Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи

БАГАПШ Астамур Олегович

Аппроксимация функций решениями однородных эллиптических систем второго порядка на компактах в комплексной плоскости и граничные свойства этих решений

01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., доцент Федоровский К. Ю.

Научный консультант
д.ф.-м.н., Власов В. И.

Москва — 2018

Оглавление

Введение

Тема диссертации относится к теории приближений функций решениями эллиптических уравнений и систем, а также к теории граничного поведения этих решений.

Теория приближений аналитическими функциями — это актуальное и активно развивающееся направление современного математического анализа. В нем, в частности, изучаются задачи аппроксимаций функций голоморфными, гармоническими, полианалитическими функциями, решениями систем однородных эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. Аппроксимации рассматриваются в нормах пространств непрерывных, гладких или суммируемых функций на компактных подмножествах евклидовых пространств. При этом выделяются задачи аппроксимации функций полиномиальными решениями рассматриваемых уравнений и систем, а также решениями со специальным образом локализованными особенностями, лежащими вне множества, на котором рассматривается аппроксимация. За последние два десятилетия в этой тематике получен ряд важных результатов. Отметим работы А. Буаве (A. Boivin, Канада), Д. Вердеры (J. Verdera, Испания), С. Гардинера (S. Gardiner, Ирландия), П.М. Готье (P.M. Gauthier, Франция), Д.Д. Кармоны (J.J. Carmona, Испания), А.Г. О'Фаррела (A.G. O'Farrell, Ирландия), М.Я. Мазалова, П.В. Парамонова, К.Ю. Федоровского.

Важную роль в перечисленных задачах аппроксимации играют вопросы о разрешимости классических краевых задач для дифференциальных уравнений или систем и вопрос о граничном поведении решений этих уравнений и систем. В вопросах, обсуждаемых здесь, важную роль играет задача Дирихле, или задача о непрерывном продолжении функции, непрерывной на границе заданной области, до функции, удовлетворяющей нужному уравнению или системе уравнений внутри области. В этом направлении в последнее время также достигнуты значительные продвижения. Отметим работы Г. Веркоты (G. Verchota, США), Д. Пайфер (J. Pipher, США), А.Л. Фогеля (A.L. Vogel, США), В.А. Козлова, А.П. Солдатова.

Настоящая диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Нумерация всех утверждений и формул в диссертации двойная: первое число — номер главы, а второе число — номер утверждения или формулы в главе. Во введении первое число в номерах формул равно нулю. Основные цитируемые результаты либо оформляются как теоремы и называются по именам своих авторов (с указанием в случае необходимости года публикации), либо выделяются в тексте *курсивом.* Работы автора по теме диссертации выделены в отдельный список литературы, который приводится после основного текста диссертации. Эти работы имеют отдельную нумерацию, причем номера работ из этого списка оканчиваются символом «А» (например, [1А]). Объем диссертации составляет 74 страницы, включая 2 рисунка. Список литературы содержит 52 наименования.

Глава 1 посвящена задачам аппроксимации функций полиномиальными решениями эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Аппроксимации рассматриваются в пространствах непрерывных и гладких функций на компактах в плоскости. Основные результаты этой главы представлены в работе [4А].

Пусть A, B и C — вещественные постоянные (2×2)-матрицы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{0.1}$$

на функции u и v двух вещественных переменных. Введем комплексно-значную функцию $f=u+iv$ и определим дифференциальный оператор $\mathcal{L}$, действующий по правилу

$$\mathcal{L}\colon f\mapsto f_1,$$

где $f_1=u_1+iv_1$, а

$$\begin{pmatrix}u_1\\ v_1\end{pmatrix}=\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}.$$

Тогда система (0.1) может быть переписана в виде одного (комплексного) уравнения

$$\mathcal{L}f=0. \tag{0.2}$$

Мы будем иметь дело с системой (0.1) и уравнением (0.2), относящимся к эллиптическому типу; принадлежность к нему задается требованием (см., например, [34], [44]), чтобы биквадратичная характеристическая форма

$$\det(A\xi^2+2B\xi\eta+C\eta^2)$$

с вещественными ξ и η обращалась в ноль только при $\xi=\eta=0$. Эллиптические системы, в свою очередь, несколькими способами подразделяются на различные подклассы. Для наших целей потребуется классификация на сильно эллиптические системы и эллиптические системы, не являющиеся сильно эллиптическими. Система (0.1) и оператор $\mathcal{L}$ называются сильно эллиптическими, если выражение

$$\det(A + 2\alpha B + \beta C)$$

отлично от нуля при всех вещественных α и β с условием $\alpha^2 \leqslant \beta$. Отметим, что из сильной эллиптичности вытекает эллиптичность.

Пусть $\mathcal{I}\colon z \to z$ — тождественный оператор, $\mathcal{C}\colon z \to \overline{z}$ — оператор комплексного сопряжения, а

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

— операторы Коши–Римана. Все эллиптические системы (0.1) с помощью линейной замены переменных и искомых функций, а также линейной комбинации уравнений системы, сводятся к каноническому виду

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$$

с оператором

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} := \begin{cases} (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)\mathcal{I} + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}, & |\sigma| < 1, \\ (\overline{\partial}^2 + \tau\partial\overline{\partial})\mathcal{I} + \sigma^{-1}(\tau\overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial})\mathcal{C}, & |\sigma| > 1, \end{cases} \tag{0.3}$$

зависящим от вещественных параметров τ и σ таких, что $\tau \in [0,1)$ и $\sigma \neq \pm 1$. Здесь возможен случай $\sigma = \infty$. Сильно эллиптическим системам соответствует случай $\sigma \in (-1, 1)$.

Отметим несколько важных частных случаев систем с оператором (0.3). Паре значений $\tau = 0$, $\sigma = 0$ соответствует уравнение Лапласа $\Delta f = 0$, а паре $\tau = 0$, $\sigma = \infty$ — уравнение Бицадзе $\overline{\partial}^2 f = 0$. При $\sigma = 0$ и $\sigma = \infty$ получаем сильно и не сильно эллиптическую кососимметричную системы соответственно. Они являются каноническими представлениями для уравнения

$$af''_{xx} + 2bf''_{xy} + cf''_{yy} = 0 \tag{0.4}$$

с постоянными комплексными коэффициентами a, b, c. При записи этого уравнения в виде (0.1) соответствующие матрицы A, B, C будут кососимметричными. Наконец, при $\tau = 0$ возникает плоская система Ляме, играющая важную роль в теории упругости (см. подробнее §1.1 и цитированную там литературу).

Перейдем непосредственно к обсуждению аппроксимационных задач, введя предварительно несколько обозначений, нужных в дальнейшем.

Всюду далее мы будем считать, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. Для произвольного подмножества E комплексной плоскости $\mathbb{C}$ обозначим через $C(E)$ пространство всех непрерывных на E комплекснозначных функций. Для $f \in C(E)$ положим $\|f\|_E = \sup_{z\in E} |f(z)|$, причем в случае $E = \mathbb{C}$ будем опускать индекс E. Кроме того, определим класс $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(E)$, состоящий из всех функций f, каждая из которых определена и удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}f = 0$ на некотором (своем) открытом множестве, содержащем E.

Многочлен P от двух вещественных переменных с комплексными коэффициентами называется $\mathcal{L}$-многочленом, или $\mathcal{L}$-полиномом, если $\mathcal{L}P \equiv 0$. Пространство всех $\mathcal{L}$-полиномов обозначим $\mathscr{P}_{\mathcal{L}}$. Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. Введем пространство $P_{\mathcal{L}}(X)$, состоящее из всех функций, которые могут быть равномерно на X приближены $\mathcal{L}$-полиномами. Другими словами, $P_{\mathcal{L}}(X)$ — это замыкание в $C(X)$ подпространства $\{p|_X \colon p \in \mathscr{P}_{\mathcal{L}}\}$.

Из эллиптичности оператора $\mathcal{L}$ вытекает, что

$$P_{\mathcal{L}}(X) \subset A_{\mathcal{L}}(X) := C(X) \cap \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X^\circ),$$

где X° — внутренность компакта X. Возникает задача описания компактов X, для которых пространства $P_{\mathcal{L}}(X)$ и $A_{\mathcal{L}}(X)$ совпадают:

Задача 1. *Найти необходимые и достаточные условия на компакт $X \subset \mathbb{C}$, при которых $A_{\mathcal{L}}(X) = P_{\mathcal{L}}(X)$.*

Аналогичные задачи возникают и в других пространствах функций. Нас интересует задача аппроксимации функций $\mathcal{L}$-полиномами в C^1-норме, а именно будет рассмотрен вопрос об описании компактов X, для которых всякая функция $f \in C^1(\mathbb{C}) \cap \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X^\circ)$ может быть приближена последовательностью $\{p_n\} \subset \mathscr{P}_{\mathcal{L}}$ в следующем смысле:

$$p_n \rightrightarrows_X f, \qquad \nabla p_n \rightrightarrows_X \nabla f \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{0.5}$$

Символом $\rightrightarrows_X$ здесь и далее обозначена равномерная сходимость на компакте X. Эту задачу, подобно задаче 1, удобно сформулировать в терминах подходящих пространств функций.

Заметим прежде, что сходимость (0.5) — это так называемая C^1-слабая сходимость. Определим пространство $C^1_w(X)$ как замыкание в $C(X)^3$ подпространства $\{(f, \nabla f)|_X \colon f \in C^1(\mathbb{C})\}$. Другими словами, $g = (g_0, g_1, g_2)$ принадлежит $C^1_w(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in C^1(\mathbb{C})$ такая, что $\|g_0 - f\|_X < \varepsilon$ и $\|(g_1, g_2) - \nabla f\|_X < \varepsilon$. Норма элемента g в $C^1_w(X)$ по определению совпадает с нормой в $C(X)^3$ и равна $\max\limits_{s=0,1,2} \|g_s\|_X$.

Сходимость в $C^1_w(X)$ слабее сходимости в пространстве $C^1(X)$ типа Уитни, однако для компактов с условием $\overline{X^\circ} = X$ из C^1_w-сходимости вытекает сходимость и в $C^1(X)$.

Определим теперь следующие пространства:

$$A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) \text{ — замыкание } \{(f,\nabla f)|_X \colon f\in C^1(\mathbb{C})\cap \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X^\circ)\} \text{ в } C(X)^3,$$
$$P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) \text{ — замыкание } \{(p,\nabla p)|_X \colon p\in \mathscr{P}_{\mathcal{L}}\} \text{ в } C(X)^3.$$

Как и в равномерном случае, имеет место вложение $P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)\subset A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.

Задача 2. *Найти необходимые и достаточные условия на компакт $X\subset\mathbb{C}$, при которых $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)=P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.*

Поскольку в задачах аппроксимации функций решениями уравнения $\mathcal{L}f=0$ можно применить метод Рунге «движения особенностей», то вместе с задачами 1 и 2 следует рассматривать соответствующие задачи аппроксимации функциями класса $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)$, то есть функциями, удовлетворяющими уравнению $\mathcal{L}f=0$ в (своих) окрестностях X.

Пусть

$$R_{\mathcal{L}}(X) \text{ — замыкание } \{g|_X \colon g\in \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)\} \text{ в } C(X),$$
$$R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) \text{ — замыкание } \{(g,\nabla g)|_X \colon g\in \mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)\} \text{ в } C(X)^3.$$

Ясно, что

$$P_{\mathcal{L}}(X)\subset R_{\mathcal{L}}(X)\subset A_{\mathcal{L}}(X), \qquad P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)\subset R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)\subset A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X).$$

В приведенных обозначениях упомянутые задачи — это задачи описания таких компактов X, для которых $R_{\mathcal{L}}(X)=A_{\mathcal{L}}(X)$, и таких, для которых $R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)=A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.

Функции класса $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)$ можно, в свою очередь, приближать (равномерно или в норме пространства C^1) линейными комбинациями фундаментального решения, взятого в точках, лежащих вне X. Поэтому задачи приближения функциями класса $\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(X)$ являются аналогом задачи приближения голоморфных функций рациональными дробями с полюсами вне X.

Приведем ряд известных результатов, относящихся к обозначенным вопросам.

В работе [48] Дж. Уолш, используя результат А. Лебега [35] об общей разрешимости классической задачи Дирихле для уравнения Лапласа в односвязной области, установил критерий (называемый критерием Уолша–Лебега) равномерной приближаемости гармоническими многочленами. Этот критерий записывается следующим образом: *равенство $A_\Delta(X)=P_\Delta(X)$ имеет место в том и только том случае, когда $\partial X=\partial\widehat{X}$, где $\widehat{X}$ — это объединение X и всех ограниченных связных компонент* *его дополнения* $\mathbb{C} \setminus X$. Компакты X, удовлетворяющие такому условию, называются компактами Каратеодори.

Для сильно эллиптических кососимметричных систем А.Б. Зайцев в [5] получил достаточное условие для равномерной полиномиальной аппроксимации, совпадающее с условием в критерии Уолша–Лебега: *если* $\partial X = \partial \widehat{X}$, *то для сильно эллиптического кососимметричного оператора* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau,0}$ *выполняется равенство* $A_{\mathcal{L}}(X) = P_{\mathcal{L}}(X)$. Доказательство необходимости этого условия пока не получено. Это связано с отсутствием, в отличие от гармонического случая, результатов об общей разрешимости классической задачи Дирихле в общих односвязных областях (см. подробнее гл. 2).

М.Я. Мазаловым в работе [11] получено следующее утверждение: *пусть* X *— произвольный компакт в* $\mathbb{C}$, *а* $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau,\sigma}$, *где* $\sigma \in \{0, \infty\}$. *Условие* $A_{\mathcal{L}}(X) = R_{\mathcal{L}}(X)$ *выполняется в том и только том случае, когда фундаментальное решение для оператора* $\mathcal{L}$ *локально ограничено.* Как будет видно из последующего изложения, это условие эквивалентно тому, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau,\infty}$.

Изучение задачи об аппроксимации функций решениями эллиптических уравнений и систем в нормах пространств $C^m(X)$, $m > 0$, началось в 1980-е годы в работах А. Г. О'Фаррелла [37], Д. Вердеры [45], [46], Н. Н. Тарханова [24], П. В. Парамонова и ряда других авторов.

П.В. Парамонов в [16] доказал критерий C^1-приближаемости гармоническими полиномами: *для компакта* $X \subset \mathbb{C}$ *равенство* $A^{1,w}_{\Delta}(X) = P^{1,w}_{\Delta}(X)$ *равносильно тому, что множество* $\mathbb{C} \setminus X$ *связно.* Как отмечено в обзоре [14], этот результат справедлив и для соответствующей задачи об аппроксимации в норме пространства Уитни. В работе [18] П.В. Парамонова и К.Ю. Федоровского приведенное утверждение было распространено на случай кососимметричных эллиптических систем, т.е. уравнений вида (0.4).

Задача о равномерной полиномиальной аппроксимации в случае не сильно эллиптических систем рассматривалась в основном для уравнения Бицадзе $\overline{\partial}^2 f = 0$. Отдельные результаты получены и для общих кососимметричных не сильно эллиптических систем. В отличие от топологических условий, возникающих в сильно эллиптическом случае, условия полиномиальной аппроксимации здесь зависят от специальных аналитических свойств компактов, на которых рассматривается аппроксимация (см. [18], [14], [13]).

Сформулируем и обсудим основные результаты настоящей главы. Для этого нам потребуются специальные метрические характеристики множеств. Обозначим символом $D(a, r)$ круг с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$. Для точки $z \in \mathbb{C}$ и числа $r > 0$ определим величину $d(z, r, X)$ как верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $D(z, r) \setminus X$ и положим

$$\theta(X) := \inf\left\{\frac{d(z,r,X)}{r} : z \in \partial X,\ r > 0\right\}.$$

Основным результатом первой главы является следующее утверждение.

Теорема 0.1. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$.*

1. Если $\theta(X) > 0$, то $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.

2. Для выполнения равенства $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathbb{C} \setminus X$ было связно.

Следствие 0.2. *Предположим, что для компакта $X \subset \mathbb{C}$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

i) нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus X$ положительна;

ii) каждая граничная точка компакта X является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества $\mathbb{C} \setminus X$;

iii) X является компактом Каратеодори, т.е. $\partial X = \partial \widehat{X}$.

Тогда $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.

В **главе 2** рассматривается классическая задача Дирихле для однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Эта задача, как уже говорилось выше, естественно связана с тематикой равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями соответствующих систем. Результаты главы опубликованы в [1А], [3А] и [4А].

Будем считать, что система (0.1) уже записана в виде одного уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ относительно комплекснозначной функции f. Классическая задача Дирихле для него формулируется следующим образом. Пусть на границе Γ некоторой ограниченной односвязной области Ω задана непрерывная функция. Требуется продолжить ее до функции f, определенной и непрерывной в замыкании этой области и удовлетворяющей в ней уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$.

Первый и основной для нас вопрос — это вопрос об описании областей, в которых решение классической задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ существует при любой граничной функции h. Такие области мы будем называть *регулярными* относительно соответствующей задачи Дирихле. Другой вопрос состоит в описании пары область-граничная функция, для которой соответствующая задача Дирихле имеет решение. Обе задачи в общем случае остаются нерешенными. Свойства разрешимости задачи Дирихле для сильно эллиптических систем существенно отличаются от аналогичных свойств для систем, не являющихся сильно эллиптическими.

Модельным примером сильно эллиптической системы можно считать уравнение Лапласа $\Delta f = 0$. В 1907 г. А. Лебег в работе [35] доказал, что любая ограниченная односвязная область Ω является регулярной относительно задачи Дирихле для оператора Δ.

