САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. В. А. СТЕКЛОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Салимов Рустем Фаридович

Оптимальные процедуры различения двусторонних гипотез и двустороннего доверительного оценивания в d-апостериорном подходе

Специальность: 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2021

Работа выполнена на кафедре математической статистики Казанского (Приволжского) Федерального Университета.

Научный руководитель:	**Симушкин Сергей Владимирович** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики КФУ
Официальные оппоненты:	**Бернштейн Александр Владимирович** доктор физико-математических наук, профессор, «Сколковский институт науки и технологии»
	Мартынов Геннадий Владимирович кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаборатория №1 имени Пинскера ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук»
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук»

Защита состоится «___» _________ 2021 г. в ___ часов ___ минут на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» или на сайте по адресу http://pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «___» _________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01,
доктор физико-математических наук, А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования диссертации. В последние десятилетия байесовские методы снова приобретают все большее значение в прикладных областях математической статистики. Такие методы особенно полезны в ситуациях, когда одна и та же статистическая задача возникает многократно и требуется контролировать величину ошибки, усредненную по значениям параметра, относительно которого принимается решение. Стандартное байесовское определение риска, как средних потерь от всех принятых решений, не всегда может удовлетворить запросы практики. В проблеме аттестации и контроля качества гарантии должны быть связаны не с классическими вероятностями ошибок первого и второго рода, а со средними потерями в экспериментах, в которых было принято то или иное решение. При построении точечной оценки более целесообразно гарантировать не вероятность отклонения оценки от истинного значения параметра, а вероятность того, что случайный параметр не слишком далек от полученной оценки. Точно так же при построении доверительных интервалов более естественно гарантировать не вероятность накрытия истинного значения параметра, а вероятность того, что этот параметр попадет в заявленное доверительное множество. Такого рода условные вероятности с точки зрения последствий от принятия неправильных решений называются d-риском, а подход, ориентированный на учет такого рода функции риска, d-апостериорным подходом. Предыстория этого подхода восходит к трудам С. Н. Бернштейна, К. Р. Рао, Л. Н. Большева.

Аналогичная проблема возникает в ситуациях, описываемых общим термином «множественное тестирование», когда экспериментатор сталкивается с большим количеством статистических экспериментов, например, в генетике, в социологических исследованиях, в задачах медицинской диагностики и т.п. Анализируя проблему множественного тестирования в байесовской постановке, Storey J. D.[1] показал, что популярный теперь показатель pFDR совпадает с d-риском первого рода.

Общая постановка проблемы статистического вывода в рамках d-апостериорного подхода была предложена И. Н. Володиным [2]. Обзор основных результатов, полученных к настоящему времени в этом направлении, можно найти в работе [3]. В частности, была установлена асимптотическая формула[4] для минимального необходимого объема выборки при различении двух од-

---

[1] Storey J. D. The positive false discovery rate: a Bayesian interpretation and the q-value // *The Annals of Statistics* — 2003, Vol. 31, № 6. — P. 2013–2035.

[2] Володин И.Н. Гарантийные процедуры статистического вывода: определение объема выборки: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.05. — Вильнюс, 1981 — 239 с.

[3] Simushkin D. S., Simushkin S. V., Volodin I. N. D-guaranteed discrimination of statistical hypotheses: review of results and unsolved problems // *J. Math. Sciences.* New York. — 2017. — Vol. 228, № 5. — P. 543–565.

[4] Володин И. Н., Новиков Ан. А. Асимптотика необходимого объема выборки при гарантийном различении параметрических гипотез // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 1999. — Т. 21. — С. 3–41.

носторонних гипотез $\mathrm{H}_0 : \theta \leqslant \theta_0, \mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0$ об одномерном параметре θ с ограничениями на условные вероятности справедливости той или иной гипотезы, если принято решение в пользу ее альтернативы (d-апостериорные вероятности ошибок 1-го и 2-ого рода). Аналогичная задача для случая двусторонней альтернативы: $\mathrm{H}_0 : \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1, \mathrm{H}_1 : \theta \notin [\theta_0, \theta_1]$ рассматривается в настоящей диссертации.

Кроме того, Володин И. Н. и Симушкин С. В.[5] предложили метод построения семейств «оптимальных» доверительных интервалов, который (как в классическом случае) естественным образом связан с задачей проверки двух гипотез. Ими же были предложены некоторые асимптотические аналоги оптимальных семейств односторонних доверительных границ, имеющие практическое значение. Так, если $\widehat{\theta}_n$ — какая-либо состоятельная оценка θ, то асимптотическая верхняя граница надежности $(1-\beta)$ может быть вычислена через априорную функцию распределения выводного параметра G и ее обратную функцию G^{-1} по формуле $G^{-1}((1-\beta)G(\widehat{\theta}_n))$. Нижняя доверительная граница вычисляется как $G^{-1}(\beta + (1-\beta)G(\widehat{\theta}_n))$ и в общем случае будет больше верхней границы. Поэтому здесь при построении двусторонних доверительных интервалов нельзя скомпоновать его с помощью нижней и верхней границы. Применению методики [5] в проблеме построения двусторонних доверительных интервалов посвящена вторая глава диссертации.

