На правах рукописи

Романов Роман Владимирович

Вопросы спектральной теории абстрактных и дифференциальных операторов для неядерных возмущений и проблема порядка

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2020

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математической физики физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Официальные оппоненты: АПТЕКАРЕВ Александр Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАН, ФГБУН
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук, директор

АВДОНИН Сергей Анатольевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Отделение математики и статистики,
Университет Аляски в Фербенксе, профессор

КАПУСТИН Владимир Владимирович,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук, ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)

Защита диссертации состоится “19” октября 2020 года в __ часов на заседании совета Д 002.202.01 по защите докторских и кандидатских диссертаций в ФГБУН “Санкт-Петербургское отделение Математического института им.В. А. Стеклова Российской академии наук” по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН “Санкт-Петербургское отделение Математического института им.В. А. Стеклова Российской академии наук”, http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан “___”__________ 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В классических работах середины XX-ого века была построена теория возмущений спектра для самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах (Фридрихс, фон Нейман, Като, Бирман, Л. Фаддеев) и даны ее приложения к спектральному анализу операторов математической физики (помимо перечисленных, упомянем М. Крейна, Марченко, Левитана). В этих работах была обнаружена исключительная роль класса $\mathfrak{S}^1$ ядерных операторов. Оказалось, что абсолютно непрерывный спектр операторов сохраняется при ядерных возмущениях, и этот результат неулучшаем в естественной шкале компактных операторов $\mathfrak{S}^p$, $p \geq 1$. Результаты ядерной теории были позднее перенесены на случай, когда возмущенный оператор несамосопряжен (Сахнович, Павлов, Набоко) с использованием методов функциональной модели Секефальви-Надя–Фояша.

Параллельно с исследованием вопроса об устойчивости спектра в рамках абстрактной теории, в задачах математической физики изучалась абсолютная непрерывность и дискретность спектра самосопряженных операторов Шрёдингера и Дирака, а также матриц Якоби (Молчанов, Д. Пирсон, Килип, Денисов, А. Киселев, Ремлинг, Ласт, Саймон). В частности Килипом и Дайфтом в 1999 году было показано, что а. н. спектр самосопряженного оператора Шрёдингера на полуоси совпадает с полуосью, если потенциал квадратично суммируем. Этот результат неулучшаем в шкале L^p.

Наиболее общий вид обыкновенного дифференциального оператора второго порядка задается оператором канонической системы. В виде канонической системы могут быть представлены упомянутые операторы Шрёдингера и Дирака, а также матрицы Якоби и операторы нагруженной струны. Канонические системы естественно возникают в рамках теории де Бранжа пространств целых функций при решении обратных задач. Особый интерес представляют вопросы о дискретности спектра и его асимптотическом распределении. В частном случае нагруженной струны ответ на вопрос о дискретности спектра был получен Крейном. В регулярном случае известна также формула Крейна–де Бранжа для старшего члена асимптотики считающей функции. Старший член этой асимптотики исчезает, если гамильтониан вырожден почти всюду. В терминах шкалы $\mathfrak{S}^p$, $p > 0$, эта ситуация отвечает резольвенте в классах $\mathfrak{S}^p$, $0 < p < 1$. В сингулярном случае было дано описание канонических систем с резольвентой из класса Гильберта-Шмидта (Ворачек, Кальтенбок).

Перечисленные результаты показывают насущность исследования существенного спектра в ситуациях, находящихся за пределами ядерной теории возмущений. Сюда относятся как вопросы устойчивости а. н. спектра при неядерных возмущениях, так и вопросы асимптотического поведения спектра при наличии единственной точки накопления. Им и посвящена диссертация.

Цель работы состоит в анализе существенного спектра абстрактных и дифференциальных операторов в случае, когда ядерная теория неприменима. Исследуемые задачи естественно можно классифицировать в зависимости от того, с какой стороны ядерного класса $\mathfrak{S}^p$ с $p = 1$ они находятся: $p < 1$ или $p > 1$. Поясним здесь, что утверждения, относящиеся к ядерному классу и его инфинитезмальной окрестности, разумеется, применимы к задачам, сводящимся к операторам из классов $\mathfrak{S}^p$ с $p < 1$, но приводят к тривиальным выводам (например, упомянутая выше формула Крейна–де Бранжа в случае чисто сингулярной нагрузки говорит лишь о том, что считающая функция спектра $N(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, что не дает никакого представления о реальном поведении собственных значений). В этом смысле мы говорим о задачах с $p < 1$ как находящихся за пределами ядерной теории. В ситуации $p > 1$ мы исследуем два вопроса – устойчивость абсолютно непрерывного спектра при несамосопряженных неядерных возмущениях самосопряженных операторов и характеризация наиболее общих одномерных дифференциальных операторов с единственной точкой накопления спектра в терминах идеалов компактных операторов. Первый из этих вопросов имеет абстрактную и прикладную стороны. Абстрактная сторона состоит в выяснении соотношения различных определений абсолютно непрерывного (а. н.) подпространства для неядерных возмущений, а прикладная – в исследовании устойчивости а. н. спектра при неядерных возмущениях дифференциальных операторов и анализе структуры множества спектральных особенностей в ситуациях, когда а. н. спектр сохраняется. Что касается второго вопроса, то он изучается для самосопряженных сингулярных канонических систем на полуоси. В задачах с $p < 1$ мы исследуем вопрос о спектральной асимптотике для регулярных канонических систем с вырожденным гамильтонианом, уделяя особое внимание важнейшему подклассу таких систем – матрицам Якоби в случае предельного круга.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, новы. Перечислим наиболее важные из них:

- Доказано, что диссипативные операторы Шрёдингера и Дирака на полуоси, а также матрицы Якоби, с несуммируемой мнимой частью потенциала имеют чисто сингулярный спектр.

- Построен оптимальный пример, показывающий, что в недиссипативном случае сильное и слабое определения а. н. подпространства неэквивалентны для неядерных возмущений.

- Решена проблема двойственности спектральных компонент недиссипативного оператора: построен пример, показывающий, что при неядерном возмущении двойственность, вообще говоря, не имеет места.

- Установлена конечность множеств спектральных особенностей и собственных значений линейного оператора переноса (Больцмана) в геометрии пластины для случая полиномиального ядра оператора столкновений; в частном случае изотропного оператора показано, что спектральная особенность единственна и имеет первый порядок. Получена детальная асимптотика эволюции при больших временах.

- Дана точная в степенной шкале оценка сверху порядка регулярных канонических систем; в частном случае диагональных систем для порядка получена явная формула.

- Дан первый пример неопределенной проблемы моментов, для которой порядок отличается от величины, даваемой нижней оценкой Лившица 1939 года. Показано, что порядок может сколь угодно сильно отличаться от оценки Лившица.

- Доказана гипотеза Валента 1998 года о порядке матриц Якоби, отвечающих полиномиальным процессам рождения-уничтожения.

- Дан ответ на вопрос де Бранжа 1968 года о характеризации гамильтонианов канонических систем, отвечающих произвольным функциям Эрмита–Билера; вместе с этим, дана характеризация канонических систем с дискретным спектром.

- Дана характеризация гамильтонианов сингулярных канонических систем с резольвентами из симметрично нормированных идеалов, обладающих свойством Мацаева. В частности, описаны гамильтонианы систем с резольвентами из классов $\mathfrak{S}^p$, $1 < p < \infty$.

Методы исследования. В работе применяются методы теории операторов в шкалах компактных операторов, особенно теории вольтерровых операторов, методы теории дифференциальных уравнений (теория подчинённости Пирсона-Гильберт, усреднение), теории граничных значений аналитических функций (скалярное кратное), методы спектральной теории возмущений и методы функциональной модели Секефальви-Надя–Фояша. Помимо этого, в работе использованы оригинальные методы доказательства отсутствия внешнего фактора характеристической функции и предложен новый вариационный принцип для оценки порядка канонической системы.

Апробация. Результаты работы много раз докладывались на международных конференциях. Упомянем некоторые из них: “13-th Summer St. Petersburg Meeting in Mathematical Analysis”, (EIMI, Санкт-Петербург, Россия, 2004, 2008, 2010); “Operator Theory, Analysis and Mathematical Physics (OTAMP)” (Бендлёво, Польша 2004, 2008; Санкт-Петербург, Россия, 2016); “LMS Durham Symposium: Operator Theory and Spectral Analysis” (Университет Дарэма, Великобритания, 2005); "Spectral Problems and Related Topics"(МГУ, Москва, Россия, 2009); "Differential Equations and Related Topics (памяти И. Г. Петровского)” (МГУ, Москва, Россия, 2011); ”Kent Spectral Theory Meeting” (Университет Кента, Кентербери, Великобритания, 2014); ”Komplexe Analysis und/et Théorie Spectrale (KATS2014)” (Университет Иоганна Кеплера, Линц, Австрия, 2014); “Hilbert spaces of entire functions and their applications” (Бендлёво, Польша, 2017); ”Random Matrices and Determinantal Process” (CIRM, Люмини, Франция, 2017); "One-Dimensional Complex Analysis and Operator Theory"(Санкт-Петербург, Россия, 2019); "Spaces of analytic functions: Approximation, Interpolation, Sampling(SAFAIS2019)"(Барселона, Испания, 2019); "Operator Theory and Krein Spaces"(Технический Университет Вены, Австрия, 2019).

Помимо этого, результаты работы докладывались на семинарах по анализу и теории операторов. Перечислим их: семинар по комплексному анализу Математического института РАН под руководством член-корр. РАН Е. М. Чирки и А. И. Аптекарева (семинар Гончара) (2014, 2016, 2019); семинар по теории функций и теории операторов в С.-Петербургском отделении Математического института РАН (2015, 2018, 2019), семинар по функциональному анализу Математического института НАН Украины (2011); семинары по анализу и теории операторов университета Бордо I (2012), университета A&M Техаса (2016), Львовского университета (2011), Автономного университета Мехико (2011).

Теоретическая ценность и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут использоваться при анализе асимптотического поведения эволюции систем, описываемых уравнениями Шрёдингера, Дирака и Больцмана, при больших временах. Выводы работы могут применяться при исследовании асимптотического поведения спектра операторов с нерегулярным поведением коэффициентов, а также при анализе процессов рождения–уничтожения. Полученные в работе оценки порядка канонических систем уже используются в задачах классического анализа, связанных с проблемой моментов, таких как асимптотики спектра матриц Якоби в неопределенном случае.

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 статьях, список которых приведён в конце автореферата. Все эти статьи опубликованы в журналах, входящих в список ВАК (2 статьи в российских журналах и 8 статей в ведущих зарубежных журналах). Из совместных работ [4] и [7–10] в диссертацию включены только результаты автора.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из обзора основных результатов, списка обозначений, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 185 страниц машинописного текста. Библиография содержит 87 наименований.