Известна гипотеза о том, что результат, аналогичный теореме Лебега, остается верным для любой кососимметричной сильно эллиптической системы. Для общего сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ подобная гипотеза, хотя и не была в явном виде сформулирована в литературе, тем нее менее выглядит весьма правдоподобной. В работе [44], в частности, доказано, что любая ограниченная односвязная область Ω с кусочно-гладкой границей регулярна относительно задачи Дирихле для любого сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. При этом вопрос о регулярности даже жордановых областей общего вида остается открытым. Что касается собственно задачи Дирихле, то ряд условий на область Ω и функцию $h \in C(\partial\Omega)$, при которых соответствующая задача Дирихле разрешима, получен в работах [22], [23].

В случае не сильно эллиптических систем ситуация выглядит совсем иначе. Достаточно рассмотреть уравнение Бицадзе $\overline{\partial}^2 f = 0$, которое является характерным представителем данного класса. Для бианалитических функций, являющихся решениями этого уравнения, отсутствует принцип максимума и нет единственности решения даже в круге. Отсутствует общая разрешимость классической задачи Дирихле даже в областях с гладкими границами. Так, известно (см. [6]), что область с границей, содержащей аналитическую дугу, нерегулярна относительно любой не сильно эллиптической кососимметричной системы. В работе [12] доказана нерегулярность областей с ляпуновскими границами (т.е. границами класса $C^{1,\alpha}$) относительно уравнения Бицадзе и, вместе с тем, построен пример липшицевой области, регулярной в указанном смысле.

В §2.2 диссертации упомянутый результат работы [6] обобщен на случай общих не сильно эллиптических систем.

Теорема 0.3. *Пусть Ω — ограниченная односвязная область с границей Γ, содержащей открытую аналитическую дугу γ, ни одна из точек которой не является предельной для множества $\Gamma \setminus \gamma$. Тогда задача Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$ при $|\sigma| > 1$ (т.е. в не сильно эллиптическом случае) с граничной функцией $(z-a)^{-1}$, где точка $a \in \Omega$ расположена достаточно близко к дуге γ, неразрешима в области Ω.*

Кроме того, приводится новое доказательство утверждения работы [12] о нерегулярности областей с ляпуновскими границами относительно задачи

Дирихле для бианалитических функций.

В §§2.3, 2.4 рассматриваются вопросы разрешимости и конструкция решения задачи Дирихле для сильно эллиптических систем. Исходя из записи систем в виде уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, предложен метод решения задачи Дирихле, основанный на представлении решения в виде ряда по параметрам τ и σ. В случае сильной эллиптичности эти параметры являются малыми ($|\tau| < 1$, $\sigma<1$) и задают отклонение оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ от оператора Лапласа. С помощью этого метода получены интегральные представления типа Пуассона для круга и эллипса специального вида и выписана соответствующая функция Грина. В случаях, когда хотя бы один из параметров τ или σ обращается в нуль, возникающие в полученных формулах ряды удается явно суммировать.

Теорема 0.4. *Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,0} f(z) = 0$ с параметром $|\tau| < 1$ в единичном круге $\mathbb{D}$ с граничной функцией $h \in C(\mathbb{T})$ представляется интегралом*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|z|^2)(\zeta + \tau\overline{\zeta})}{(\zeta_\tau - z_\tau)(\overline{\zeta} - \overline{z})(\zeta + \tau\overline{z})} h(\zeta)|d\zeta|,$$

где $z_\tau = z - \tau\overline{z}$.

Теорема 0.5. *Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{0,\sigma} f(z) = 0$ в единичном круге $\mathbb{D}$ с заданной граничной функцией $h \in C(\mathbb{T})$ записывается в следующем виде:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (1-|z|^2) \left(\frac{1}{|\zeta - z|^2} \mathcal{I} + \sigma \frac{2 - \overline{\zeta} z}{(\zeta - z)^2} \mathcal{C} \right) h(\zeta)|d\zeta|.$$

Случай общих систем содержится в теореме 2.5, которая не формулируется здесь явно.

В **главе 3** исследуются отображения единичного круга решениями эллиптических систем $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$. Мы рассматриваем отображения трех классов: 1) гармонические отображения, соответствующие значениям параметров $\tau = \sigma = 0$; 2) $\mathcal{L}_{\tau,0}$-отображения (отображающая функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,0} f = 0$); 3) $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-отображения.

Для гармонического случая исследуется вопрос о радиусе звездообразности образа круга при однолистном нормированном отображении. Для $\mathcal{L}_{\tau,0}$- и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-функций на основе полученных в предущей главе формул типа Пуассона исследуется граничное поведение и строятся примеры отображений на области с углами. Основные результаты этой главы приведены в работе [2А].

В §§3.1 и 3.2 рассматривается класс $\mathcal{S}_H$ гармонических отображений единичного круга (т.е. однолистных гармонических в единичном круге комплекснозначных функций) с нормировкой

$$f(0) = 0, \quad f_z(0) = 1; \tag{0.6}$$

здесь и далее нижние индексы z и $\overline{z}$ означают взятие соответствующих производных в смысле Коши–Римана. Исследуется вопрос о звездообразности образа круга при таких отображениях и радиусе звездообразности для классов функций.

Односвязная область $U \subset \mathbb{C}$ называется звездообразной относительно точки $a \in U$, если для любой точки $z \in U$ отрезок $[a, z]$, соединяющий ее с точкой a, содержится в U. В дальнейшем мы будем иметь дело только с областями, звездообразными относительно начала координат, и будем называть их просто звездообразными. Граница жордановой звездообразной области называется звездообразной кривой. Нетрудно видеть, что условие звездообразности аналитической жордановой кривой γ эквивалентно тому, что $\arg w$ не убывает при движении точки w по γ в положительном направлении.

Радиусом звездообразности $R_s(\mathcal{K})$ для данного класса $\mathcal{K}$ функций, определенных и однолистных в окрестности начала координат, называется такое максимальное число $R > 0$ (если оно существует), что любой круг D_r радиуса $0 < r \leq R$ с центром в начале координат отображается всеми функциями данного класса на звездообразную область. Вопрос о радиусе звездообразности тесно связан с вопросом о радиусе выпуклости, который определяется аналогичным образом (образ круга D_r при соответствующих отображениях является выпуклой областью).

Так как любая выпуклая область является звездообразной, то значение радиуса выпуклости является нижней оценкой (возможно, неточной) радиуса звездообразности для одного и то же класса отображений.

Хорошо изученным подклассом класса $\mathcal{S}_H$ является класс $\mathcal{S}$ конформных отображений f единичного круга $\mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям нормировки $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$ (см., например, [3]). Для него еще в первой половине XX века были получены точные значения радиусов выпуклости $R_c(\mathcal{S}) = 2 - \sqrt{3} \approx 0.26$ и звездообразности $R_s(\mathcal{S}) = \operatorname{th}(\pi/4) \approx 0.65$ (см. [36] и [32] соответственно).

В работе [41] был доказан критерий выпуклости образа круга при гармоническом отображении. Этот критерий выражается в терминах выпуклости по одному направлению.

Напомним (см., например, [30]), что область U называется выпуклой в горизонтальном направлении, если ее пересечение с любой горизонтальной прямой либо связно, либо пусто. Иными словами, любая прямая, параллельная вещественной оси, либо пересекает область по целому интервалу (возможно, неограниченному), либо вовсе не пересекает. Аналогичным образом определяется выпуклость в любом другом направлении. Область U является выпуклой тогда и только тогда, когда она выпукла во всех направлениях.

Клуни и Шейл-Смолл в 1984 году получили следующее утверждение. *Пусть гармоническая функция* $f = h + \overline{g}$ *локально однолистна в круге* $D_R = \{|z| < R\}$, $R > 0$. *Тогда она однолистно отображает этот круг на выпуклую область в том и только в том случае, когда при любом* $\beta \in [0, 2\pi)$ *функция* $\varphi_\beta(z) := h(z) + e^{i\beta} g(z)$ *конформно отображает* D_R *на область, выпуклую в горизонтальном направлении.*

Результат типа теоремы Клуни–Шейл-Смолла для звездообразных областей удалось получить для класса $\mathcal{C}_H$, который состоит из всех однолистных гармонических отображений f единичного круга на выпуклые области, удовлетворяющих нормировке (3.1). Формулировка соответствующего утверждения использует понятие звездообразности по одному направлению.

Пусть γ — простая замкнутая аналитическая кривая и $0 \notin \gamma$. Скажем, что γ звездообразна в направлении β, если луч, выходящий из начала координат под углом β относительно положительного направления вещественной оси, пересекает γ не внешним образом не более чем в одной точке. Под пересечением кривой γ с прямой не внешним образом мы подразумеваем такое пересечение, при котором любая окрестность точки пересечения содержит точки γ, лежащие как в одной, так и в другой полуплоскости относительно данной прямой. Жорданову область U, ограниченную такой кривой, назовем звездообразной в заданном направлении β. Звездообразность в направлениях $\pm\dfrac{\pi}{2}$ естественно назвать звездообразностью в вертикальном направлении.

Жорданова область U с аналитической границей звездообразна в том и только том случае, когда она звездообразна по всем направлениям $\beta \in [0, 2\pi)$.

Теорема 0.6. *Функция* $f = h + \overline{g} \in \mathcal{C}_H$ *отображает круг* D_r *радиуса* $r \in (0, 1)$ *на звездообразную область в том и только в том случае, когда при любом* $\beta \in [0, 2\pi)$ *функция* $\varphi_\beta(z) = h(z) + e^{i\beta} g(z)$ *отображает окружность* T_r *на кривую, звездообразную в вертикальном направлении.*

Из этого утверждения следует, что для класса $\mathcal{C}_H$ справедлива оценка

$$R_s(\mathcal{C}_H) \geq R_s(\mathcal{S}) = \operatorname{th} \frac{\pi}{4} \approx 0.65.$$

Эта оценка является наилучшей из известных в настоящий момент. Другие оценки и точные значения радиусов выпуклости и звездообразности для различных классов однолистных гармонических отображений можно найти в работах [31], [40], [42], [26], [47].

В § 3.3 исследуется граничное поведение решений эллиптических систем $\mathcal{L}_{\tau,0}f = 0$ и $\mathcal{L}_{0,\sigma}f = 0$ и отображение круга этими решениями, заданными в виде соответствующих интегралов типа Пуассона (эти представления, как уже было сказано, получены во второй главе).

Установлены следующие обобщения классической теоремы о взвешенном среднем для интеграла Пуассона для гармонических функций (см., например, [30, §§1.5, 3.3]).

Теорема 0.7. *Пусть функция f задана интегралом Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{\tau,0}$, $\tau \in [0,1)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|^2)(e^{it}+\tau e^{-it})}{(e^{it}-z)_\tau(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})}\varphi(t)dt,$$

где $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция с конечным числом точек разрыва. Пусть $\Lambda_{\theta,\alpha}$ — это прямая, проходящая через точку $e^{i\theta}$ и составляющая угол α с касательной в этой точке к окружности $\mathbb{T}$. Тогда для любого $\alpha \in (0,\pi)$ предел функции f при стремлении точки z к $e^{i\theta}$ вдоль Λ_α равен

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in\Lambda_{\theta,\alpha}}} f(z) = p(\theta,\alpha)\varphi_+(\theta) + (1-p(\theta,\alpha))\varphi_-(\theta),$$

где $\varphi_\pm(\theta) = \lim\limits_{t\to\theta\pm}\varphi(t)$ и

$$p(\theta,\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\tau e^{-2i\theta}}{1+\tau e^{2i(\alpha-\theta)}}.$$

Теорема 0.8. *Пусть функция f задана интегралом Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{0,\sigma}$, $\sigma \in [0,1)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(1-|z|^2)\left(\frac{1}{|e^{it}-z|^2}\mathcal{I} + \sigma\frac{2-e^{-it}z}{(e^{it}-z)^2}\mathcal{C}\right)\varphi(t)dt,$$

где $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция с конечным числом точек разрыва. Тогда

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in\Lambda_{\theta,\alpha}}} f(z) = p(\theta,\alpha)\varphi_+(\theta) + (\mathcal{I}-p(\theta,\alpha))\varphi_-(\theta),$$

где

$$p(\theta,\alpha) = \frac{\alpha}{\pi}\mathcal{I} + \frac{\sigma}{2\pi i}\left(e^{-2i\theta} - e^{2i(\alpha-\theta)}\right)\mathcal{C}.$$

В параграфе 3.2 также построены отображения единичного круга при помощи $\mathcal{L}_{\tau,0}$- и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-функций, заданных соответствующими интегралами типа Пуассона от кусочно-постоянных граничных функций. В частном случае, когда отображающая функция гармоническая, образом круга при таких отображениях является правильный n–угольник. При увеличении параметра τ (соответственно σ) при $\sigma = 0$ (соответственно $\tau = 0$) наблюдается постепенная деформация многоугольников. Характер границы при этом определяется приведенными двумя теоремами о граничном поведении.

Отметим, что отображения решениями эллиптических систем, отличных от системы Лапласа, являются пока мало изученными. Некоторые исследования проводились недавно А.Б. Зайцевым, который в работах [7] и [8] рассматривал вопрос об однолистности $\mathcal{L}_{\tau,0}$–отображений единичного круга и установил ряд достаточных условий.

Глава 1

Аппроксимация функций решениями эллиптических систем

В этой главе изучается задача C^1-аппроксимации функций полиномиальными решениями эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами на компактах в плоскости.

1.1. Предварительные сведения о системах

Рассмотрим однородную систему уравнений в частных производных второго порядка

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где A, B, C — постоянные квадратные матрицы второго порядка с вещественными числами, а u и v — функции двух вещественных переменных. Система (1.1) относится к эллиптическому типу (см. [19], [20]), если ее биквадратичная характеристическая форма, заданная определителем

$$\mathcal{F}(\xi, \eta) := \det(A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2), \tag{1.2}$$

обращается в нуль только при $\xi = \eta = 0$. Среди эллиптических систем выделяют, в свою очередь, класс сильно эллиптических систем (см. [43], [2],[33], [34]). Эллиптическая система (1.1) называется сильно эллиптической, если определитель

$$\mathcal{Q}(\xi, \eta) := \det(A + 2B\xi + C\eta)$$

не обращается в нуль при вещественных ξ и η с условием $\xi^2 \leqslant \eta$.

Условия эллиптичности и сильной эллиптичности имеют простую геометрическую интерпретацию. Эллиптичность означает, что кривая второго порядка, задаваемая в плоскости (ξ, η) уравнением $\mathcal{Q}(\xi, \eta) = 0$, не пересекается с параболой $\eta = \xi^2$, а сильная эллиптичность — что она расположена именно во "внешности" этой параболы.

Эллиптическую систему вида (1.1) можно упростить, применяя следующие три типа линейных преобразований: 1) линейную комбинацию уравнений системы; 2) линейную замену искомых функций; 3) линейную замену переменных. С помощью подходящего набора таких операций любая эллиптическая система (1.1) сводится к следующему каноническому виду с новыми переменными x', y' и неизвестными функциями $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{\lambda}{\kappa^2}\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\begin{pmatrix}0 & \frac{\lambda-\kappa^2}{\kappa}\\ \frac{\lambda-1}{\kappa} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x'\partial y'}+\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y'^2}\right)\begin{pmatrix}\widetilde{u}\\ \widetilde{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Параметры $\lambda \neq 0$ и $\kappa \in (0,1]$ в этом представлении называют показателями симметрии и эллиптичности исходной системы соответственно. Сильно эллиптическим системам (1.1) соответствуют значения параметра $\lambda > 0$. При соотношении параметров $\lambda < \kappa^2$ или $\lambda > 1$ такие системы называются *симметричными*, или симметризуемыми (см. [34], [44]), поскольку они приводятся к виду, в котором все матрицы A, B, C одновременно симметричны; при $\kappa^2 < \lambda < 1$ система называется *несимметричной*. Если же $\lambda = \kappa^2$ или $\lambda = 1$, то соответствующая система распадается на два уравнения, одно из которых не зависит от другого, так что решение системы сводится к последовательному решению двух уравнений; ее принято называть *треугольной*, ввиду того, что матрица B в этом случае становится треугольной.

Приведение эллиптической системы (1.1) к каноническому виду (1.3) осуществляется в два шага. Первым делом определяются две комплексно сопряженные пары λ_1, $\overline{\lambda}_1$ и λ_2, $\overline{\lambda}_2$ корней биквадратичной характеристической формы (1.2), иначе говоря, она представляется в виде

$$\mathcal{F}(\xi_1,\xi_2) = \det A \cdot (\xi_1 - \lambda_1\xi_2)(\xi_1 - \overline{\lambda}_1\xi_2)(\xi_1 - \lambda_2\xi_2)(\xi_1 - \overline{\lambda}_2\xi_2).$$

Применением подходящего (невырожденного) дробно-линейного преобразования (см. [34], [1а])

$$\Lambda(z) = \frac{az+b}{z+c}, \quad ac - b \neq 0, \qquad (1.4)$$

переводим характеристические корни λ_1, λ_2 в точки мнимой оси:

$$\Lambda(\lambda_1) = -i\kappa, \qquad \Lambda(\lambda_2) = i, \qquad (1.5)$$

причем значение κ заранее неизвестно и определяется вместе с коэффициентами a, b, c из условий (1.5). Этому отображению будет соответствовать невырожденная линейная замена переменных

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c & -1\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, \qquad (1.6)$$

приводящая к системе с соответствующими матрицами A_1, B_1, C_1 и характеристической формой $\mathcal{F}_1(\xi,\eta) = \det A_1 \cdot (\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\kappa^2\eta^2)$.

После описанного дробно-линейного преобразования плоскости применением подходящей линейной комбинации уравнений полученной системы, а также линейного преобразования зависимых переменных u, v приходим к системе вида (1.3).

