно много n -связных графов, в которых нет стягиваемых множеств. А исследование стягиваемых множеств в трёхсвязных графах берёт своё начало из следующей гипотезы, сформулированной в 1994 г.

Гипотеза (W. McCuaig, K. Ota). *Пусть $t \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое n , что любой трёхсвязный граф G с не менее чем n вершинами имеет стягиваемое множество из t вершин.*

Для $m = 1$ утверждение гипотезы очевидно, для $m = 2$ также достаточно несложно и широко известно. Случай $m = 3$ доказан авторами гипотезы [3], случай $m = 4$ доказал в 2000 году М. Криселл [1] (и это доказательство является весьма технически сложным). Ни для какого $m > 5$ на настоящий момент гипотеза не доказана и не опровергнута.

В работе Д.В.Карпова [14] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $m \geq 5$ — натуральное число, а G — трёхсвязный граф с $v(G) \geq 2m + 1$. Тогда G имеет стягиваемое множество W с $m \leq |W| \leq 2m - 4$.

Тем самым, доказано, что любой трёхсвязный граф на хотя бы 11 вершинах содержит стягиваемое подмножество на 5 или 6 вершинах.

В дальнейшем стягиваемое множество на 4, 5 и т.д. вершинах будем называть стягиваемой четверкой, пятеркой и т.д.

В работе М.Криселла [2] исследуются стягиваемые пятерки в графах с маленькой средней степенью. В этой работе доказана следующая теорема.

Теорема 3. [2, Следствие 2] Любой трёхсвязный граф на хотя бы 13 вершинах и средней степени меньше, чем $3 + 1/132$, содержит стягиваемую пятерку.

Только в 2022 году диссертантом была завершена работа по доказательству существования стягиваемой пятерки в трёхсвязном графе с не менее чем 13 вершинами. Это доказательство намного сложнее и разнообразнее, чем нахождение стягиваемого множества с меньшим числом вершин.

Таким образом, тема диссертации является актуальной.

Цели работы. Основные цели диссертации:

- изучить структуру нерасширяемых стягиваемых множеств в трёхсвязных графах;
- доказать, что всякий трёхсвязный граф на достаточно большом количестве вершин имеет стягиваемое множество на 5 вершинах;
- найти точную нижнюю оценку на количество вершин в трёхсвязном графе, необходимое для существования стягиваемой пятерки.

Методы исследований. В работе использовались как классические методы работы с k -связными графами, так и довольно новые. Одной из наиболее существенных методик изучения структуры трёхсвязного графа с нерасширяемым стягиваемым множеством на 4 вершинах в работе является понятие *дерева разбиения* двусвязного графа набором разделяющих множеств, разработанное Д.В. Карповым в работе [12].

Ключевым инструментом в поиске стягиваемого множества в графе в работах М. Криселла и Д.В. Карпова являются крайние части разбиения, соответствующие

листьям дерева разбиения. Новые стягиваемые множества строятся из вершин стягиваемого множества меньшего размера и вершин одной из крайних частей графа, получаемого удалением из исходного графа вершин этого стягиваемого множества. В диссертации доказательство, в целом, проходит по тому же плану, что и поиск стягиваемой четверки у М. Криселла, но увеличение размера стягиваемого множества многократно увеличивает сложность этого пути. Диссертантом были разработаны новые методы, позволяющие строить стягиваемые множества, задействующие одновременно вершины нескольких крайних частей графа, а также вершины границ этих крайних частей. Кроме того, в отличие от работы М. Криселла, диссертант использует не только свойства крайних частей двусвязного графа, но и всю структуру дерева разбиения двусвязного графа независимыми разделяющими двувершинными множествами.

Ещё одним новым методом диссертации является выделение *подозрительных четверок*. Для этих четверок не удается сразу найти стягиваемое множество большего размера, используя только вершины крайних частей. После изучения остальных случаев, в главе 5 изучаются графы, содержащие стягиваемые множества на 4 вершинах только определенного вида (подозрительные четверки), и в каждом случае находится 5-вершинное стягиваемое множество.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Методы, разработанные в диссертации, могут быть использованы для поиска стягиваемых множеств больших размеров. Доказанные в диссертации новые утверждения о крайних частях двусвязного графа могут быть полезны и в других разделах теории связности, а так же других областях теории графов. Новый метод выделения подозрительных четверок может помочь найти в достаточно больших трехсвязных графах стягиваемые m -вершинные множества при $m > 5$.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Доказано, что в любом трехсвязном графе с не менее чем 13 вершинами найдется стягиваемое множество на 5 вершинах.
2. Построен пример трехсвязного графа на 12 вершинах, в котором нет стягиваемого множества на 5 вершинах.

