На правах рукописи

Кумаллагов Давид Зелимович

ВЕСОВЫЕ СТРУКТУРЫ НА МОТИВНЫХ КАТЕГОРИЯХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2022

Работа выполнена на кафедре алгебры Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель: **Бондарко Михаил Владимирович,**
доктор физико-математических наук,
профессор РАН

Официальные оппоненты: **Ягунов Сергей Алексеевич,**
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова РАН,
старший научный сотрудник.

Фонарев Антон Вячеславович,
кандидат физико-математических наук,
факультет математики НИУ ВШЭ,
старший научный сотрудник.

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения РАН

Защита состоится “___”__________ 2022 года в __ часов на заседании диссертационного совета Д002.202.02 на базе ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН, http://www.pdmi.ras.ru

Автореферат разослан “___”__________ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Пономаренко Илья Николаевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности

В середине 1980-х годов А. Бейлинсон, опираясь на предшествующие идеи А. Гротендика, сформулировал ряд гипотез о существовании некоторых мотивных комплексов с заданными свойствами. В частности, он предположил существование так называемой весовой фильтрации на мотивных пучках, свойства которой должны быть аналогичны соответствующим свойствам для $l-$адических превратных пучков.

Данная программа была во многом реализована В. Воеводским, А. Суслиным, Ф. Морелем, М. Левином и др. А именно, Воеводский построил триангулированную категорию мотивов $DM(k)$ [34] , внутри которой имеются мотивные комплексы $\mathbb{Z}(n)$, и доказал различные их свойства, связывающие его категорию с классическими геометрическими объектами, например, группами Чжоу. Затем, совместно с Морелем, им была построена стабильная мотивная гомотопическая категория $SH(k)$. Эта категория является более «гибкой», чем $DM(k)$, что позволяет строить и исследовать внутри нее различные теории когомологий. Огромное количество топологических конструкций переносится в $SH(k)$, в частности, в ней определяется алгебра Стинрода, строятся спектры K-теории, алгебраических кобордизмов, Эйленберга–Маклейна. Одним из самых замечательных приложений возникшей таким образом науки стало доказательство Воеводским гипотез Блоха–Като и Бейлинсона–Лихтенбаума, что дополнительно подтвердило чрезвычайную силу разработанных методов и конструкций. Одновременно с этим, а также в последующие годы были построены различные категории «мотивной природы» (например, $SH^{S^1}(k)$, $D_{\mathbb{A}^1}(k)$, $MGl\text{-}Mod(k)$), конструкции которых инспирированы соответствующими конструкциями Мореля–Воеводского (Аюб, Цисинский, Деглиз и др., см. [6], [25], [26]).

Одним из важнейших инструментов для исследования всевозможных мотивных категорий является так называемая гомотопическая t-структура. Она чрезвычайно тщательно исследовалась большим количеством математиков, и для упомянутых выше категорий сердцевины являются классическими объектами «пучкового происхождения» [7], [16], [26], [28], [29], [31], [32], [34]. Но помимо t-структур, на триангулированных категориях также существуют весовые структуры w, определенные и детально изученные Бондарко [10] – [15], [17], [1], [18] – [23]. Весовые структуры во многом родственны, и являются естественными аналогами t-структур. В то время как t-структуры являются аксиоматизацией канонической фильтрации комплексов, весовые структуры аксиоматизируют глупую фильтрацию. В частности, для любого объекта M триангулированной категории $\underline{C}$ весовая структура w дает башню Постникова, факторы которой лежат в сердцевине $\underline{Hw}$ (которая является аддитивной, связной и Карубиевой категорией). Общая машинерия весов также дает весовые комплексы, весовые фильтрации и спектральные последовательности (в частности, широко обобщающие спектральные последовательности Атьи–Хирцебруха, Деліня, и коразмерности носителя); в дополнение, такой подход позволяет исследовать их функториальность. Кроме этого, для достаточно общей триангулированной категории $\underline{C}$ с весовой структурой w построен точный и консервативный функтор весового комплекса $\underline{C} \to K(\underline{Hw})$ [9], [10], [33].