Далее, Володиным И. Н., Симушкиным С. В. и Новиковым А. А. (см., например[6]) была предложена методика построения оценок случайного значения ϑ, равномерно минимизирующих функцию d-риска. Эта методика, в основном, была ориентирована на квадратичную функцию потерь. В практических задачах очень часто важно иметь оценки с заданной точностью. Это требование приводит к необходимости рассмотрения функций потерь типа 1-0. В диссертации рассматриваются два варианта таких функций потерь, учитывающих абсолютную и относительную ошибку оценки.

В d-апостериорном подходе существует универсальный способ построения последовательной процедуры, удовлетворяющей заданным ограничениям на функцию d-риска[7]. Для задачи различения двух односторонних гипотез ее асимптотически оптимальные свойства были установлены в[8]. В диссертации проводится сравнение момента остановки этой процедуры (как в задаче различения двух гипотез, так и в задаче оценивания параметра) с необходимым объемом выборки процедур на фиксированном числе наблюдений.

Таким образом, актуальность темы исследований, приводимых в диссер-

[5] Володин И. Н., Симушкин С. В. Доверительное оценивание в d-апостериорном подходе // *Теор.вероятн. и ее примен.* — 1990. — Т. 35., вып. 2. — С. 242–254.

[6] Володин И. Н., Новиков Ан. А. Статистические оценки с асимптотически минимальным d-риском // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1993. — Т. 38, вып. 1, — С. 20–32.

[7] Володин И. Н. Гарантийные процедуры статистического вывода (определение объема выборки) // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 1984. — Т. 10. — С. 13–53.

[8] Володин И. Н., Новиков А. А. Асимптотика необходимого объема выборки при d-гарантийном различении двух близких гипотез // *Известия ВУЗов. Математика* — 1983. — Т. 11. — С. 59–66.

тации, объясняется, в первую очередь, широким спектром возможных применений процедур статистического вывода в рамках ограничений на среднюю величину потерь, которая в большей степени соответствует проблемам множественного тестирования и контроля качества.

Целью исследования диссертационной работы является развитие методов d-апостериорного подхода применительно к задачам проверки интервальных гипотез, построения двусторонних доверительных интервалов и оценок с заданной точностью, а также изучение их асимптотических свойств. В частности, в диссертационной работе исследуется возможность отыскания асимптотической формулы для необходимого объема выборки при d-гарантийном различении интервальных гипотез; проводится сравнение по среднему объему выборки универсальной процедуры различения интервальных гипотез с процедурой, основанной на фиксированном числе наблюдений; разрабатывается способ построения семейств двусторонних доверительных интервалов для нормальной модели, изучаются асимптотические свойства точности этих семейств и предлагаются асимптотически правильные упрощенные варианты их вычисления; находятся оценки с минимальным d-риском для функции потерь 1–0 с абсолютной и относительной ошибкой в задаче аттестации «малого» параметра.

Методы исследования. В основе приводимых исследований лежит методология байесовского подхода при построении вероятностных моделей и принятии решений. Построения d-гарантийных интервальных и точечных оценок случайного параметра, а также вывод приближенных формул необходимого объема выборки для различении гипотез с ограничениями на d-риски опираются на классические методы асимптотического анализа регулярных экспериментов. Сравнение характеристик последовательных процедур проводится методом стохастического моделирования.

Основные положения выносимые на защиту

1. Найдена асимптотическая формула для необходимого объема выборки в задаче проверки интервальной гипотезы при двусторонней альтернативе с заданными ограничениями на d-апостериорные вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, когда эти ограничения стремятся к 0.

2. Представлены в явном виде наиболее точные доверительные интервалы (в d-апостериорной постановке) для среднего значения нормального распределения с априорным нормальным распределением этого параметра. Найдена асимптотика (при увеличении объема выборки) для функции надежности доверительного интервала, то есть вероятности попадания случайного параметра в заданный интервал, при условии, что этот интервал принадлежит заданному наиболее точному (в d-апостериорном смысле) семейству интерва-

лов. С помощью этой асимптотики построен более простой асимптотически точный доверительный интервал.

3. Для задачи оценки среднего значения нормального распределения при априорных сведениях о его положительности и малых значениях строится d-гарантийная процедура, основанная на фиксированном числе наблюдений, а также в рамках последовательной схемы испытаний. Установлено, что универсальная d-гарантийная последовательная процедура оценки имеет ограниченный момент остановки, не превышающий необходимый объем выборки.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены лично автором.