Содержание работы

Исследования, изложенные в диссертации, в основном касаются вопросов структуры существенного спектра оператора при неядерном возмущении и характера асимптотического поведения дискретного спектра. Эти два круга вопросов смыкаются при анализе задачи о характеризации канонических систем с дискретным спектром, которую можно рассматривать как вопрос теории возмущений существенного спектра, состоящего из одной точки.

В **обзоре основных результатов** содержатся формулировки главных утверждений диссертации и изложены мотивации постановок задач. Центральный объект исследования первой части диссертации – а. н. подпространство несамосопряженного оператора. Основная трудность, связанная с определением такого подпространства в несамосопряженном случае состоит в отсутствии спектральной теоремы и, соответственно, спектральной меры для таких операторов. Ещё в 50-х годах Марченко было показано, что даже в весьма специальном случае одномерных операторов Шрёдингера на полуоси с комплексным потенциалом спектральную меру можно определить лишь в очень слабом смысле теории распределений как функционал над некоторым пространством целых функций.

В рамках абстрактной теории к середине 80-х годов было известно два определения а. н. подпространства несамосопряженных операторов: сильное и слабое. Сильное определение было предложено Л. Сахновичем и мотивировано функциональной моделью Секефальви-Надя–Фояша для диссипативных операторов. В рамках этой модели выделяется естественное инвариантное подпространство оператора, такое что часть оператора в этом подпространстве квазиподобна остаточной части его минимальной самосопряженной дилатации. В случае, когда характеристическая функция оператора ограниченно обратима, это квазиподобие в действительности будет подобием. Согласно фундаментальной теореме Секефальви-Надя, минимальная дилатация вполне несамосопряженного оператора абсолютно непрерывна. Впоследствии Набоко удалось переформулировать определение в эквивалентных терминах, не использующих функциональную модель. Ключевое свойство сильного а. н. подпространства $H_{\mathrm{ac}}(L)$ несамосопряженного оператора L, действующего в гильбертовом пространстве H, состоит в том, что действие резольвенты на этом пространстве сплетается с резольвентой некоего а. н. самосопряженного оператора. Более точно, существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и самосопряженный а. н. оператор A в $\mathcal{H}$, такие что

$$(L-z)^{-1}P = P(A-z)^{-1},\ z \notin \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $P\colon \mathcal{H} \to H$ – ограниченный оператор, причем $\operatorname{Ran} P$ плотен в $H_{\mathrm{ac}}(L)$. В диссипативном случае можно показать, что, если оператор L вполне несамосопряжен, то подпространство $H_{\mathrm{ac}}(L)$ совпадает с минимальным инвариантным подпространством оператора, содержащим все инвариантные подпространства X, такие что сужение $L|_X$

подобно какому-либо а. н. самосопряженному оператору.

Слабое определение а. н. подпространства получается при попытке избавить определение в самосопряженном случае от использования спектральной теоремы. Поскольку преобразование Коши от спектральной меры совпадает с матричным элементом резольвенты оператора, естественно формулировать определение в терминах граничного поведения резольвенты. Один из способов сделать это состоит в использовании теоремы братьев Рисс, которая говорит, что мера, преобразование Коши которой принадлежит классу Харди, абсолютно непрерывна. Такое определение было предложено в первой половине 80-х годов А. Тихоновым. В соответствии с этим определением, а. н. подпространство $H^w_{\mathrm{ac}}(L)$ несамосопряженного оператора L – это замыкание множества векторов, на которых матричный элемент резольвенты с любым другим вектором из пространства попадает в класс Харди. Отметим, что слабое а. н. подпространство, очевидным образом, ковариантно относительно подобия. В частности, пространство $H^w_{\mathrm{ac}}(L)$ содержит все инвариантные подпространства X оператора L, такие что сужение $L|_X$ подобно какому-либо а. н. самосопряженному оператору (не только в диссипативном случае).

Наличие двух определений ставит вопрос об их соотношении. Из сплетающего свойства (1) немедленно вытекает, что $H_{\mathrm{ac}}(L) \subset H^w_{\mathrm{ac}}(L)$. "Положительная" сторона вопроса (достаточные условия совпадения пространств) изучалась в работах Тихонова и Рыжова. Наиболее общий результат, полученный ими, состоит в том, что $H_{\mathrm{ac}}(L) = H^w_{\mathrm{ac}}(L)$, если резольвента имеет слабые граничные значения почти всюду. В частности, пространства совпадают, если оператор представляет собой ядерное возмущение самосопряженного.

Вопрос о том, могут ли различаться сильное и слабое а. н. подпространства, был открыт даже для компактных возмущений. Не было известно и сохраняется ли сильное а. н. подпространство при подобиях.

Наш первый основной результат – теорема 4 – состоит в том, что сильное и слабое определения перестают быть эквивалентны при сколь угодно малом выходе за пределы класса ядерных возмущений. Наиболее полный результат формулируется в терминах возмущений унитарного оператора и состоит в том, что для любой монотонной последовательности положительных чисел π_n, такой что $\pi_n \notin l^1$, найдется оператор T вида $T = U + S$, где U – абсолютно непрерывный, а сингулярные числа оператора S мажорируются последовательностью π_n, для которого сильное а. н. подпространство тривиально, а слабое совпадает со всем пространством. Более того, оператор T в построенном примере подобен оператору U, и таким образом показано, что сильное определение не инвариантно относительно подобия. Для возмущений самосопряженных операторов соответствующий результат (теорема 5) наиболее прозрачно формулируется в терминах шкалы $\mathfrak{S}^p$ компактных операторов. В позитивном направлении нами установлено (теорема 7), что сильное и слабое а. н. подпространства совпадают в случае диссипативных (сжимающих) возмущений без всяких дополнительных предположений на возмущение.

Вторая изученная нами задача – проблема двойственности спектральных компонент. Исходя из аналогии с самосопряженной теорией, для абстрактного несамосопряженного оператора L в гильбертовом пространстве H со спектром, не имеющим точек накопления вне вещественной оси, естественно определить сингулярное подпространство $H_s(L)$ как подпространство, полученное замыканием линеала векторов u, для которых матричный элемент резольвенты в слабом смысле имеет нулевой скачок почти всюду по мере Лебега, т.е. ($\Re z = k$)

$$\lim_{\Im z \downarrow 0} [((L - z)^{-1} u, v) - ((L - \overline{z})^{-1} u, v)] = 0$$

при $v \in H$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$. Легко понять, что пространство $H_s(L)$ ортогонально слабому а. н. подпространству $H_{\mathrm{ac}}^w(L^*)$ оператора L^*. Такое определение немедленно ставит вопрос о двойственности спектральных компонент, т. е. о том, верно ли, что $H = H_{\mathrm{ac}}^w(L^*) \oplus H_s(L)$. В работе Тихонова было показано, что двойственность имеет место для ядерных возмущений. Примеров отсутствия двойственности ранее известно не было.

Наш второй основной результат – теорема 6 – пример оператора T, для которого $H_{\mathrm{ac}}^w(T) \neq H$, но $H_s(T^*)$ – тривиально. Таким образом, проблема двойственности имеет отрицательное решение, а ядерный класс представляет собой точную границу возмущений, для которых двойственность имеет место.

Дальнейшие результаты работы в области несамосопряженной теории относятся к анализу операторов математической физики с неядерными возмущениями. Начнём с изложения результатов по одномерным дифференциальным операторам. В работе исследуется вопрос об устойчивости а. н. спектра одномерных операторов Шрёдингера и Дирака и матриц Якоби на полуоси при медленно убывающем комплексном аддитивном возмущении.

В применении к операторам Шрёдингера и Дирака абстрактная самосопряженная ядерная теория рассеяния позволяет установить существование и полноту волновых операторов в ситуации, когда вещественный потенциал суммируем на полуоси. Непосредственное обобщение этого результата на случай комплексных потенциалов невозможно из-за спектральных особенностей, но локальный вариант теории рассеяния допускает обобщение. Приведем типичный результат.

Теорема. *Пусть q – комплексная функция на $\mathbb{R}_+$, такая что $\Im q \in L^1(\mathbb{R}_+)$, а $\Re q \in L^\infty$, и пусть l и l_0 – операторы в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, заданные дифференциальными выражениями*

$$l = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q, \ l_0 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \Re q$$

на области определения, выделенной произвольным самосопряженным граничным условием в нуле. Тогда существует возрастающая последовательность открытых множеств $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}$, такая что $|\mathbb{R} \setminus \cup_j \mathcal{M}_j| = 0$ и существуют ограниченные и ограниченно обратимые локальные волновые операторы

$$W^\pm(l, l_0; \mathcal{M}_n) := \text{s-lim}_{t \to \pm\infty} e^{itl} e^{-itl_0}\big|_{H_n},$$

где H_n – образ спектрального проектора а. н. части оператора l_0, отвечающего множеству $\mathcal{M}_n$. При этом $H_{\mathrm{ac}}^w(l) = \overline{\cup_n \operatorname{Ran} W^\pm(l, l_0; \mathcal{M}_n)}$.

Таким образом, качественная картина а. н. спектра в случае $\Im q \in L^1$ выглядит так: вне окрестности спектральных особенностей а. н. части операторов l и l_0 подобны, норма этого подобия растет при приближении к спектральным особенностям, но соответствующие спектральные пространства исчерпывают все H_{ac}^w.

В самосопряженной теории известны многочисленные обобщения теории рассеяния на несуммируемые потенциалы, поведение которых на бесконечности регулярно в том или ином смысле, в основном, связанные с использованием модифицированных волновых операторов типа Долларда. Отметим, что потребность в изучении несуммирумых потенциалов в теории оператора Шрёдингера существует с самого начала, поскольку таков потенциал кулоновского взаимодействия $q(x) = 1/x$. Метод Долларда позволяет доказать унитарную эквивалентность а. н. частей операторов для широких классов потенциалов, у которых решения обладают ВКБ-асимптотиками при большом x, и опирается на методы асимптотической теории дифференциальных уравнений. С другой стороны, с середины 80-х годов известен принадлежащий Набоко пример потенциала, сколь угодно близкого к суммируемому в шкале L^p, для которого положительный спектр оператора содержит плотное множество собственных значений. Для соответствующих решений ВКБ-асимптотика заведомо неверна.

Вопрос об а. н. непрерывном спектре самосопряженных дифференциальных операторов для убывающих взаимодействий был выведен за рамки теории рассеяния теорией подчиненности Гильберт–Пирсона. Ключевое понятие этой теории – подчиненное решение.

Определение 1. *Решение u_1 дифференциального уравнения второго порядка на полуоси $[0, \infty)$ называется подчиненным, если*

$$\frac{\int_0^N |u_1|^2}{\int_0^N |u_1|^2} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

при $N \to \infty$ для любого решения u_2, линейно-независимого от u_1.

Основной результат теории Гильберт–Пирсона состоит в том, что для оператора Шрёдингера с вещественным потенциалом на полуоси в случае предельной точки на бесконечности множество точек $k \in \mathbb{R}$, таких что уравнение $-y'' + qy = ky$ не имеет подчиненных решений, представляет собой существенный носитель а. н. части спектральной меры оператора $l = -\frac{d^2}{dx^2} + q$.