Применительно к мотивам, в статьях [10] и [12] Бондарко была построена весовая структура Чжоу на категории $DM_{gm}^{eff}(k)$ в предположении, что экспоненциальная характеристика базового поля k обращена в кольце коэффициентов. Заметим, что в этих статьях существенно использовались утверждения о разрешении особенностей Хиронаки и Габбера. Ядром данной весовой структуры является классическая категория чистых мотивов Чжоу $Chow^{eff}$. Таким образом, данные построения позволяют получить упомянутый выше консервативный точный функтор весового комплекса $t : DM_{gm}^{eff}(k) \to K^b(Chow^{eff}(k))$ (а также его стабильную версию $t : DM_{gm}(k) \to K^b(Chow(k))$), который является триангулированным обобщением функтора весового комплекса Жилля–Суле [30]. Отметим, что данный функтор индуцирует изоморфизм на группах Гротендика K_0. Более того, описанные конструкции позволили построить функториальную (начиная с E_2) Чжоу-весовую спектральную последовательность и весовые фильтрации для любых теорий когомологий на $DM_{gm}^{eff}(k)$. В статье [10] было показано, что эта спектральная последовательность широко обобщает спектральную последовательность Деліня (построенную только в случаях сингулярных и этальных когомологий многообразий, и дающую функториальность лишь с рациональными коэффициентами).

В ходе дальнейшего исследования мотивного функтора весового комплекса, в статье [24] была построена крайне интересная теория гомологий CWH_j^i, названных Чжоу-весовыми. А именно, в упомянутой работе гомологический функтор $\mathrm{CWH}_j^i : DM_{gm}^{eff}(k) \to \underline{\mathrm{Ab}}$ определяется просто как i-е гомологии комплекса $DM_{gm}^{eff}(R\langle j\rangle, t(M))$, где $M \in DM_{gm}^{eff}(k)$. Там же были получены удивительные критерии эффективности мотива, его связности, а также ограниченности его веса в терминах обнуления некоторых групп Чжоу-весовых гомологий. Любопытно отметить, что абсолютно классическая техника и результаты о разложении диагонали могут быть переформулированы и доказаны на языке Чжоу-весовых гомологий; заметим, что такой подход значительно упрощает многие доказательства и является намного более концептуальным. Также Чжоу-весовые гомологии тесно связаны с мотивными гомологиями, но вычисляются несколько проще. Наконец, условие существования рациональных точек для собственных многообразий над конечными полями также может быть выражено через некоторые условия на CWH^i_j; это открывает возможности для систематического исследования этого вопроса и для случая сингулярных многообразий, который обычно намного сложнее, чем гладкий.

Цели и задачи работы

Целью настоящей диссертационной работы является построение различных весовых и t-структур, и их применение к различным мотивным категориям и некоторым вопросам алгебраической геометрии.

Во-первых, мы строим большое семейство *айлов* (это – некоторые классы объектов) в терминах мотивных спектров гладких многообразий и их подкруток; эти айлы дают весовые структуры, названные гладкими. Полученные нами конструкции обобщают построенные ранее Бондарко весовые структуры Чжоу в нескольких направлениях. А именно, наша конструкция применяется к различным мотивным категориям, а не только к $DM^{eff}_{gm}(k)$ и $DM^{eff}(k)$ (мы рассматриваем категории $SH^{S^1}(k)$, $MGl\text{-}Mod(k)$, $DM(k)$, $SH(k)$, $D_{\mathbb{A}^1}(k)$, $SH(k)^+$ и их эффективные версии); к тому же, она независима от различных утверждений о разрешении особенностей.

Во-вторых, с помощью наших айлов мы получаем всевозможные фильтрации на мотивных категориях, наиболее интересные из которых – (слабо) бирациональные, слайс и Чжоу-весовые. Далее, упомянутые выше гладкие весовые структуры дают гладкие t-структуры, с помощью которых строится интересная фильтрация на гомотопических сердцевинах $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$ максимальными слабо бирациональными подобъектами. Мы применяем наши конструкции к вычислениям неразветвленных когомологий, а также описываем некоторые «весовые» условия для $DM^{eff}(k)$ и $DM^{bir}(k)$ «геометрически».

Наконец, используя функтор весового комплекса t_R в случае классической w_{Chow} (в частности, обращая характеристику p базового поля k), мы расширяем теорию Чжоу-весовых гомологий на категорию $DM^{eff}(k)$. Она применяется к исследованию мотивных гомологий, весовых фильтраций Делиня и когомологий с компактными носителями; это значительно обобщает полученные ранее результаты работы [24].

