На правах рукописи

Рядовкин Кирилл Сергеевич

Ветвящиеся случайные блуждания на периодических графах с периодическими источниками ветвления

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Санкт-Петербург – 2019

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, **Смородина Наталия Васильевна,** ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), ведущий научный сотрудник.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук **Яровая Елена Борисовна,** ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, профессор, кандидат физико-математических наук; **Васильчук Владимир Юрьевич,** ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, доцент.
Ведущая организация:	ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита состоится «____» ____________ 2019 г. в __.__ на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ПОМИ по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ПОМИ http://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council/.

Автореферат разослан «____» ____________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Зайцев А. Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В теории вероятностей ветвящееся случайное блуждание является стохастическим процессом, который обобщает понятия случайного блуждания и ветвящегося процесса. Возникшая в середине 19-го столетия как теория, пытавшаяся объяснить причины вырождения знаменитых фамилий в Великобритании (задача Гальтона–Ватсона), теория ветвящихся процессов стала в настоящее время разветвленной областью теории вероятностей и мощным инструментом исследования в различных областях математики, таких как теория алгоритмов, теория массового обслуживания, теория случайных отображений, теория просачивания, а также во многих разделах других наук, в число которых входят, в частности, физика, химия и биология [18], [19]. Также случайные блуждания находят применения в экономике [20], [21].

Сам термин «ветвящийся процесс» был впервые предложен А.Н. Колмогоровым и Н.А. Дмитриевым в статье [9], посвященной анализу эволюции популяций вероятностными методами. После первых московских публикаций (работы А.Н.Колмогорова и его учеников) по ветвящимся процессам в 1947–1948 гг. в США также появилось несколько работ на аналогичную тему, часть из которых, по всей видимости, была связана с работами по созданию атомного оружия в Лос–Аламосе (работы С. Улама, Д. Хокинса, К. Дж. Эверетта). Поэтому позднее все исследования, связанные с ветвящимися процессами, были засекречены (см. [11]).

В настоящее время имеется большое число публикаций, посвященных изучению ветвящихся случайных блужданий (ВСБ). Приведем здесь краткий обзор публикаций, связанных с тематикой настоящего исследования.

В работах [1, 2, 12, 13, 14, 16, 17] рассматривались модели ВСБ на решетке $\mathbb{Z}^d$ с конечным числом источников ветвления одного типа, при этом интенсивность ветвления характеризовалась положительным числом β, которое связано со средним числом потомков одной частицы. Матрица переходных интенсивностей $A_0 = \big(a(v,u)\big)_{v,u\in\mathbb{Z}^d}$ в этих моделях предполагалась однородной, то есть для всех $u, v \in \mathbb{Z}^d$ элементы матрицы $a(u,v)$ удовлетворяли соотношению $a(v,u) = a(u,v) = a_0(u-v)$, причем функция $a_0(u)$ удовлетворяла условиям $a_0(u) \geqslant 0$ при $u \neq 0$, $a_0(0) < 0$, $\sum\limits_{u\in\mathbb{Z}^d} a_0(u) = 0$ и $\sum\limits_{u\in\mathbb{Z}^d} \|u\|^2 a_0(u) < \infty$, где $\|u\|$ – евклидова норма вектора u в $\mathbb{R}^d$. Из этих условий следует, что соответствующее случайное блуждание симметрично, однородно и имеет конечную дисперсию скачков. Предполагалось также, что случайное блуждание является неприводимым, то есть любая точка $v \in \mathbb{Z}^d$ достижима (см. [8]).

Размножение и гибель частиц в источнике ветвления задавалось процессом Бьеноме–Гальтона–Ватсона. Именно, ветвление в источниках задавалось производящей функцией $b(s) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k s^k$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, где $b_k \geqslant 0$ при $k \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k = 0$. Коэффициент b_k отвечает за интенсивность деления частицы на k потомков. Для любого натурального n величина $b^{(n)}(1)$ предполагалась конечной. Через β обозначалась величина $\beta = b'(1)$. Всюду далее величину β будем называть интенсивностью ветвления.