Степень достоверности, апробация результатов и публикации. Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми, достоверными, математически строго доказанными фактами.

Результаты диссертации докладывались на семинарах по дискретной математике в ПОМИ РАН, а также на международной конференции “Conference on Graphs, Networks and their Applications” (Москва, МФТИ, май 2019).

Результаты и материалы диссертации опубликованы в работах [NV1] и [NV2],

опубликованных в рецензируемых журналах.

Личный вклад. Все результаты доказаны автором самостоятельно. В том числе, диссертанту принадлежит разработка новых методов, примененных в диссертации. Научный руководитель поставил задачу и проверял доказательства.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Нумерация разделов, формул, определений, замечаний, лемм, теорем, следствий и рисунков — сквозная для всей работы. Текст диссертации изложен на 122 страницах (исключая список литературы). Список литературы содержит 16 наименований, в число которых включены 2 работы автора по теме диссертации.

Благодарности. Автор выражает огромную благодарность своему научному руководителю, Карпову Дмитрию Валерьевичу, за постановку задач и неоценимую помощь в написании диссертации. Также автор благодарен своему преподавателю математики Дольникову Владимиру Леонидовичу.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обсуждается актуальность темы, формулируются цель и задачи диссертации, а также основные положения, выносимые на защиту.

Далее следуют основные обозначения и более подробный рассказ о результатах диссертации и используемых в диссертации методах.

В диссертации рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество — через $v(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а минимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $N_G(x)$.

Для множества вершин $U \subset V(G)$ будем обозначать через $G(U)$ *индуцированный подграф* графа G на множестве U . Назовем множество U *связным*, если граф $G(U)$ связан.

Определение 1. 1) Пусть $R \subset V(G)$. За $G - R$ мы обозначим граф, получаемый из G удалением всех вершин R и всех рёбер, инцидентных вершинам R . Множество R называется *разделяющим*, если $G - R$ несвязен.

2) Граф G называется *k -связным*, если $|V(G)| > k$ и G не содержит вершинного разделяющего множества размера меньше, чем k .

3) Пусть G — трехсвязный граф. Множество $R \subset V(G)$ назовем *стягиваемым*, если $G(R)$ связан и $G - R$ двусвязен.

4) Стягиваемое множество R назовем *нерасширяемым*, если оно не содержится ни в каком стягиваемом множестве размера $|R| + 1$.

5) Мы будем говорить, что вершина $u \in V(G)$ *смежна* с множеством $W \subset V(G)$, если $u \notin W$ и множество W содержит вершину, смежную с u . Про два непересекающихся множества $U, W \subset V(G)$ будем говорить, что они *смежны*, если существуют смежные вершины $u \in U$ и $w \in W$.

6) Пусть $X \not\subset R, Y \not\subset R$. Будем говорить, что R разделяет множества X и Y (или, что то же самое, отделяет множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не окажутся в одной компоненте связности графа $G - R$.

7) Пусть $X \not\subset R$. Будем говорить, что R разделяет X , если R разделяет какие-то две вершины X .

Разбиение графа набором разделяющих множеств

Перед описанием результатов диссертации определим необходимые нам понятия. В диссертации для работы с нерасширяемыми стягиваемыми множествами использует-

ся структура разбиения двусвязного графа разделяющими множествами из 2 вершин. Для наших целей удобнее будет определить не структуру из книги Татта [7], а в целом аналогичную структуру — *дерево блоков* из работы [12]. Начнём с понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств*, определенного в [10].

Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* — для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geq 2$, а G — k -связный граф. Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество из всех k -вершинных разделяющих множеств G .

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью разбиения* графа G набором \mathfrak{S} , если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из \mathfrak{S} , но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора \mathfrak{S} .

Множество всех частей разбиения графа G набором \mathfrak{S} мы будем обозначать через $\text{Part}(G; \mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \text{Part}(G; \mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора \mathfrak{S} . Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\text{Int}(A)$.