Научная новизна и степень достоверности результатов

Все основные результаты диссертации являются новыми и снабжены подробными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования структуры мотивных категорий, их применений к вопросам вычисления различных когомологических инвариантов в алгебраической геометрии, для изучения алгебраических циклов на многообразиях. Материалы диссертации также могут быть использованы для проведения спецкурсов и спецсеминаров по темам «Теория мотивов и мотивных когомологий», «Теория $\mathbb{A}^1-$гомотопий», «Триангулированные категории», «Алгебраическая геометрия».

Методы исследования

Мы свободно используем различные конструкции и утверждения, относящиеся к мотивным категориям. Наиболее существенным образом используется гомотопическая t-структура и её свойства, а также теория бирациональных мотивных категорий и слайсов. Также используются общие техники и конструкции для триангулированных категорий, теория весовых структур, весовых комплексов и спектральных последовательностей. Для построения некоторых фильтраций очень важна теория смежных t-структур.

Положения, выносимые на защиту

- Определено большое семейство айлов на различных мотивных категориях; изучена их связь с гомотопической t-структурой.
- Доказано, что гомотопическая t-структура ограничивается на все n-бирациональные категории. Слабо бирациональные категории выражаются в терминах построенных айлов.
- Посредством данных айлов определены гладкие весовые и t-структуры, исследованы их свойства; слабая бирациональность объектов из $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$ выражена через их веса.

- На $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$ построена фильтрация максимальными слабо бирациональными подобъектами. Доказаны различные свойства этой фильтрации.

- Вычислены новые группы неразветвлённых когомологий.

- Теория Чжоу-весовых гомологий расширена на категорию $DM^{eff}(k)$; доказана эквивалентность обнуления высших групп мотивных и Чжоу-весовых гомологий в некоторых областях.

Апробация результатов

По результатам диссертационной работы были сделаны доклады на следующих семинарах и конференциях:

1. Восьмая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 2020.

2. Семинар по $\mathbb{A}^1$-топологии, мотивам и K-теории, лаборатория Чебышева, 2021.

3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021», Москва, 2021.

4. Санкт-Петербургский алгебраический семинар им. Д.К. Фаддеева.

Основные результаты данной работы подтверждены строгими математическими доказательствами и опубликованы в печатных работах соискателя [1], [2], [3], [4], [5]. Работы [1] – [3] вышли в журналах, входящих в список рекомендованных ВАК для соискателей учёной степени кандидата или доктора наук; [4] и [5] опубликованы в сборниках тезисов конференций. Статьи [1] – [3] были опубликованы совместно с научным руководителем. При этом научным руководителем были сформулированы задачи и указаны некоторые методы и конструкции, использованные в его предыдущих работах. Все основные положения диссертации, выносимые на защиту, получены диссертантом самостоятельно.

Содержание работы

Кратко опишем содержание диссертации и приведем формулировки основных утверждений.

В главе 1 приводятся базовые определения и обозначения, в основном, относящиеся к триангулированным категориям и t-структурам. Затем кратко обсуждаются всевозможные мотивные категории, и на них вводится гомотопическая $t_{hom}-$структура. Отметим, что мы формулируем необходимые далее свойства t_{hom} аксиоматически; такой подход инспирирован классической статьей [27]. Там же наши аксиомы рассмотрены в случае $SH^{eff}(k) \subset SH(k)$. Эти результаты взяты из статьи [3].

Глава 2 содержит важнейшие конструкции и технические результаты диссертации. Мы вводим на мотивных категориях $\mathfrak{D}^{eff}(k) \subset \mathfrak{D}(k)$ "гладкие" айлы $\mathcal{A}_s$ (порожденные мотивными спектрами $\mathcal{M}(\mathrm{SmVar})\langle j\rangle[s_j]$, где $s = s_j$ произвольная неубывающая последовательность). Эти айлы также описываются в терминах ростков, соответствующих полям функций. Затем изучается их поведение относительно $t_{hom}-$гомологий. А именно, получено следующее

<u>**Предложение A.**</u> *Следующие условия для объекта $C \in \mathfrak{D}$ равносильны:*
1. $C \in \mathcal{A}_s$.
2. $H_r^{t_{hom}}(C)[r] \in \mathcal{A}_s$ для любого $r \in \mathbb{Z}$.

Очевидная эффективная версия этого утверждения также выполняется.

Согласно нумерации диссертации, это предложение 2.1.3.