Для простоты теперь в (1.3) опустим штрихи и тильды. От матричной формы (1.3) записи эллиптической системы удобно перейти к комплексной форме. С этой целью предварительно умножим все матрицы системы (1.3) слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\kappa^2-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{1-\lambda} \end{pmatrix},$$

после чего эта система приобретет симметричный вид

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\kappa^2-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\kappa(1-\lambda)} \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda\kappa}{\kappa^2-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{1-\lambda} \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Введем комплексную функцию $f = u + iv$ и сложим первое уравнение системы (1.7) со вторым, умноженным на мнимую единицу i. Получившееся уравнение можно записать в следующем виде

$$(1-\kappa)(\kappa+\lambda)\partial^2 f(z) + (1+\kappa)(\kappa+\lambda)\partial\overline{\partial} f(z) + \\ + (1+\kappa)(\kappa-\lambda)\partial^2\overline{f(z)} + (1-\kappa)(\kappa-\lambda)\partial\overline{\partial}\,\overline{f(z)} = 0, \tag{1.8}$$

где $z = x + iy$, а ∂ и $\overline{\partial}$ — операторы Коши–Римана:

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Поскольку $\lambda \neq 0$, то выполняется хотя бы одно из двух условий $\lambda \neq -\kappa$ или $\lambda \neq \kappa$.

При $\lambda \neq -\kappa$ уравнение (1.8) можно разделить на $(1+\kappa)(\kappa+\lambda)$ и, введя новые параметры

$$\tau = \frac{1-\kappa}{1+\kappa}, \qquad \sigma = \frac{\kappa-\lambda}{\kappa+\lambda}, \tag{1.9}$$

переписать его в окончательном виде

$$(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)f + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{f} = 0, \tag{1.10}$$

где $\tau \in [0,1)$ и $\sigma \neq \pm 1$.

Так как

$$\kappa = \frac{1-\tau}{1+\tau}, \qquad \lambda = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}\cdot\frac{1-\tau}{1+\tau},$$

то сильно эллиптической системе соответствует уравнение (1.10) со значениями параметра $|\sigma| < 1$. Заметим также, что симметризуемым системам (1.7) соответствует уравнение (1.10) с параметрами $|\sigma| > |\tau|$.

Если $\lambda \neq \kappa$, то деля уравнение (1.8) на $(1-\kappa)(\kappa-\lambda)$ и переходя к комплексно сопряженным выражениям в обеих сторонах равенства, придем к уравнению

$$(\overline{\partial}^2 + \tau\partial\overline{\partial})f + s(\tau\overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial})\overline{f} = 0, \tag{1.11}$$

где $s = \sigma^{-1}$.

Уравнение (1.10) в случае сильной эллиптичности можно рассматривать как возмущенное комплексное уравнение Лапласа $\Delta f = 4\partial\overline{\partial} f = 0$ с малыми параметрами τ и σ, а уравнение (1.11) при отсутствии сильной эллиптичности — как возмущенное уравнение Бицадзе $\overline{\partial}^2 f = 0$ с малыми параметрами τ и s. Поэтому изучать сильно эллиптические системы удобно, записывая их в виде (1.10), а не сильно эллиптические системы — в виде (1.11). Обозначим через $\mathcal{I}\colon z \to z$ тождественный оператор, а через $\mathcal{C}\colon z \to \overline{z}$ оператор комплексного сопряжения и будем в дальнейшем записывать все системы (1.1) одним уравнением $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ с оператором

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} := \begin{cases} (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)\mathcal{I} + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}, & |\sigma| < 1, \\ (\overline{\partial}^2 + \tau\partial\overline{\partial})\mathcal{I} + s(\tau\overline{\partial}^2 + \partial\overline{\partial})\mathcal{C}, & |\sigma| > 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Отметим, что здесь возможен случай $\sigma = \infty$, при котором полагаем $s = 0$.

Отдельный интерес представляют частные случаи уравнений $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, отвечающие нулевым значениям параметров σ или τ.

Значениям $\sigma = 0$ и $\sigma = \infty$ соответствует система, которая называется *кососимметрической* (см. [34], [44]). Она получается при сведении к каноническому виду системы (1.1) с матрицами следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Система с такими матрицами эквивалентна уравнению

$$af''_{xx} + 2bf''_{xy} + cf''_{yy} = 0, \tag{1.13}$$

где $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$ и $c = c_1 + ic_2$ — постоянные комплексные коэффициенты. Условие эллиптичности уравнения (1.13) сводится к тому, что корни λ_1 и λ_2 уравнения $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0$ невещественны, а сильная эллиптичность равносильна факту, что эти корни лежат в разных полуплоскостях относительно вещественной оси.

При значении параметра $\tau = 0$ система (1.10) превращается в хорошо известную *систему Ляме*, играющую важную роль в плоских задачах теории упругости (см. [10, стр. 30]) с коэффициентом Пуассона μ, связанным с параметром σ соотношением $\sigma = 1/(4\mu - 5)$, а также в систему уравнений продольных деформаций пластинок (или плоского напряженного состояния, см. [10, стр. 69]), для которой $\sigma = -(1+\mu)/(5+\mu)$. Так как коэффициент Пуассона принимает значение в интервале $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, то и система Ляме, и система уравнений продольных деформаций пластинок являются сильно эллиптическими: для системы Ляме параметр $\sigma \in \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right)$, а для уравнений продольных деформаций $\sigma \in \left(-\frac{3}{11}, -\frac{1}{5}\right)$, так что в обоих случаях $|\sigma| < 1$.

Для дальнейших упрощений некоторых записей нам понадобится ряд обозначений. При $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ определим линейный оператор

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta} := \alpha\mathcal{I} + \beta\mathcal{C}.$$

Нетрудно проверить, что обратным к нему является оператор

$$\mathcal{T}^{-1}_{\alpha,\beta} = \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)^{-1} \mathcal{T}_{\overline{\alpha},-\beta}.$$

Кроме того, введем дифференциальный оператор

$$\partial_\alpha := \mathcal{T}_{\alpha,1}\partial = \overline{\partial} + \alpha\partial,$$

и положим

$$z_\alpha := \mathcal{T}_{1,-\alpha} z = z - \alpha\overline{z}.$$

Заметим, что $\partial_\alpha z_\alpha = 0$. Наконец положим $t = \tau^{-1}$. Используя введенные обозначения, перепишем оператор (1.12) в мультипликативной форме

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} = \begin{cases} \partial\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau, & |\sigma| < 1, \\ \overline{\partial}\mathcal{T}_{1,s}\partial_\tau, & |\sigma| > 1, \end{cases} \tag{1.14}$$

из которой нетрудно получить вид общего решения уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$.

Предложение 1.1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{C}$, а $f \in C(\Omega)$. Функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ в Ω тогда и только тогда, когда она представима в Ω в следующем виде:*

$$f(z) = \begin{cases} h(z_\tau) + \mathcal{T}_{-\sigma t,1} g(z), & |\sigma| < 1, \quad \tau \neq 0, \\ h(z) + \overline{g(z)} - \sigma\overline{z} g'(z), & |\sigma| < 1, \quad \tau = 0, \\ h(z_\tau) + \mathcal{T}_{t,-s} g(z), & |\sigma| > 1, \quad \tau \neq 0, \\ h(z) - s\overline{g(z)} + \overline{z} g'(z), & |\sigma| > 1, \quad \tau = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

где h и g — функции, голоморфные в областях $\mathcal{T}_{1,-\tau}(\Omega)$ и Ω соответственно.

Доказательство. Рассмотрим случай $|\sigma| < 1$, $\tau \neq 0$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Непосредственно проверяется, что функция $f(z)$, заданная в области Ω по формуле (1.15), удовлетворяет в ней уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$.

Пусть, обратно, известно, что $f \in C(\Omega)$ удовлетворяет в Ω уравнению (1.10). Из (1.14) вытекает, что $\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f(z)$ является антиголоморфной функцией, а $\mathcal{C}\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f(z) = \mathcal{T}_{\sigma,1}\partial_\tau f(z)$ — голоморфной. Тогда функция g, определенная соотношением

$$g'(z) = \frac{\mathcal{T}_{\sigma,1}\partial_\tau f(z)}{1-\sigma^2}, \tag{1.16}$$

будет также голоморфной в Ω. Введем еще функцию

$$\widetilde{h}(z) = f(z) - \mathcal{T}_{-\sigma t,1} g(z) \tag{1.17}$$

и, учитывая (1.16), получим

$$\begin{aligned}\partial_\tau \widetilde{h}(z) &= \partial_\tau f(z) - \partial_\tau \mathcal{T}_{-\sigma t,1} g(z) = \\ &= \partial_\tau f(z) + (\overline{\partial} + \tau\partial)(\sigma t g(z) - \overline{g(z)}) = \partial_\tau f(z) + \mathcal{T}_{\sigma,-1} g'(z) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\widetilde{h}$ представима в виде $\widetilde{h}(z) = h(z_\tau)$, где h — голоморфная в области $\mathcal{T}_{1,-\tau}(\Omega)$ функция. Вместе с (1.17) это приводит к (1.15). Предложение доказано. □

Обозначим через $\Phi_{\tau,\sigma}$ фундаментальное решение для $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$, то есть $\Phi_{\tau,\sigma}$ — это такая обобщенная функция (распределение), что

$$\langle \mathcal{L}_{\tau,\sigma}\Phi_{\tau,\sigma} \,|\, \varphi \rangle = \langle \boldsymbol{\delta}_0 \,|\, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, где через $\langle F \,|\, \varphi \rangle$ обозначено действие распределения F на функцию φ, а $\boldsymbol{\delta}_0$ — это дельта-функция Дирака с центром в нуле.

Пусть

$$K_\tau(z) = \log(z_\tau \overline{z}), \qquad B_\tau(z) = \frac{1}{\tau}\log\frac{z_\tau}{z},$$

причем фиксируются некоторые однозначные вещественно-аналитические в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ветви соответствующих многозначных логарифмов. Отметим, что при $\tau = 0$ с помощью предельного перехода можно получить $B_0(z) = -\overline{z}/z$. Заметим также, что приращение полярного аргумента у функций $z_\tau\overline{z}$ и z_τ/z при обходе вокруг точки $z = 0$ равно нулю.

Предложение 1.2. *Для оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ существует фундаментальное решение вида*

$$\varPhi_{\tau,\sigma}(z) = \begin{cases} k_\sigma\big(K_\tau(z)\mathcal{I} + \sigma B_\tau(z)\mathcal{C}\big), & |\sigma| < 1, \\ k_\sigma\big(B_\tau(z)\mathcal{I} + sK_\tau(z)\mathcal{C}\big), & |\sigma| > 1, \end{cases}$$

с константой

$$k_\sigma = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(1-\sigma^2)}, & |\sigma| < 1, \\ \dfrac{1}{\pi(1-s^2)}, & |\sigma| > 1, \end{cases}$$

В предложении 1.2 распределение $\varPhi_{\tau,\sigma}$ имеет вид $\varPhi^{(1)}_{\tau,\sigma}(z)\mathcal{I} + \varPhi^{(2)}_{\tau,\sigma}(z)\mathcal{C}$, где $\varPhi^{(1)}_{\tau,\sigma}$ и $\varPhi^{(2)}_{\tau,\sigma}$ — соответствующие распределения. Последнее означает, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ справедливо

$$\langle \varPhi_{\tau,\sigma} \,|\, \varphi\rangle = \langle \varPhi^{(1)}_{\tau,\sigma} \,|\, \varphi\rangle + \langle \varPhi^{(2)}_{\tau,\sigma} \,|\, \overline{\varphi}\rangle.$$

Из формул для фундаментального решения непосредственно выводятся аналоги лорановских разложений для решений уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$. Для удобства формулировок мы разберем отдельно два случая: $\tau > 0$ и $\tau = 0$. Как обычно, через $F_1 * F_2$ обозначается свертка распределений F_1 и F_2. Константа k_σ в предложениях 1.3 и 1.4 ниже берется из предложения 1.2.

Предложение 1.3. *Пусть $\tau > 0$. Пусть F — распределение с компактным носителем в круге $D(a,r)$, и пусть $f = \varPhi_{\tau,\sigma} * F$. Тогда при $z \notin D(a, q_1 r)$, где $q_1 = q_1(\tau) \geqslant 1+\tau$, справедливы следующие разложения, все ряды в которых сходятся в смысле $C^\infty(\mathbb{C} \setminus D(a, q_1 r))$:*

1) При $|\sigma| < 1$

$$f(z) = \varPhi_{\tau,\sigma}(z-a)\cdot c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(z-a)_\tau^m} + \mathcal{T}_{-\sigma t,1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-a)^m}, \tag{1.18}$$

где $c_0 = \langle F \,|\, 1\rangle$,

$$c_m = -\frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)_\tau^m \,|\, \mathcal{T}_{1,\sigma t} F(w)\rangle, \qquad b_m = -\frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)^m \,|\, \overline{F(w)}\rangle.$$

2) При $|\sigma| > 1$

$$f(z) = \varPhi_{\tau,\sigma}(z-a)\cdot c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(z-a)_\tau^m} + \mathcal{T}_{-t,s} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z-a)^m},$$

где $c_0 = \langle F \,|\, 1 \rangle$,

$$c_m = -\frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)^m_\tau \,|\, \mathcal{T}_{t,s} F(w)\rangle, \qquad b_m = -\frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)^m \,|\, F(w)\rangle.$$

В случае $\tau = 0$ лорановские разложения для решений уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ имеют несколько иной вид.

Предложение 1.4. *Пусть F — распределение с компактным носителем в круге $D(a,r)$, и пусть $f = \varPhi_{0,\sigma} * F$. Тогда при $z \notin D(a, q_1 r)$, где $q_1 \geqslant 1$, справедливы следующие разложения, все ряды в которых сходятся в смысле $C^\infty(\mathbb{C} \setminus D(a, q_1 r))$:*

1) При $|\sigma| < 1$

$$f(z) = \varPhi_{0,\sigma}(z-a)\cdot c_0 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(z-a)^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{b_m}}{(\overline{z}-\overline{a})^m} + \sigma(\overline{z}-\overline{a}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m b_m}{(z-a)^{m+1}},$$

где $c_0 = \langle F \,|\, 1 \rangle$, *а*

$$b_m = -\frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)^m \,|\, \overline{F(w)}\rangle,$$

$$c_m = \frac{k_\sigma}{m}\big(\langle m\sigma(\overline{w}-\overline{a})(w-a)^{m-1} \,|\, \overline{F(w)}\rangle - \langle (w-a)^m \,|\, F(w)\rangle\big).$$

2) При $|\sigma| > 1$

$$f(z) = \varPhi_{0,\sigma}(z-a)\cdot c_0 + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{(z-a)^m} - s\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{b_m}}{(\overline{z}-\overline{a})^m} - (\overline{z}-\overline{a}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m b_m}{(z-a)^{m+1}},$$

где $c_0 = \langle F \,|\, 1 \rangle$, *а*

$$b_m = \frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)^m \,|\, F(w)\rangle,$$

$$c_m = -\frac{k_\sigma}{m}\big(\langle -m(\overline{w}-\overline{a})(w-a)^{m-1} \,|\, F(w)\rangle + \langle s(w-a)^m \,|\, \overline{F(w)}\rangle\big).$$

Всюду в дальнейшем коэффициенты c_m и b_m в предложениях 1.3 и 1.4 мы будем обозначать через $c_m(f,a)$ и $b_m(f,a)$, указывая, при необходимости, функцию и центр разложения.

1.2. C^1–аппроксимация решениями эллиптических систем

Напомним некоторые стандартные обозначения. Для множества $E \subset \mathbb{C}$ и функции $g\colon E \to \mathbb{C}$ положим $\|g\|_E = \sup_{z\in E}|g(z)|$, $\omega_E(g,\delta) = \sup\{|g(x) - g(y)|\colon x, y \in E,\ |x-y| \leqslant \delta\}$. При $E = \mathbb{C}$ индекс E в этих обозначениях опускается. Как обычно, символом $\operatorname{Supp}(f)$ обозначается носитель функции (или распределения) f. При $g \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ пусть

$$\|\nabla g\| = \max\{\|\partial g\|, \|\overline{\partial} g\|, \|\partial_\tau g\|\},$$
$$\omega(\nabla g, \delta) = \max\{\omega(\partial g, \delta), \omega(\overline{\partial} g, \delta), \omega(\partial_\tau g, \delta)\}.$$

Аналогичным образом для функции g класса $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$ определяется выражение $\|\nabla^2 g\|$ — максимум норм вторых производных функции g в смысле операторов ∂, $\overline{\partial}$ и ∂_τ.

Через $A, A_1, A_2, \ldots$ будут обозначаться абсолютные положительные константы, которые могут иметь различные значения в разных выражениях.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Определим локализационный оператор Витушкина $V_\varphi\colon C_0^\infty(\mathbb{C})' \to C_0^\infty(\mathbb{C})'$ по правилу

$$V_\varphi f = \Phi_{\tau,\sigma} * (\varphi \mathcal{L}_{\tau,\sigma} f). \tag{1.19}$$

Этот оператор обладает следующими свойствами.

Предложение 1.5. *Пусть $f \in C^1(\mathbb{C})$ и $\operatorname{Supp}(f) \subset D = D(0,R)$, где $R > 2$. Найдутся числа A_1 и $q_1 > 1$, зависящие только от оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$, такие, что для любых $a \in D$, $\delta \in (0,1)$ и $\varphi \in C_0^\infty(D(a,\delta))$ функция $f_\varphi = V_\varphi f$ обладает следующими свойствами:*

1) $f_\varphi \in C^1_{loc}(\mathbb{C})$, причем $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f_\varphi = 0$ на множестве $\mathbb{C} \setminus \big(\operatorname{Supp}(\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f) \cap \operatorname{Supp}(\varphi)\big)$;

2) справедливы оценки

$$\|f_\varphi\| \leqslant A_1 \omega^*(\delta)\delta\|\nabla\varphi\|, \qquad \|\nabla f_\varphi\| \leqslant A_1\omega(\delta)\delta^2\|\nabla^2\varphi\|, \tag{1.20}$$

где $\omega(\delta) = \omega(\nabla f, \delta)$ и $\omega^*(\delta) = \omega(\delta)\delta\log(R/\delta)$;

3) при всех $z \notin D(a, q_1\delta)$ функция $f_\varphi(z)$ разлагается в ряд вида (1.18) с центром в точке a и коэффициентами, подчиненными оценке

$$\max\{c_m(f_\varphi, a), b_m(f_\varphi, a)\} \leqslant A_1(q_1\delta)^{m+2}\omega(\delta)\|\nabla\varphi\|, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{1.21}$$

Доказательство. Предложение 1.5 доказывается тем же образом, что и аналогичное предложение 2.4 из работы [18] и обобщает последнее с класса операторов кососимметричных систем на общие эллиптические операторы.