Вершины части A , входящие в какие-либо множества набора \mathfrak{S} , мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $\text{Bound}(A)$.

Нетрудно понять, что если две части $\text{Part}(G; \mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то их пересечение — подмножество одного из множеств набора \mathfrak{S} .

Замечание 1. Нетрудно доказать (см., например, [11]), что для $A \in \text{Part}(G; \mathfrak{S})$ граница $\text{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A , имеющих смежные вне A . Если $\text{Int}(A) \neq \emptyset$, то $\text{Bound}(A)$ отделяет $\text{Int}(A)$ от остальных вершин графа.

Рассмотрим простейший и самый нужный нам пример — разбиение двусвязного графа G одним множеством $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Пусть $\text{Part}(G; S) = \{A_1, \dots, A_k\}$. Тогда $\text{Int}(A_1), \dots, \text{Int}(A_k)$ — все компоненты связности графа $G - S$, а каждая вершина $x \in S$ смежна со всеми этими компонентами (если x не смежна с $\text{Int}(A_i)$, то эта компонента выделяется и одновершинным множеством $S \setminus \{x\}$, что противоречит двусвязности графа G).

Определение 3. Два множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S . В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

В работе [9] доказано, что для k -связного графа G и множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта — очень простое.

Разбиение двусвязного графа и его свойства

В этом разделе граф G — двусвязный.

Определение 4. 1) Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ называется *одиночным*, если S независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{D}(G)$ набор из всех одиночных множеств графа G .

2) Вместо $\text{Part}(G; \mathfrak{D}(G))$ мы будем писать просто $\text{Part}(G)$, а части этого разбиения будем называть *частями* графа G .

Определение 5. *Дерево разбиения* двусвязного графа G — это двудольный граф $\text{BT}(G)$, вершины которого соответствуют одиночным множествам и частям графа G . Вершины $S \in \mathfrak{D}(G)$ и $A \in \text{Part}(G)$ смежны в $\text{BT}(G)$, если и только если $S \subset A$. Других рёбер в $\text{BT}(G)$ нет.

Следующая лемма — это частный случай теоремы 1 из статьи [12].

Лемма 1. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\text{BT}(G)$ — это дерево, все висячие вершины дерева $\text{BT}(G)$ соответствуют частям $\text{Part}(G)$.

2) Для каждого множества $S \in \mathfrak{D}(G)$ выполняется равенство $d_{\text{BT}(G)}(S) = |\text{Part}(G; S)|$. Более того, для каждой части $A \in \text{Part}(G; S)$ существует ровно одна такая часть $B \in \text{Part}(G)$, что $B \subset A$ и B смежна с S в $\text{BT}(G)$.

3) Множество $S \in \mathfrak{D}(G)$ отделяет друг от друга в графе G части $B, B' \in \text{Part}(G)$, если и только если S отделяет B от B' в $\text{BT}(G)$.

Определение 6. Часть $A \in \text{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\text{BT}(G)$.

Замечание 2. 1) Если $A \in \text{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\text{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G .

2) Внутренности двух различных частей $\text{Part}(G)$ не пересекаются.

Определение 7. 1) Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x, y\} \in \mathfrak{D}(G)\}$.

2) Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и *3-блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A .

Лемма 2. [13, Лемма 2] *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

- 1) *Каждая часть из $\text{Part}(G)$ — либо цикл, либо 3-блок.*
- 2) *Если часть $A \in \text{Part}(G)$ — цикл, то все вершины из $\text{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G . При $\delta(G) \geq 3$ все крайние части $\text{Part}(G)$ — 3-блоки.*
- 3) *Пусть $A \in \text{Part}(G)$ — цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неединичное разделяющее множество графа G и других неединичных разделяющих множеств в графе G нет.*

Стягиваемые множества в трехсвязном графе

В этом разделе граф G — трехсвязный. Очевидно, можно считать, что G — минимальный трехсвязный граф, то есть, что G перестает быть трехсвязным при удалении любого его ребра. А тогда выполнена следующая теорема.