Теория подчиненности была использована Штольцем, А. Киселевым, Кристом, Набоко, Янасом и другими для исследования абсолютной непрерывности спектра дискретных и непрерывных операторов Шрёдингера. В частности, используя методы гармонического анализа, Киселеву и Кристу удалось показать, что если $q \in L^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то при п. в. $E > 0$ уравнение Шрёдингера $-y'' + qy = Ey$ имеет решения $y_\pm(x, E)$, обладающие асимптотикой

$$y_\pm(x, E) \sim e^{\pm i(\sqrt{E}x - \frac{1}{2\sqrt{E}} \int^x q(t)\mathrm{d}t)}, x \to +\infty. \tag{2}$$

Исходя из этой асимптотики, несложно доказать отсутствие подчиненных решений при почти всех значениях $E > 0$. Таким образом, положительная полуось представляет собой существенный носитель а. н. спектра оператора Шрёдингера, если $q \in L^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

В случае $p = 2$ решить задачу о сохранении а. н. спектра этим способом не удалось. Утвердительный (и окончательный) ответ при $p = 2$ был дан в работе Дайфта и Килипа. Согласно теореме Дайфта–Килипа, для произвольного вещественного потенциала $q \in L^2(\mathbb{R}_+)$ положительная полуось есть существенный носитель а. н. спектра самосопряженного оператора Шрёдингера с потенциалом q в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$. Таким образом, в самосопряженном случае а. н. спектр оператора Шрёдингера совпадает с а. н. спектром оператора с нулевым потенциалом, если потенциал принадлежит L^2. В основе доказательства Дайфта и Килипа лежит формула следа типа Буслаева–Фаддеева.

Окончательность этого результата состоит в том, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют примеры, построенные Пирсоном, функции $q \in L^{2+\varepsilon}$, такой что а. н. спектр оператора l пуст.

Нашей целью будет показать, что поведение а. н. спектра диссипативных операторов Шрёдингера и Дирака и матриц Якоби совершенно иное, нежели самосопряженных. Мы установим ряд утверждений (см. теоремы 8 и 9 в обзоре главы II), основное содержание которых можно резюмировать такой метатеоремой.

"Теорема" о неустойчивости. *Пусть l_0 – самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси, и пусть $l = l_0 + iq$, где q – оператор умножения на неотрицательную функцию на полуоси $\mathbb{R}_+$. Тогда $H_{\mathrm{ac}}(l) = \{0\}$, если функция q несуммируема.*

Таким образом, в несамосопряженном случае а. н. спектр исчезает сразу же по выходе потенциалов возмущения из класса L^1, причем речь идёт не о патологических примерах: в терминах шкалы L^p просто нет "зазора", в котором, в зависимости от регулярности потенциала на бесконечности, оператор может как иметь а. н. спектр, так и быть чисто сингулярным, как это происходит в самосопряженной задаче при $p > 2$, где, наряду с примерами Пирсона, имеются целые классы потенциалов (например, монотонно убывающие к нулю), для которых а. н. спектр совпадает с полуосью $\mathbb{R}_+$.

Следующая группа результатов относится к а. н. спектру операторов математической статистической механики. Важнейшая задача в теории ядерных реакторов – описание эволюции медленных нейтронов в средах с размножением. Нейтроны в этой ситуации представляют собой классические частицы, не взаимодействующие друг с другом, но поглощаемые средой. В процессе поглощения происходит деление ядер и образование вторичных нейтронов. В рамках модельных упрощений считается, что поглощение и размножение характеризуются, во-первых, двумя скалярными функциями на конфигурационном пространстве – локальными сечениями захвата и размножения. Направление движения вторичных частиц может зависеть от направления скорости поглощенной частицы. Соответственно, размножение характеризуется еще одной функцией, зависящей от двух переменных и описывающей угловое распределение вторичных частиц, называемой интегралом столкновений.

Функция распределения нейтронов в такой ситуации подчиняется интегро-дифференциальному уравнению, известному как линейное уравнение переноса (или Больцмана). Особый интерес представляет случай, когда сечение захвата постоянно, сечение размножения зависит от одной координаты в конфигурационном пространстве, и можно пользоваться односкоростным приближением. В этих условиях уравнение переноса имеет следующий вид. Пусть $n = n_t(x, \mu)$ – функция распределения нейтронов по координатам $x \in \mathbb{R}$ и направлениям импульсов $\mu \in [-1, 1]$, $t \in \mathbb{R}$ – время, $c(x)$ – сечение размножения, $K(\mu, \mu')$ – интеграл столкновений, т. е. доля вторичных частиц, летящих в направлении μ', образовавшихся в результате поглощения частицы, летевшей в направлении μ. Требуется описать поведение решений задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n_t(x,\mu) = -\mu \dfrac{\partial}{\partial x} n_t(x,\mu) + c(x) \displaystyle\int_{-1}^{1} K(\mu,\mu') n_t(x,\mu') \mathrm{d}\mu' - \sigma n_t(x,\mu) \\ n_0(x,\mu) = n(x,\mu), \end{cases} \tag{3}$$

в подходящих функциональных пространствах при больших временах. Мы выбираем в качестве пространства $L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$.

Основной результат относится к классической задаче о пластине из размножающего материала. В следующей теореме предполагается, что функция $c \in L^\infty(\mathbb{R})$, неотрицательна п.в. и имеет компактный носитель, а ядро $K(\mu, \mu')$ полиномиально по своим аргументам и неотрицательно в операторном смысле.

Теорема 1. *Обозначим через $V(t)$ эволюционную группу в пространстве $H = L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$, порожденную уравнением* (3) *в том смысле, что $V(t)n_0 = e^t n_t$ для $u_0 \in H$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *Существуют конечные числа* $l, n \geq 0$ *и конечный набор точек* $\lambda_j \in \mathbb{C}_+$, $1 \leq j \leq l$, *такие что*

$$V(t) = \sum_{i=1}^{l} e^{-i\lambda_j t} P_j + O\left(t^n\right), \quad t \to +\infty. \tag{4}$$

Здесь O*-символика относится к операторной норме,* P_j, $j \leq l$, *– операторы конечного ранга.*

(ii) $\sup_{t>0} \|V(t)u\|$ *конечен при любом* u *из плотного подмножества в* $\bigcap_j \ker P_j$.

(iii) *В частном случае, когда ядро* K *постоянно* ($K(\mu, \mu') \equiv \mathrm{const}$), *асимптотика* (4) *справедлива с* $n = 1$. *При выполнении некоторого явного условия на функцию* c *асимптотика* (4) *справедлива с заменой* $O(t)$ *на* $O(\ln t)$.

В ситуации постоянного ядра K утверждение теоремы допускает уточнение: можно показать, что оценки остатка неулучшаемы. Детальная формулировка содержится в теореме 10, приведенной ниже в описании содержания главы III. В частности, там выписано условие, о котором идёт речь в пункте (iii).

Резюмируя сложную историю вопроса, можно сказать, что в случае непостоянного ядра K все утверждения теоремы новы, а в случае $K(\mu, \mu') \equiv \mathrm{const}$ было известно лишь утверждение о конечности дискретного спектра и оценка (4) с $O(e^{\delta t})$ с произвольным $\delta > 0$ вместо $O(t)$. Утверждение (ii) в случае постоянного ядра было доказано в моей кандидатской диссертации.

В основе доказательства теоремы 1 лежит анализ существенного спектра генератора группы $V(t)$, который представляет собой возмущение самосопряженного оператора $D_0 = i\mu\frac{\partial}{\partial x}$. Показано, что множества собственных значений и спектральных особенностей генератора конечны, причем все спектральные особенности имеют конечный степенной порядок.

Поясним понятие спектральной особенности. Согласно фундаментальному критерию Секефальви-Надя–Фояша, максимальный диссипативный оператор L со спектром на вещественной оси подобен самосопряженному, если, и только если, существует $C > 0$, такое что

$$\left\|(L - z)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{\Im z}, \ \Im z > 0. \tag{5}$$

Таким образом, особую роль играют точки на вещественной оси, в окрестности которых в верхней полуплоскости оценка (5) не выполняется. По определению, точка $k \in \mathbb{R}$ – спектральная особенность диссипативного оператора L, если норма резольвенты сужения L на его а. н. подпространство $H^w_{\mathrm{ac}}(L)$ не удовлетворяет оценке (5) в любой окрестности точки k в верхней полуплоскости. Спектральные особенности были обнаружены Наймарком и глубоко исследованы Павловым. Их естественно классифицировать по характеру роста резольвенты в окрестности особенности. В частности, на этом пути определяются особенности конечного степенного порядка.

Вторая часть работы образована главами IV и V и посвящена спектральной теории канонических систем. Канонические системы представляют собой наиболее общую форму дифференциального оператора второго порядка на промежутке. Теория канонических систем была создана Луи де Бранжем в 60-х годах и развивалась в работах Крейна, Сахновича, Арова, Дыма.

Пусть $\mathcal{H}$ – локально суммируемая по мере Лебега функция (гамильтониан) на промежутке $(0, L)$, $0 < L \leq +\infty$, со значениями в неотрицательных матрицах 2×2 с вещественными элементами. Под локальной суммируемостью мы понимаем суммируемость на любом отрезке $I \subset (0, L)$. Канонической системой $(\mathcal{H}, L)$ называется матричное дифференциальное уравнение вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = z\mathcal{H}Y; \ z \in \mathbb{C}, \ x \in (0, L). \tag{6}$$

Каноническая система называется *регулярной*, если $\mathcal{H} \in L^1(0, L)$, и *сингулярной* в противном случае. В диссертации изучаются канонические системы в ситуации, когда один (левый) конец промежутка регулярен, т. е. $\mathcal{H} \in L^1(0, a)$ при любом $a \in]0, L)$, а второй может быть как регулярным, так и сингулярным. Без ущерба общности можно предполагать, что $\operatorname{tr} \mathcal{H}(x) = 1$ п. в. Сингулярной канонической системе можно сопоставить самосопряженный дифференциальный оператор, задаваясь каким-либо самосопряженным граничным условием в нуле.

Принципиальный вопрос спектрального анализа в сингулярном случае – когда спектр оператора дискретен? Этот вопрос был поставлен де Бранжем в 1966 году. Сам де Бранж сумел на него ответить в частном случае, охарактеризовав гамильтонианы, для которых соответствующая целая функция принадлежит классу Пойя. Другой частный случай, в котором ответ был известен, – диагональные гамильтонианы. Соответствующая система описывает колебания неоднородной струны. В работе М. Крейна был установлен следующий критерий.

Сингулярная каноническая система на промежутке $(0, L)$ *с гамильтонианом* $\mathcal{H} = \operatorname{diag}(h_1, h_2)$ *имеет дискретный спектр тогда, и только тогда, когда либо*

$$\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t \to L]{} 0,$$

либо

$$\int_t^L h_2(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_1(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t \to L]{} 0.$$

Доказательство этого критерия ведется вариационными методами и использует полуограниченность соответствующего дифференциального оператора. По этой причине оно не может быть приспособлено к недиагональному случаю.