Мы проведем доказательство утверждений 1)–3) для случая, когда $f \in C^\infty(\mathbb{C})$. Общий случай получается регуляризацией. Рассмотрен будет только оператор $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ с параметрами $\tau \in (0,1)$, $|\sigma| < 1$, остальные ситуации рассматриваются аналогично.

1) Непосредственно из (1.19) следует, что если $f \in C^\infty(\mathbb{C})$, то $f_\varphi \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C})$. Кроме того, в силу фундаментальности оператора $\Phi_{\tau,\sigma}$, имеем $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f_\varphi = \varphi \mathcal{L}_{\tau,\sigma} f$, откуда ясно, что $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f_\varphi(z) = 0$ при $z \notin \operatorname{Supp}(\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f) \cap \operatorname{Supp}(\varphi)$.

2) Из вида (1.15) общего решения уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ вытекают следующие выражения для производных голоморфных компонент h и g функции f:

$$h'(z_\tau) = -(1+\sigma t)\widehat{\mathcal{T}}_{\sigma,1}\widehat{\mathcal{T}}_{1,-\tau}\partial_\tau f(z), \qquad g'(z) = -\widehat{\mathcal{T}}_{\sigma,1}\partial_\tau f(z),$$

где использовано обозначение $\widehat{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} := (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^{-1}\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ для нормированного оператора $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$ (отметим, что $\widehat{\mathcal{T}}_{\alpha,\beta} = \mathcal{T}^{-1}_{\overline{\alpha},-\beta}$). Обозначим

$$\alpha_1 = h'(a_\tau), \qquad \beta_1 = g'(a)$$

и введем функцию

$$f_a(z) = f(z) - f(a) - \alpha_1 (z-a)_\tau - \mathcal{T}_{\sigma t,1}\beta_1(z-a),$$

которая удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f_a = 0$. Нетрудно проверить, что $\partial_\tau f_a(z) = \partial_\tau f(z) - \partial_\tau f(a)$, откуда следует оценка

$$\|\partial_\tau f_a\| \le \omega(\nabla f, \delta) = \omega(\delta). \tag{1.22}$$

Запишем фундаментальное решение в виде $\Phi_{\tau,\sigma}(z) = \Phi^{(1)}_{\tau,\sigma}(z)\mathcal{I} + \Phi^{(2)}_{\tau,\sigma}(z)\mathcal{C}$, где $\Phi^{(1)}_{\tau,\sigma}(z) = k_\sigma K_\tau(z)$, $\Phi^{(2)}_{\tau,\sigma}(z) = k_\sigma \sigma B_\tau(z)$. Используя запись (1.14) для оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$, получаем

$$\begin{aligned} f_\varphi(z) = \langle \Phi_{\tau,\sigma}(w-z)\varphi(w) \,|\, \partial \mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f_a(w)\rangle = \\ = -\langle (\partial \Phi^{(1)}_{\tau,\sigma}(w-z)\mathcal{I} + \overline{\partial}\Phi^{(2)}_{\tau,\sigma}(w-z)\mathcal{C})\varphi(w) + \\ + \Phi_{\tau,\sigma}(w-z)\partial\varphi(w) \,|\, \mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f_a(w)\rangle. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Здесь и ниже операторы $\mathcal{I}$, $\mathcal{C}$ и $\Phi_{\tau,\sigma}$ действуют на все выражения, стоящие справа от них при умножении, в том числе на правые части содержимого угловых скобок. Принимая во внимание оценку $\|\varphi\| \leqslant A_1 \delta \|\nabla \varphi\|$, а также (1.22), из (1.23) получим оценку для $\|f_\varphi\|$ в (1.20).

Теперь оценим производные функции f_φ. Снова учитывая (1.14), а также то обстоятельство, что $\partial\partial_\tau \Phi^{(1)}_{\tau,\sigma} = k_\sigma \pi \boldsymbol{\delta}_0$ и $\overline{\partial}\partial_\tau \Phi^{(2)}_{\tau,\sigma} = k_\sigma \pi \sigma t \boldsymbol{\delta}_0$, из (1.23) имеем

$$\begin{aligned}
\partial_\tau f_\varphi(z) &= -\langle \partial_\tau \Phi_{\tau,\sigma}(w-z)\varphi(w) \,|\, \partial \mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f_a(w)\rangle = \\
&= \langle \partial(\partial_\tau \Phi^{(1)}_{\tau,\sigma}(w-z)\mathcal{I}\varphi(w)) + \overline{\partial}(\partial_\tau \Phi^{(2)}_{\tau,\sigma}(w-z)\mathcal{C}\varphi(w)) \,|\, \mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f_a(w)\rangle = \\
&\qquad = k_\sigma \pi \mathcal{T}_{1,\sigma t}\varphi(z)\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f_a(z) + \langle \partial_\tau \Phi_{\tau,\sigma}(w-z)\partial\varphi(w) \,|\, \mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f_a(w)\rangle.
\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $\|\nabla\varphi\| \leqslant A_1\delta\|\nabla^2\varphi\|$, отсюда можно получить требуемую оценку (1.20) величины $\|\nabla f_\varphi\|$.

3) Наконец оценим коэффициенты разложения вида (1.21) для функции f_φ. Существование такого разложения следует из предложения 1.3. Мы приведем вывод оценки для коэффициентов c_m, для b_m рассуждения принципиально не отличаются.

Из предложения 1.3 имеем

$$\begin{aligned}
c_m &= -\frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)^m_\tau \,|\, \mathcal{T}_{1,\sigma t}\varphi(w)\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(w)\rangle = \\
&= -\frac{k_\sigma}{m}\langle (w-a)^m_\tau \,|\, \varphi(w)\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(w)\rangle - \frac{k_\sigma}{m}\sigma t\langle (w-a)^m_\tau \,|\, \overline{\varphi(w)\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(w)}\rangle. \quad (1.24)
\end{aligned}$$

Модуль первого слагаемого здесь не превосходит величины

$$\begin{aligned}
\frac{k_\sigma}{m}\,|\langle \varphi(w)(w-a)^m_\tau \,|\, \mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(w)\rangle| &= \frac{k_\sigma}{m}\,|\langle \varphi(w)(w-a)^m_\tau \,|\, \partial\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f(w)\rangle| = \\
&= \frac{k_\sigma}{m}\left|\langle \partial\varphi(w)(w-a)^m_\tau + \varphi(w)m(w-a)^{m-1}_\tau \,|\, \mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau f(w)\rangle\right|.
\end{aligned}$$

Имея в виду, что $|(w-a)_\tau| \leqslant (1+\tau)|w-a|$, нетрудно оценить полученное выражение правой частью неравенства (1.21), в которой $q_1 = 1+\tau$. Оценка второго слагаемого в (1.24) производится тем же способом. Предложение доказано. □

Для дальнейшего нам также понадобится следующее обобщение леммы 3.1 из [18].

Лемма 1.6. *Пусть $f \in C^1(\mathbb{C})$, $\mathrm{Supp}(f) \subset D = D(0,R)$, $R > 2$ и $f_\varphi = V_\varphi f$, где $\varphi \in C^\infty_0(D(0,\delta))$ при $\delta \in (0,1)$. Существуют константы A_2 и $q_2 > 1$, зависящие только от оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ и удовлетворяющие следующему условию. Для любой гладкой незамкнутой жордановой кривой $\gamma \subset D(0,2\delta)$ диаметра δ найдется функция g_γ со следующими свойствами:*

1) g_γ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} g_\gamma = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{C}\setminus\gamma; \tag{1.25}$$

2) справедливы оценки

$$\omega(g_\gamma,\delta) \leqslant A_2, \qquad \|g_\gamma\|_{D\setminus\gamma} \leqslant A_2\omega^*(\delta), \qquad \|\nabla g_\gamma\|_{D\setminus\gamma} \leqslant A_2\omega(\delta); \tag{1.26}$$

3) при $z \notin D(0,2q_2\delta)$ функция $g_\gamma(z)$ разлагается в ряд вида (1.18) с центром в нуле и коэффициентами, подчиненными оценке

$$\max\{c_m(g_\gamma), b_m(g_\gamma)\} \leqslant A_2(q_2\delta)^{m+2}\omega(\delta)\|\nabla\varphi\|, \quad m = 0,1,\ldots; \tag{1.27}$$

4) имеет место касание второго порядка на бесконечности между функциями f_φ и g_γ, то есть

$$c_0(f_\varphi) = c_0(g_\gamma), \qquad c_1(f_\varphi) = c_1(g_\gamma), \qquad b_1(f_\varphi) = b_1(g_\gamma). \tag{1.28}$$

Доказательство. Будем рассматривать случай $|\sigma| < 1$, $\tau \neq 0$, для остальных случаев рассуждения не имеют принципиального отличия. Без ограничения общности можно полагать, что γ — жорданова кривая с началом в точке 0 и концом в точке a, $|a| = \delta$, целиком лежащая в замкнутом круге $\overline{D(0,\delta)}$. Пусть также $\gamma_\tau = \mathcal{T}_{1,-\tau}\gamma$ — образ кривой γ при отображении $z \mapsto z_\tau$.

Будем временно считать, что $\delta = 1$. При $\ell \in \{0,\tau\}$ и $\gamma_0 = \gamma$ рассмотрим функцию

$$h_\ell(z) = e_\ell\big(z(z-a_\ell)\sqrt{z(z-a_\ell)} - p_\ell(z)\big),$$

где голоморфная ветвь корня (вне кривой γ_ℓ), константа e_ℓ и многочлен p_ℓ выбраны так, что $\lim_{z\to\infty} z h_\ell(z) = 1$. Непосредственно проверяется, что

$$\|h_\ell\|_{\mathbb{C}\setminus\gamma_\ell} \leqslant A, \quad \|h'_\ell\|_{\mathbb{C}\setminus\gamma_\ell} \leqslant A. \tag{1.29}$$

Кроме того, при $|z| > 1+\ell$, имеет место разложение

$$h_\ell(z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{v_{\ell,m}}{z^m}, \tag{1.30}$$

коэффициенты которого оцениваются следующим образом:

$$|v_{\ell,m}| \leqslant A(1+\ell)^{m-1}, \quad m \geqslant 0. \tag{1.31}$$

Нам потребуется также первообразная

$$H_\ell(z) = \int_{2(1+\ell)}^{z} h_\ell(w)\,dw,$$

определенная интегрированием по любому пути, соединяющему точки $2(1+\ell)$ и z и не пересекающему γ_ℓ. При этом при $|z|>1+\ell$ имеет место разложение

$$H_\ell(z)=\varepsilon_{\ell,0}+\log z+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{\ell,m}}{z^m},$$

в котором $\varepsilon_{\ell,m}\leqslant A(1+\tau)^m$ при $m\geqslant 0$.

Теперь определим функции

$$\begin{aligned}\varTheta_1(z)&=\bigl(H_\tau(z_\tau)-\varepsilon_{\tau,0}\bigr)+\bigl(\overline{H_0(z)}-\overline{\varepsilon_{0,0}}\bigr),\\ \varTheta_2(z)&=\bigl(H_\tau(z_\tau)-\varepsilon_{\tau,0}\bigr)-\bigl(H_0(z)-\varepsilon_{0,0}\bigr).\end{aligned}$$

Обе они являются многозначными, но каждая имеет в окрестности бесконечности однозначную аналитическую ветвь, которая может быть продолжена до однозначной вне γ аналитической функции. Эти однозначные вне γ функции мы также обозначим символами $\varTheta_1$ и $\varTheta_2$ соответственно.

Для произвольного значения числа $\delta\in(0,1)$ определим функции

$$\varPsi_1(z)=\varTheta_1\left(\frac{z}{\delta}\right)+2\log\delta,\quad \varPsi_2(z)=\frac{1}{\tau}\varTheta_2\left(\frac{z}{\delta}\right).$$

Непосредственно из соотношений (1.29)–(1.31) получаем, что

$$\omega(\varPsi_j,\delta)\leqslant A_1,\quad \|\varPsi_j\|_{D(0,q\delta)\setminus\gamma}\leqslant A_1(1+|\log\delta|),\quad \|\nabla\varPsi_j\|_{\mathbb{C}\setminus\gamma}\leqslant\frac{A_1}{\delta}. \tag{1.32}$$

Значение q выбрано здесь так, что при $|z|>q\delta$ выполнено $|z_\tau|>2(1+\tau)\delta$. Для получения этих оценок можно деформировать дугу γ в какую-либо простую дугу, оставляя ее концы на месте, а значения функций $H_0(z)$ и $H_\tau(z)$ в точке z, где производится оценка, неизменными. Кроме того, при $|z|>q\delta$ справедливы разложения

$$\begin{aligned}\varPsi_1(z)&=K_\tau(z)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_m}{z_\tau^m}+\overline{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\widetilde{b}_m}{z^m}},\\ \varPsi_2(z)&=B_\tau(z)+t\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_m}{z_\tau^m}-t\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\widetilde{b}_m}{z^m},\end{aligned}$$

в которых коэффициенты подчинены оценке

$$\max\left\{|\widetilde{c}_m|,|\widetilde{b}_m|\right\}\leqslant A_1(1+\tau)^m\delta^m. \tag{1.33}$$

Искомая функция g_γ должна удовлетворять условиям касания (1.28) с функцией f_φ, то есть иметь вид

$$g_\gamma(z)=\varPhi_{\tau,\sigma}(z)\cdot c_0(f_\varphi)+\frac{c_1(f_\varphi)}{z_\tau}+\mathcal{T}_{-\sigma t,1}\frac{b_1(f_\varphi)}{z}+\ldots$$

Поскольку $\Phi_{\tau,\sigma}(z) \cdot c_0(f_\varphi) = k_\sigma c_0(f_\varphi) K_\tau(z) + k_\sigma \sigma \overline{c_0(f_\varphi)} B_\tau(z)$, то ясно, что ее можно построить в виде

$$g_\gamma(z) = k_\sigma c_0(f_\varphi) \Psi_1(z) + k_\sigma \sigma \overline{c_0(f_\varphi)} \Psi_2(z) + \alpha \partial \Psi_1(z) + \mathcal{T}_{\sigma t,-1} \beta \partial_\tau \Psi_2(z),$$

из которого сразу следует, что $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} g_\gamma = 0$ вне γ. Непосредственно проверяется, что при

$$\alpha = c_1(f_\varphi) - k_\sigma \widetilde{c}_1 \mathcal{T}_{1,\sigma t} c_0(f_\varphi), \qquad \beta = b_1(f_\varphi) - k_\sigma \widetilde{b}_1 \overline{c_0(f_\varphi)}$$

условия (1.28) также будут выполняться.

До сих пор рассматривался случай, когда кривая γ имеет началом точку 0. Для общего случая с началом в точке a^* описанные выше построения проводятся по кривой $\gamma - a^* := \{z - a^* \colon z \in \gamma\}$ с заменой z на $z - a^*$.

Помимо условия касания, построенная функция g_γ удовлетворяет также условию (1.25) — это следует из вида функций Ψ_1, Ψ_2, — оценкам (1.26) — это вытекает из (1.21), (1.32), — и разлагается в ряд вида (1.18) с центром в нуле и коэффициентами, подчиненными оценкам (1.27), что следует из (1.21) и (1.33). Лемма доказана. □

Обозначим символом $D(a, r)$ круг с центром в точке $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $r > 0$. Для точки $z \in \mathbb{C}$ и числа $r > 0$ определим величину $d(z, r, X)$ как верхнюю грань диаметров всех связных компонент множества $D(z, r) \setminus X$ и введем величину

$$\theta(X) := \inf \left\{ \frac{d(z, r, X)}{r} \colon z \in \partial X,\ r > 0 \right\}.$$

Теорема 1.7. *Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$.*

1. Если $\theta(X) > 0$, то $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.

2. Для выполнения равенства $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ необходимо и достаточно, чтобы множество $\mathbb{C} \setminus X$ было связно.

Доказательство. Мы будем следовать схеме, использованной в работе [18] при доказательстве теоремы 3.2. Эта схема предполагает использование метода Витушкина локализации приближаемой функции и ее приближения по частям, специальным образом адаптированного к аппроксимации решениями рассматриваемых уравнений. Будет рассмотрен только случай, когда $|\sigma| < 1$, а $\tau > 0$. Остальные три случая рассматриваются аналогично, с несложными минимальными изменениями.

Начнем с первого утверждения теоремы. Выберем круг $D(0, R)$ так, что $R > 2$ и $\mathrm{Supp}(f) \cup X \subset D(0, R/2)$. Фиксировав произвольное $\delta \in (0, 1)$, рассмотрим стандартное δ-разбиение единицы, т.е. для каждого би-индекса $j=(j_1,j_2)\in\mathbb{Z}^2$ положим $a_j=j\delta$, $D_j=D(a_j,\delta)$, а функции $\varphi_j\in C_0^\infty(D_j)$ выберем так, что

$$0\leqslant\varphi_j\leqslant 1,\quad \|\nabla\varphi_j\|\leqslant\frac{A}{\delta},\quad \|\nabla^2\varphi_j\|\leqslant\frac{A}{\delta^2},\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}^2}\varphi_j\equiv 1. \tag{1.34}$$

Для всех $j\in\mathbb{Z}^2$ рассмотрим так называемые «локализованные» функции f_j, определенные следующим образом:

$$f_j=V_{\varphi_j}f.$$

Можно показать (см., например, лемму 1 из [38]), что

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z}^2}f_j,$$

причем последняя сумма конечна, поскольку $f_j\equiv 0$ для всех тех j, для которых $\mathrm{Supp}(\varphi_j)\cap\mathrm{Supp}(\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f)=\varnothing$ (например, для j с условием $D_j\cap D=\varnothing$).