Практическая значимость работы. В диссертационной работе разработана новая методика построения процедур статистического вывода с новым аспектом их гарантийности, что представляет теоретическое значение для дальнейших исследований в этом направлении. Практическая значимость состоит в построении процедур статистического вывода для проблем контроля качества, аттестации выпускаемой продукции и оценки экологических характеристик окружающей среды с ограничением на среднюю величину потерь, которая в большей степени отвечает существу рассматриваемых задач. Для практики, в первую очередь, представляет интерес предложенные метод d-гарантийной проверки интервальных гипотез с формулами для необходимого объема выборки и d-гарантийные процедуры параметрической оценки.

Апробация результатов исследования. Результаты работы были представлены на XVIII Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам, XII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Казань, 1 - 8 мая 2011 г.); XX Всероссийской Школе-коллоквиуме по стохастическим методам, XIV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Йошкар-Ола, 12–18 мая 2013 г.); на международной научной конференции Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии Казань (2016); на международной Казанской конференции «Probability Theory & Mathematical Statistics» (2017). Кроме того, результаты работы были представлены на расширенном заседании научного семинара кафедры математической статистики ВМК МГУ (2015), на научном семинаре Лаборатории Чебышева «Теория вероятностей» Санкт-Петербург ПОМИ РАН (2016).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 8 работ, из них 2 — в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК, 3 — в международных журналах, индексируемых в базе данных WoS и Scopus, 3 — тезисы международных и всероссийских конференций. Результаты статей

[1], [2] были получены в процессе совместных обсуждений с научным руководителем; вклад диссертанта составляет 50% от общего объема. Результаты статей [4], [5] получены в процессе проведения совместных семинаров с соавторами; личный вклад диссертанта в доказательства результатов и создание программных продуктов соавторы статей оценивают как 50%.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения. Общий объем диссертации составляет 105 страниц с 12 рисунками и 6 таблицами. Список использованных литературных источников содержит 51 наименование.

Содержание работы

В **главе 1** диссертации решаются задачи построения d-гарантийных процедур различения двух статистических гипотез вида $\mathrm{H}_0 : \theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset \mathbb{R}$ и $\mathrm{H}_1 : \theta \notin (\theta_1, \theta_2)$ в рамках вероятностной модели $\{f(x\,|\,\theta), x \in \mathcal{X}\}$, индексированной параметром $\theta \in \mathbb{R}$, и определяемой плотностью относительно некоторой меры μ на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$. Предполагается, что параметр θ в эксперименте есть реализация случайной величины ϑ с некоторой функцией распределения $G(\theta)$ (плотностью $g(\theta)$ по мере Лебега). Обозначим через d_j решение в пользу гипотезы $\mathrm{H}_j, j = 0, 1$.

Во введении к первой главе дается теоретико-вероятностное описание методологии d-апостериорного подхода к проблеме статистической проверки гипотез.

В первом параграфе рассматривается класс критериев, основанных на фиксированном числе n наблюдений $x^{(n)} = (x_1, \ldots, x_n)$. Эти критерии должны удовлетворять заданным ограничениям β_0, β_1 на d-апостериорные вероятности ошибок, определяемые следующим образом. Пусть $\delta_n = \delta_n(x^{(n)})$ — решающая функция, представляющая собой измеримое отображение выборочного пространства $(\mathcal{X}^n, \mathfrak{A}^{\otimes n})$ в множество решений $\{d_0,\, d_1\}$. Тогда вероятности ошибок 1-го и 2-го рода определяются соответственно как условные вероятности

$$\mathcal{R}_1(\delta_n) = \mathbf{P}\{\vartheta \in (\theta_1, \theta_2)\,|\,\delta_n = d_1\},$$
$$\mathcal{R}_0(\delta_n) = \mathbf{P}\{\vartheta \notin (\theta_1, \theta_2)\,|\,\delta_n = d_0\}.$$

При этом, если безусловная вероятность принятия соответствующего решения равна нулю, то вероятность ошибки полагается равной нулю. Под необходимым объемом выборки (НОВ) n^* при заданных ограничениях β_0 и β_1 понимается наименьшее целое число n, для которого существует правило δ_n, удовлетворяющее неравенствам

$$\mathcal{R}_0(\delta_n) \leqslant \beta_0, \quad \mathcal{R}_1(\delta_n) \leqslant \beta_1.$$

В работе[9] показано, что при отыскании процедур с минимальным объемом выборки можно ограничиться правилами δ_n^*, которые принимают нулевую гипотезу только, если апостериорная вероятность справедливости нулевой гипотезы $\pi_0(x^{(n)}) = \mathbf{P}\{\vartheta \in (\theta_1, \theta_2) \,|\, x^{(n)}\} > c,$ где критическая константа c находится из условия на d-апостериорную вероятность ошибки 1-го (или 2-го) рода.