Теорема 4. (R. Halin, 1969.) [8] *Пусть G — минимальный k -связный граф, где $k \in \{2, 3\}$. Тогда любой цикл в графе G содержит хотя бы две вершины степени k .*

Лемма 4. [14, Лемма 4] *Пусть G — трехсвязный граф, $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество, такое что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда выполнены следующие утверждения.*

- 1) *Множество H смежно со всеми внутренними вершинами частей-циклов $G - H$.*
- 2) *Есть хотя бы две крайние части $\text{Part}(G - H)$, все эти крайние части — циклы длины хотя бы 4. Граница каждой крайней части — одиночное разделяющее множество $G - H$.*
- 3) *Пусть $A \in \text{Part}(G - H)$ — крайняя часть. Тогда граф $G - H - \text{Int}(A)$ — двусвязный.*

На самом деле в пункте 3 леммы 4 не требуется условие, что множество H — нерасширяемое, это доказано в диссертации.

Замечание 3. Из замечания 1 следует, что если A_1 и A_2 — две части $\text{Part}(G - H)$, то их внутренности несмежны друг с другом.

Очевидным следствием из предыдущих лемм является следующая лемма. В других обозначениях её утверждения содержатся в леммах 3 и 4 из [1].

Лемма 6. *Пусть G — трехсвязный граф, $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Пусть $A_1, A_2 \in \text{Part}(G - H)$ — две крайние части $G - H$, $W_i = \text{Int}(A_i)$. Тогда $G(W_1)$ и $G(W_2)$ — простые пути, удовлетворяющие следующим условиям.*

- 1) $|W_1| \geq 2, |W_2| \geq 2$.
- 2) Все вершины $W_1 \cup W_2$ имеют степень 2 в $G - H$.
- 3) $N_G(W_1) \cap V(W_2) = \emptyset, N_G(W_2) \cap V(W_1) = \emptyset$.
- 4) Графы $G - H - W_1$ и $G - H - W_2$ двусвязны.

Определение 8. Если F — двусвязный подграф G , то через $h_G(F)$ мы будем обозначать максимальный по включению двусвязный подграф G , содержащий F .

Определение 9. В обозначениях леммы 6 пусть

$$H_1 = V(h_{G-W_2}(G - H - W_2)) \cap H, \quad H_2 = V(h_{G-W_1}(G - H - W_1)) \cap H,$$

$$H_1^* = H_1 \setminus H_2, \quad H_2^* = H_2 \setminus H_1.$$

Лемма 7. [1, Лемма 5] Пусть G — трехсвязный граф, $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда для множеств W_1 и W_2 из леммы 6 выполнены следующие утверждения:

- 1) $N_G(G - H - W_2) \cap H \subset H_1$ и $N_G(G - H - W_1) \cap H \subset H_2$.
- 2) $H = H_1 \cup H_2$. Каждая компонента связности $G(H_1^*)$ и $G(H_2^*)$ имеет ровно одного соседа в H_2 и H_1 , соответственно.

3) Предположим, что W — подпути $G(W_1)$ такой, что $N_G(H_1^*) \cap W_1 \subset V(W)$. Тогда множество $H_1^* \cup V(W)$ стягиваемо.

4) Если $H_1^* = \emptyset$, то множество вершин любого подпути $G(W_1)$ стягиваемо.

5) Предположим, что G не содержит стягиваемого подграфа на $|H|+1$ вершине.

Если $|H_1^*| = 1$, то выполнено одно из двух условий:

(1) $|W_1| \leq |H| - 1$.

(2) $|W_1| = |H| + 1$, обе конечные вершины $G(W_1)$ смежны с H_1^* и множество вершин любого подпути $G(W_1)$ стягиваемо.

В **первой** главе диссертации мы докажем две вспомогательные леммы, усиливающие утверждения лемм 6 и 7. Эти леммы позволяют искать стягиваемую пятерку не только на множестве вершин нерасширяемой четверки H и одной крайней части $G - H$, но и использовать одновременно вершины нескольких крайних частей $G - H$, и даже вершины границ этих крайних частей.

Лемма 8. В обозначениях леммы 6 пусть $S_i = \text{Bound}(A_i)$. Тогда

1) граф $G - H - W_1 - W_2$ связан;

2) если вершины S_i смежны хотя бы для одного $i \in \{1, 2\}$, то граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит ровно две вершины.

Лемма 9. В обозначениях леммы 6 пусть $\{p, q\} = \text{Bound}(A_i)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Пусть $|H| \leq 4$.