Таким образом, f разложена в сумму функций f_j с особенностями, локализованными в кругах D_j, и нам достаточно приблизить каждую f_j с надлежащей точностью. Заметим, что если $D_j\subseteq X^\circ$, то $f_j\equiv 0$, а если $D_j\cap X=\varnothing$, то $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f_j=0$ в окрестности X, т.е. приближать надо только те функции f_j, у которых $j\in J=\{j'\in\mathbb{Z}^2\colon \partial X\cap D_{j'}\neq\varnothing\}$.

Пусть $\theta:=\theta(X)$. Для любого $j\in J$ найдется гладкая жорданова дуга $\gamma_j\subset 2\theta^{-1}D_j$ такая, что $\operatorname{diam}\gamma_j=\delta$, $\gamma_j\cap X=\varnothing$, причем концевые точки этой дуги находятся на расстоянии δ друг от друга. Пусть далее $\delta\in(0,\theta/4)$, так что при всех $j\in J$ имеет место вложение $D(a_j,2\delta/\theta)\subset D$. Заметим, что если вместо условия $\theta(X)>0$ компакт X удовлетворяет любому из условий следствия 1.8, то можно считать, что $\theta=1$.

Пользуясь леммой 1.6, для каждого индекса $j\in J$ по функции $f_{\varphi_j}=f_j$ и кривой $\gamma=\gamma_j$ построим соответствующую функцию $g_\gamma=g_j$, которая будет удовлетворять всем условиям леммы.

Так как $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}g_j=0$ вне γ_j (а следовательно и в окрестности X), то для доказательства первого утверждения теоремы нам достаточно установить, что

$$\Big\|\sum_{j\in J}(f_j-g_j)\Big\|_X\leqslant A\omega^*(\delta),\qquad \Big\|\sum_{j\in J}\partial_*(f_j-g_j)\Big\|_X\leqslant A\omega(\delta), \tag{1.35}$$

где ∂_* обозначает любой из операторов ∂, $\overline{\partial}$ и ∂_τ; правые части этих неравенств стремятся к нулю при $\delta\to 0$.

Пусть $q_3 = \max\{q_1, q_2\}$, где константы q_1 и q_2 берутся из предложения 1.5 и леммы 1.6 соответственно. Разложим $f_j - g_j$ вне круга $2q_2 D_j$ в ряд

$$f_j(z) - g_j(z) = \varPhi_{\tau,\sigma}(z - a_j) \cdot \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{(z - a_j)_\tau^m} + \mathcal{T}_{\sigma t,-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{(z - a_j)^m},$$

где $\alpha_m = c_m(f_j, a_j) - c_m(g_j, a_j)$ и $\beta_m = b_m(f_j, a_j) - b_m(g_j, a_j)$. Согласно (1.28) имеют место равенства $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta_1 = 0$, а ввиду (1.21) и (1.27) при $m > 1$ выполняется неравенство

$$\max\{|\alpha_m|, |\beta_m|\} \leqslant A(q_3\delta)^{m+1}\omega(\delta). \tag{1.36}$$

Подберем $q_4 > q_3$ так, что $|(z - a_j)_\tau| > 2q_3\delta$ при $|z - a_j| > q_4\delta$. При таких z из (1.36) выводятся оценки

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leqslant A\delta\omega(\delta)\frac{\delta^2}{|z - a_j|^2}, \qquad |\nabla(f_j(z) - g_j(z))| \leqslant A\omega(\delta)\frac{\delta^3}{|z - a_j|^3}. \tag{1.37}$$

Если же $|z - a_j| < q_4\delta$, $z \notin \gamma_j$, то из (1.20), с учетом (1.34), и из (1.26) получаем

$$|f_j(z) - g_j(z)| \leqslant A\omega^*(\delta), \qquad |\nabla(f_j(z) - g_j(z))| \leqslant A\omega(\delta). \tag{1.38}$$

Оценки (1.35) в произвольной точке $z \in X$ получаются известным методом «послойного» суммирования. Так, используя первые неравенства в (1.37) и (1.38) и считая, что $g_j = f_j$ при $j \notin J$, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\mathbb{Z}^2} |f_j(z) - g_j(z)| \leqslant \\
&\quad\leqslant \sum_{j\,:\,|z-a_j|<q_4\delta} |f_j(z) - g_j(z)| + \sum_{m=[q_4]}^{[3R/\delta]} \sum_{m\delta\leqslant|z-a_j|<(m+1)\delta} |f_j(z) - g_j(z)| \leqslant \\
&\quad\leqslant A_1 \sum_{m=[k_6]}^{[3R/\delta]} \frac{m\omega(\delta)\delta}{m^2} + A_1\omega^*(\delta) \leqslant A_2\omega^*(\delta) + A_2\omega(\delta)\delta\log[R/\delta] \leqslant A\omega^*(\delta),
\end{aligned}$$

что дает первую из оценок (1.35). Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа x и учтено, что при $m \geqslant 1$ число индексов j таких, что $m\delta \leqslant |z - a_j| < (m+1)\delta$, не превосходит $100m$. Вторая оценка в (1.35) выводится из вторых оценок в (1.37) и (1.38) аналогично.

Таким образом, в качестве приближающей функции берется какая-либо функция класса $C^1(\mathbb{C})$, совпадающая с функцией $\sum_{j\in J} g_j(z) +$

$\sum_{j\notin J} f_j(z)$ в некоторой окрестности компакта X. Первое утверждение теоремы доказано.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Пусть, от противного, множество $\mathbb{C}\setminus X$ несвязно и Ω — некоторая ограниченная компонента этого множества. Считая, что $0\in\Omega$, положим $d=\mathrm{dist}(0,\partial\Omega)>0$. Пусть $R=\mathrm{diam}(X)$, т.е. $X\Subset D(0,R)$. Покажем, что функция $f(z)=K_\tau(z)+\sigma B_\tau(z)$ при $d/2<|z|<R$, продолженная произвольным образом до функции класса $C_0^\infty(\mathbb{C})$, не может быть приближена многочленами из ядра оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. Пусть, от противного, найдется последовательность полиномов $\{p_n\}$ такая, что $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}p_n=0$, $p_n\rightrightarrows_X f$ и $\nabla p_n\rightrightarrows_X \nabla f$ при $n\to\infty$. Многочлен p_n имеет вид $p_n(z)=q_n(z_\tau)+\overline{r_n(z)}-t\sigma r_n(z)$, где q_n и r_n — многочлены комплексного переменного. Так как

$$\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau(K_\tau(z)+\sigma B_\tau(z))=\frac{1-\sigma^2}{\overline{z}},$$

а $\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau p_n(z)=(1-\sigma^2)\overline{r_n'(z)}$, то из сделанного предположения вытекает, что функция $1/z$ равномерно на X (а следовательно и на $\partial\Omega$) приближается многочленами комплексного переменного. А это, как хорошо известно, невозможно.

Обратно. Пусть $\mathbb{C}\setminus X$ связно и $f\in C^1(\mathbb{C})\cap\mathscr{O}_{\mathcal{L}_{\tau,\sigma}}(X^\circ)$. В силу первого утверждения теоремы найдется последовательность функций $\{f_n\}\subset\mathscr{O}_{\mathcal{L}_{\tau,\sigma}}(X)$ такая, что $f_n\rightrightarrows_X f$ и $\nabla f_n\rightrightarrows_X\nabla f$ при $n\to\infty$. Осталось каждую функцию f_n приблизить полиномами в требуемом смысле. Пусть $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f_n=0$ в некоторой окрестности U_n компакта X, а $U_n'\subset U_n$ — такая окрестность компакта X, что каждую точку из $\mathbb{C}\setminus U_n$ можно соединить с точкой ∞ кривой, не пересекающейся с $\overline{U_n'}$. Методом Рунге доказывается, что функция f_n приближается полиномиальными решениями рассматриваемого уравнения равномерно на $\overline{U_n'}$ и, следовательно, на X вместе со всеми частными производными. Теорема полностью доказана. □

Следствие 1.8. *Предположим, что для компакта $X\subset\mathbb{C}$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

i) нижняя грань диаметров всех связных компонент множества $\mathbb{C}\setminus X$ положительна;

ii) каждая граничная точка компакта X является граничной точкой для некоторой связной компоненты множества $\mathbb{C}\setminus X$;

iii) X является компактом Каратеодори, т.е. $\partial X=\partial\widehat{X}$.

Тогда $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)=R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$.

Глава 2

Разрешимость задачи Дирихле

В этой главе рассматривается классическая задача Дирихле для однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами. Эта задача, естественно связана с тематикой равномерной приближаемости функций полиномиальными решениями соответствующих систем.

2.1. Введение

Напомним классическую постановку задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}f = 0$ (или, короче, для оператора $\mathcal{L}$). Как и раньше, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. Пусть $\varOmega$ — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ с границей $\varGamma$ и пусть $h \in C(\varGamma)$. Требуется найти функцию $f \in C(\overline{\varOmega})\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(\varOmega)$ такую, что $f|_{\varGamma} = h$. Ответ на вопрос этой задачи может быть дан как в виде теоремы существования, в которой указываются условия на $\varOmega$ и h, при которых требуемая функция f существует, либо в виде „явной формулы“ для функции f. В обоих случаях мы будем называть соответствующую задачу $\mathcal{L}$-задачей Дирихле для h.

Определение. Ограниченная односвязная область $\varOmega \subset \mathbb{C}$ называется $\mathcal{L}$-регулярной, если *для любой* функции $h \in C(\varGamma)$ существует $f \in C(\overline{\varOmega})\mathscr{O}_{\mathcal{L}}(\varOmega)$ такая, что $f\_\varGamma = h$ (т.е. $\mathcal{L}$-задача Дирихле для h разрешима).

Итак, мы будем рассматривать следующие задачи.

Задача 3. *Найти необходимые и достаточные условия на ограниченную односвязную область $\varOmega$, при которых она является $\mathcal{L}$-регулярной.*

Задача 4. *Найти необходимые и достаточные условия на область $\varOmega$ и функцию $h \in C(\varGamma)$, при которых $\mathcal{L}$-задача Дирихле с граничной функцией h разрешима.*

Обе сформулированные выше задачи в общем случае остаются нерешенными. Они существенно различаются для сильно эллиптических систем и систем, не являющихся сильно эллиптическими.

Для сильно эллиптических операторов $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ (т.е. в случае, когда $\tau, \sigma \in [0,1)$) задачи 3 и 4 полностью решены только для оператора Лапласа Δ. Классический результат Лебега [35] состоит в том, что для любая ограниченная односвязная область Ω является регулярной относительно задачи Дирихле для оператора Δ. Этот результат лежит в основе доказательства цитированной выше теоремы Уолша–Лебега о равномерной аппроксимации гармоническими многочленами. Точнее говоря, результат Лебега применяется для доказательства необходимости условия $\partial X = \partial \widehat{X}$ в этой теореме. Как уже упоминалось ранее, для сильно эллиптических кососимметричных систем компакты Каратеодори (т.е. компакты X, для которых $\partial X = \partial \widehat{X}$) обладают свойством приближаемости в смысле задачи 1, но доказательство обратного утверждения пока не получено. Это связано именно с отсутвием результата о регулярности произвольной ограниченной односвязной области относительно соответствующей задачи Дирихле.

Известна гипотеза о том, что результат, аналогичный теореме Лебега, остается верным для любой кососимметричной сильно эллиптической системы (1.13). Для общего сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ подобная гипотеза, хотя и не была в явном виде сформулирована в литературе, тем нее менее выглядит весьма правдоподобной. В работе [44], в частности, доказано, что любая ограниченная односвязная область Ω с кусочно-гладкой границей, регулярна относительно задачи Дирихле для любого сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. При этом вопрос о регулярности даже жордановых областей общего вида открыт. Что касается собственно задачи Дирихле, ряд условий на область Ω и функцию $h \in C(\partial\Omega)$, при которых соответствующая задача Дирихле разрешима, получен в [22], [23].

В случае уравнений (систем), не являющихся сильно эллиптическими, соответствующая задача 3 изучена сравнительно слабо. Известно (см. [6]), что область с границей, содержащей аналитическую дугу, нерегулярна относительно не сильно эллиптической кососимметричной системы, которая в используемых здесь обозначениях соответствует параметру $\sigma = \infty$, или $s = 0$. В работе [12] доказана нерегулярность областей с ляпуновскими границами (т.е. границами класса $C^{1,\alpha}$) относительно уравнения Бицадзе $\overline{\partial}^2 f = 0$ и, вместе с тем, построен пример области, регулярной для этого уравнения.

2.2. Не сильно эллиптические системы

В этом параграфе будут приведены два результата. Во-первых, мы распространим результат из работы [6] о нерегулярности области с границей, содержащей аналитическую дугу, относительно не сильно эллиптической кососимметричной системы на общие не сильно эллиптические системы. Во-вторых, будет дано новое (более простое) доказательство теоремы из [12] о нерегулярности областей с ляпуновскими границами относительно уравнения Бицадзе.

Теорема 2.1. *Пусть Ω — ограниченная односвязная область с границей Γ, содержащей открытую аналитическую дугу γ, ни одна из точек которой не является предельной для множества $\Gamma \setminus \gamma$. Тогда задача Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$ в Ω при $|\sigma| > 1$ (т.е. в не сильно эллиптическом случае) с граничной функцией $(z-a)^{-1}$, где точка $a \in \Omega$ расположена достаточно близко к дуге γ, неразрешима.*

Доказательство. Будем рассматривать только случай $\tau > 0$. Случай, когда $\tau = 0$, рассматривается аналогично, с минимальными необходимыми изменениями. Мы воспользуемся тем, что любое решение f уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$ в произвольной области Ω представимо в виде

$$f(z) = h(z_\tau) + \mathcal{T}_{t,-s} g(z),$$

где функции h и g голоморфны в областях $\mathcal{T}_{1,-\tau}\Omega$ и Ω соответственно. Кроме того, нам потребуется оценка производных функций h и g вблизи границы области Ω, аналогичная оценкам, полученным в лемме 3 работы [28] и в лемме 1 работы [6].

Лемма 2.2. *Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет в Ω уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$ и пусть $a \in \Omega$. Тогда справедливы оценки*

$$|h'(a_\tau)| \leqslant A_1 \frac{\omega(f, \operatorname{dist}(a, \partial\Omega))}{\operatorname{dist}(a, \partial\Omega)}, \qquad |g'(a)| \leqslant A_2 \frac{\omega(f, \operatorname{dist}(a, \partial\Omega))}{\operatorname{dist}(a, \partial\Omega)}, \tag{2.1}$$

где $\operatorname{dist}(a, \partial\Omega)$ *— расстояние от точки a до границы $\partial\Omega$ области Ω.*

Доказательство леммы 2.2. Непосредственно проверяется, что

$$h'(z_\tau) = -\frac{1}{1-s^2} \mathcal{T}_{s,1} \partial \mathcal{T}_{s,t} f(z), \qquad g'(z) = \frac{1}{1-s^2} \mathcal{T}_{1,s} \partial_\tau f(z). \tag{2.2}$$

Докажем оценку для h', оценка для g' проводится аналогично.

Пусть $\rho(x) \in C(\mathbb{R})$ — такая функция, что $0 \leqslant \rho(x) \leqslant 1$, $\rho(x) = 0$ при $|x| \geqslant 4$ и $\rho(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$. Для произвольной точки $a \in \Omega$ выберем число r, $0 < r < \operatorname{dist}(a_\tau, \partial(\mathcal{T}_{1,-\tau}\Omega))$, и введем вспомогательную функцию

$$\psi(\zeta) = \rho\left(\frac{|\zeta_\tau - a_\tau|^2}{r^2}\right)$$

и заметим, что

$$|\partial\psi(\zeta)| \leqslant \frac{A}{r}. \tag{2.3}$$

Определим теперь локализационный оператор типа Витушкина:

$$V_\psi f(z) := \int\limits_{|\zeta_\tau - a_\tau|<2r} \frac{\psi(\zeta)}{\pi(\overline{\zeta} - \overline{z})} \partial\mathcal{T}_{s,t} f(\zeta)\, d\mu(\zeta), \tag{2.4}$$

где $\mu(\cdot)$ — плоская мера Лебега. Заметим, что

$$\partial_z V_\psi f(z) = -\psi(z)\partial\mathcal{T}_{s,\,t} f(z).$$

Кроме того, при $|z_\tau - a_\tau| < r$ имеем $\psi(z) = 1$. Применяя теорему Стокса, теорему о среднем для голоморфных функций и учитывая (2.2), получим

$$h'(a_\tau) = \mathcal{T}_{s,1} \frac{1-\tau^2}{2\pi(s^2-1)ir^2} \int_{|z_\tau - a_\tau|=r} V_\psi f(z)\, d\overline{z}. \tag{2.5}$$

С другой стороны, интегрируя по частям в формуле (2.4), получим

$$V_\psi f(z) = -\int\limits_{|\zeta_\tau - a_\tau|<2r} \frac{\partial\psi(\zeta)}{\pi(\overline{\zeta} - \overline{z})} \mathcal{T}_{s,t} f_a(\zeta)\, d\mu(\zeta) - \psi(z)\mathcal{T}_{s,t} f_a(z),$$

причем при интегрировании $f(z)$ заменяется на $f(z) - f(a)$ и учитывается, что $\psi(\zeta) = 0$ при $|\zeta_\tau - a_\tau| = 2r$.