Далее, мы изучаем связь наших конструкций и n-бирациональных категорий. Здесь основным является

<u>**Предложение B.**</u> *Зафиксируем $r \geq -1$ и определим последовательность s^{r-bir} следующим образом: $s_j^{r-bir} = -\infty$ при $0 \leq j \leq r$, и $s_j^{r-bir} = +\infty$ при $j \geq r+1$. Тогда для $S \in \mathrm{Obj}\,\underline{Ht}_{hom}^{eff} \subset \mathfrak{D}^{eff}$ следующие условия эквивалентны:*
1. $S \in \mathcal{A}_{s^{r-bir}}$.
2. Когомологии Нисневича S обнуляются в степенях $> r$.
3. $S(K\{m\}) = \{0\}$ для всех полей функций K/k и $m > r$, где $S(K\{m\}) = \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(K)\{m\}, S)$.
4. $S(K\{r+1\}) = \{0\}$ для всех полей функций K/k.
5. $S_{-r-1} = 0$.

В тексте диссертации это предложение 2.1.5. Из этих предложений следует, что гомотопическая t-структура ограничивается на всевозможные категории $\mathfrak{D}^{n-bir} := \mathfrak{D}^{eff}\{n+1\}^{\perp}$.

Далее, через наши айлы определяются гладкие весовые структуры $w_{Smooth}^{eff,s}$ и w_{Smooth}^{s}, и получаются утверждения, аналогичные приведенным выше. Поскольку $w_{Smooth}^{eff,s}$ приведена, существует смежная t-структура $t_{Smooth}^{eff,s}$. Посредством этой t-структуры мы получаем следующую фильтрацию для любого объекта $E \in \mathrm{Obj}\,\underline{Ht}_{hom}^{eff}$:

$$F^{j,s}(E) = \mathrm{Im}_{\underline{Ht}_{hom}^{eff}}(H_0^{t_{hom}}(\tau_{\geq -j}^{t_{Smooth}^{eff,s}}(E)) \to H_0^{t_{hom}}(E) = E).$$

Для неё доказывается ключевая

Теорема C. *Пусть $-1 \le i \le +\infty$, $j \in \mathbb{Z}$.*

1. *Категория $\underline{Ht}^{i-bir,s}$ $i-$бирациональных объектов — абелева подкатегория Серра в $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$.*

   Обозначим через j_i соответствующее вложение и зафиксируем $E \in \mathrm{Obj}\,\underline{Ht}^{eff}_{hom}$.

2. *$F^{j,s}(E)$ — максимальный r-бирациональным подобъект E (в категории $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$); здесь r равно наименьшему $m \ge -1$, для которого $s_{m+1} \ge -j$, если такое m существует, и $r = +\infty$ в противном случае.*

   Таким образом, $F^{j,s}$ — правый сопряженный к вложению j_r.

3. *Функтор высшей неразветвленной части $R_{nr,i}$ даёт $t-$срезку $\tau_{\ge 0}^{t^{eff,s^{i-bir}}_{Smooth}}$.*

4. *Аналогично, $w^{eff,s^{i-bir}}_{Smooth}$-срезки дают соответствующие слайсы.*

5. *E лежит в $\underline{Ht}^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$ тогда и только тогда, когда он бирационален.*

В тексте диссертации эта теорема имеет номер 2.2.12. При некоторых $s = (s_j)$ мы получаем фильтрацию, гипотетически дающую фильтрацию Блоха–Бейлинсона–Мюрра. Также наша теорема применяется к вычислениям неразветвлённых когомологий. Завершается этот раздел различными утверждениями о сравнении гладкой весовой и t-структур, а также утверждениями о (слабой) весо-точности функторов $-\langle n\rangle$, локализации p_n и стабилизации i. Результаты этой главы опубликованы в статьях [3] и [1], а также в сборнике тезисов [5].

В главе 3 мы демонстрируем, что все вышесказанное применимо ко всем рассматриваемым нами мотивным категориям. Затем, мы исследуем вопрос локализации коэффициентов – это даёт возможность распространить полученные конструкции ещё и на категорию $SH(k)^+$. В разделах 3.3 исследуются категории $DM^{eff}(k) \subset DM(k)$ и весовая структура w_{Chow} (то есть, соответствующая последовательности $s = 0$). Доказаны следующие утверждения

Теорема D.

1. $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \subset \underline{Hw}_{\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R}$.