Предположим, что в множестве $W_i \cup H$ нашлась стягиваемая четверка H' , и граф $G - H'$ не является циклом. Для графа $G - H'$ также выполнены все утверждения леммы 4. Пусть A — крайняя часть графа $G - H'$, $W = \text{Int}(A)$. Тогда

1) вершина из H не может соседствовать в $G(W)$ с вершиной из $V(G - H - W_i)$.

2) Если $N_G(H') \subset \{p, q\} \cup H$, то $\{p, q\}$ — внутренность одной из крайних частей графа $G - H'$. В частности, $pq \in E(G)$.

Во **второй** главе диссертации мы докажем, что если для какой-то стягиваемой четверки H граф $G - H$ оказался простым циклом, то в графе G есть стягиваемая пятерка. Простой цикл отличается от остальных двусвязных графов тем, что не содержит одиночных разделяющих множеств, и следовательно его дерево разбиения состоит всего лишь из одной части. Поэтому случай с циклом приходится разбирать отдельно. Во второй главе доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть в трехсвязном графе G хотя бы 13 вершин, и $H \subset V(G)$ — стягиваемое множество из четырех вершин, такое что граф $G - H$ является простым циклом. Тогда в G есть стягиваемая пятерка.*

В **третьей** главе диссертации мы разберем стягиваемые четверки, для которых H_i^* непустое при $i = 1$ или 2 . Используя леммы 6, 7, 8 мы изучаем, каким может быть граф $G(H)$, с какими вершинами $G - H$ могут быть смежны вершины H , и какого размера могут быть крайние части графа $G - H$. Почти всегда получается доказать, что в графе G есть стягиваемая пятерка, за исключением одного случая — первой подозрительной четверки. Разбор этой четверки завершится только в четвертой главе.

В **четвертой** главе разбираются стягиваемые четверки, для которых $H_1^* = H_2^* = \emptyset$. В этом случае любые подпути в W_1 и W_2 стягиваемы по пункту 4 леммы 7 и $|W_1|, |W_2| \in \{2, 3, 4\}$. Сначала разбирается случай, когда размер одной из этих крайних частей равен 4. И в этом случае строится пример трехсвязного графа на 12 вершинах, в котором нет стягиваемой пятерки. Далее мы завершаем разбор первой подозрительной четверки и доказываем, что в графе с первой подозрительной четверкой есть стягиваемая пятерка. Основные этапы нахождения этой пятерки можно увидеть в формулировке доказываемой в работе леммы.

Лемма 11. В обозначениях леммы 6 пусть $\{p, q\} = \text{Bound}(A_i)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$ и $\text{Int}(A_i) = \{u_1, u_2, u_3\}$, где u_1 смежна с p , а u_3 — с q . Предположим, что ровно одна вершина $x \in H$ смежна с $\text{Int}(A_i)$. Тогда

1) множество $H' = \{p, u_1, u_2\}$ стягиваемо;

2) если x смежна хотя бы с двумя вершинами H , то множество H' расширяемо некоторой вершиной v , причем $v \neq x$, $v \neq q$.

3) если в дополнение к пункту 2 выполнено, что $d_{G-H'}(x) \geq 4$ или оба соседа x в графе $G(H)$ несмежны с p , то в G есть стягиваемая пятерка.

Далее мы продолжаем разбирать четверки, для которых $H_1^* = H_2^* = \emptyset$. В ходе исследования четверок, для которых размеры крайних частей равны 2 или 3, выделяются ещё четыре типа подозрительных четверок 2, 3, 4, 5, и доказывается, что если в графе G есть стягиваемая четверка H , не являющаяся подозрительной четверкой типа 2, 3, 4, 5, то в графе G есть также стягиваемая пятерка.

При доказательстве последнего утверждения, исследуются не только две крайние части графа $G - H$, но и вся структура дерева разбиения $\text{BT}(G - H)$. Доказываются следующие леммы.

Лемма 12. Если стягиваемая четверка H не является подозрительной четверкой типа 2-5, то в графе $G - H$ ровно две крайние части. Границы $\{p, q\}$ и $\{r, s\}$ этих крайних частей не совпадают.

Из леммы 12 следует, что граф $\text{BT}(G - H)$ является простым путем.