Далее, используя (2.3) и неравенство $(1-\tau)|z| \leqslant |z_\tau| \leqslant (1+\tau)|z_\tau|$, получим

$$|V_\psi f(z)| \leqslant (|s| + |t|)\, \omega\left(f, \frac{2r}{1-\tau}\right)\left(1 + \frac{A}{r} \int\limits_{|\zeta_\tau - a_\tau|<2r} \frac{d\mu(\zeta)}{\pi|\zeta - z|}\right), \tag{2.6}$$

где $r = |z_\tau - a_\tau|$. Так как

$$\int\limits_{|\zeta_\tau - a_\tau|<2r} \frac{d\mu(z)}{\pi|\zeta - z|} \leqslant \frac{5r}{1-\tau},$$

то из (2.6) вытекает окончательная оценка

$$|V_\psi f(z)| \leqslant \left(1 + \frac{5A}{1-\tau}\right)(|s| + |t|)\omega\left(f, \frac{2r}{1-\tau}\right).$$

Используя это неравенство, выбирая η так, что при $r = \eta\,\mathrm{dist}(a, \partial\Omega)$ выполнено $r < \mathrm{dist}(a_\tau, \partial(\mathcal{T}_{1,-\tau}\Omega))$, и применяя (2.5), придем к оценке (2.1). Лемма доказана. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 2.1. Предположим, что для некоторой точки $a \in \Omega$ существует функция $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ такая, что $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ в Ω и

$$f|_{\Gamma} = \frac{1}{z-a}.$$

Так как γ — аналитическая кривая, то существует функция Шварца для γ, т.е. такая функция $S(z)$, голоморфная в некоторой окрестности γ, что при всех $z \in \gamma$ выполнено $\overline{z} = S(z)$. Тогда при $z \in \gamma$, имеет место равенство $z_\tau = S_\tau(z) := z - \tau S(z)$. Функция $S_\tau(z)$ также голоморфна в окрестности γ.

Из предложения 2 в [6] вытекает, что $S_\tau(z) \in \mathcal{T}_{1,-\tau}\Omega$ при всех z, расположенных достаточно близко к γ. Следовательно, функция $h(S_\tau(z))$ определена и голоморфна при таких z. Для точки $z \in \Omega$ обозначим $r = \operatorname{dist}(z, \gamma)$. Существуют константы $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, не зависящие от r и такие, что при всех достаточно малых r точки $S_\tau(z)$ и z_τ можно соединить спрямляемой кривой $\gamma' \subset \mathcal{T}_{1,-\tau}\Omega$, имеющей длину не больше $\eta_1 r$ и лежащей на расстоянии, не меньшем, чем $\eta_2 r$ от $\mathcal{T}_{1,-\tau}\gamma$.

Тогда

$$h(S_\tau(z)) - h(z_\tau) = \int_{\gamma'} h'(\zeta_\tau)\, d\zeta_\tau.$$

Используя лемму 2.2, получаем

$$|h(S_\tau(z)) - h(z_\tau)| \leqslant \eta_1 \max_{z \in \gamma'} |h'(z)| r \to 0$$

при $r \to 0$. Но тогда

$$f(z) = h(z_\tau) + \mathcal{T}_{t,-s} g(z) \to h(S_\tau(z)) + t g(z) - s\overline{g\big(\overline{S(z)}\big)} \to \frac{1}{z-a}$$

при $r \to 0$. Отсюда и из теоремы единственности Лузина–Привалова вытекает, что

$$h(S_\tau(z)) + t g(z) - s\overline{g\big(\overline{S(z)}\big)} = \frac{1}{z-a}$$

при всех z, достаточно близких к γ. Однако, если взять в качестве a точку, в окрестности которой функция $h(S_\tau(z))$ голоморфна, то получим, что левая часть равенства голоморфна в этой точке, а правая часть имеет в ней полюс. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 2.3. *Любая жорданова область Ω с границей Γ класса $C^{1,\alpha}$ нерегулярна относительно задачи Дирихле для бианалитических функций.*

Доказательство этой теоремы будет основано на использовании следующего утверждения:

Лемма 2.4. *Пусть $\mathit{\Omega}$ — жорданова область с границей $\mathit{\Gamma}$ класса $C^{1,\alpha}$ и пусть φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на $\mathit{\Omega}$. Тогда для любой функции $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ вида $g(z) = g_1(z)\overline{\varphi(z)} + g_0(z)$, где g_0 и g_1 — голоморфные в $\mathbb{D}$ функции, и для любого достаточно большого числа n имеет место оценка*

$$\left|\int_{\mathbb{T}} g(t)t^n dt\right| \leqslant \frac{A\|g\|_{\overline{\mathbb{D}}}}{n^\alpha},$$

где $A > 0$ — некоторая константа, зависящая только от области $\mathit{\Omega}$.

Считая лемму 2.4 доказанной, проведем доказательство теоремы 2.3, а затем вернемся к лемме 2.4 и докажем ее.

Доказательство теоремы 2.3. Пусть φ — некоторое конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на область $\mathit{\Omega}$. Так как $\mathit{\Omega}$ — жорданова область, то, в силу классической теоремы Каратеодори, φ продолжается до гомеоморфизма замкнутого круга $\overline{\mathbb{D}}$ на замкнутую область $\overline{\mathit{\Omega}}$.

Пусть некоторая функция h принадлежит $C(\mathit{\Gamma})$ и продолжается до функции класса $\mathscr{O}_{\overline{\partial}^2} \cap C(\overline{\mathit{\Omega}})$. Тогда найдется функция $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ вида $g(z) = g_1(z)\overline{\varphi(z)} + g_0(z)$ с голоморфными в $\mathbb{D}$ компонентами g_0 и g_1, такая, что $h(\varphi(t)) = g(t)$ на единичной окружности $\mathbb{T}$.

Пусть

$$\widetilde{g}(e^{i\theta}) := \sum_n \frac{e^{-i2^n\theta}}{2^{n\alpha/2}}.$$

Непосредственно проверяется, что функция $\widetilde{g} \in C(\mathbb{T})$ обладает следующим свойством:

$$\left|\int_{\mathbb{T}} \widetilde{g}(t)t^{2^m} dt\right| = \frac{2\pi}{2^{m\alpha/2}}.$$

Ясно, что это противоречит оценке в лемме 2.4.

Остается заметить, что функция $h(\zeta) := \widetilde{g}(\varphi^{-1}(\zeta))$ принадлежит $C(\mathit{\Gamma})$ и не может быть продолжена до функции класса $\mathscr{O}_{\overline{\partial}^2} \cap C(\overline{G})$, так как в противном случае $\widetilde{g}$ продолжалась бы непрерывно в круг $\mathbb{D}$ до функции вида $g_1(z)\overline{\varphi(z)} + g_0(z)$. Полученное противоречие доказывает, что область $\mathit{\Omega}$ нерегулярна относительно задачи Дирихле для бианалитических функций.

$\square$

Доказательство леммы 2.4. Согласно лемме 3 работы [28], для функции f класса $C(\overline{\mathit{\Omega}}) \cap \mathscr{O}_{\overline{\partial}^2}$, записанной в виде $f(z) = \overline{z}f_1(z) + f_0(z)$ с голоморфными компонентами f_0 и f_1, и для $z \in \mathit{\Omega}$ справедлива оценка

$$|f_1(z)| \leqslant \frac{A\omega(f, \delta(z))}{\delta(z)}, \tag{2.7}$$

где $\delta(z) = \mathrm{dist}(z, \mathit{\Gamma})$, а $\omega(f, \cdot)$ — модуль непрерывности функции f на $\overline{\mathit{\Omega}}$. Отсюда вытекает, что если $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ — функция вида $g_1(z)\overline{\varphi}(z) + g_0(z)$, где g_0 и g_1 голоморфны в $\mathbb{D}$, то при всех $z \in \mathbb{D}$ выполнена оценка

$$|g_1(z)| \leqslant \frac{A\|g\|_{\overline{\mathbb{D}}}}{1-|z|}. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $\mathit{\Omega}$ — это область с границей класса $C^{1,\alpha}$, а φ — некоторое (фиксированное) конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на $\mathit{\Omega}$. Согласно классической теореме Келлога—Варшавского, (см., например, [39, Теорема 3.6]), $\varphi' \in C(\overline{\mathbb{D}})$ и для любых точек $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}$ имеет место неравенство

$$|\varphi'(z_1) - \varphi'(z_2)| \leqslant A_1|z_1 - z_2|^{\alpha}.$$

Из него и интегральной формулы Коши вытекает, что для всех $z \in \overline{\mathbb{D}}$ верна оценка

$$|\varphi''(z)| \leqslant \frac{A_2}{(1-|z|)^{1-\alpha}},$$

где A_2 — константа, зависящая только от φ. Она, наряду с оценкой (2.8), является ключевой деталью дальнейшего рассуждения.

Пусть $q > 0$. Обозначим через $q\mathbb{D}$ круг $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < q\}$, а через $q\mathbb{T}$ — окружность $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = q\}$. Применяя формулу Грина, получаем:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{T}} g(t)t^n dt\right| = \left|\lim_{q\to 1-}\int_{q\mathbb{T}} g(t)t^n dt\right| = \left|\lim_{q\to 1-}\int_{q\mathbb{T}} \Big(g_1(t)\overline{\varphi(t)} + g_0(t)\Big)\, t^n dt\right| =\\ = 2\left|\lim_{q\to 1-}\int_{q\mathbb{D}} g_1(w)\overline{\varphi'(w)}w^n d\overline{w}dw\right| =\\ = 2\left|\lim_{q\to 1-}\int_0^q rdr\int_0^{2\pi} g_1(re^{i\theta})\overline{\varphi'(re^{i\theta})}(re^{i\theta})^n d\theta\right| =\\ = 2\left|\lim_{q\to 1-}\int_0^q rdr\int_{r\mathbb{T}} g_1(t)\overline{\varphi'(t)}t^{n-1}dt\right| =\\ = 4\left|\lim_{q\to 1-}\int_0^q rdr\int_{r\mathbb{D}} g_1(w)\overline{\varphi''(w)}w^{n-1}d\overline{w}dw\right| =: I_1,\end{aligned}$$

причем во внутреннем интеграле мы воспользовались формулой Грина еще раз.

Учитывая приведенные выше оценки величин $|\varphi''(z)|$ и $|g_1(z)|$ в круге

$\mathbb{D}$, величину I_1 можно оценить следующим образом:

$$I_1 \leq A_3\|g\|_{\overline{\mathbb{D}}} \int_0^1 r dr \left| \int_0^r \rho^n (1-\rho)^{-2+\alpha} d\rho \right| \leq$$
$$\leq A_3\|g\|_{\overline{\mathbb{D}}} \int_0^1 r^{n+1} dr \left| \int_0^r (1-\rho)^{-2+\alpha} d\rho \right| =$$
$$= A_4\|g\|_{\overline{\mathbb{D}}} \int_0^1 r^{n+1} \left((1-r)^{-2+\alpha} - 1 \right) dr = A_4\|g\|_{\overline{\mathbb{D}}} \left(B(n+2,\alpha) - \frac{1}{n+2} \right), \tag{2.9}$$

где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция.

Применяя формулу Стирлинга, получаем, что при достаточно больших значениях m выполняется неравенство

$$B(m,\alpha) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(m+\alpha)} \leq \frac{A}{m^\alpha},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма–функция Эйлера. Используя его, можно оценить величину I_1 нужным образом и получить требуемую оценку интеграла $\left| \int_{\mathbb{T}} g(t) t^n dt \right|$ при достаточно больших значениях n: из (2.9) следует

$$I_1 \leq \frac{A_5\|g\|_{\overline{\mathbb{D}}}}{n^\alpha}.$$

Лемма доказана. □

2.3. Метод возмущений для задачи Дирихле и формула типа Пуассона

Как уже отмечалось выше, каноническое уравнение $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ вида (1.10), к которому были сведены эллиптические системы вида (1.1), представляет собой уравнение Лапласа относительно комплексной функции f, возмущенное по двум вещественным параметрам τ и σ. Напомним, что $\tau \in [0,1)$. Кроме того, сильная эллиптичность исходной системы (1.1) эквивалентна тому, что $|\sigma| < 1$. Эти обстоятельства указывают на возможность искать решение задачи Дирихле для сильно эллиптических систем в виде ряда по степеням малых параметров τ и σ. Реализация этой вполне естественной идеи в случае довольно общих требований на область, конечно, оказывается технически весьма затруднительной. Тем не менее, в некоторых частных случаях удается доказать сходимость возникающих рядов. Ниже будет подробно изложен метод возмущений для поиска решения рассматриваемой задачи, а также будут сформулированы и доказаны результаты, полученные автором диссертации в этом направлении.

Пусть требуется найти решение задачи Дирихле для сильно эллиптического уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ в некотором классе $\mathcal{M}(\Omega)$ функций f, определенных в замыкании односвязной области Ω, с граничными данными h из некоторого класса $\mathcal{B}(\Gamma)$. Рассмотрим возможность отыскания решения такой задачи с помощью метода возмущений, который состоит в представлении искомой функции f в виде ряда

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn} \tau^n \sigma^m \tag{2.10}$$

по параметрам $\tau, \sigma \in [0, 1)$. При этом зададим следующие граничные условия:

$$f_{00}|_{\Gamma} = h, \qquad f_{mn}|_{\Gamma} = 0, \quad (m, n) \neq (0, 0).$$

Подставим разложение (2.10) в уравнение $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ с оператором (1.10) и приравняем к нулю множители при одинаковых парах степеней (m, n). Это приведет к следующему алгоритму последовательного вычисления функций f_{mn}.

1. Функция f_{00} определяется как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} &\partial\overline{\partial} f_{00} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &f_{00}|_{\Gamma} = h. \end{aligned} \tag{2.11}$$

2. Для значения индекса $m = 0$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ последовательно находим функции $f_{0,n}$ как решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} &\partial\overline{\partial} f_{0,n} = -\partial^2 f_{0,n-1} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &f_{0,n}|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

3. Для значения индекса $n = 0$ при всех $m = 1, 2, \ldots$ последовательно находим функции $f_{m,0}$ как решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} &\partial\overline{\partial} f_{m,0} = -\partial^2 \overline{f_{m-1,0}} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &f_{m,0}|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

4. При каждом фиксированном номере $m = 1, 2, \ldots$ строим функции f_{mn} с номерами $n = 1, 2, \ldots$ как решения следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\partial\overline{\partial} f_{mn} = -\partial^2 f_{m,n-1} - \partial^2 \overline{f_{m-1,n}} - \partial\overline{\partial}\, \overline{f_{m-1,n-1}} \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &f_{mn}|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Естественным образом возникает несколько вопросов: 1) существуют ли решения всех задач (2.11)–(2.14) и в каком классе? 2) если все функции f_{mn} существуют, то сходится ли ряд (2.10), в каком смысле и к функции какого класса? 3) из какого класса следует брать граничную функцию h?

Ответы на эти вопросы удается найти, когда область Ω — это единичный круг. С помощью описанного метода возмущений удается получить явные формулы для решения классической задачи Дирихле для произвольного сильно эллиптического оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ в круге. Решение представляется в виде интеграла типа Пуассона. Кроме того, используя этот результат, можно получить решение задачи и в эллипсе специального вида, ассоциированного с данной системой. Наконец, для круга и такого эллипса выводятся формулы функции Грина. Приведем формулировки и доказательства этих результатов, а вывод соответствующих формул с применением метода возмущений будет показан в следующем параграфе.

Теорема 2.5. *Пусть $\tau \in [0,1)$, $|\sigma| < 1$. Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = 0$ в единичном круге $\mathbb{D}$ с заданной граничной функцией $h \in C(\mathbb{T})$ имеет вид*

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta, z) h(\zeta) |d\zeta| \tag{2.15}$$

с ядром

$$\mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta, z) = \frac{1-|z|^2}{2\pi} \Bigg(\frac{1}{|\zeta - z|^2} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sigma^n \tau^n (2\mathcal{C}^n \zeta + (-1)^{n+1} \tau^n z_\tau) \mathcal{C}^n (\tau \mathcal{I} + \sigma \mathcal{C})}{(\mathcal{C}^n \zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1} \tau^n z_\tau)(\mathcal{C}^n \zeta + (-1)^{n+1} \tau^n z)(\mathcal{C}^n \zeta + (-1)^n \tau^{n+1} \overline{z})} \Bigg). \tag{2.16}$$

Доказательство. Функцию f, заданную формулами (2.15), (2.16), можно переписать в виде (1.15) с аналитическими компонентами

$$F(z_\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \Bigg[\frac{h(\zeta) d\zeta_\tau}{\zeta_\tau - z_\tau} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{C}^n h(\zeta)\, d(\mathcal{C}^{n+1} \zeta_{\tau^{2n-1}})}{\mathcal{C}^{n-1} \zeta_{\tau^{2n-1}} + (-1)^n \tau^{n-1} z_\tau} + \frac{\mathcal{C}^n h(\zeta)\, d(\mathcal{C}^n \zeta_{\tau^{2n+1}})}{\mathcal{C}^n \zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1} \tau^n z_\tau} \right) \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)^n \Bigg] \tag{2.17}$$

и

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{C}^{n+1} h(\zeta)\, d(\mathcal{C}^{n+1} \zeta)}{\mathcal{C}^{n+1} \zeta + (-1)^n \tau^{n+1} z} + \frac{\mathcal{C}^{n+1} h(\zeta)\, d(\mathcal{C}^n \zeta)}{\mathcal{C}^n \zeta + (-1)^{n+1} \tau^n z} \right) \left(\frac{\sigma}{\tau} \right)^n. \tag{2.18}$$

Заметим, что все ряды в формулах (2.17), (2.18) сходятся равномерно при $(\zeta, z) \in \mathbb{T} \times \overline{\mathbb{D}}$ (во второй из формул надо вынести из-под суммы слагаемое, соответствующее $n = 0$ и рассматривать его отдельно). В самом деле, приводя в (2.17) и (2.18) дроби к общему знаменателю, получим

$$F(z_\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\left[\frac{h(\zeta)d\zeta_\tau}{\zeta_\tau - z_\tau} + \right.$$
$$\left. + \frac{z_\tau}{\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^n(1+\tau^{2n})\mathcal{C}^n h(\zeta)\,d\zeta_\tau}{\left(\mathcal{C}^{n-1}\zeta_{\tau^{2n-1}} + (-1)^n\tau^{n-1}z_\tau\right)\left(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1}\tau^n z_\tau\right)}\right],$$

$$G(z) = \frac{z}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\mathcal{C}^{n+1}h(\zeta)\,d\zeta_\tau}{\left(\mathcal{C}^{n+1}\zeta + (-1)^n\tau^{n+1}z\right)\left(\mathcal{C}^n\zeta + (-1)^{n+1}\tau^n z\right)}\sigma^n.$$

Отсюда легко увидеть, что соответствующие ряды при $|\sigma| < 1$ мажорируются сходящимися геометрическими прогрессиями.