2. *Пусть R — $\mathbb{Z}[1/p]$-алгебра. Тогда весовая структура $w_{\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R}$ также порождается множеством $\mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar})$.*

3. *Функтор* $-\otimes_R^{mot} R'$ *является весо-точным (относительно весовых структур* $w_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ *и* $w_{\underline{\mathrm{Chow}}_{R'}^{eff}}$*).*

Предложение E.

1. Пусть многообразие U *можно представить в виде* $X \setminus \cup_{i=1}^n Z_i$*, где* X*, все* Z_i*, пересечения всех их наборов — гладкие собственные* k*-многообразия, и пересечение любого набора из более чем* m *различных* Z_i *пусто (для некоторых* $m \le n \in \mathbb{Z}$*).*

Тогда мотив $\mathcal{M}_R(U)$ *принадлежит оболочке* $\cup_{i=0}^m \mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$*, а значит, принадлежит* $(\mathrm{Obj}(\langle \mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle)) \cap DM_R^{eff}{}_{[0,m]}$*.*

2. Пусть $f : U \to V$ *— плотное открытое вложение, где* $U, V \in \mathrm{SmVar}$*. Тогда* $\mathrm{Cone}(\mathcal{M}_R(f)) \in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff} \le 0}$*.*

В работе приведенные предложения фигурируют под номерами 3.3.3 и 3.3.6. Завершается эта глава следующим геометрическим описанием бирациональной весовой структуры (предложение 3.3.7 диссертации)

Предложение F.

1. w_R^{bir} *ограничивается на триангулированную подкатегорию компактных объектов* $DM_{gm,R}^{bir}$*.*

2. *Категория* DM_R^{bir} *эквивалентна локализации категории* $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ *по локализующей подкатегории, порожденной конусами всех* $\mathcal{M}_R(f)$*, где* $f : U \to X$ *— плотное открытое вложение гладких многообразий над* k*.*

3. *Рассмотрим на категории* $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ *"глупую" весовую структуру, порожденную* $R_{tr}(\mathrm{SmVar})$*. Тогда на* DM_R^{bir} *существует весовая структура, для которой функтор локализации* $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}) \to DM_R^{bir}$ *весо-точен. Более того, эта весовая структура совпадает с* w_R^{bir}*.*

Основные результаты главы 3 опубликованы в статье [1], а разделы 3.1 и 3.2 в статье [3].

Глава 4 посвящена изучению Чжоу-весовых гомологий $\mathrm{CWH}_j^i(-_K, R, l)$. А именно, мы расширяем функтор $\mathrm{CWH}_j^i(-_K, R, l)$ на всю категорию DM_R^{eff}.

Основной результат этой главы – следующая теорема о связи Чжоу-весовых и мотивных гомологий (теорема 4.2.12 в тексте).

Теорема G. *Пусть* $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$ *для некоторых* $t_s \in \mathbb{Z}$, $n_s \geq 0$. *Тогда следующие условия на* $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$ *равносильны:*

(a). $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ *для любой пары* $(i,j) \in \mathcal{I}$ *и любого поля функций* K/k;

(b). $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ *для любого* K, $0 \leq r \leq n_s$, *и* $c \geq t_s$;

(c) $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ *для любого* K *и* $(r,c) \in \mathcal{I}$.

Из этого результата и некоторых дополнительных утверждений выводится следующая любопытная

Теорема H. *Пусть* $X \in \mathrm{Var}$, K — *универсальная область, содержащая* k, *и для некоторого множества* $\{(t_s,n_s)\} \subset \mathbb{Z} \times [0,+\infty)$ *и любых* $(r,c) \in \mathbb{Z} \otimes [0,+\infty)$, *т.ч.* $0 \leq r \leq n_s$ *и* $c \geq t_s$ *для некоторого* s, *выполнено* $CH_r(X_K, -c, \mathbb{Q}) = \{0\}$.

1. Тогда существует $E_X > 0$ *такое, что* $E_X CH_r(X_{k'}, -c, \mathbb{Z}[1/p]) = \{0\}$ *для любых* $(r,c) \in \mathcal{I}$ *и любого расширения* k'/k, *где* $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$.

2. Если k — *подполе* $\mathbb{C}$, *а* $l, m \in \mathbb{Z}$, *то* $(m+l)$*-й весовой фактор Делиня* $H^m_c(X_{\mathbb{C}})$ *(*$\mathbb{Q}$*-линейных) сингулярных когомологий* $X_{\mathbb{C}}$ *с компактными носителями* $a_{\mathcal{I},l}$*– эффективен как чистая структура Ходжа.*

Кроме того, аналогичные свойства факторов Делиня имеются и для этальных когомологий $H^q_c(X_{k^{alg}}, \mathbb{Q}_\ell)$, *если* k *– совершенное замыкание поля, имеющего конечную степень трансцендентности над простым подполем.*

В диссертации эта теорема имеет номер 4.3.5.