Один из главных наших результатов состоит в том, что критерий Крейна непосредственно переносится на общий случай. Сформулируем ответ на вопрос де Бранжа.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathcal{H}, L)$ *– сингулярная каноническая система с гамильтонианом* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$, *и пусть* $h_1 \in L^1(0, L)$. *Спектр самосопряженного оператора* $A_{\mathcal{H}}$, *отвечающего системе, дискретен тогда, и только тогда, когда*

$$\lim_{t \nearrow L} \left(\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \right) = 0. \tag{7}$$

Условие интегрируемости элемента h_1 в этом критерии имеет нормировочный характер.

Таким образом, дискретность спектра вовсе не зависит от внедиагональной части гамильтониана. Легко видеть (и хорошо известно в фольклоре), что из дискретности спектра системы с гамильтонианом $\operatorname{diag} \mathcal{H}$, полученным заменой внедиагональных элементов $\mathcal{H}$ на 0, следует дискретность спектра системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$, и поэтому условие Крейна достаточно в общем случае. Независимость ответа от функции h_3 в части необходимости оказалась несколько неожиданной. Доказательство необходимости условия Крейна в недиагональном случае и составляет наш основной вклад. Ранее в недиагональном случае был известен лишь результат И. Каца 90-х годов, согласно которому критерий Крейна сохраняет свою силу, если функция h_3 удовлетворяет некоторому условию регулярности поведения на бесконечности (например, если она условно интегрируема).

В случае, когда каноническая система имеет дискретный спектр, естественно задаться вопросом о его асимптотическом распределении. Традиционный способ описания этого распределения состоит в указании показателя сходимости (порядка) последовательности $\{1/|\lambda_n|\}$, где λ_n – собственные значения оператора, или, более общо, в указании условий сходимости ряда $\sum_n 1/\mathrm{g}(|\lambda_n|)$, где g – какая-либо характеристика роста.

В регулярном случае старший член спектральной асимптотики дается уже упомянутой формулой Крейна–де Бранжа:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^{\pm}} = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^L \sqrt{\det\mathcal{H}(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Здесь $\lambda_n^{\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, – последовательности положительных/отрицательных собственных значений оператора системы, упорядоченные по возрастанию модуля. В терминах шкал компактных операторов эта формула отвечает случаю $p = 1$. В работе изучалась задача о показателе сходимости последовательности $\{1/|\lambda_n|\}$ в двух ситуациях:

- В сингулярном случае требуется выяснить необходимые и достаточные условия принадлежности резольвенты оператора классу $\mathfrak{S}^p$, $p > 1$, в терминах гамильтониана.

- В регулярном случае – дать оценки на показатель сходимости (≤ 1), в ситуации когда $\mathcal{H}(x)$ – матрица ранга 1.

Первая из этих задач решена нами полностью. В теореме 13 (см. обзор главы V) дано необходимое и достаточное условие сходимости ряда $\sum_n 1/\mathrm{g}(|\lambda_n|)$ для характеристик роста g порядка > 1. В важнейшем частном случае $\mathrm{g}(t) = t^p$ при естественных нормировках это условие имеет вид ($p > 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n|^p} < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^L \Big(\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}-1}\Big(\int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}} h_1(t)\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{9}$$

Помимо описания поведения собственных значений в среднем, представляют интерес и поточечные оценки при больших n. Такие оценки получены в теореме 14 (см. обзор главы V) для упомянутого класса характеристик роста g.

Наконец, в теореме 15 дан критерий принадлежности резольвенты оператора широкому классу симметрично нормированных идеалов, который содержит идеалы типа Орлича и Лоренца, рассмотренные в теоремах 13 и 14. Ключевую роль в описании этого класса идеалов играет свойство, названное нами свойством Мацаева. Подробно вопрос изложен в описании главы V.

Перейдем к описанию наших результатов в регулярном случае для порядков, меньших 1. Пусть $\mathcal{H}(x)$ – гамильтониан на конечном промежутке $(0, L)$, нормированный условием $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$ п. в., и такой что $\det\mathcal{H}(x) = 0$ п. в. Гамильтонианы указанного вида можно параметризовать измеримыми функциями $e\colon (0, L) \to \mathbb{T}$, так что

$\mathcal{H}(x) = \langle \cdot, e(x) \rangle_{\mathbb{R}^2} e(x)$. Все ранее известные результаты о порядке в этой ситуации относятся к двум частным случаям:

- гамильтонианы, отвечающие неопределенной проблеме моментов Гамбургера (матрицам Якоби в случае предельного круга). Эта ситуация изучалась Березанским, М. Лившицем, К. Бергом и Р. Шварцем.

- диагональные гамильтонианы. Этому случаю посвящены работы по асимптотике спектра неоднородных струн (Кац, Уно–Хонг, М. Соломяк–И. Вербицкий).

Например, в работе Берга и Шварца[1] методом, восходящим к Березанскому, было доказано следующее утверждение. Рассмотрим симметричную матрицу Якоби ($\rho_j > 0$, $q_j \in \mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} q_1 & \rho_1 & 0 & \dots & & \\ \rho_1 & q_2 & \rho_2 & 0 & \dots & \\ 0 & \rho_2 & q_3 & \rho_3 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{10}$$

для которой выполнен случай предельного круга. Если последовательность ρ_j начиная с некоторого места логарифмически выпукла, а последовательность $q_j/\rho_{j-1} \in l^1$, то порядок соответствующей канонической системы совпадает с величиной $\inf\{\alpha > 0 \colon \rho_j^{-\alpha} \in l^1\}$.

В основе этого результата лежит обнаруженная Березанским оценка роста ортогональных полиномов, отвечающих логарифмически выпуклой последовательности ρ_j.

Первая и пока единственная оценка порядка снизу в случае матриц Якоби появилась в работе Лившица 1939 года, посвященной неопределенной проблеме моментов Гамбургера. Эта работа, вероятно, представляет собой первую публикацию, посвященную непосредственно проблеме порядка. Напомним, что моментами меры μ на вещественной оси называются числа

$$s_n = \int x^n \mathrm{d}\mu(x).$$

Пусть $\mathfrak{s} \colon = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ – набор моментов, отвечающий неопределенному случаю проблемы Гамбургера. Пусть μ – какое-либо каноническое решение этой проблемы моментов. Хорошо известно, что носитель такой меры не имеет точек накопления на конечном расстоянии. Обозначим через $N(t)$ считающую функцию этого носителя и назовем порядком проблемы моментов $\mathfrak{s}$ число $\rho(\mathfrak{s}) = \inf\{p \colon N(t) = O(t^p)\}$. Тогда порядок ρ не меньше порядка целой функции $\sum z^{2j}/s_{2j}$, т. е. выполнено неравенство:

$$\rho(\mathfrak{s}) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{2n \ln n}{\ln s_{2n}}, \tag{11}$$

которое и называется оценкой Лившица. Естественно задаться вопросом, может ли порядок отличаться от своей оценки Лившица, т. е. существуют ли проблемы моментов, для которых неравенство в (11) строгое. Актуальность этого вопроса со возрастала по мере того, как накапливались примеры, в которых порядок удалось вычислить, поскольку во всех этих примерах число $\rho(\mathfrak{s})$ совпадало с правой частью (11). Отсутствие примеров строгого неравенства отмечено явным образом в упомянутой работе Берга и Шварца.

Помимо общих результатов, даваемых теоремами Березанского–Берга–Шварца и оценкой Лившица, известно несколько изолированных нетривиальных явнорешаемых

[1] C. Berg and R. Szwarc, On the order of indeterminate moment problems, *Adv. Math.* **250**(2014), 105–143

примеров матриц Якоби в случае предельного круга, для которых порядок был вычислен. Один из источников таких примеров – q-схема Аски. В примерах, происходящих из q-схемы Аски, спектр оператора оказывается экспоненциально растущим, и поэтому порядок равен нулю. Явнорешаемые примеры с порядками, отличными от нуля, были обнаружены Валентом и его сотрудниками в 90-х и 00-х при анализе процессов рождения–уничтожения с полиномиальными законами и исследовании некоторых производящих функций. Во всех этих примерах последовательности q_n и ρ_n^2 полиномиальны по n, причем $2\deg q_n = \deg p_n$. Отталкиваясь от примеров, Валент в 1998 году выдвинул гипотезу, что в некотором классе матриц Якоби, отвечающих процессам рождения–уничтожения, с полиномиальными последовательностями ρ_n^2 и q_n порядок p равен $1/\deg q_n$. Неравенство $p \geq 1/\deg q_n$ легко следует из вариационного принципа, поэтому проверка гипотезы сводится к доказательству неравенства $p \leq 1/\deg q_n$. Нам удалось доказать это неравенство и, тем самым, гипотезу Валента (предложение 1 ниже).

Отметим, что методы работ Валента и его сотрудников основаны на явных в той или иной степени решениях соответствующих спектральных задач и вряд ли могут быть использованы для доказательства гипотезы во всей общности.

Основной наш результат в общей проблеме порядка состоит в точной верхней оценке порядка регулярной канонической системы (см. теорему 11 в обзоре главы IV). Порядок в этой теореме оценивается в терминах скорости весовой аппроксимации гамильтониана кусочно-постоянными функциями.

В работе дано несколько приложений теоремы 11. Перечислим их: доказательство гипотезы Валента, оценка порядка для систем с гёльдеровскими гамильтонианами (следствие 8), оценка порядка для широкого класса матриц Якоби в терминах параметров соответствующего гамильтониана (теорема 12), которая при некотором условии регулярности поведения этих параметров превращается в равенство (предложение 2).

Детали приведены в обзоре главы IV.

Выше уже упоминался важный класс канонических систем – системы с диагональными гамильтонианами $\mathcal{H}$. Такие системы возникают при описании неоднородных механических струн. К канонической системе с диагональным гамильтонианом сводится задача о колебаниях струны в ситуации, когда распределение масс задано произвольной мерой. В контексте задачи о порядке матрица $\mathcal{H}(x)$ имеет ранг 1 почти всюду, что означает с учетом принятой нормировки $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$, что диагональный гамильтониан на множестве полной меры может принимать только два значения: $\mathcal{H}(x) = \operatorname{diag}(1,0)$ или $\mathcal{H}(x) = \operatorname{diag}(0,1)$.