Основной результат параграфа 1 содержится в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Если ограничения $\beta_0, \beta_1 \to 0$ так, что $\beta_1/\beta_0 \to \gamma,\ \ 0 < \gamma < \infty,$ и вероятностная модель удовлетворяет условиям регулярности (см. условия (A1) – (A6) в тексте диссертации на страницах 28–29), то для необходимого объема выборки n^* справедливо асимптотическое представление*

$$n^* \asymp \widetilde{n} = \left(\frac{\rho\, W(1-c_0)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)}\right)^2 \frac{1}{\beta_0^2},$$

где функция $W(c) = \varphi(\Phi^{-1}(c)) + c\,\Phi^{-1}(c), 0 < c < 1,\ \ \varphi, \Phi$ — плотность и функция распределения стандартного нормального закона, константа c_0 есть решение уравнения

$$\frac{W(c_0)}{W(1-c_0)} = \left(\frac{1}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} - 1\right)\gamma,$$

$$\rho = \rho(\theta_1, \theta_2) = \left(g(\theta_1) I(\theta_1)^{-1/2} + g(\theta_2) I(\theta_2)^{-1/2}\right),$$

$I(\theta)$ — информация по Фишеру в точке θ.

Заметим, что условия регулярности в этой теореме обеспечивают возможность применения теоремы Бернштейна–фон Мизеса об асимптотической нормальности апостериорного распределения и, в основном, состоят из классических условий регулярности. Эти условия несколько отличаются от условий работы[10], в которой аналогичная формула получена для задачи различения двух односторонних гипотез. Доказательство теоремы 1.2 отличается от приведенного в[10]. Это доказательство разбито на несколько вспомогательных утверждений. В лемме 1.1 устанавливается, что при «жестких» ограничениях, т.е. при $\beta_0, \beta_1 \to 0,$ НОВ $n^* \to \infty.$ Лемма 1.2 содержит чисто технический результат, позволяющий применить теорему Бернштейна–фон Мизеса. В лемме 1.3 найдено предельное (при $n \to \infty$) распределение апостериорной вероятности $\pi_0(X^{(n)})$. В лемме 1.4 показывается, что d-апостериорные вероятности ошибок правила δ_n^* с ростом n имеют асимптотическое представление вида $\mathcal{R}_k(\delta_n^*) \asymp C_k/\sqrt{n}$, и найдены соответствующие константы C_0, C_1.

[9]Симушкин С. В. Оптимальные d-гарантийные процедуры различения двух гипотез // Рукопись деп. ВИНИТИ. — 1981. — № 5547-81. — 47 с.

[10]Володин И. Н., Новиков Ан. А. Асимптотика необходимого объема выборки при гарантийном различении параметрических гипотез // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 1999. — Т. 21. — С. 3–41.

Во втором параграфе главы 1 анализируется точность полученной асимптотической формулы на трех конкретных вероятностных моделях: нормально-нормальная модель, когда в эксперименте наблюдается нормальная случайная величина с неизвестным средним, априорное распределение которого также нормально, показательно-показательная модель, в которой параметр интенсивности показательного закона априори распределен по показательному закону, и модель Коши-Коши, в которой принимается решение о параметре сдвига распределения Коши. Заметим, что все мешающие параметры моделей предполагаются известными.

Для первых двух вероятностных моделей выборочное среднее $\overline{X}$ является достаточной статистикой. Поэтому для них удалось установить вид оптимального критерия δ_n^*, минимизирующего риск 1-го рода при ограничениях на риск 2-го рода — лемма 1.6 (нормально-нормальная модель) и лемма 1.9 (показательно-показательная модель). В первом случае область принятия нулевой гипотезы имеет вид $l < \overline{X} < r$, где границы l, r зависят от выбранного уровня β_0 на d-апостериорную вероятность ошибки 2-го рода $\mathcal{R}_0$. Во втором случае аналогичный вид имеет область отвержения нулевой гипотезы. В соответствии с этим описанием удалось построить программу отыскания точного значения необходимого объема выборки n^*. Вычисления показали, что асимптотическая формула для n^* работает идеально с точки зрения относительной ошибки приближения. Для уменьшения абсолютной ошибки асимптотическую формулу необходимо уточнить.

Вероятностная модель Коши не обладает одномерной достаточной статистикой, поэтому построение оптимального критерия здесь не представляется возможным (нельзя выразить в простом замкнутом виде неравенство $\mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,|\, x^{(n)}\} > c$ относительно апостериорной вероятности справедливости нулевой гипотезы). Ввиду этого, анализ точности асимптотики НОВ проводился по данным статистического моделирования. Кроме того, для этой модели были найдены значения необходимого объема выборки в классе критериев, основанных на выборочной медиане. Показано, что асимптотическая формула дает вполне приемлемые результаты.