Результаты главы 4 опубликованы в статье [2] и сборнике тезисов [4].

Объём и структура диссертации

Текст диссертации изложен на 75 страницах и содержит одну иллюстрацию. Он включает в себя введение, четыре главы и заключение. Библиография содержит 56 наименований.

Заключение

Подведём итоги диссертационного исследования.

- В терминах мотивных спектров гладких многообразий построено большое семейство айлов на различных триангулированных мотивных категориях. Они выражаются через гомотопические t-структуры, слайс и бирациональные фильтрации.

- В терминах построенных айлов получены критерии слабой бирациональности объектов из $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$.

- Получены гладкие весовые и t-структуры, обобщающие весовые структуры Чжоу. Доказано, что они дают бирациональные фильтрации на $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$. Также получены новые вычисления неразветвлённых когомологий.

- Получены геометрические теоремы сравнения для гладкой весовой структуры с параметром $s = 0$ (то есть, весовой структуры Чжоу, построенной по гладким многообразиям).

- Теория Чжоу-весовых гомологий расширена на категорию $DM^{eff}(k)$. Доказана эквивалентность обнуления некоторых высших мотивных и Чжоу-весовых гомологий. Также доказана ограниченность показателей мотивных гомологий геометрических мотивов при условии, что эти группы являются группами кручения.

В перспективе планируется изучить следующие естественно возникающие вопросы.

1. Интересно обобщить наши весовые и t-структуры и связанные результаты на случай относительных мотивов над общей базовой схемой. Также планируется исследовать весо-точность различных связующих функторов между мотивными категориями.

2. В [8] была рассмотрена t-структура, порожденная объектами вида $Th_X(\xi)$, где $X \in SmProj/k$ и $\xi \in K(X)$. Вероятно, эта t-структура двойственна (в некотором смысле) нашей $t^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$.

3. Используя результаты данной работы (в особенности §2.2.3), возможно обобщить Чжоу-весовые (ко)гомологии на произвольные мотивные категории. Наиболее интересный случай – $SH(S)$ (для «разумной» базовой схемы S).

4. Для каких объектов $S \in \underline{Ht}^{eff}_{hom}$ наша фильтрация конечна (т.е., существует N с условием $F^N(S) = S$)? Исчерпывающая ли она?

Благодарности

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Михаилу Владимировичу Бондарко.

Работы автора по теме

[1] М.В. Бондарко, Д.З. Кумаллагов. Весовые структуры Чжоу без проективности и разрешения особенностей// Алгебра и анализ. – 2018. –Т.30, № 5. – С. 57—83, переведено в St. Petersburg Math. J., 30:5 (2019), 803–819.

[2] М.В. Бондарко, Д.З. Кумаллагов. Чжоу-весовые гомологии мотивных комплексов и их связь с мотивными гомологиями// Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). вып. 4, переведено в Vestnik St. Peters. Univers., Mathematics, 2020, vol. 53(4), 377–397.

[3] М.В. Бондарко, Д.З. Кумаллагов. Гладкие весовые структуры и бирациональные фильтрации на мотивных категориях// Алгебра и анализ. – 2021. –Т.33, № 5. – С. 51—79.

[4] Д.З. Кумаллагов. Чжоу-весовые и мотивные (ко)гомологии //Восьмая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", Москва, Россия, 27 января - 1 февраля 2020 г. Тезисы докладов, Москва: МЦНМО, 2020, с. 39.

[5] Д.З. Кумаллагов. Гладкие весовые структуры и слабо бирациональные объекты в мотивных категориях //Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2021.

Список литературы

[6] J. Ayoub, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I), Astérisque, vol. 314, Soc. Math. France, 2007.

[7] J. Ayoub, Motives and algebraic cycles: a selection of conjectures and open questions, in: Hodge theory and L^2-analysis, 87–125, Adv. Lect. Math. (ALM), 39, Int. Press, Somerville, MA, 2017.

[8] T. Bachmann, Hana Jia Kong, Guozhen Wang, Zhouli Xu, The Chow t-structure on motivic spectra, preprint, 2020, `https://arxiv.org/abs/2012.02687`.