Следующий основной результат работы – формула для порядка диагональных регулярных канонических систем. Положим:

$$X_1 = \left\{ x \in (0,L) \colon \mathcal{H}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$X_2 = \left\{ x \in (0,L) \colon \mathcal{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Теорема 3. *Пусть при п. в. $x \in [0,L]$ либо $\mathcal{H}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, либо $\mathcal{H}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда порядок канонической системы $(\mathcal{H}, L)$ совпадает с нижней гранью чисел d, $0 < d < 1$, таких что существует положительное число $C = C(d)$, такое что при каждом достаточно большом R интервал $(0,L)$ можно покрыть $n = n(R)$ интервалами ω_j, для которых*

(A)

$$\sum \sqrt{|\omega_j \cap X_1|\,|\omega_j \cap X_2|} \le C R^{d-1};$$

(B)

$$n(R) \le C R^d.$$

Расскажем о результатах предшественников. Некоторый класс диагональных гамильтонианов, для которых порядок известен явно, возникает при изучении спектральных асимптотик для самоподобных струн. Первый пример такого рода дает струна Кантора, спектр которой был найден Уно и Хонгом в конце 50-х годов. В работе Соломяка и Вербицкого найден старший член асимптотики для широкого класса струн с самоподобными весами. Порядок также известен для широкого класса струн, связанных с так называемыми d–множествами. В этих работах использовались вариационные методы, основанные на принципе минимакса. Наконец, в середине 80-х Кацем была дана общая формула для порядка неоднородной струны в терминах сходимости некоторого интеграла, содержащего массовую функцию, но она оказалась неэффективной.

Основное применение теоремы 3 состоит в решении упомянутого выше вопроса об оценке Лившица. Именно, в работе построен пример проблемы моментов, для которой порядок отличен от своей оценки Лившица (следствие 11). Более того, построенный пример показывает, что порядок может сколь угодно сильно (в пределах тривиальной границы $\rho(\mathfrak{s}) \le 1$) отличаться от правой части (11). Пример представляет собой матрицу Якоби с нулевой диагональю, заданную явным образом в терминах соответствующей канонической системы.

Помимо этого результата, в предложении 2 мы указываем класс канонических систем, отвечающих неопределенной проблеме моментов, для которых порядок удается вычислить. Ключевое условие, выделяющее класс, состоит в регулярной распределенности последовательностей длин и углов канонической системы (определение 10). Оказывается, что для этого класса оценка сверху, вытекающая из теоремы 12, совпадает с сильным вариантом оценки Лившица.

Глава I. Перейдем к точной формулировке результатов, относящихся к а. н. спектру абстрактных несамосопряженных операторов.

Пусть L - замкнутый плотноопределенный оператор в гильбертовом пространстве H, такой что множества $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_\pm$ дискретны. Пусть $1 < p \le 2$, $H^p_\pm$ – классы Харди в $\mathbb{C}_\pm$ соответственно. Определим следующие подпространства в H:

$$H^{w,p}_{\mathrm{ac}}(L) := \operatorname{Clos} \widetilde{H^{w,p}_{\mathrm{ac}}}(L), \tag{12}$$
$$\widetilde{H^{w,p}_{\mathrm{ac}}}(L) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (L-z)^{-1} u \text{ аналитично в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \\ & \left\langle (L-z)^{-1} u, v \right\rangle_\pm \in H^p_\pm \text{ при всех } v \in H. \end{array} \right\}.$$

Определение 2. *$H^{w,2}_{\mathrm{ac}}(L)$ называется слабым абсолютно непрерывным подпространством оператора L.*

В случае $p \in (1, 2]$ и самосопряженного оператора L это определение эквивалентно стандартному. Введем предположение

(A) *L – вполне несамосопряженный оператор вида $L = A + iV$, $A = A^*$, $V = V^*$, $\mathcal{D}(L) := \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(V)$, такой что оператор V является A-ограниченным с относительной гранью, меньшей единицы, т. е. для некоторого $a < 1$*

$$\|Vu\|^2 \le a\,\|Au\|^2 + b\,\|u\|^2$$

при всех $u \in \mathcal{D}(A)$.

Отметим, что условие полной несамосопряженности оператора в предположении (A) не ограничительно для рассматриваемых в работе вопросов.

Определение 3. *Подпространство*

$$H_{\mathrm{ac}}(L) := \operatorname{Clos} \widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(L),$$
$$\widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(L) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (L-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \\ & \left(|V|^{1/2} (L-z)^{-1} u \right)_{\pm} \in \mathbf{H}^2_{\pm} \end{array} \right\}, \tag{13}$$

называется сильным а. н. подпространством оператора L.

Здесь $\mathbf{H}^2_{\pm}$ – классы Харди H–значных функций в $\mathbb{C}_{\pm}$ соответственно.

Это определение представляет собой специализацию общего определения сильного а. н. подпространства, имеющего смысл для произвольных вполне несамосопряженных операторов, таких что множества $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_{\pm}$ дискретны, к ситуации, когда мнимая часть оператора отделяется.

Аналогичным образом определяются инвариантные подпространства для возмущений унитарных операторов. Пусть T – ограниченный вполне неунитарный оператор, спектр которого не имеет точек накопления вне окружности $\mathbb{T}$.

Определение 4. *Слабым а. н. подпространством оператора T называется пространство*

$$H^w_{\mathrm{ac}}(T) := \operatorname{Clos} \widetilde{H^w_{\mathrm{ac}}}(T),$$
$$\widetilde{H^w_{\mathrm{ac}}}(T) := \widetilde{H^w_{+}}(T) \cap \widetilde{H^w_{-}}(T),$$
$$\widetilde{H^w_{+}}(T) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (T-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{D}, \\ & \left\langle (T-z)^{-1} u, v \right\rangle\big|_{\mathbb{D}} \in H^2 \text{ for all } v \in H \end{array} \right\},$$
$$\widetilde{H^w_{-}}(T) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (T-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \\ & \left\langle (I-zT)^{-1} u, v \right\rangle\big|_{\mathbb{D}} \in H^2 \text{ при всех } v \in H \end{array} \right\}.$$

Положим $D_T := \left| I - T^*T \right|^{1/2}$. Подпространство

$$H_{\mathrm{ac}}(T) := \operatorname{Clos} \widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(T),$$
$$\widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(T) := \left\{ \begin{array}{lll} u \in H : & (i) & (T-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}, \\ & (ii) & D_T (T-z)^{-1} u\big|_{\mathbb{D}} \in \mathbf{H}^2, \\ & (iii) & D_T (I-zT)^{-1} u\big|_{\mathbb{D}} \in \mathbf{H}^2 \end{array} \right\}$$

называется сильным а. н. подпространством оператора T.

Нетрудно видеть, что $H^w_{\mathrm{ac}}(L) \supset H_{\mathrm{ac}}(L)$, $H^w_{\mathrm{ac}}(T) \supset H_{\mathrm{ac}}(T)$.

Для данного самосопряженного оператора D обозначим через $\lambda_j(D)$ его собственные значения, упорядоченные по убыванию абсолютной величины.

Теорема 4. *Существует ограниченный вполне неунитарный оператор T, такой что*

(i) *T подобен а. н. унитарному оператору (и, таким образом, $H^w_{\mathrm{ac}}(T) = H$);*

(ii) *$H_{\mathrm{ac}}(T) = \{0\}$;*

(iii) *$I - T^*T \in \mathfrak{S}^p$ при любом $p > 1$.*

Более того, для любой монотонно убывающей последовательности $\{\pi_n\} \notin l^1$, $\pi_n > 0$, *существует оператор* T, *удовлетворяющий условиям* (i), (ii), *и такой что*
(iii′) $|\lambda_n(I - T^*T)| \le \pi_n$.

В терминологии Гохберга–Крейна теорема 4 означает, что никакое условие вида $I - T^*T \in \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – симметрично нормированный идеал компактных операторов, более широкий, чем $\mathfrak{S}^1$, не гарантирует совпадение пространств H_{ac}^w и H_{ac}. Теорема 4 ещё показывает, что

- Условие линейного роста резольвенты

$$\sup_{z\notin\mathbb{T}} \left(\left|1-|z|\right| \left\|(T-z)^{-1}\right\|\right) < \infty$$

  (и даже его комбинация с условиями типа (iii’)) не обеспечивает совпадения пространств H_{ac} and H_{ac}^w.

- Подобие операторов, вообще говоря, не сохраняет сильное а. н. подпространство.

Перейдем к возмущениям самосопряженных операторов. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$, $q \notin L^1(\mathbb{R})$ – ограниченная вещественная несобственно интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, такая что

$$\textstyle\sum_n \left(\int_n^{n+1} |q|^2\right)^{p/2} < \infty \text{ при всех } p > 1.$$

Обозначим через L оператор в H, заданный дифференциальным выражением

$$L = i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + iq(x)$$

на своей естественной области определения.

Теорема 5.

(i) *Оператор* L *подобен а. н. самосопряженному оператору (и, таким образом,* $H_{\mathrm{ac}}^w(L) = H$*);*

(ii) $H_{\mathrm{ac}}(L) = \{0\}$*;*

(iii) $(L-z)^{-1} - (A-z)^{-1} \in \mathfrak{S}^p$ *при всех* $p > 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Перейдем к формулировке результата по проблеме двойственности спектральных компонент, составляющего содержание п. 1.2 главы I. Пусть T – ограниченный оператор, такой что $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

Определение 5. *Замыкание линеала векторов* $u \in H$, *таких что при всех* $v \in H$ *некасательные пределы*

$$f_{u,v}^{\pm}(z) = \lim_{\substack{w\to z\\ |w|^{\pm 1}\in\mathbb{D}}} \left\langle (T-w)^{-1} u, v\right\rangle$$

существуют и совпадают при почти всех $z \in \mathbb{T}$, *называется сингулярным подпространством оператора* T. *Оно обозначается* $H_s(T)$.

Как обсуждалось во выше, проблема двойственности состоит в том, справедливо ли равенство

$$(H_{\mathrm{ac}}^w(T))^{\perp} = H_s(T^*). \tag{14}$$

Из работы Макарова и Васюнина известно, что равенство (14) справедливо, если $I - T^*T \in \mathfrak{S}^1$.

В обозначениях определения 4 положим:

$$CN(T) := \mathrm{Clos}\left(\widetilde{H_+^w}(T) \vee \widetilde{H_-^w}(T)\right).$$

Пусть $\{\rho_n\}$, $n \geq 0$, – последовательность положительных чисел, монотонно убывающая к нулю.

Теорема 6. *Пусть $\{\rho_j\} \notin l^1$. Тогда существует оператор T, $\sigma(T) = \mathbb{T}$, в гильбертовом пространстве H такой что:*

(i) *$CN(T) \neq H$;*

(ii) *$H_s(T^*) = \{0\}$;*

(iii) *$T = T_0 + S$, где T_0 – унитарный оператор, а S – оператор, сингулярные числа которого удовлетворяют неравенству $\mu_n(S) \leq \rho_{[n/2]}$.*

Теоремы 4 и 6 доказываются предъявлением явно заданных возмущений двустороннего сдвига в $l^2(\mathbb{Z})$ (векторного в случае проблемы двойственности), для которых справедливы их утверждения.

П. 1.3 содержит позитивный результат о совпадении слабого и сильного а. н. подпространств. В следующей теореме условие (A) не накладывается. При этом используется упомянутое общее определение $H_{\mathrm{ac}}(L)$.