В третьем параграфе в рамках нормально-нормальной модели строится последовательный критерий различения тех же интервальных гипотез, основанный на первом выходе апостериорной вероятности справедливости нулевой гипотезы из интервала $(\beta_1; 1-\beta_0)$. Это так называемый последовательный критерий первого перескока, предложенный в статье[11]. Поскольку область продолжения наблюдений этого критерия имеет сложную структуру, было предложено его упрощение. Методом стохастического моделирования показано, что основные вероятностные характеристики этих двух последовательных

[11] Володин И. Н., Новиков А. А., Симушкин С. В. Гарантийный статистический контроль качества: апостериорный подход // *Обозрение прикладной и промышленной математики* — 1994. — Т. 1, № 2. — С. 148–178.

процедур почти всегда отличаются мало (табл. 1.4).

Глава 2 посвящена описанию в явном виде для вероятностной модели нормального распределения с априорным нормальным распределением семейств доверительных интервалов, общее определение которых введено в работе[12]. Найдена асимптотика для границ доверительных интервалов семейства, когда объем выборки стремится к бесконечности, и на основе этой асимптотики предложен упрощенный вариант доверительного семейства. Показано, что этот вариант имеет такую же асимптотическую точность. В целях упрощения формулировок утверждений описание дается только для случая, когда априорная дисперсия и дисперсия наблюдений равны единице.

В первом параграфе этой главы дается подробное описание методики доверительного оценивания в d-апостериорном подходе. Вводятся основные определения и ставится задача.

Пусть $\mathcal{B}(x) = \{[\theta_1, \theta_2], \theta_1 < \theta_2\}$ — семейство интервалов, зависящее от результата $x (\in \mathcal{X})$ статистического эксперимента.

Определения. Условная вероятность

$$\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,;\,\mathcal{B}) \;=\; \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,|\, \mathcal{B}(X) \ni [\theta_1, \theta_2]\}, \quad \theta_1 < \theta_2,$$

(как функция границ интервала) называется *надежностью* семейства $\mathcal{B}$, а условная вероятность

$$\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\,\mathcal{B}) \;=\; \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,|\, \mathcal{B}(X) \not\ni [\theta_1, \theta_2]\}, \quad \theta_1 < \theta_2,$$

— *точностью* семейства $\mathcal{B}$. Семейство $\mathcal{B}$ называется *Б-доверительным* (с уровнем доверия $(1-\alpha)$), если надежность

$$\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,;\,\mathcal{B}) \geqslant 1 - \alpha$$

для любых $\theta_1 < \theta_2$.

ii) Семейство $\mathscr{B}^*$ называется *наиболее точным* (*оптимальным*) Б-доверительным семейством, если точность любого другого Б-доверительного (с уровнем доверия $(1-\alpha)$) семейства интервалов $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\,\mathcal{B}) \geqslant \mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\,\mathscr{B}^*)$$

каковы бы ни были $\theta_1 < \theta_2$.

Во втором параграфе методика d-доверительного оценивания применяется к нормально-нормальной модели. Заметим, что здесь (при известной дисперсией) выборочный вектор может быть редуцирован до значения достаточной статистики $T(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X} = n^{-1}\sum_1^n X_i$.

[12] Володин И. Н., Симушкин С. В. Доверительное оценивание в d-апостериорном подходе // *Теор. вероятн. и ее примен.* — 1990. — Т. 35., вып. 2. — С. 242–254.

Сначала устанавливается, что наиболее точное доверительное семейство может быть описано с помощью функции апостериорной надежности

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \,|\, t) := \frac{\int_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta} \Big[\Phi\Big(\sqrt{n}\big(2\,Z_n - \,t - \theta\big)\Big) - \Phi\Big(\sqrt{n}\big(t - \theta\big)\Big)\Big]\,\varphi\,(\theta)\;d\theta}{\Phi\Big(\frac{2Z_n - t}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\Big) - \Phi\Big(\frac{t}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\Big)}\,,$$

где θ_c, δ — середина и, соответственно, половинная ширина интервала, $Z_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)\,\theta_c$, Φ – стандартная нормальная функция распределения.

Наиболее точное семейство описывается в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть* $\overline{X} = x$. *Определим для каждого* θ_c *константу* $\delta_n^* = \delta_n^*(\theta_c, x)$ *из условия*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta_n^* \,|\, x) = 1 - \alpha.$$

Тогда интервал $[\theta_1, \theta_2]$ *входит в наиболее точное семейство* $\mathscr{B}_n^*$, *если его ширина* $(\theta_2 - \theta_1) > 2\delta_n^*(\theta_c, x)$ *с* $\theta_c = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

Связь между наиболее точным доверительным семейством и полученным значением статистики $\overline{X}$ приведена в

Теореме 2.2. *Если* θ_c, δ *таковы, что*

$$\Phi(\theta_c + \delta) - \Phi(\theta_c - \delta) \;<\; 1 - \alpha \;<\; 1 - 2\Phi\Big(-\sqrt{n+1}\,\delta\Big)\,,$$

то (i) *существует единственная точка* $x_n^* = x_n^*(\theta_c, \delta) > Z_n$ *такая, что*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \,|\, x_n^*) = 1 - \alpha;$$