Для такой модели ветвящегося случайного блуждания были найдены условия экспоненциального роста среднего числа частиц в произвольной фиксированной точке решетки при $t \to \infty$. Именно, было показано, что существует критическое значение β_c, такое что при $\beta > \beta_c$ в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, появляется положительное собственное значение. Также было показано, что при $d = 1$ или $d = 2$ критическое значение β_c равно нулю, а при $d \geqslant 3$ критическое значение β_c строго больше нуля. Было также показано, что если в спектре оператора существует положительное собственное значение λ, то при $t \to \infty$ для локальной (т.е. в фиксированной точке $u \in \mathbb{Z}^d$) $\mu(t,u)$ и полной численностей частиц $\mu(t)$ справедливы соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t,u)e^{-\lambda t} = \xi\psi(u), \quad \lim_{t\to\infty} \mu(t)e^{-\lambda t} = \xi,$$

где $\psi(u)$ – некоторая функция на $\mathbb{Z}^d$, а ξ – невырожденная случайная величина.

В работе [22] была введена другая модель ВСБ – каталитическое ветвящееся случайное блуждание по $\mathbb{Z}$ с одним источником ветвления в начале координат. Был введен дополнительный параметр, отвечающий за соотношение между «ветвлением» и «блужданием» в источнике ветвления, что привело к тому, что генератор случайного блуждания перестал быть симметричным. В последующих работах [3, 5, 6, 7] было продолжено исследование таких моделей для случая целочисленной решетки произвольной конечной размерности $\mathbb{Z}^d$. Отметим также, что в работах [6], [7] было исследовано асимптотическое поведение вероятностей невырождения такого процесса к моменту $t \to \infty$ и наличия в нуле хотя бы одной частицы в момент времени $t \to \infty$, а также доказаны условные предельные теоремы для количества частиц, находящихся в момент времени t в начале координат и вне его. Отметим еще работу [4], в которой обобщаются данные результаты на случай конечного числа источников ветвления. В данных работах используется другой подход, основанный на представлении ВСБ как ветвящегося процесса с несколькими типами частиц, а также на применении многомерных теорем восстановления.

Далее, были рассмотрены модели ВСБ с бесконечной дисперсией скачков [10], [15], [23]. Для такого ВСБ было показано, что при выполнении дополнительного условия на функцию $a_0(x)$, описывающую случайное блуждание,

$$a_0(z) = \frac{H\left(|z|/z\right)}{|z|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0,2),\ z \in \mathbb{Z}^d,\ z \neq 0,$$

где $H(z)$ – положительная ограниченная симметричная функция, ВСБ невозвратно в размерности $d = 1$ при $\alpha \in (0,1)$, а в размерности $d = 2$ при $\alpha \in (0,2)$.

Цель диссертационной работы. Целью настоящей диссертации является изучение асимптотического поведения при $t \to \infty$ среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с бесконечным числом источников ветвления в предположении, что интенсивность ветвления $\beta(v)$, $v \in \mathbb{Z}^d$, является периодической функцией на $\mathbb{Z}^d$ относительно некоторой d-мерной решетки $\Gamma \subset \mathbb{Z}^d$. Предположение об однородности блуждания также заменено на более слабое предположение об инвариантности элементов $a(u,v)$ матрицы переходных интенсивностей относительно сдвигов на элементы решетки Γ, то есть $a(v,u) = a(v+g, u+g)$ для любого $g \in \Gamma$. Эта конструкция соответствует ВСБ на графе $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$ с множеством вершин $\mathbb{Z}^d$ и множеством ребер

$$\mathcal{E} = \{(v,u) : a(v,u) > 0,\ v,u \in \mathbb{Z}^d\}. \tag{1}$$

Методы исследований. В данной работе наряду с чисто вероятностными методами используются методы теории операторов, спектральной теории и асимптотической теории.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах теории вероятностей, стохастического анализа и спектральной теории разностных операторов на периодических графах. Результаты и методы работы могут быть востребованными в исследованиях, проводимых в Санкт-Петербургском государственном университете, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Новосибирском государственном университете, институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1) Показано, что асимптотическое поведение при $t \to \infty$ среднего числа частиц ВСБ на периодическом графе с периодической интенсивностью источников ветвления определяется наибольшим собственным значением $\lambda_1(0)$ конечной матрицы $A(0)$, коэффициенты которой явно выражают-

ся через матрицу интенсивностей переходов и функции интенсивности ветвления.

2) В предположении о существовании второго момента у скачков случайного блуждания найден старший член асимптотики среднего числа частиц ВСБ в фиксированной вершине графа.