Теорема 7. *Для любого вполне несамосопряженного диссипативного оператора L имеем: $H_{\mathrm{ac}}^{w,p}(L) = H_{\mathrm{ac}}^{w}(L) = H_{\mathrm{ac}}(L)$ при всех $p \in (1, 2]$.*

В п. 1.4 содержатся вспомогательные результаты, полученные в связи с потребностями спектральной теории несамосопряженных дифференциальных и разностных операторов, которым посвящены главы II и III. Выше уже упоминалась ядерная теория возмущений для абстрактных операторов. Ее основные результаты (существование и полнота волновых операторов, совпадение определений а. н. подпространства) относятся к ситуации, когда невозмущенный оператор – самосопряженный (или унитарный). В общем случае результаты такого рода неизвестны. В лемме 1.21 диссертации мы устанавливаем, что если а. н. подпространство диссипативного оператора $\widetilde{D}$ тривиально, то тривиальным будет и а. н. подпространство оператора D, если D диссипативен и $\widetilde{D} - D = iV$ для некоторого неотрицательного оператора $V \in \mathfrak{S}^1$. В лемме 1.24 диссертации этот результат обобщается на случай ядерной разности резольвент. Доказательства основаны на анализе факторизаций аналитических матриц-функций типа характеристической функции и свойствах их граничных значений.

Кроме этого, в п. 1.6 доказано, что для вполне несамосопряженных диссипативных операторов с одинаковой мнимой частью тривиальность а. н. подпространства сохраняется при произвольных относительно ядерных возмущениях вещественной части.

Глава II содержит точные формулировки и доказательства результатов, объединенных выше в метатеорему о неустойчивости. Эвристическая мотивация этой теоремы может быть дана с помощью ВКБ-приближения. Формально заменяя в асимптотиках (2) потенциал q на iq и ограничиваясь абсолютной величиной решений, получим асимптотики

$$|y_\pm| \sim \exp\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{k}}\int^x q(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right). \tag{15}$$

Таким образом, если функция $q \geq 0$ и несуммируема, то решение u_+ – возрастающее, а u_- – убывающее, откуда вытекает, что соответствующий спектр сингулярен. Такое рассуждение, однако, нельзя превратить в строгое доказательство в декларируемой общности, поскольку

- нет никаких шансов оправдать асимптотику (15) хотя бы почти всюду при потенциалах $q \notin L^2$.
- вывод об отсутствии а. н. спектра из наличия растущих и убывающих решений требует использования теории подчиненности, неизвестной в несамосопряженном случае.

Теорема о неустойчивости доказана в работе в каждом из трех случаев: l – оператор Шрёдингера, оператор Дирака, матрица Якоби. Точные формулировки отличаются от приведенной метатеоремы аккуратным описанием условий на коэффициенты, гарантирующих существование оператора l. В случае оператора Шрёдингера нам ещё понадобится небольшое техническое условие ограниченности в среднем вещественной части потенциала. Ограничимся здесь формулировками для дискретных и непрерывных операторов Шрёдингера.

Теорема 8. *Пусть $\{q_j\}$ – последовательность комплексных чисел, таких что $\operatorname{Im} q_j \geq 0$ и $\operatorname{Im} q_j \to 0$, и пусть l – дискретный оператор Шрёдингера, определенный в пространстве $l^2(\mathbb{N})$ матрицей*

$$\begin{pmatrix} q_1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & q_2 & 1 & \ddots \\ 0 & 1 & q_3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Если абсолютно непрерывное подпространство оператора l нетривиально, то $\operatorname{Im} q \in l^1$.

Теорема 9. *Пусть q – локально ограниченная функция на $\mathbb{R}_+$, такая что $\operatorname{Im} q \geq 0$ и $\operatorname{Im} q(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Предположим, что функция $\operatorname{Re} q$ ограничена снизу, а величина $\sup_n \int_n^{n+1} |\operatorname{Re} q|^2 \, \mathrm{d}t$ конечна, и зададим оператор Шрёдингера l с потенциалом q в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ формулой $lu = -u'' + qu$ на области определения, выделенной произвольным самосопряженным граничным условием в нуле. Если абсолютно непрерывное подпространство оператора l нетривиально, то $\operatorname{Im} q \in L^1(\mathbb{R}_+)$.*

Опишем основные шаги доказательства теоремы о неустойчивости.

- Сначала мы показываем, что а. н. подпространство оператора тривиально, если при п. в. $k \in \mathbb{R}$ найдется обобщенное решение u соответствующего спектрального уравнения $lu = ku$, для которого функция $q\,|u(\cdot, k)|^2$ несуммируема. Из диссипативности рассматриваемых операторов довольно легко следует, что $q\,|u(\cdot, k)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ для граничного значения решения Вейля в нижней полуплоскости. Таким образом, достаточно проверить, что решение, отвечающее какому-либо самосопряженному граничному условию в нуле, не будет квадратично суммируемо с весом q.
- В случае матриц Якоби и оператора Дирака условие $q\,|u(\cdot, k)|^2 \notin L^1$ проверяется сначала для некоторого размазанного потенциала $\tilde{q}$, такого что разность $\tilde{q} - q$ неотрицательна и суммируема, а затем используется теорема, упомянутая выше в

обзоре наших результатов по абстрактной теории, согласно которой уменьшение мнимой части V абстрактного оператора на ядерный, сохраняет тривиальность а. н. подпространства.

- В случае оператора Шрёдингера описанная в предыдущем пункте схема непосредственно не применима из-за необходимости оценивать производные решений через сами решения. Именно в этом месте возникает упомянутое условие на вещественную часть потенциала. Для преодоления этой трудности мы используем спектральное усреднение в невозмущенной самосопряженной задаче и развиваем аналог теории подчиненности в несамосопряженном случае.

Отметим, что в случае непрерывного оператора Шрёдингера, если не накладывать условий типа ограниченности вещественной части потенциала сверху, то можно показать (теорема 2.15 диссертации), что абсолютно непрерывный спектр тривиален, если на функцию q выполнено несколько более сильное, чем несуммируемость, условие:

$$\sum_n \left(\int_n^{n+1} \sqrt{q}\, \mathrm{d}t \right)^2 = \infty.$$

При доказательстве теоремы о неустойчивости нам удалось избежать использования в явной форме функциональной модели Секефальви-Надя–Фояша. Если же воспользоваться моделью, то теорему можно дополнить следующим выводом о динамике, порожденной изучаемыми операторами.

Следствие 6. *В условиях теоремы о неустойчивости пусть $Z_t = e^{itl}$, $t \geq 0$. Тогда при $t \to +\infty$*

$$Z_t \xrightarrow{s} 0, \quad Z_t^* \xrightarrow{s} 0.$$

В **главе III** доказана теорема 1 и ее уточнение в ситуации постоянного ядра K (см. теорему 10 ниже). Заметим сразу, что даже в случае постоянного K возмущение в этой задаче не будет относительно ядерным при любой ненулевой функции c, так как ядро соответствующего интегрального оператора имеет логарифмическую особенность на диагонали. Таким образом, здесь нельзя воспользоваться ядерной теорией рассеяния.

Вместо этого мы доказываем методами, близкими гладкой теории возмущений, что дискретный спектр генератора в верхней полуплоскости конечен, а особенности знаменателя резольвенты на вещественной оси изолированы и имеют конечный степенной порядок. Отсюда немедленно вытекает, что существенный спектр оператора абсолютно непрерывен, т. е. пространство H^w_{ac} совпадает с подпространством существенного спектра, и что оператор имеет лишь конечное число спектральных особенностей, причем все они конечного степенного порядка. Пункты (i) и (ii) теоремы 1 после этого вытекают из общей теории.

Сформулируем утверждение, относящееся к случаю постоянного ядра. Пункт (iii) теоремы 1 будет содержаться в нём. Пусть $K(\mu, \mu') \equiv \mathrm{const}$. В этом случае все собственные значения оператора находятся на мнимой оси (результат Ленера и Винга). Как было показано в моей кандидатской диссертации[2], в этом случае оператор не имеет спектральных особенностей вне точки 0. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество функций c, для которых нуль есть спектральная особенность.

[2] Yu. Kuperin, S. Naboko and R. Romanov, Spectral analysis of the transport operator: a functional model approach, *Indiana Univ. Math. J.* **51**(2002), 1389–1425

Теорема 10. *Пусть $K(\mu,\mu') \equiv 1/2$, и пусть $c \in \mathcal{E}$. В обозначениях равенства (4) положим (здесь $\beta_j = -i\lambda_j$, $\beta_j > 0$):*

$$Z_t = V(t) - \sum_{i=1}^{l} e^{\beta_j t} P_j.$$

Тогда $\|Z_t\| = O(t)$ при $t \to +\infty$, причем выполнено одно из следующих взаимоисключающих утверждений:

(i) *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует вектор $u \in H$, такой что*

$$\|Z_t u\| = t^{1-\varepsilon}(1 + o(1)), \quad t \to +\infty;$$

(ii)

$$\|Z_t\| = O(\ln t),\ t \to +\infty,$$

причем при для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется вектор $u \in H$, такой что

$$\|Z_t u\| = (\ln t)^{1-\varepsilon}(1 + o(1)), \quad t \to +\infty.$$

При этом (i) *реализуется тогда, и только тогда, когда существует ненулевая функция $h \in L^2(\mathbb{R})$, такая что*

$$\frac{1}{2}\sqrt{c(x)} \int_{\mathbb{R}} \ln|x-y| \sqrt{c(y)} h(y) \mathrm{d}y + h(x) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(y)\sqrt{c(y)} \mathrm{d}y = 0.$$

Заметим, что множество $\mathcal{E}$ непусто: для любой ненулевой неотрицательной функции $c \in L^\infty$ с компактным носителем существует возрастающая к бесконечности последовательность значений константы $\varkappa > 0$, такая что $\varkappa c$ принадлежит $\mathcal{E}$ тогда, и только тогда, когда $\varkappa$ принадлежит этой последовательности.

Характеристическая функция оператора в рассматриваемой ситуации непрерывна на оси по операторной норме. Доказательство теоремы 10 сводится к анализу старших членов асимптотики характеристической функции в нуле. При этом оказывается, что характеристическая функция в точке $k = 0$ имеет нуль порядка не выше первого. Этот факт зависит от некоего условия невырожденности, доказательство выполнения которого носит трюковый характер. После того, как требуемая асимптотика характеристической функции в нуле установлена, остается воспользоваться установленной нами ранее связью временной асимптотики со спектральными особенностями[3]. Отметим, что утверждение о точности оценок в теореме 10 опирается на функциональную модель Секефальви-Надя–Фояша.

Упомянем ещё, что из доказательства абсолютной непрерывности существенного спектра в теореме 1 следует существование и полнота локальных волновых операторов, отвечающих интервалам, не содержащих спектральных особенностей.

Завершается глава III обсуждением выбора L^2 в качестве пространства функций распределения.