(ii) *интервал* $[\theta_c - \delta, \theta_c - \delta]$ *включается в наиболее точное доверительное семейство* $\mathscr{B}_n^*$ *тогда и только тогда, когда выборочное значение статистики* $\overline{X} = x$ *удовлетворяет неравенствам*

$$2Z_n - x_n^* \leqslant x \leqslant x_n^*\,.$$

Первое неравенство в условии теоремы 2.2 связано с тем, что интервалы $[\theta_c - \delta, \theta_c - \delta]$, априорная вероятность которых $\Phi(\theta_c + \delta) - \Phi(\theta_c - \delta) \geqslant 1 - \alpha$, всегда включаются в наиболее точное семейство. Правая часть второго неравенства есть максимальное значение апостериорной вероятности $\max_x \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_c - \delta, \theta_c - \delta] \,|\, \overline{X} = x\}$. Поэтому интервалы со слишком малой шириной δ не могут быть включены в семейство $\mathscr{B}_n^*$.

Доказательства этих теорем основаны на ряде свойств апостериорной надежности как функции значений статистики $\overline{X} = x$ и параметров θ_c, δ (леммы 2.1, 2.2).

В третьем параграфе исследуются асимптотические (при $n \to \infty$) свойства наиболее точного доверительного семейства.

Лемма 2.3. *При любых фиксированных* $\delta > 0$, θ_c, x

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(\theta_c+\delta)-\Phi(\theta_c-\delta)}{|\Phi(2\theta_c - x)-\Phi(x)|} & \text{, если } x \notin [\theta_c-\delta; \theta_c+\delta]\,, \\ 1 & \text{, если } x \in [\theta_c-\delta; \theta_c+\delta]\,. \end{cases}$$

Выберем последовательность чисел $q_n \to 0$ и определим асимптотический аналог наиболее точного семейства

$$\mathscr{B}^*_{na} = \mathscr{B}^*_{na}(x) = \left\{\, [\theta_c-\delta, \theta_c+\delta] : \ \delta \geqslant \delta^*(\theta_c, x) + q_n \,\right\}$$

для выборочного значения $\overline{X} = x$, где $0 < \delta^* = \delta^*(\theta_c, x)$ — решение уравнения

$$\frac{\Phi(\theta_c+\delta^*)-\Phi(\theta_c-\delta^*)}{|\Phi(2\theta_c - x)-\Phi(x)|} = 1-\alpha\,,$$

$\delta^* = 0$ при $x = \theta_c$.

Теорема 2.5. *Пусть* $q_n \to 0$, $n \to \infty$.

(I) *Семейство* $\mathscr{B}^*_{na}$ *асимптотически надежно, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}(\mathscr{B}^*_{na} \mid A,\, B) = 1-\alpha \quad (\forall A < B).$$

(II) *Если* $q_n = O_c\left(\frac{1}{n}\right)$, *то для любых* $A < B$

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}\big(\mathscr{B}^*_{na} \,|\, A,\, B\,\big)}{\mathcal{A}\big(\mathscr{B}^*_{n} \,|\, A,\, B\,\big)} < \infty\,.$$

Доказательство этой теоремы использует утверждения лемм 2.5 и 2.6, в которых устанавливается асимптотическая эквивалентность (со скоростью сходимости $1/n$) параметров x^*_n, δ^*_n и x^*, δ^*, определяющих наиболее точное семейство и его асимптотический аналог. Кроме того, доказательство теоремы опирается на следующее утверждение, доказываемое методами асимптотического анализа лаплассовских интегралов.

Лемма 2.7. *Если константа* $x > B$ *и последовательность* $q_n = \frac{c_n}{n}$, *где* $c_n \to c_0$, *то при* $n \to \infty$

$$\int_A^B \Phi\big(\sqrt{n}(\theta - x - q_n)\big)\varphi(\theta)\,d\theta \ \asymp\ \frac{\varphi(B)e^{-c_0(x-B)}}{\sqrt{2\pi}(x-B)^2}\,\frac{e^{-\frac{(x-B)^2}{2}n}}{n\sqrt{n}}\,.$$

В **главе 3** рассматривается традиционная задача оценки среднего значения нормального распределения в рамках d-апостериорного подхода к проблеме гарантийности процедуры оценивания. Предлагаются основанные на фиксированном числе наблюдений и последовательные процедуры оценки среднего значения нормального распределения с заданными ограничениями на d-риск абсолютной и относительной ошибок при дополнительных априорных сведениях о малости и положительности оцениваемого параметра. Данное свéдение формализуется в терминах показательного априорного распределения с малым значением масштабного параметра.