Лемма 13. Пусть стягиваемая четверка H не является подозрительной четверкой типа 2-5. Предположим, что границы $\{p, q\}$ и $\{r, s\}$ крайних частей графа $G - H$ пересекаются. Тогда выполнено одно из двух утверждений:

(1) вершина, лежащая в пересечении этих границ, имеет степень больше 3 в $G - H$.

(2) $pq, rs \notin E(G)$, в графе $G - H$ ровно три части, причем та часть, которая не является крайней, — 3-блок.

Лемма 14. Пусть стягиваемая четверка H не является подозрительной четверкой типа 2-5. Пусть $\{p, q\}$ — граница крайней части A_1 . Тогда если $pq \notin E(G)$, то хотя бы один из графов $G - H - W_1 - p$ или $G - H - W_1 - q$ двусвязен.

Наконец, в **пятой** главе доказывается, что если в графе есть только стягиваемые подозрительные четверки типов 2-5, то есть и стягиваемая пятерка. Рассуждения в этой главе строятся на исследовании структуры всего двусвязного графа, получаемого при удалении стягиваемых множеств. Доказывается новая лемма об этой структуре, которая затем применяется для стягиваемых множеств размера не только четыре, но и три.

Лемма 15. Пусть G — трехсвязный граф и H — стягиваемое множество в G такое, что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда для любой вершины $x \in N_G(H)$ существует множество $U \subset N_G(H) \setminus \{x\}$ такое, что множество $H \cup U$ стягиваемо. Причем, если $|U| > 1$, то $(G - H)(U)$ будет являться простым путем.

При помощи этой леммы в графе с подозрительными четверками находятся новые стягиваемые четверки, которые уже не являются подозрительными, а этот случай уже разобран в главе 4.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [NV1] Н. Ю. ВЛАСОВА. *О стягиваемых 5-вершинных подграфах трехсвязного графа*. Записки научных семинаров ПОМИ, **475**, 2018, стр. 22-40.
- [NV2] Н. Ю. ВЛАСОВА. *Каждый 3-связный граф на не менее чем 13 вершинах имеет стягиваемый 5-вершинный подграф*. Записки научных семинаров ПОМИ, **518**, 2022, стр. 5-93.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] MATTHIAS KRIESELL. *Contractible Subgraphs in 3-Connected Graphs* J.Comb.Theory Ser.B, Vol.80, 2000, p.32-48.
- [2] MATTHIAS KRIESELL. *On Small Contractible Subgraphs in 3-connected Graphs of Small Average Degree* Mathematisches Seminar der Universitat Hamburg, Bundesstrabe 55, D-20146 Hamburg.
- [3] W. MCCUAIG, K. ОТА. *Contractible triples in 3-connected graphs*. J.Comb.Theory Ser.B, Vol.60, 1994, p.308-314.
- [4] W. MADER *High connectivity keeping sets in graphs and digraphs*. Discrete Mathematics 302, 2005, p. 173 – 187.
- [5] W. MADER *High connectivity keeping sets in n-connected graphs*. Combinatorica 24 (3), 2004, p. 441–458.
- [6] W. MADER *On k-con-critically n-connected graphs* J. Combinatorial Theory B 86, 2002, p. 296–314.
- [7] W. T. TUTTE. *Connectivity in graphs*. Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.
- [8] R. HALIN *A Theorem on n-Connected Graphs* Journal of Combinatorial Theory 7(2), 1969, p.150-154.
- [9] Д. В. КАРПОВ, А. В. ПАСТОР. *О структуре k-связного графа*. Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.
- [10] Д. В. КАРПОВ. *Блоки в k-связных графах*. Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.
- [11] Д. В. КАРПОВ. *Разделяющие множества в k-связном графе*. Записки научных семинаров ПОМИ, **340**, 2006, стр. 33-60.
- [12] Д. В. КАРПОВ. *Дерево разбиения двусвязного графа*. Записки научных семинаров ПОМИ, **417**, 2013, р. 86-105.

- [13] Д. В. КАРПОВ. *Минимальные двусвязные графы*. Записки научных семинаров ПОМИ, **417**, 2013, р. 106-127.
- [14] D. V. KARPOV. *Large contractible subgraphs of a 3-connected graph*. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, to appear, doi:10.7151/dmgt.2172.