Глава IV посвящена проблеме порядка для регулярных канонических систем. В обзоре этой главы $(\mathcal{H}, L)$ – регулярная каноническая система, нормированная условием $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$ п. в.

[3]S. Naboko and R. Romanov, Spectral singularities and asymptotics of contractive semigroups. I, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **70**(2004), 379–403.

Определение 7. *Будем говорить, что гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет конечный ранг, если существуют конечные наборы чисел x_j, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = L$, и векторов $\{e_j\}_{j=0}^{N-1} \subset \mathbb{R}^2$, единичной нормы, такие что*

$$\mathcal{H}(x) = \langle \cdot, e_j \rangle_{\mathbb{C}^2} e_j,\ x \in (x_j, x_{j+1}),\ j = 0, \ldots, N-1.$$

Элементы множеств $\{x_j\}$, $\{e_j\}$ и число N называются, соответственно, параметрами и рангом гамильтониана[4]. *Числа $l_j = x_{j+1} - x_j$ и $\varphi_j \in [0, 2\pi)$, определенные равенством*

$$e_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j \\ \sin\varphi_j \end{pmatrix},$$

называются, соответственно, длинами и углами гамильтониана $\mathcal{H}$.

Теорема 11. *Пусть $(\mathcal{H}, L)$ – каноническая система, $L < \infty$, и пусть $0 < d < 1$.*

1. Предположим, что для некоторого $C > 0$ при всех достаточно больших R существует гамильтониан $\mathcal{H}_R$ конечного ранга $N(R)$, заданный на $(0, L)$, и набор чисел (зависящих от R) $\{a_j\}_0^{N(R)-1}$, $0 < a_j \le 1$, для которых выполнены следующие условия ($P_j = \langle \cdot, e_j \rangle e_j$; x_j, e_j– параметры гамильтониана $\mathcal{H}_R$):

(i)
$$\sum \frac{1}{a_j^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \|\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}_R(t)\|\, t \le CR^{d-1},$$

(ii)
$$\sum a_j^2 (x_{j+1} - x_j) \le CR^{d-1},$$

(iii)
$$\sum \log\left(1 + \frac{\|P_j - P_{j+1}\|}{a_j a_{j+1}}\right) \le CR^d,$$

(iv)
$$\log a_0^{-1} + \log a_{N(R)-1}^{-1} + \sum \left|\log \frac{a_j}{a_{j-1}}\right| \le CR^d.$$

Тогда существует число $K > 0$, такое что

$$\|M(z)\| \le e^{K|z|^d}$$

при всех $z \in \mathbb{C}$.

2. Для каждого p, $0 < p < 1$, существует каноническая система $(\mathcal{H}, L)$ порядка p, которая при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям первого пункта теоремы с $d = p + \varepsilon$.

Поскольку оператор, отвечающий общей канонической системе, не полуограничен снизу, вариационные методы оценки собственных значений не пригодны для доказательства результатов такого рода. Вместо этого мы оцениваем порядок роста целой функции, порожденной спектром (фундаментального решения в правом конце промежутка), используя мультипликативное свойство фундаментального решения и частичную диагонализацию аппроксимантов в духе доказательства де Бранжа формулы (8).

Следствие 8. *Пусть $(\mathcal{H}, L)$ – каноническая система, причем $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x) = 1$ п. в.*

(i) *Если $\mathcal{H} \in C^\alpha[0, L]$, $0 < \alpha \le 1$, то порядок системы не превосходит $1 - \alpha/2$.*

---

[4] Мы не требуем, чтобы $e_j \ne \pm e_{j+1}$, , таким образом, ранг гамильтониана конечного ранга не определен единственным образом.

(ii) *Если* $\mathcal{H}$ *has имеет ограниченную вариацию, то порядок системы не превосходит* $1/2$.

Следующее приложение теоремы 11 – доказательство гипотезы Валента.

Пусть λ_n, μ_n, $n \geq 0$, – последовательности вещественных чисел, причем $\lambda_n > 0$ при $n \geq 0$, $\mu_n > 0$ при $n \geq 1$, $\mu_0 = 0$. Положим:

$$q_{n+1} = \lambda_n + \mu_n, \ \rho_{n+1} = \sqrt{\lambda_n \mu_{n+1}}. \tag{16}$$

О матрице Якоби (10), заданной таким образом, говорят, что она отвечает процессам рождения–гибели с параметрами λ_n и μ_n.

Гипотеза Валента. *Пусть* $\ell > 2$ *– натуральное число, а* A_j *и* B_j *– вещественные числа, такие что* $1 < \sum(B_j - A_j) < \ell - 1$. *Тогда порядок матрицы Якоби, отвечающей процессам рождения–гибели с параметрами вида*

$$\lambda_n = (n + B_1) \cdots (n + B_\ell),$$

$$\mu_n = (n + A_1) \cdots (n + A_\ell),$$

равен $1/\ell$.

Отметим, что при наложенных условиях реализуется случай предельного круга, так что утверждение имеет смысл. В работе доказано несколько более общее утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $\ell > 2$ *– натуральное число, а* A *и* B *– вещественные числа, такие что* $1 < B - A < \ell - 1$. *Тогда матрица Якоби, отвечающая процессам рождения–гибели с параметрами вида*

$$\lambda_n = n^\ell + Bn^{\ell-1} + o(n^{\ell-1}),$$

$$\mu_n = n^\ell + An^{\ell-1} + o(n^{\ell-1}),$$

находится в случае предельного круга, и ее порядок равен $1/\ell$.

Доказательство основано на следствии из теоремы 11. Пусть P_n и Q_n – ортогональные полиномы, соответствующие матрице Якоби (10).

Следствие 9. *Предположим, что матрица Якоби* (10) *такова, что при* $n \to \infty$

$$P_n^2(0) + Q_n^2(0) \asymp Cn^{\Delta - D}, \ \rho_n \asymp n^D,$$

где числа Δ, D *удовлетворяют неравенству* $1 < \Delta < D - 1$. *Тогда матрица* (10) *находится в случае предельного круга, и ее порядок не превосходит* $1/D$.

Явные формулы, выражающие значения полиномов $P_n(0)$ и $Q_n(0)$ через μ_n и λ_n позволяют легко проверить условия этого следствия в ситуации гипотезы Валента и тем самым доказать её.

Другое приложение теоремы 11 к матрицам Якоби содержится в следующем утверждении. В нём используется соответствие между матрицами Якоби и каноническими системами с кусочно-постоянными гамильтонианами специального вида. Эти гамильтонианы описываются последовательностями $\vec{l} = \{l_j\}$, $l_j > 0$, и $\vec{\phi} = \{\phi_j\}$, $\phi_j \in [0, 2\pi)$, $(j \geq 0)$, называемыми длинами и углами системы (ср. определение 7). Пусть $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ – соответственно, длины и углы системы $(\mathcal{H}, L)$, отвечающей матрице Якоби (10) в случае предельного круга. Введем следующие обозначения:

$$\Delta_l^+ := \max\left\{1, \sup\left\{\tau \geq 0 : y_n = \mathrm{O}(n^{-\tau})\right\}\right\}$$

$$\Delta_\phi := \sup\left\{\tau \geq 0 : \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} |\sin(\phi_{k+1} - \phi_k)| = \mathrm{O}(n^{-\tau})\right\},$$

$$\Lambda := \sup_{\phi\in[0,\pi)} \sup\left\{\tau \geq 0 : \sum_{j=n}^{\infty} l_j |\sin(\phi_j - \phi)| = \mathrm{O}\big(n^{1-\Delta_l^+-\tau}\big)\right\} \in [0,\infty]$$

$$\delta_l(\mathcal{H}) := \liminf_{n\to\infty} \frac{-1}{n\ln n} \ln\Big(\sqrt{l_n}\prod_{k=1}^{n-1} l_k\Big),$$

$$\delta_\phi(\mathcal{H}) := \liminf_{n\to\infty} \frac{-1}{n\ln n} \ln\Big(\prod_{k=1}^{n-1}(|\sin(\phi_{k+1} - \phi_k)|\Big).$$

Обозначим через $\rho(\mathcal{H})$ порядок системы $(\mathcal{H}, L)$.

Теорема 12. *Предположим, что* $(\Delta_l^+, \Delta_\phi, \Lambda) \neq (1, 1, 0)$. *Тогда*

(i) (*область регулярного поведения*)*: если* $\Delta_l^+ + \Delta_\phi \geq 2$, *то*

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi}.$$

(ii) (*критический треугольник*)*: если* $\Delta_l^+ + \Delta_\phi < 2$, *то*

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \max\left\{\frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi}, \frac{1 - \Delta_\phi + \frac{1}{2}\Lambda}{\Delta_l^+ - \Delta_\phi + \Lambda}\right\}.$$

В простейшей ситуации, когда $l_j = O(j^{-a})$, $\varphi_j - \varphi_{j+1} = O(j^{-b})$ для некоторых $a > 1$ и $b > 0$, таких что $a + b \geq 2$, теорема утверждает, что порядок системы не превосходит $(a + b)^{-1}$. В следующем предложении выделено условие, при котором оценка теоремы 12 в области регулярного поведения переходит в равенство.

Определение 10. *Назовем последовательность* $\vec{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ *положительных чисел регулярно распределенной, если*

$$\frac{y_n}{\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} y_k\Big)^{\frac{1}{n}}} = \mathrm{O}(1).$$

Предложение 2. *Предположим, что последовательность* $\vec{l}$ *регулярно распределена, что по крайней мере одна из величин* $\delta_l(\mathcal{H})$ *and* $\delta_\phi(\mathcal{H})$ *существует как предел, и что либо*

(A) *Последовательность* $(|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}$ *регулярно распределена, и* $\delta_l + \delta_\phi \geq 2$, *причем* $(\delta_l, \delta_\phi, \Lambda) \neq (1, 1, 0)$,

либо

(B) $\delta_\phi = 0$.

Тогда

$$\rho(\mathcal{H}) = \frac{1}{\delta_l + \delta_\phi}.$$

Далее в главе IV доказывается теорема 3. Сначала с помощью теоремы 11 устанавливается неравенство "порядок $\leq$ нижней грани чисел d". Для этого по покрытию из условия строится подходящий аппроксимирующий гамильтониан. Затем устанавливается обратное неравенство. Его доказательство использует интегральные оценки Каца для матрицы монодромии и состоит в построении оптимального покрытия.

Строгая формулировка обсуждавшегося выше результата об оценке Лившица такова.

Следствие 11. *Для любых $\rho \in (0,1]$ и $r \in (0,\rho)$ найдется неопределенная проблема моментов $\mathfrak{s}$, такая что ее порядок совпадает с ρ, а*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2n\ln n}{\ln s_{2n}} \leq r.$$

Более того, эта проблема моментов может быть выбрана симметричной.