3) В предположении о существовании всех моментов у скачков случайного блуждания получено асимптотическое разложение среднего числа частиц ВСБ в фиксированной вершине графа.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике ПОМИ (Санкт-Петербург, март 2018 г.), на семинаре отдела теории вероятностей и математической статистики МИАН (Москва, март 2018 г.), на Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (Крым, 17–29 сентября 2018 г.), на Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, 24–26 декабря 2018), на семинаре кафедры Высшей математики и математической физики СПбГУ (Санкт-Петербург, ноябрь 2017 г.), на Санкт-Петербургской зимней молодежной конференции по теории вероятностей и математической физике (Санкт-Петербург, 19–21 декабря 2017), на международной конференции Third Indo-Russian meeting in probability and statistics (Индия, Бангалор, 8–12 января 2018), на международной конференции 3rd International Conference on Stochastic Methods (Divnomorskoye, 3–9 June 2018).

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в четырех работах [24, 25, 26, 27], опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложения и заключения. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм.

Общий объем диссертации составляет 79 страниц. Список литературы содержит 76 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований. Также приведен исторический обзор литературы по теме диссертации.

В первой главе диссертации описывается модель ветвящегося случайного блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем и периодической функцией интенсивности ветвления.

Пусть $g_1, \ldots, g_d \in \mathbb{Z}^d$ – набор линейно независимых (не обязательно ортогональных) векторов с целочисленными координатами. Будем называть решеткой множество

$$\Gamma = \{g \in \mathbb{Z}^d : g = \sum_{j=1}^{d} n_j g_j,\ n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, d\},$$

а множество $\{g_j\}_{j=1}^d$ будем называть базисом решетки Γ. Отметим, что различные базисы могут порождать одну и ту же решетку.

Будем обозначать через $\|g\|$ евклидову норму вектора в $\mathbb{R}^d$. Предположим, что случайное блуждание частиц имеет матрицу переходных интенсивностей $A_0 = \big(a(v,u)\big)_{v,u \in \mathbb{Z}^d}$, для элементов которой выполнены условия:

(i) $a(v,u) \geqslant 0, \quad v \neq u;$

(ii) $a(v,v) < 0;$

(iii) $\sum\limits_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v,u) = 0;$

(iv) $a(v,u) = a(u,v) = a(v+g, u+g), \quad \forall g \in \Gamma;$

(v) $\sum\limits_{u\in\mathbb{Z}^d} \|u\|^2 |a(v,u)| < \infty,\ v \in \mathbb{Z}^d;$

(vi) для любых $v, u \in \mathbb{Z}^d$ существует путь $v = u_0, u_1, \ldots, u_m = u$, такой что $a(u_{i-1}, u_i) > 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Условие (iv) означает, что коэффициенты матрицы A_0 являются инвариантными относительно сдвига на любой вектор из Γ. Свойство (v) означает конечность дисперсии скачков случайного блуждания. Условие (vi) означает, что любая точка $u \in \mathbb{Z}^d$ достижима, то есть соответствующее блуждание неприводимо (см. §6, гл. 3, [8]). Существование данного марковского процесса обеспечивает теорема 2, §3, гл. 7, [8].

Введем на $\mathbb{Z}^d$ отношение эквивалентности, именно, точки $u, v \in \mathbb{Z}^d$ назовем эквивалентными, если $u - v \in \Gamma$. Соответствующее фактор-пространство обозначим через $\Omega = \mathbb{Z}^d/\Gamma$. Множество Ω всегда конечно, через p обозначим число элементов этого множества. Множество Ω будем называть фундаментальным множеством вершин, его можно отождествить с некоторым множеством $\{v_1, \ldots, v_p\}$ попарно неэквивалентных элементов $\mathbb{Z}^d$. Для фиксированного выбора $\Omega = \{v_1, \ldots, v_p\}$ любая вершина $u \in \mathbb{Z}^d$ единственным образом представляется в виде $u = \omega_u + \gamma_u$, где $\omega_u \in \Omega$ и $\gamma_u \in \Gamma$.