Из (2.17), (2.18) вытекает, что функция f, определенная в (2.15), имеет вид (1.15) и, следовательно, удовлетворяет в единичном круге $\mathbb{D}$ уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f = 0$.

Нетрудно проверить, что при любых $\zeta, z \in \mathbb{T}$ с условием $\zeta \neq z$ выполнено $\mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta, z) = 0$.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что если $h \equiv A$, $A \in \mathbb{C}$, — постоянная функция на $\mathbb{T}$, то формулы (1.15), (2.17), (2.18) дают решение соответствующей задачи Дирихле $f \equiv A$. Имея это утверждение, можно завершить доказательство теоремы тем же стандартным способом, который применяется для доказательства классической формулы Пуассона для уравнения Лапласа (см., например, [25, стр. 243–246]).

Итак, пусть $h(\zeta) = A$ при всех $\zeta \in \mathbb{T}$. Тогда

$$F(z_\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\left[\frac{A d\zeta_\tau}{\zeta_\tau - z_\tau} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{C}^n A\, d(\mathcal{C}^{n+1}\zeta_{\tau^{2n-1}})}{\mathcal{C}^{n+1}\zeta_{\tau^{2n-1}} + (-1)^n\tau^{n-1}z_\tau} + \frac{\mathcal{C}^n A\, d(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}})}{\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1}\tau^n z_\tau}\right)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n\right]. \quad (2.19)$$

При $n = 2m$, согласно теореме о вычетах,

$$I_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\left(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}}\right)}{\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1}\tau^n z_\tau} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\zeta_{\tau^{2n+1}}}{\zeta_{\tau^{2n+1}} - \tau^n z_\tau} = N,$$

где N — количество различных решений уравнения $\zeta_{\tau^{2n+1}} - \tau^n z_\tau = 0$ относительно неизвестного ζ при $\zeta, z \in \mathbb{D}$. Решим это уравнение. Выпишем отдельно вещественную и мнимую части уравнения, полагая $\zeta = \rho e^{i\theta}$, а $z = re^{i\varphi}$.

$$\begin{aligned}\rho(1-\tau^{2n+1})\cos\theta &= \tau^n r(1-\tau)\cos\varphi,\\ \rho(1+\tau^{2n+1})\sin\theta &= \tau^n r(1-\tau)\sin\varphi.\end{aligned} \quad (2.20)$$

Разделив второе уравнение на первое, находим

$$\frac{1+\tau^{2n+1}}{1-\tau^{2n+1}}\tan\theta = \frac{1+\tau}{1-\tau}\tan\varphi,$$

откуда

$$\theta = \arctan\left(\frac{1+\tau+\tau^2+\dots+\tau^{2n}}{1-\tau+\tau^2+\dots+\tau^{2n}}\tan\varphi\right).$$

Возводя в квадрат каждое из уравнений (2.20), а затем складывая их, находим

$$\rho = \tau^n r\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(1+\tau+\tau^2+\dots+\tau^{2n})^2}+\frac{\sin^2\varphi}{(1-\tau+\tau^2+\dots+\tau^{2n})^2}} < 1.$$

Таким образом, уравнение $\zeta_{\tau^{2n+1}} - \tau^n z_\tau = 0$ имеет ровно одно решение в единичном круге, т.е. $N = 1$.

При $n = 2m+1$ имеем

$$I_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\left(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}}\right)}{\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1}\tau^n z_\tau} = -\mathcal{C}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\zeta_{\tau^{2n+1}}}{\zeta_{\tau^{2n+1}} + \tau^n\overline{z}_\tau} = -N,$$

где теперь N — это количество различных решений уравнения $\zeta_{\tau^{2n+1}} + \tau^n\overline{z}_\tau = 0$ относительно неизвестного ζ при $\zeta, z \in \mathbb{D}$. С помощью выкладок, аналогичных изложенным выше, нетрудно проверить, что и в рассматриваемом случае $N = 1$, так что для произвольного номера n получаем $I_n = (-1)^n$.

Таким образом,

$$F(z_\tau) = A\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{d\zeta_\tau}{\zeta_\tau - z_\tau} + \sum_{n=1}^{\infty}(I_{n-1}+I_n)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n\mathcal{C}^n A = A.$$

Кроме того, при $h(\zeta) = A$ для всех $\zeta \in \mathbb{T}$, учитывая, что $\mathcal{C}^n i = (-1)^n i$ и применяя теорему о вычетах, для компоненты G находим

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathcal{C}^{n+1}A\,d(\mathcal{C}^{n+1}\zeta)}{\mathcal{C}^{n+1}\zeta + (-1)^n\tau^{n+1}z} + \frac{\mathcal{C}^{n+1}A\,d(\mathcal{C}^n\zeta)}{\mathcal{C}^n\zeta + (-1)^{n+1}\tau^n z}\right)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg((-1)^{n+1}\mathcal{C}^{n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{A\,d\zeta}{\zeta + (-1)^n\tau^{n+1}\mathcal{C}^{n+1}z} + \\
&\quad + (-1)^n\mathcal{C}^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}}\frac{\overline{A}\,d\zeta}{\zeta + (-1)^{n+1}\tau^n\mathcal{C}^n z}\Bigg)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n = \\
&= \mathcal{C}^{n+1}A\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^{n+1} + (-1)^n)\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n = 0.
\end{aligned}$$

В результате получаем $f(z) = A$, $z \in \mathbb{D}$. Таким образом, доказательство теоремы завершено. $\square$

Замечание. Решение рассматриваемой задачи Дирихле можно также записать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} d_\zeta \Bigg[\log\frac{\zeta - z}{1-\zeta\overline{z}} +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n \log\frac{(\mathcal{C}^n\zeta)(\mathcal{C}^n\zeta_{\tau^{2n+1}} + (-1)^{n+1}\tau^n z_\tau)}{(\mathcal{C}^n\zeta + (-1)^{n+1}\tau^n z)(\mathcal{C}^n\zeta + (-1)^n\tau^{n+1}\overline{z})}\mathcal{C}^n\Big(\mathcal{I} + \frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\Big)\Bigg] h(\zeta) \tag{2.21}$$

Интеграл Пуассона (2.15), (2.16) существенно упрощается при значениях параметров $\tau = 0$ или $\sigma = 0$.

Следствие 2.6. *Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,0}f(z) = 0$ с параметром $\tau \in [0,1)$ в единичном круге $\mathbb{D}$ с граничной функцией $h \in C(\mathbb{T})$ представляется интегралом*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-|z|^2)(\zeta + \tau\overline{\zeta})}{(\zeta_\tau - z_\tau)(\overline{\zeta} - \overline{z})(\zeta + \tau\overline{z})} h(\zeta)|d\zeta|. \tag{2.22}$$

Следствие 2.7. *Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{0,\sigma}f(z) = 0$ в единичном круге $\mathbb{D}$ с заданной граничной функцией $h \in C(\mathbb{T})$ записывается в следующем виде:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(1-|z|^2)\left(\frac{1}{|\zeta - z|^2}\mathcal{I} + \sigma\frac{2-\overline{\zeta}z}{(\zeta - z)^2}\mathcal{C}\right) h(\zeta)|d\zeta|. \tag{2.23}$$

Теорема 2.8. *Пусть функция f удовлетворяет в единичном круге $\mathbb{D}$ уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f = g$, где $g \in C(\overline{\mathbb{D}})$ и $\tau \in [0,1)$, $|\sigma| < 1$, а на его границе совпадает с функцией $h \in C(\mathbb{T})$. Тогда в $\mathbb{D}$ функция f представляется в виде*

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{P}_{\tau,\sigma}(\zeta, z)h(\zeta)|d\zeta| + \int_{\mathbb{D}} \mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta, z)g(\zeta)d\mu(\zeta) \tag{2.24}$$

с ядром Пуассона $\mathcal{P}_{\tau,\sigma}$, определенным согласно (2.16), и функцией Грина

$$\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta, z) = \Phi_{\tau,\sigma}(\zeta - z) + F(\zeta_\tau, z) + \mathcal{T}_{-\sigma t,1}G(\zeta, z), \tag{2.25}$$

где $t=\tau^{-1}$, $\varPhi_{\tau,\sigma}$ *— фундаментальное решение, приведенное в предложении 1.2,*

$$F(\zeta_\tau,z)=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(-\frac{\sigma}{\tau}\Bigr)^n\times$$
$$\log\frac{(1-\tau^{2n})^2+(-1)^n\tau^{n-1}(1+\tau^{2n})\zeta_\tau\mathcal{C}^n z_\tau-\tau^{2n-1}(\zeta_\tau^2+\mathcal{C}^n z_\tau^2)}{(1+(-1)^n\tau^{n-1}\zeta_\tau\mathcal{C}^n z-\tau^{2n-1}\mathcal{C}^n z^2)(1+(-1)^{n+1}\tau^n\zeta_\tau\mathcal{C}^{n+1}z-\tau^{2n+1}\mathcal{C}^{n+1}z^2)}$$
$$\times\,\mathcal{C}^n\Bigl(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\Bigr)\quad(2.26)$$

и

$$G(\zeta,z)=\frac{1}{(1-\sigma^2)\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigl(-\frac{\sigma}{\tau}\Bigr)^n\times$$
$$\times\log\frac{(1+(-1)^n\tau^{n+1}\zeta\mathcal{C}^n z)(1+(-1)^n\tau^{n-1}\zeta\mathcal{C}^n z_\tau-\tau^{2n-1}\zeta^2)}{(1+(-1)^n\tau^{n-1}\zeta\mathcal{C}^n z)(1+(-1)^{n+1}\tau^n\zeta\mathcal{C}^{n+1}z_\tau-\tau^{2n+1}\zeta^2)}\mathcal{C}^{n+1},\quad(2.27)$$

причем в формулах (2.26), (2.27) при $n=0$ *под знаком логарифма целиком игнорируется содержимое тех скобок, внутри которых встречается параметр* τ *в отрицательной степени.*

Доказательство. Формулы (2.25)–(2.27) выводятся следующим образом. Функцию Грина $\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)$, удовлетворяющую при всех $z\in\mathbb{D}$ условиям

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(\zeta)\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)&=\boldsymbol{\delta}_0(\zeta-z),\qquad \zeta\in\mathbb{D},\\ \mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)&=0,\qquad \zeta\in\mathbb{T},\end{aligned}\tag{2.28}$$

ищем в виде суммы

$$\mathcal{G}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)=\varPhi_{\tau,\sigma}(\zeta-z)+\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}(\zeta,z),\tag{2.29}$$

где $\varPhi_{\tau,\sigma}$ — фундаментальное решение из предложения 1.2, а оператор $\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}$ удовлетворяет, как следует из (2.28), условиям

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(\zeta)\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)&=0,\qquad \zeta\in\mathbb{D},\\ \widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}(\zeta,z)&=-\varPhi_{\tau,\sigma}(\zeta-z),\qquad \zeta\in\mathbb{T}.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Для решения задачи (2.30) удобнее всего применить формулу (2.21), предварительно записав при $\zeta\in\mathbb{T}$

$$\begin{aligned}(1-\sigma^2)\pi\varPhi_{\tau,\sigma}(\zeta,z)&=\log(\zeta_\tau-z_\tau)\Bigl(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\Bigr)+\log(\overline{\zeta}-\overline{z})-\frac{\sigma}{\tau}\log(\zeta-z)\mathcal{C}=\\ &=\log((\zeta-z)-\tau(\overline{\zeta}-\overline{z}))\Bigl(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\Bigr)+\log(\overline{\zeta}-\overline{z})-\frac{\sigma}{\tau}\log(\zeta-z)\mathcal{C}=\\ &=\log((1-\overline{\zeta}z)-\tau\overline{\zeta}(\overline{\zeta}-\overline{z}))\Bigl(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\Bigr)+\log(1-\zeta\overline{z})-\frac{\sigma}{\tau}\log(1-\overline{\zeta}z)\mathcal{C}.\end{aligned}$$

Найдя функцию $\widetilde{\mathcal{G}}_{\tau,\sigma}$ и подставляя в (2.29), получаем функцию Грина $\mathcal{G}_{\tau,\sigma}$. $\square$

Следствие 2.9. *При значении параметра $\sigma = 0$ функция Грина для единичного круга принимает вид*

$$\mathcal{G}_{\tau,0}(\zeta, z) = \frac{1}{\pi} \log \frac{(\zeta_\tau - z_\tau)(\overline{\zeta} - \overline{z})(1 + \tau\overline{\zeta}\overline{z})}{(1 - \zeta_\tau\overline{z} - \tau\overline{z}^2)(1 - \overline{\zeta}z_\tau - \tau\overline{\zeta}^2)},$$

а при $\tau = 0$

$$\mathcal{G}_{0,\sigma}(\zeta, z) = \frac{2}{\pi} \log \left| \frac{\zeta - z}{1 - \zeta\overline{z}} \right| + \\ + \frac{1}{\pi}\sigma \frac{\left(1 - |\zeta|^2\right)\left(1 - |z|^2\right)}{1 - \zeta\overline{z}} \left(\sigma \frac{2 - \zeta\overline{z}}{1 - \zeta\overline{z}} + \frac{\overline{\zeta}\overline{z}(\zeta - z) - (\overline{\zeta} - \overline{z})}{(1 - \overline{\zeta}z)(\zeta - z)} \mathcal{C} \right).$$

Отметим, что все результаты этого параграфа, приведенные выше, остаются справедливыми, если доопределить оператор $\mathcal{L}$ по формулам (1.12) для отрицательных значений параметра τ, так что $\tau \in (-1, 1)$. С помощью полученного решения задачи Дирихле в единичном круге $\mathbb{D}$ для сильно эллиптических операторов $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ удается построить решение и в специальных эллипсах вида

$$\mathbb{E}_\tau = \{(x, y)\colon (1 - \tau)^2 x^2 + (1 + \tau)^2 y^2 < 1\}$$

с границей

$$\mathcal{E}_\tau = \{(x, y)\colon (1 - \tau)^2 x^2 + (1 + \tau)^2 y^2 = 1\}.$$

Конструкция решения основана на следующем вспомогательном факте.

Лемма 2.10. *Пусть функция f удовлетворяет на множестве $U \subset \mathbb{C}$ уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$, где $|\tau| < 1$. Тогда функция $\psi = \mathcal{T}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} \circ f \circ \mathcal{T}_{-\tau,1}^{-1}$ удовлетворяет на множестве $U' = \mathcal{T}_{-\tau,1} U$ уравнению $\mathcal{L}_{-\tau,\sigma}\psi = 0$.*

Доказательство. В самом деле, поскольку $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ на множестве U, то функция f на этом множестве представляется в виде (1.15). Отсюда получаем

$$\widetilde{\psi}(z) := \mathcal{T}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} f(z) = f(z) + \frac{\sigma}{\tau}\overline{f(z)} = F(z_\tau) + \frac{\sigma}{\tau}\overline{F(z_\tau)} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\overline{G(z)}. \quad (2.31)$$

Пусть $U' \ni z' = \mathcal{T}_{-\tau,1}(z) = \overline{z} - \tau z$ и обратно $U \ni z = \mathcal{T}_{-\tau,1}^{-1}(z') = \dfrac{\tau z' + \overline{z}'}{1 - \tau^2}$. Легко проверить, что

$$z_\tau = \overline{z}', \qquad \overline{z} = \frac{z'_{-\tau}}{1 - \tau^2}.$$

Тогда из (2.31) получаем

$$\psi(z') = \widetilde{\psi} \circ \mathcal{T}^{-1}_{-\tau,1}(z') = F(\overline{z}') + \frac{\sigma}{\tau}\overline{F(\overline{z}')} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\overline{G\left(\frac{\overline{z}'_{-\tau}}{1-\tau^2}\right)}. \tag{2.32}$$

Обозначив

$$F_\psi(z'_{-\tau}) = \left(1 - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\overline{G\left(\frac{\overline{z}'_{-\tau}}{1-\tau^2}\right)}, \qquad G_\psi(z') = \overline{F(\overline{z}')},$$

переписываем (2.32) в виде

$$\psi(z') = F_\psi(z'_{-\tau}) + \overline{G_\psi(z')} + \frac{\sigma}{\tau}G_\psi(z')$$

с голоморфными функциями F_ψ и G_ψ, из которого ясно, что функция ψ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{-\tau,\sigma}\psi = 0$ на множестве U'. Лемма доказана. $\square$

Теорема 2.11. *Решение задачи Дирихле для уравнения $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f(z) = 0$ с параметрами $|\tau| < 1$, $|\sigma| < 1$ во внутренности $\mathbb{E}_\tau$ эллипса $\mathcal{E}_\tau$ при заданной граничной функции $h \in C(\mathcal{E}_\tau)$ дается формулой*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{E}_\tau} d_\zeta \Bigg[\log\frac{(\zeta_\tau - z_\tau)(\overline{\zeta}_\tau - \tau z_\tau)}{\overline{\zeta} - \overline{z}} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^n \log\frac{\left(\mathcal{C}^{n+1}\zeta_\tau - \tau^{n-1}z_\tau\right)\left(\mathcal{C}^{n+1}(\zeta_\tau)_{-\tau^{2n+1}} - \tau^n(1-\tau^2)\overline{z}\right)}{\left(\mathcal{C}^{n+1}\zeta_\tau - \tau^{n+1}z_\tau\right)\left(\mathcal{C}^{n+1}(\zeta_\tau)_{-\tau^{2n-1}} - \tau^{n-1}(1-\tau^2)z\right)}\mathcal{C}^n\Bigg]h(\zeta). \tag{2.33}$$

Доказательство. Пусть сначала $|\sigma| \neq |\tau|$ и функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}f = 0$ в области $\mathbb{E}_\tau$. Тогда, согласно Лемме 2.10, функция $\psi = \mathcal{T}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} \circ f \circ \mathcal{T}^{-1}_{-\tau,1}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{-\tau,\sigma}\psi = 0$ в единичном круге $\mathbb{D} = \mathcal{T}_{-\tau,1}\mathbb{E}_\tau$, поэтому она может быть найдена по формуле (2.21) с заменой в ней параметра τ на $-\tau$. Тогда функция f находится по обратной формуле (имеющей место при $|\sigma| \neq |\tau|$) $f = \mathcal{T}^{-1}_{1,\frac{\sigma}{\tau}} \circ \psi \circ \mathcal{T}_{-\tau,1}$, причем интеграл по окружности $\mathbb{T}$ заменяется соответствующим интегралом по эллипсу $\mathcal{E}_\tau$, что приводит к формуле (2.33), которая остается верной и при $|\sigma| = |\tau|$. $\square$

Заметим, что при $\tau = 0$ область $\mathbb{E}_\tau$ совпадает с единичным кругом $\mathbb{D}$, а формула (2.33) с помощью предельного перехода превращается в (2.23). Завершим параграф приведением формулы для решения задачи Дирихле для неоднородного уравнения в рассматриваемом эллипсе.