Остановимся кратко на других применениях теоремы 3. Чтобы проиллюстрировать её эффективность вне ситуации матриц Якоби, в диссертации приведен короткий вывод значения порядка для струны Кантора (раздел 13.1 диссертации) и доказательство оценки Борзова для струн, порожденных сингулярными мерами, носители которых удовлетворяет условию $\sum |E_j|^p < \infty$ (E_j – длины интервалов смежности носителя μ), $0 < p < 1$.

В **Главе V** исследуются задачи о распределении спектра сингулярных канонических систем. В ней доказан критерий дискретности спектра (теорема 2 автореферата) и установлены критерии принадлежности резольвенты различным классам симметрично нормированных идеалов. Во всех формулируемых ниже теоремах $\mathcal{H} = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{smallmatrix}\right)$ – гамильтониан сингулярной канонической системы на интервале $[0,L)$, имеющей чисто дискретный спектр, и такой, что функция $h_1 \in L^1(0,L)$ и имеет некомпактный носитель. Предположения о функции h_1 носят нормировочный характер и не снижают общности результата.

Определим возрастающую последовательность $c_0\colon = 0 < c_1 < c_2 < \ldots < L$ и последовательность ω_n равенствами

$$\int_{c_n}^{L} h_1(s)\mathrm{d}s = 2^{-n}\int_0^L h_1(s)\mathrm{d}s,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\omega_n = 2^{-\frac{n}{2}}\Big(\int_{c_{n-1}}^{c_n} h_2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Теорема 13. *Пусть* g *– характеристика роста порядка* $\rho_{\mathrm{g}} > 1$*. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(|\lambda_n|)} < \infty \ \Leftrightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(\omega_n^{-1})} < \infty. \tag{18}$$

В частности, эта теорема отвечает на вопрос, когда $(\lambda_n^{-1})_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ при $p > 1$. Ранее теорема 13 в случае $h_3 \neq 0$ была известна лишь при $p = 2$ (Кальтенбок, Ворачек). Отметим, что метод доказательства теоремы 13 совершенно отличен от методов работы Кальтенбока и Ворачека, которые пригодны лишь для $p = 2$.

Критерий теоремы 13 имеет дискретную форму. В лемме 15.23 диссертации показано, что при $\mathrm{g}(t) = t^p$ он переходит в условие (9), которое может быть получено из (18) формальной заменой сумм на интегралы и последующей заменой переменной.

В теореме 13 поведение спектра оператора системы характеризовалось условиями на рост в среднем. В следующей теореме вместо условий на рост в среднем используются "поточечные" условия. Возникающий при этом критерий имеет столь же явный характер, но несколько сложнее в применении, так как требует проверки основного условия не для самой последовательности ω_n, а для ее невозрастающей перестановки.

Теорема 14. *Пусть* g *– характеристика роста порядка* $\rho_{\mathrm{g}} > 1$. *Пусть* $(\omega_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ *– невозрастающая перестановка последовательности* (17). *Тогда*

- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}(|\lambda_n|)} < \infty \;\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}((\omega_n^*)^{-1})} < \infty,$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}(|\lambda_n|)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}((\omega_n^*)^{-1})} = 0.$

Приведем отдельно формулировку для важнейшего случая $\mathrm{g}(t) = t^p$ при нормировках $L = \infty$, $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$ п. в. Определим последовательность c_n как указано выше и обозначим через δ_n невозрастающую перестановку последовательности $2^{-n}(c_n - c_{n-1})$. Тогда

$$\frac{n}{|\lambda_n|^p} = O(1) \;\Leftrightarrow\; n\delta_n^{p/2} = O(1),$$
$$\frac{n}{|\lambda_n|^p} = o(1) \;\Leftrightarrow\; n\delta_n^{p/2} = o(1).$$

Перейдем к формулировке наиболее общего результата. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел, $\mathfrak{I}$ – операторный идеал. Тогда запись $\{a_n\} \in \mathfrak{I}$ означает, что идеалу $\mathfrak{I}$ принадлежит оператор a, заданный формулой $au = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle u, e_n\rangle e_n$, где $\{e_n\}$ – произвольный ортонормированный базис в исходном гильбертовом пространстве H.

Пусть A – компактный оператор. Определим последовательности

$$\mathcal{T}_n(A) := \big(\underbrace{s_1(A), s_1(A), \ldots, s_1(A)}_{n \text{ раз}}, \underbrace{s_2(A), \ldots, s_2(A)}_{n \text{ раз}}, \ldots\big); \tag{19}$$

$$\mathcal{T}_{1/n}(A) := \Big(\frac{s_1(A) + \ldots s_n(A)}{n}, \frac{s_{n+1}(A) + \ldots s_{2n}(A)}{n}, \ldots, \frac{s_{kn+1}(A) + \ldots s_{(k+1)n}(A)}{n}, \ldots\Big). \tag{20}$$

Ясно, что если $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{S}^{\infty}$ – симметрично нормированный идеал, и оператор $A \in \mathfrak{I}$, то последовательности $\mathcal{T}_n(A)$ и $\mathcal{T}_{1/n}(A)$ принадлежат идеалу $\mathfrak{I}$ в описанном выше смысле.

Теорема 15. *Пусть* $\mathfrak{I}$ *– собственный симметрично-нормированный идеал компактных операторов, порожденный симметрической нормирующей функцией, и такой что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{I}:\, \|A\|_{\mathfrak{I}}=1} \|\mathcal{T}_n(A)\|_{\mathfrak{I}} = o(n), \quad \sup_{A\in\mathfrak{I}:\, \|A\|_{\mathfrak{I}}=1} \big\|\mathcal{T}_{1/n}(A)\big\|_{\mathfrak{I}} = o(1). \tag{21}$$

Тогда

$$\{\lambda_n^{-1}\} \in \mathfrak{I} \quad \Leftrightarrow \quad \{\omega_n\} \in \mathfrak{I}.$$

Основные инструменты в доказательстве этих результатов – теорема о диагональном преобладании и свойство Мацаева соответствующих идеалов компактных операторов. Теорема о диагональном преобладании сводит вопрос о принадлежности резольвенты симметрично нормированному идеалу $\mathfrak{I}$ к аналогичному вопросу для гамильтониана $\operatorname{diag}\mathcal{H}$, используя алгебраические особенности строения резольвенты.

Согласно известной теореме Мацаева, если вещественная часть вольтерровского оператора принадлежит классу Шаттена – фон Неймана $\mathfrak{S}^p$, $1 < p < \infty$, то этому классу принадлежит и сам оператор. Поскольку резольвенты дифференциальных операторов имеют структуру вещественных частей вольтерровских операторов вида

$$f \mapsto \varphi \int_0^x \kappa f, \tag{22}$$

с известными функциями κ и φ, явно выражающимися через гамильтониан, теоремы типа Мацаева сводят трудную часть (т. е. необходимость) условий принадлежности резольвенты соответствующему идеалу к аналогичному вопросу для вольтерровских операторов. Про идеалы, для которых справедлив аналог теоремы Мацаева, будем говорить, что они обладают свойством Мацаева. Вопрос о том, когда симметрично нормированный идеал обладает свойством Мацаева, был решен Руссу и Митителом для широкого класса идеалов, который покрывает все потребности приложений. Например, он содержит все сепарабельные идеалы. Условия Руссу и Митителa на идеал даются оценками (21).

После упомянутых редукций остается выяснить, когда соответствующий вольтерровский оператор принадлежит идеалу $\mathfrak{I}$. В случае классов $\mathfrak{S}^p$ и $\kappa \equiv 1$ этот вопрос изучался Александровым, Пеллером, Рохбергом и Янсоном. Небольшое обобщение их техники позволяет ответить на вопрос для любого идеала, обладающего свойством Мацаева, и непостоянной функции κ. В результате удается доказать общую теорему 15. Теоремы 13 и 14 получаются как следствия этого общего результата сравнительно несложной проверкой условий Митителa–Руссу для соответствующих идеалов (типа Орлича в случае теоремы 13 и типа Лоренца в случае теоремы 14).

В случае теоремы 2 приведенная схема рассуждений нуждается в модификации, поскольку идеал всех компактных операторов не обладает свойством Мацаева в естественном смысле. Тем не менее, удается показать, что свойство Мацаева имеет место для операторов вида (22) (слабое свойство Мацаева), и этого достаточно для доказательства критерия дискретности спектра.

Методы, использованные при доказательстве критерия дискретности спектра, позволяют также ответить на вопрос о спектре оператора в точке 0. Соответствующее утверждение имеет следующий вид (теорема 15.27 диссертации).

Теорема. *Точка* 0 *не принадлежит спектру оператора системы тогда, и только тогда, когда*

$$\limsup_{t \nearrow L} \left(\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \right) < \infty.$$

Глава V содержит два приложения. В приложение А вынесено доказательство теоремы типа Александрова–Пеллера–Рохберга–Янсона, а в Приложение Б – вывод упомянутого результата И. Каца из нашего критерия дискретности спектра.

Заключение содержит рассказ о дальнейшем развитии некоторых сюжетов работы и список открытых вопросов, подсказанных её результатами.

Работы автора по теме диссертации

[1] R. Romanov. On the concept of absolutely continuous subspace for nonselfadjoint operators // J. Operator Theory. – 2010. – Vol. 63.–No. 2.– p. 375–388.

[2] R. Romanov. A remark on equivalence of weak and strong definitions of the absolutely continuous subspace for nonself-adjoint operators // Operator Theory: Adv. Appl. – 2004. – Vol. 154. – Birkhäuser, Basel. – p. 179–184.

[3] Р. В. Романов. О неустойчивости абсолютно непрерывного спектра диссипативных операторов Шрёдингера и матриц Якоби // Алгебра и анализ. – 2005. – Т. 17. – №2. – С. 145–169.

[4] M. Marletta and R. Romanov. Absence of the absolutely continuous spectrum of a first-order non-selfadjoint Dirac-like system for slowly decaying perturbations // Ark. Mat. – 2006. – Vol. 44. – No. 1. – p. 132–148.

[5] R. Romanov. Estimates of solutions of linear neutron transport equation at large time and spectral singularities // Kinetic and Related Models. – 2012. – Vol. 5. – No. 1. – p. 113–128.

[6] R. Romanov. Order problem for canonical systems and a conjecture of Valent // Transactions Amer. Math. Soc. – 2017. – Vol. 369. – No. 2. – p. 1061–1078.

[7] R. Pruckner, R. Romanov and H. Woracek. Bounds on order of indeterminate moment sequences // Constructive Approximation. – 2017. – Vol. 46. – p. 199–225.

[8] R. Romanov and H. Woracek. Canonical systems with discrete spectrum // J. Functional Analysis. – 2020. – Vol. 278. – No. 4. – p. 108318.

[9] Р. В. Романов, М. А. Тихомиров. О самосопряженном подпространстве односкоростного оператора переноса // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89. – №1. – С. 91–103.

[10] A. Bufetov and R. Romanov. Division subspaces and integrable kernels // Bulletin London Math. Soc. – 2019. – Vol. 51. – p. 267–277.