Заметим, что условие (vi) равносильно условию связности графа $G = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$ с множеством ребер, определенным (1). Пусть H – матрица перехода от базиса $g_1, \ldots, g_d$ к стандартному базису $\mathbb{Z}^d$. Обозначим через B транспонированную к H матрицу. Тогда граф G изоморфен графу $BG = (\mathcal{V}_B, \mathcal{E}_B)$, где

$$\mathcal{V}_B = \{x \in \mathbb{R}^d : Bx \in \mathbb{Z}^d\}, \qquad \mathcal{E}_B = \{(x,y) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : (Bx, By) \in \mathcal{E}\}.$$

Граф BG вложен в $\mathbb{R}^d$, является $\mathbb{Z}^d$-периодическим, то есть периодический относительно решетки, порожденной стандартным базисом $\mathbb{Z}^d$, и содержит конечное число вершин в единичном кубе. Исследуемое случайное блуждание может быть рассмотрено как случайное блуждание на графе BG.

Источник ветвления в каждой вершине $v \in \mathbb{Z}^d$ в рассматриваемой нами модели описывается последовательностью коэффициентов $b_k(v)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющих условиям

$$b_1(v) \leqslant 0, \quad b_k(v) \geqslant 0 \text{ при } k \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(v) = 0.$$

Размножение и гибель частиц в источнике ветвления в вершине $v \in \mathbb{Z}^d$ задается процессом Бьеноме–Гальтона–Ватсона, где $b_k(v)$ – интенсивность деления частицы на k потомков.

Далее мы предполагаем, что для любой $v \in \mathbb{Z}^d$ выполнено

$$\beta(v) = \sum_{k=1}^{+\infty} k b_k(v) < \infty,$$

то есть число потомков в каждом источнике имеет конечный первый момент. Кроме того, мы предполагаем, что функция $\beta(v)$ является Γ-периодической, то есть $\beta(v+g) = \beta(v)$ для любого вектора $g \in \Gamma$. Соответственно, на всем $\mathbb{Z}^d$ у нас имеется p источников различной интенсивности.

В первой главе также приводится обратное уравнение Колмогорова, которому удовлетворяет среднее число частиц в фиксированной точке решетки. Именно, обозначим через $M(v,u,t)$ среднее число частиц в момент времени t в точке u, при условии, что в начальный момент времени $t=0$ у нас была одна частица, которая находилась в точке v. При фиксированном $u \in \mathbb{Z}^d$ функция $M(v,u,t)$, как функция аргументов v и t, является единственным решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial t}(v,u,t) & = \big(\mathcal{A}M\big)(v,u,t), \\ M(v,u,0) & = \delta_u(v), \end{cases}$$

где оператор $\mathcal{A} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ действует по следующему правилу:

$$\mathcal{A}f(v) = \sum_{u \in \mathbb{Z}^d} a(v,u) f(u) + (Qf)(v),$$

$Q : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ – оператор поточечного умножения на функцию $Q(v)$, периодическую относительно решетки Γ:

$$(Qf)(v) = Q(v)f(v), \quad Q(v_j + g) = \beta_j, \quad v_j \in \Omega,\, g \in \Gamma,$$

а функция $\delta_u(\,\cdot\,)$ – индикаторная функция одноточечного множества $\{u\}$. Оператор $\mathcal{A}$, стоящий в этом уравнении, и является основной целью дальнейших исследований.

Во второй главе с помощью разложения в прямой интеграл и некоторых других классических приемов спектральной теории операторов и матричного анализа исследуется спектр оператора $\mathcal{A}$. Именно, исследуется положение правого края спектра, а также характер поведения старшей зонной функции в окрестности этого края. Результаты во многом похожи на аналогичные результаты, полученные другими авторами для весового комбинаторного оператора Лапласа на периодическом локально конечном графе. Интересующий нас оператор $\mathcal{A}$ является весовым оператором Лапласа для некоторого графа, вообще говоря, не локально конечного. Это приводит к ряду дополнительных технических трудностей.

Будем говорить, что базис $\{\widetilde{g}_j\}_{j=1}^d$ является двойственным к $\{g_j\}_{j=1}^d$, если $\langle \widetilde{g}_i, g_j \rangle = 2\pi\delta_{ij}$. Определим множество $\widetilde{\mathcal{C}}$ как

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \Big\{\theta \in \mathbb{R}^d : \theta = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \widetilde{g}_j,\ 0 \leqslant \theta_j < 1,\, j = 1, \ldots, d\Big\}.$$

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{A} : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов, то есть справедливо представление*

$$U\mathcal{A}U^{-1} = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \oplus A(\theta)\, d\theta,$$