[9] M.V. Bondarko, Differential graded motives: weight complex, weight filtrations and spectral sequences for realizations; Voevodsky vs. Hanamura, J. of the Inst. of Math. of Jussieu, v. 8(1), 2009, 39–97, см. также `http://arxiv.org/abs/math.AG/0601713`.

[10] M.V. Bondarko, Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)// J. of K-theory, v. 6(3), 2010, 387–504, see also http://arxiv.org/abs/0704.4003.

[11] M.V. Bondarko, Motivically functorial coniveau spectral sequences; direct summands of cohomology of function fields// Doc. Math., extra volume: Andrei Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 33–117; see also http://arxiv.org/abs/0812.2672.

[12] M.V. Bondarko, $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-motivic resolution of singularities// Compositio Math. 147(5), 2011, 1434–1446.

[13] M.V. Bondarko, Gersten weight structures for motivic homotopy categories; retracts of cohomology of function fields, motivic dimensions, and coniveau spectral sequences, preprint, 2018, https://arxiv.org/abs/1803.01432.

[14] M.V. Bondarko, On weight complexes, pure functors, and detecting weights// J. of Algebra 574 (2021), 617–668.

[15] M.V. Bondarko, From weight structures to (orthogonal) t-structures and back, preprint, 2019, https://arxiv.org/abs/1907.03686.

[16] M.V. Bondarko, F. Déglise, Dimensional homotopy t-structures in motivic homotopy theory// Adv. Math., vol. 311 (2017), 91–189.

[17] M.V. Bondarko, On torsion pairs, (well generated) weight structures, adjacent t-structures, and related (co)homological functors, препринт, 2016, https://arxiv.org/abs/1611.00754.

[18] Bondarko M.V., Luzgarev A. Ju., On relative K-motives, weights for them, and negative K-groups, preprint, 2016, http://arxiv.org/abs/1605.08435.

[19] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On purely generated α-smashing weight structures and weight-exact localizations// J. of Algebra, 2019, vol.535, 407–455.

[20] M.V. Bondarko, Intersecting the dimension and slice filtrations for motives// Homology, Homotopy and Appl., vol. 20(1), 2018, 259–274.

[21] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, Non-commutative localizations of additive categories and weight structures; applications to birational motives// J. of the Inst. of Math. of Jussieu, vol. 17(4), 2018, 785–821.

[22] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions// Homology, Homotopy and Appl., vol. 20(1), 2018, 37–57.

[23] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On the weight lifting property for localizations of triangulated categories, Lobachevskii J. of Math., vol. 39(7), 2018, 970–984.

[24] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On Chow-weight homology of geometric motives, 2020, to appear in Trans. AMS.

[25] D.-C. Cisinski, F. Déglise, Integral mixed motives in equal characteristic, Documenta Mathematica, Extra Volume: Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday, 2015, 145–194.

[26] D.-C. Cisinski, F. Déglise, Triangulated categories of mixed motives, 2019, Springer Monographs in Mathematics.

[27] J.- L. Colliot-Théléne, R.T. Hoobler, and B. Kahn. The Bloch-Ogus-Gabber theorem. In: Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), volume 16 of Fields Inst. Commun., 31–94. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[28] F. Déglise, Modules homotopiques (Homotopy modules)// Doc. Math. 16 (2011), 411–455.

[29] F. Déglise, Orientable homotopy modules// Amer. Journ. of Math., 135(2), 519–560, 2013.

[30] H. Gillet, C. Soulé, Descent, motives and K-theory// J. f. die reine und ang. Math. v. 478, 1996, 127–176.

[31] F. Morel, An introduction to A^1-homotopy theory, in: Contemporary Developments in Algebraic K-theory (M. Karoubi, A. O. Kuku, C. Pedrini eds.), ICTP Lecture Notes, vol. 15, 2003, 357–441.

[32] F. Morel, The stable A^1-connectivity theorems// K-theory, 35(1), 1–68, 2005.

[33] V.A. Sosnilo, Theorem of the heart in negative K-theory for weight structures// Doc. Math. 24 (2019), 2137–2158.

[34] V. Voevodsky, Triangulated category of motives, in: Voevodsky V., Suslin A., and Friedlander E., Cycles, transfers and motivic homology theories, Annals of Mathematical studies, vol. 143, Princeton University Press, 2000, 188–238.