Если $L(\theta, d), \theta, d \in \mathbb{R}$, — функция потерь от выбора значения оценки d, при истинном значении параметра, равном θ, то функция d-риска оценочной функции $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X^{(n)})$ определяется как условное среднее потерь относительно σ-алгебры, порожденной $\widehat{\theta}$:

$$\mathcal{R}(d\,;\,\widehat{\theta}) = \mathbf{E}[L(\vartheta, \widehat{\theta}(X^{(n)}))\,|\,\widehat{\theta}(X^{(n)}) = d].$$

В некоторых ситуациях можно построить оценку с равномерно минимальной функцией d-риска[13]. Эта возможность возникает в том случае, когда существует оценка θ^* с функцией d-риска

$$\mathcal{R}(d\,;\,\theta^*) = \inf_{x^{(n)}} \mathbf{E}[L(\vartheta\,;\,d)\,|\,X^{(n)} = x^{(n)}].$$

В первом параграфе рассматривается проблема оценивания параметра среднего значения θ нормального $(\,\theta,\,\sigma^2\,)$ распределения с функцией потерь вида $1{-}0$: $L(\,\theta,\,d\,) = 1$, если $|\,\theta{-}d\,| > \Delta$, и $L(\,\theta,\,d\,) = 0$ в противном случае, где Δ — заданное ограничение на точность оценивания. Предполагается, что θ является реализацией случайной величины ϑ, имеющей экспоненциальное распределение со средним значением $1/\lambda$. Большие значения параметра λ говорят о том, что вероятностная масса ϑ сконцентрирована около нуля.

Для функций потерь типа 1–0 удобнее иметь дело не с функцией d-риска, а с функцией надежности $\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}) = 1 - \mathcal{R}(d\,;\,\widehat{\theta})$.

Теорема 3.1. *Байесовская оценка, основанная на фиксированном числе n наблюдений $\widehat{\theta}_B = \max(\Delta,\,\overline{X} - \frac{\lambda\sigma^2}{n})$.*

Теорема 3.2. I) *Функция надежности байесовской оценки, основанной на фиксированном числе n наблюдений, для $d > \Delta$ вычисляется как*

$$\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) = \frac{2\Phi(\,\Delta\sqrt{n}/\sigma\,) - 1}{\Phi(\,d\sqrt{n}/\sigma\,)}\,, \qquad d \geqslant \Delta.$$

II) *Наименьший объем выборки n^*, при котором надежность $\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) \geqslant (1-\beta)$ для любых d из носителя распределения $\widehat{\theta}_B$ $(\,d \geqslant \Delta\,)$, есть наименьшее целое число n такое, что*

$$n \geqslant \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\beta/2)\sigma}{\Delta}\right)^2.$$

Приводится численное сравнение байесовской оценки с огибающей функции надежности (надежностью оценки с равномерно минимальным d-риском).

[13] Володин И. Н., Симушкин С. В. Статистический вывод с минимальным d-риском // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 1984. — Т. 11, №. 2. — С. 25–39.

Это сравнение показывает, что наименьший объем выборки n^*, при котором возможно достижение заданной величины надежности, одинаков для обеих оценок.

В заключительном разделе первого параграфа строится универсальная последовательная процедура первого пересечения с моментом остановки

$$\nu = \min\{n : H_n(\overline{X}_n - \tfrac{\lambda\sigma^2}{n}) \geqslant 1-\beta\},$$

где $H_n(t) = \mathbf{P}\{|\vartheta - \theta_B(t)| < \Delta \,|\, T = t\}$ — апостериорная надежность байесовской оценки, $T = \overline{X}_n - \frac{\lambda\sigma^2}{n}$. После остановки статистического эксперимента решение принимается с помощью байесовской оценки.

Важно заметить, что с вероятностью единица случайное значение объема выборки ν не превышает n^* (лемма 3.3).

Для неизвестных значений λ и σ в процедурах оценки предлагается эмпирическая байесовская оценка, основанная на архиве предыдущих выборочных данных. В качестве иллюстрации рассматривается реальная задача по определению содержания мышьяка в пищевом продукте. Показано, что применение последовательной схемы приводит к значительному уменьшению объема инспекции.

Во втором параграфе рассматривается аналогичная задача оценки среднего значения нормального распределения при функции потерь 1–0 с относительной ошибкой: $L(\theta,d)=0$, если $\frac{1}{1+\Delta} < \frac{\vartheta}{d} < 1+\Delta$, и $L(\theta,d)=1$ в противном случае.