где $U : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \mathcal{H}$ – унитарный оператор. Оператор $A(\theta) : \ell^2(\Omega) \to \ell^2(\Omega)$ имеет вид

$$(A(\theta)f)(v) = \sum_{u \in \Omega} \widetilde{a}(v, u, \theta) f(u) + \widetilde{Q}(v) f(v), \qquad v \in \Omega,\, \theta \in \widetilde{\mathcal{C}},$$

где коэффициенты $\widetilde{a}(v,u,\theta)$ и потенциал $\widetilde{Q}$ определяются равенствами

$$\widetilde{a}(v,u,\theta)=\sum_{g\in\Gamma}e^{-i\langle g,\theta\rangle}a(v+g,u),$$

$$\big(\widetilde{Q}f\big)(v)=Q(v)f(v),\quad v\in\Omega.$$

Из теоремы 1 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из p спектральных зон (возможно перекрывающихся) $\sigma(\mathcal{A})=\bigcup\limits_{j=1}^{p}\lambda_j(\widetilde{\mathcal{C}})$, где через $\lambda_j(\widetilde{\mathcal{C}})$ обозначена область значений функции $\lambda_j(\theta)$, $\theta\in\widetilde{\mathcal{C}}$.

В диссертации показано, что правый край спектра оператора $\mathcal{A}$ совпадает со старшим собственным значением матрицы

$$A(0)=\begin{pmatrix}\widetilde{a}_{11}(0)+\beta_1 & \widetilde{a}_{12}(0) & \cdot s & \widetilde{a}_{1p}(0)\\ \widetilde{a}_{21}(0) & \widetilde{a}_{22}(0)+\beta_2 & \cdot s & \widetilde{a}_{2p}(0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \widetilde{a}_{p1}(0) & \widetilde{a}_{p2}(0) & \cdot s & \widetilde{a}_{pp}(0)+\beta_p\end{pmatrix},$$

где коэффициенты матрицы $\widetilde{a}_{jk}(0)$ выражаются через коэффициенты матрицы переходных интенсивностей $\widetilde{a}_{jk}(0)=\sum\limits_{g\in\Gamma}a(v_j+g,v_k)$.

Результаты первой и второй глав опубликованы в работах [25] и [26].

В третьей главе приводятся и доказываются основные результаты об асимптотическом поведении среднего числа частиц в фиксированной точке $\mathbb{Z}^d$ и среднего числа частиц на всем $\mathbb{Z}^d$.

Для среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания $M(v,u,t)$ при $t\to\infty$ доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *При $t\to\infty$ для функции $M(v,u,t)$ старший член асимптотики имеет вид*

$$M(v,u,t)=e^{\lambda_1(0)t}t^{-d/2}\frac{(2\pi)^{d/2}\,\psi_1(\omega_v,0)\,\psi_1(\omega_u,0)}{|\widetilde{\mathcal{C}}|\sqrt{|\det\lambda_1''(0)|}}\Big(1+O(t^{-1})\Big),$$

где $\lambda_1(0)$ – старшее собственное значение матрицы $A(0)$, $\psi_1(\,\cdot\,,0)$ – отвечающая ему собственная функция, а $\lambda_1''(0)$ – матрица Гессе функции $\lambda_1(\theta)$ в точке $\theta=0$.

Теорема 3. *Если для любого натурального N и для любого $v \in \mathbb{Z}^d$ выполнено условие*

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}^d} \|u\|^N |a(v,u)| < \infty,$$

то справедливо асимптотическое разложение

$$M(v,u,t) \stackrel{as}{=} e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v,u)\, t^{-k}.$$

Все коэффициенты $c_k(v,u)$ могут быть вычислены явно.

Также в этой главе приводятся два достаточных условия существования положительного собственного значения матрицы $A(0)$ (что приводит к экспоненциальному росту численности частиц) и исследовано асимптотическое поведение старшего собственного значения матрицы $A(0)$ при стремлении константы связи при потенциале к нулю или бесконечности.

В последнем параграфе рассматривается частный случай вышеописанной конструкции – однородное ВСБ с одинаковой интенсивностью источников ветвления.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [24].

В четвертой главе диссертации рассматривается ряд примеров: случайное блуждание на $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, с возможностью перехода только в соседние точки, случайные блуждания на графах, соответствующих графену и станину.

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [24] и [27].

В Приложении приведен ряд вспомогательных утверждений.

В Заключении кратко изложены основные результаты диссертации.

Список литературы

[1] Антоненко Е. А., Яровая Е. Б. Расположение положительных собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случай-

ном блуждании. // Современные проблемы математики и механики – 2015, т. 10, № 3, с. 9–22.

[2] Богачев Л. В., Яровая Е. Б. Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. // Докл. РАН. – 1998, т. 363, № 4. с. 439–442.

[3] Булинская Е. Вл. Каталитическое ветвящееся случайное блуждание по двумерной решетке. // Теория вероятн. и ее примен. – 2010, т. 55, № 1, с. 142–148.

[4] Булинская Е. Вл. Полная классификация каталитических ветвящихся процессов. // Теория вероятн. и ее примен. – 2014, т. 59, № 4, 639–666.

[5] Ватутин В. А., Топчий В. А. Предельная теорема для критических каталитических ветвящихся случайных блужданий. // Теория вероятн. и ее примен. – 2004, т. 49, № 3, с. 461–484.

[6] Ватутин В. А., Топчий В.А., Ху Ю. Ветвящееся случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}^4$ с ветвлением лишь в начале координат. // Теория вероятн. и ее примен. – 2011, т. 56, № 2, 224–247.

[7] Ватутин В. А., Топчий В. А. Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с ветвлением в нуле. // Матем. труды. – 2011, т. 14, № 2, 28–72.

[8] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. – Москва: Наука, 1965, т. 3.

[9] Колмогоров А. Н., Дмитриев Н. А. Ветвящиеся случайные процессы. // Докл. АН СССР. – 1947, т. 56. №. 1. с. 7–10.

[10] Рытова А. И., Яровая Е. Б. Многомерная лемма Ватсона и ее применение. // Матем. заметки. – 2016, т. 99, № 3, С. 395–403.

[11] Ширяев А. и др. (ред.). Колмогоров в воспоминаниях учеников. – Litres, 2017.

[12] Яровая Е. Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. // ЦПИ при мехмате Моск. ун-та, М. – 2007, т. 104.

[13] Яровая Е. Б. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий. // Теория вероятн. и ее примен. – 2010, т. 55. №. 4. с. 705–731.

[14] Яровая Е. Б. Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий. // Матем. заметки. – 2012, т. 92, № 1, с. 123–140.

[15] Яровая Е. Б. Спектральная асимптотика надкритического ветвящегося случайного блуждания. // Теория вероятн. и ее примен. – 2017, т. 62, № 3. с. 518–541.

[16] Яровая Е. Б. Ветвящееся случайное блуждание с разбегающимися источниками. // Успехи матем. наук. – 2018, т. 73, № 3(441), с. 181–182.

[17] Albeverio S., Bogachev L. V., Yarovaya E. B. Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. – 1998, v. 326, № 8, p. 975–980.

[18] Cranston M., Koralov L., Molchanov S., Vainberg B. A solvable model for homopolymers and self-similarity near the critical point. // Rand. Oper. Stoch. Eq. – 2010, v. 18. № 1. p. 73–95.

[19] Kimmel M., Axelrod D. E. Branching Processes in Biology. – Interdisciplinary Applied Mathematics, 2002.

[20] Malkiel B. G., McCue K. A random walk down Wall Street. – New York: Norton, 1985.

[21] Nelson C. R., Plosser C. R. Trends and random walks in macroeconmic time series: some evidence and implications. // J. Monet. Econ. – 1982, v. 10. № 2. p. 139–162.

[22] Topchii V., Vatutin V., Yarovaya E. Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. // Theory Probab. Math. Stat. – 2004, v. 69, p. 1–15.

[23] Yarovaya E. Branching random walks with heavy tails. // Comm. Statist. Theory Methods. 2013, v. 42, № 16, p. 3001–3010.

Публикации автора по теме диссертации

[24] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^d$ с периодическими источниками ветвления. // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2017, т. 466, с. 234–256.

[25] Платонова М. В., Рядовкин К. С. О среднем числе частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке с периодическими источниками ветвления. // Докл. РАН. – 2018, т. 479, № 3, с. 250–253.

[26] Платонова М. В., Рядовкин К. С. Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с периодически расположенными источниками ветвления. // Теория вероятн. и ее примен. – 2019, т. 64, № 2.

[27] Рядовкин К. С. Асимптотическое поведение ветвящихся случайных блужданий на некоторых двумерных решетках. // Зап. научн. семин. ПОМИ. – 2018, т. 474, с. 213–221.