Рассматривается априорное распределение более общего вида, учитывающее не только положительность оцениваемого параметра, но и то, что его значение может быть больше некоторой величины $\theta_0 > 0$:

$$g(\theta) = \lambda\,\exp\{-\lambda\,(\theta-\theta_0)\,\}, \qquad \theta \geqslant \theta_0.$$

Теорема 3.3. *Пусть* $T = \overline{X}_n - \frac{\lambda\sigma^2}{n}$. *Тогда байесовская оценка*

$$\theta_B = \theta_B(T) = \max\{\,\theta_0(1+\Delta),\ \widehat{a}_n\,\},$$

где

$$\widehat{a}_n = \widehat{a}_n(T) = \frac{T}{(1+\Delta)+(1+\Delta)^{-1}} + \sqrt{\frac{T^2}{[(1+\Delta)+(1+\Delta)^{-1}]^2} + \frac{4\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n[(1+\Delta)^2-(1+\Delta)^{-2}]}},$$

При этом, $\theta_B = \theta_0(1+\Delta)$, *если*

$$T \leqslant \frac{1}{2}(1+(1+\Delta)^2)\theta_0 - \frac{2\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n\Delta(2+\Delta)\theta_0}.$$

Наименьший объем выборки, при котором возможно достижение заданной величины $(1-\beta)$ на функцию надежности, равен наименьшему целому n, удовлетворяющему неравенству

$$\inf_{a>\theta_0(1+\Delta)} \sup_t \frac{\Phi\left[(a(1+\Delta)-t)\sqrt{n}/\sigma\right]-\Phi\left[(a/(1+\Delta)-t)\sqrt{n}/\sigma\right]}{\Phi\left((t-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)} \geqslant 1-\beta.$$

Численно показывается, что это значение НОВ идеально аппроксимируется величиной

$$\widetilde{n}=\left(\frac{\Phi^{-1}(\,1-\beta/2\,)\sigma}{\theta_0\,\Delta(1+\Delta)}\right)^2.$$

Как и в первом параграфе предлагается последовательная процедура первого пересечения для оценки θ, основанная на первом достижении апостериорной надежностью оценки заданного значения $1-\beta$.

Третий параграф завершается построением процедур оценивания количества элемента мышьяка в питьевой воде.

Заключение

В диссертации решены основополагающие задачи интервального статистического вывода в классических проблемах проверки гипотез, точечного и доверительного оценивания. Задача d-гарантийного тестирования интервальной гипотезы решается в первой главе с выводом асимптотики необходимого объема выборки, когда ограничения β_0 и β_1 на d-риски стремятся к 0.

Разработаны явные схемы построения для доверительных интервалов в рамках нормальной модели случайной выборки при априорном нормальном распределения. Найдены асимптотические формулы для наиболее точных доверительных интервалов, на основе которых построены приближенные асимптотически эквивалентные доверительные интервалы.

Построены d-гарантийные оценки среднего значения нормального распределения при априорных сведениях о положительности и малости оцениваемого параметра. Для процедуры оценки с фиксированным объемом наблюдений устанавливаются формулы для необходимого объема выборки. Для последовательной процедуры первого перескока показывается, что ее момент остановки с вероятностью 1 не превосходит необходимого объема выборки.

Разработанные в диссертации методы построения процедур статистического вывода и методы анализа их функции d-риска с выводом формул для необходимого объема выборки представляют теоретический интерес для дальнейшего развития теории d-апостериорного подхода к проблем гарантийности статистического вывода и указывают путь для решения аналогичных задач в рамках других вероятностных моделей.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах ВАК, WoS, SCOPUS

[1] Салимов Р. Ф., Симушкин С. В. Асимптотически наиболее точные двусторонние доверительные интервалы для среднего в нормально-нормальной модели // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. физ.-матем. науки* — 2010. — Т. 152, № 1. — С. 205–218.

[2] Салимов Р. Ф., Симушкин С. В. Асимптотика минимального достаточного числа наблюдений при d-гарантийном различении двусторонних гипотез // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2020. — Т. 65, вып. 1 — С. 63–78. перевод:
Salimov R.F., Simushkin S.V. Asymptotics of the minimum sufficient number of observations for d-guaranteed discrimination of two-sided hypotheses // *Theory of Probability & its Applications.* — 2020. — Vol. 65, № 1. — P. 49–61.

[3] Salimov R. A sequential d-guaranteed test for distinguishing two interval hypotheses // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* — 2016. — Vol. 37, № 4. — P. 500–503.

[4] Salimov R. F., Yang Su-Fen, Turilova E. A., and Volodin I. N. Estimation of the mean value for the normal distribution with constraints on d-risk // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* — 2018. — Vol. 39, № 3. — P. 377–387.

[5] Salimov R., Yang S.-F., Volodin A., and Volodin I. Estimation of mean value of a normal distribution with constraints on the relative error and d-risk // *Journal of Statistical Computation and Simulation.* — 2020. — Vol. 90, №. 7. — P. 1286–1300.

Тезисы докладов на научных конференциях

[6] Салимов Р. Ф. Асимптотика необходимого объема выборки при d-гарантийном различении двусторонних гипотез // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2011. — Т. 18, вып. 1. — С. 91.

[7] Салимов Р. Ф. Асимптотически оптимальные процедуры при различении двусторонних гипотез // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2013. — Т. 20, вып. 2. — С. 152–153.

[8] Салимов Р. Ф. Об асимптотически d-гарантийных процедурах при различении двусторонних гипотез // *Материалы межд.конф. по алгебре, анализу и геометрии.* — Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. — С. 303–304.