Теорема 2.12. *Пусть функция f удовлетворяет во внутренности $\mathbb{E}_\tau$ эллипса $\mathcal{E}_\tau$ уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = g$, где $g \in C(\overline{\mathbb{E}}_\tau)$ и $|\tau| < 1$, $|\sigma| < 1$, а на самом эллипсе $\mathcal{E}_\tau$ совпадает с функцией $h \in C(\mathcal{E}_\tau)$. Тогда в области $\mathbb{E}_\tau$ функция f записывается виде*

$$f(z) = -\int_{\mathcal{E}_\tau} \mathcal{P}_{-\tau,\sigma}(\overline{\zeta}_\tau, \overline{z}_\tau) h(\zeta) |d\zeta_\tau| + \int_{\mathbb{E}_\tau} \mathcal{G}_{-\tau,\sigma}(\overline{\zeta}_\tau, \overline{z}_\tau) g(\zeta) d\mu(\zeta).$$

Эта теорема доказывается также применением леммы 2.10.

2.4. Дополнение

В этом параграфе показывается, как с помощью описанного выше метода возмущения получаются приведенные в предыдущем параграфе формулы интеграла Пуассона для сильно эллиптических уравнений $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$. Приводимые здесь рассуждения являются не вполне формальными, строгие доказательства результатов содержатся выше.

Начнем с рассмотрения простых случаев, а именно таких, когда один из параметров τ или σ обращается в нуль. Затем распространим используемые приемы на общий случай $|\tau| < 1$, $|\sigma| < 1$.

Случай $\sigma = 0$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{0,\tau} f(z) = (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) f(z) = 0, & z \in \mathbb{D}, \\ f(\zeta) = h(\zeta), & \zeta \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{2.34}$$

где граничная функция h принимается непрерывной на $\mathbb{T}$, т.е. $h \in C(\mathbb{T})$.

Будем искать решение задачи (2.34) в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tau^n, \tag{2.35}$$

где функция f_0 — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \partial\overline{\partial} f_0(z) = 0, & z \in \mathbb{D}, \\ f_0(\zeta) = h(\zeta), & \zeta \in \mathbb{D}, \end{cases} \tag{2.36}$$

а функции f_n при $n \geq 1$ суть решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \partial\overline{\partial} f_n(z) = -\partial^2 f_{n-1}(z), & z \in \mathbb{D}, \\ f_n(\zeta) = 0, & \zeta \in \mathbb{T}. \end{cases} \tag{2.37}$$

Функция f_0 представляется интегралом Пуассона

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(\zeta) \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} |d\zeta|,$$

который можно переписать в форме

$$f_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} h(\zeta)\, d_\zeta P_0(\zeta, z)$$

с интегральным ядром

$$P_0(\zeta, z) = \log \frac{\zeta - z}{1 - \zeta \overline{z}},$$

где d_ζ означает дифференцирование по переменной ζ. Запишем и все остальные функции f_n в аналогичной форме

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} h(\zeta) d_\zeta\, P_n(\zeta, z). \tag{2.38}$$

Таким образом, искомое решение представляется в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} h(\zeta) d_\zeta\, P(\zeta, z), \tag{2.39}$$

где

$$P(\zeta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \tau^n. \tag{2.40}$$

Из условий (2.37) получим задачу для ядра P_1

$$\begin{cases} \partial_z \overline{\partial}_z P_1(\zeta, z) = -\partial_z^2 P_0(\zeta, z), & z \in \mathbb{D}; \\ P_1(\zeta, z) = 0, & z \in \mathbb{T}. \end{cases} \tag{2.41}$$

Ее решение можно искать в виде

$$P_1(\zeta, z) = -\overline{z} \partial_z P_0(\zeta, z) + \widetilde{P}_1(\zeta, z) = \frac{\overline{z}}{\zeta - z} + \widetilde{P}_1(\zeta, z), \tag{2.42}$$

где в силу (2.41), $\widetilde{P}_1(\zeta, z)$ — гармоническая функция по переменной z, удовлетворяющая граничному условию

$$\widetilde{P}_1(\zeta, z) = \overline{z} \partial_z P_0(\zeta, z) = \frac{\overline{z}}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{T}.$$

Заметим, что в (2.42) первое слагаемое справа от последнего знака равенства обращается в бесконечность при $z = \zeta$, но при этом функция $P_1(\zeta, z)$

в бесконечность обращаться не должна. Поэтому еще более естественно искать функцию $P_1(\zeta, z)$ в виде

$$P_1(\zeta, z) = -\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} + p_1(\zeta, z),$$

где функция $p_1(\zeta, z)$ также гармоническая по z. Но при ζ, $z \in \mathbb{T}$ можно записать $\zeta = 1/\overline{\zeta}$, $z = 1/\overline{z}$, и тогда

$$\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} = -\overline{\zeta}\overline{z}. \tag{2.43}$$

Поэтому ясно, что

$$p_1(\zeta, z) = -\overline{\zeta}\overline{z}$$

и есть искомая гармоническая по z функция, так что

$$P_1(\zeta, z) = -\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} - \overline{\zeta}\overline{z}.$$

Аналогичные рассуждения на следующем шаге приводят к выражению

$$P_2(\zeta, z) = -\frac{(\overline{\zeta} - \overline{z})^2}{2(\zeta - z)^2} + p_2(\zeta, z),$$

где, ввиду (2.43), оказывается, что $p_2(\zeta, z) = \dfrac{1}{2}(-\overline{\zeta}\overline{z})^2$. Для произвольного номера $n \geq 1$ получим

$$P_n(\zeta, z) = -\frac{1}{n}\left(\left(\frac{\zeta - \overline{z}}{\zeta - z}\right)^n + (-1)^{n+1}(\overline{\zeta}\overline{z})^n\right).$$

Подставляя это в (2.40), находим

$$P(\zeta, z) = \log\frac{\zeta_\tau - z_\tau}{(\overline{\zeta} - \overline{z})(\zeta + \tau\overline{\zeta})}. \tag{2.44}$$

Теперь подстановка (2.44) в (2.39) дает решение задачи Дирихле при $\sigma = 0$.

Случай $\tau = 0$

Теперь решим такую задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{0,\sigma} f(z) = (\partial\overline{\partial} + \sigma\partial^2\mathcal{C})f(z) = 0, & z \in \mathbb{D}, \\ f(\zeta) = h(\zeta), & \zeta \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{2.45}$$

где снова $h \in C(\mathbb{T})$.

Для нахождения решения применяем прежние рассуждения с использованием формул (2.38)–(2.40), в которых заменяем τ на σ. Подставляя их в уравнение из (2.45), приходим к следующим формулам для последовательного вычисления ядер $P_n(\zeta, z)$:

$$\begin{aligned} &\partial\overline{\partial}P_0(\zeta, z) = 0, \\ &\partial\overline{\partial}P_n(\zeta, z) = \partial^2\mathcal{C}P_{n-1}(\zeta, z), \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.46}$$

Здесь ядро $P_0(\zeta, z)$ определяется формулой (2.55), для остальных ядер принимаем нулевые граничные условия.

Найдем ядро $P_1(\zeta, z)$. Для него из (2.46) имеем

$$\partial\overline{\partial}P_1(\zeta, z) = \partial^2\mathcal{C}P_0(\zeta, z) = \partial^2\log(1 - \overline{\zeta}z)\mathcal{C}. \tag{2.47}$$

Решение этого уравнение будем искать в виде

$$\begin{aligned} P_1(\zeta, z) = -\overline{z}\partial\log(1 - \overline{\zeta}z)\mathcal{C} + \tilde{p}_1(\zeta, z)\mathcal{C} = \\ = \frac{\overline{\zeta}\overline{z}}{1 - \overline{\zeta}z}\mathcal{C} + \tilde{p}_1(\zeta, z) = \frac{\overline{z}}{\zeta - z}\mathcal{C} + \tilde{p}_1(\zeta, z). \end{aligned}$$

Подставив это в (2.62), найдем, что $\partial\overline{\partial}\tilde{p}_1(\zeta, z) = 0$.

Первое слагаемое справа от последнего знака равенства обращается в бесконечность при $z = \zeta$, но само ядро $P_1(\zeta, z)$ в бесконечность обращаться не должно, поэтому еще более естественно искать ядро P_1 в виде

$$P_1(\zeta, z) = -\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}\mathcal{C} + p_1(\zeta, z)\mathcal{C},$$

где $\partial\overline{\partial}p_1(\zeta, z) = 0$. Тогда из нулевого граничного условия (2.56) для ядра $P_0(\zeta, z)$ следует, что при $\zeta, z \in \mathbb{T}$

$$p_1(\zeta, z) = \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z}.$$

Но записав $\zeta = 1/\overline{\zeta}$, $z = 1/\overline{z}$, получим, что $p_1(\zeta, z) = -\overline{\zeta}\overline{z}$. Тогда

$$P_1(\zeta, z) = -\left(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{\zeta - z} + \overline{\zeta}\overline{z}\right)\mathcal{C} = -\frac{\overline{\zeta}(1 - |z|^2)}{\zeta - z}\mathcal{C}.$$

Нетрудно заметить, что $\partial^2\mathcal{C}P_1(\zeta, z) = 0$, так что все ядра, начиная с P_2, оказываются нулевыми. Таким образом, получаем

$$P(\zeta, z) = \log\frac{\zeta - z}{1 - \zeta\overline{z}} - \sigma\frac{\overline{\zeta}(1 - |z|^2)}{\zeta - z}\mathcal{C}, \tag{2.48}$$

и задача (2.45) решена.

Общий сильно эллиптический случай

Будем искать решение задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{\tau,\sigma} f(z) = [(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}] f(z) = 0, & z \in \mathbb{D}, \\ f(\zeta) = h(\zeta), & \zeta \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{2.49}$$

с параметрами $0 < |\tau| < 1$, $0 < |\sigma| < 1$ в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} d_\zeta P(\zeta, z) \cdot h(\zeta), \tag{2.50}$$

при этом ядро $P(\zeta, z)$ ищем в виде степенного ряда

$$P(\zeta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\zeta, z) \sigma^n. \tag{2.51}$$

С другой стороны, представим искомое решение также в виде ряда по степеням параметра σ:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \sigma^n. \tag{2.52}$$

Из (2.50) и (2.52) следует

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} d_\zeta P_n(\zeta, z) \cdot h(\zeta). \tag{2.53}$$

Подставляя (2.52) в уравнение из (2.49), получаем

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(z) f(z) = [(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}] \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta, z) \sigma^n = 0.$$

Приравнивая к нулю множители при степенях параметра σ, выписываем формулы для последовательного отыскания функций $f_n(z)$:

$$\begin{aligned} &(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) f_0(z) = 0, \\ &(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) f_n(z) = -(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C} f_{n-1}(z), \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (2.53), получаем соответствующие формулы для ядер $P_n(\zeta, z)$:

$$\begin{aligned} &(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) P_0(\zeta, z) = 0, \\ &(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2) P_n(\zeta, z) = (\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C} P_{n-1}(\zeta, z), \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Здесь и ниже все операторы дифференцирования относятся к переменной z. Отметим, что $\mathcal{C}P_{n-1} = \overline{P_{n-1}}\mathcal{C}$.

Решением первого уравнения из (2.54) является ядро

$$P_0(\zeta, z) = \log \frac{\zeta_\tau - z_\tau}{(\overline{\zeta} - \overline{z})(\zeta + \tau\overline{z})}, \tag{2.55}$$

где $\zeta_\tau = \zeta - \tau\overline{\zeta}$, $z_\tau = z - \tau\overline{z}$. Для остальных ядер принимаем граничные условия

$$P_n(\zeta, z) = 0, \qquad \zeta, z \in \mathbb{T}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.56}$$

Произведем вычисление нескольких первых ядер $P_n(\zeta, z)$ до установления общей формулы для них.

1. Вычисление ядра $P_1(\zeta, z)$.

Для ядра $P_1(\zeta, z)$ из (2.54) имеем уравнение

$$(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)P_1(\zeta, z) = (\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{P_0(\zeta, z)}\mathcal{C}. \tag{2.57}$$

Заметим, что

$$(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{P_0(\zeta, z)} = \partial(\tau\overline{\partial} + \partial)\overline{P_0(\zeta, z)} = \partial\overline{(\tau\partial + \overline{\partial})P_0(\zeta, z)}. \tag{2.58}$$

Кроме того, поскольку функция $P_0(\zeta, z)$ удовлетворяет уравнению $\partial(\overline{\partial} + \tau\partial)P_0(\zeta, z) = 0$, то она как функция переменной z представима в виде

$$P_0(\zeta, z) = F_0(z - \tau\overline{z}) + \overline{G_0(z)} \tag{2.59}$$

с голоморфными функциями F_0 и G_0. Из (2.58), (2.59) следует

$$(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{P_0(\zeta, z)} = \partial\overline{(\tau\partial + \overline{\partial})P_0(\zeta, z)} = \partial^2 G_0(\zeta, z). \tag{2.60}$$

Но для функции $P_0(\zeta, z)$ из (2.55) соответствующая компонента G_0 разложения (2.59) есть

$$G_0(\zeta, z) = -\log(\zeta - z)(\overline{\zeta} + \tau z). \tag{2.61}$$

Подставляя (2.60), (2.61) в (2.57), получаем

$$(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)P_1(\zeta, z) = -\partial^2 \log(\zeta - z)(\overline{\zeta} + \tau z)\mathcal{C}. \tag{2.62}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$P_1(\zeta, z) = -\frac{1}{\tau} \log(\zeta - z)(\overline{\zeta} + \tau z)\mathcal{C} + p_1(\zeta, z)\mathcal{C}. \tag{2.63}$$

Подставляя (2.63) в (2.62), находим, что функция $p_1(\zeta, z)$ является решением следующей задачи Дирихле:

$$\begin{aligned} &\partial(\overline{\partial} + \tau\partial)p_1(\zeta, z) = 0, \qquad \zeta \in \mathbb{T}, z \in \mathbb{D}; \\ &p_1(\zeta, z) = \frac{1}{\tau}\log(1 - \overline{\zeta}z)(1 + \tau\zeta z), \qquad \zeta, z \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Для произвольной функции φ, непрерывной почти всюду на $\mathbb{T}$, обозначим через $\mathcal{P}_\tau\varphi(z)$ решение $p(z)$ задачи Дирихле

$$\begin{aligned} &\partial(\overline{\partial} + \tau\partial)p(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{D}; \\ &p(z) = \varphi(z), \qquad z \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Можно проверить, что для любого числа $\zeta \in \overline{\mathbb{D}}$

$$\mathcal{P}_\tau(z)\log(1 - \overline{\zeta}z) = \log\frac{(1 - \overline{\zeta}z) - \tau\overline{\zeta}(\overline{\zeta} - \overline{z})}{1 + \tau\overline{\zeta}\overline{z}} = \log\frac{1 - \tau\overline{\zeta}^2 - \overline{\zeta}z_\tau}{1 + \tau\overline{\zeta}\overline{z}}. \tag{2.66}$$

Решение задачи (2.64) есть

$$p_1(\zeta) = \frac{1}{\tau}\mathcal{P}_\tau(z)\log(1 - \overline{\zeta}z) + \frac{1}{\tau}\mathcal{P}_\tau(z)(1 + \tau\zeta z).$$

Первое слагаемое справа дается формулой (2.66), а для вычисления второго произведем в той же формуле (2.66) замену: $\zeta \to -\tau\overline{\zeta}$. Мы не будем выписывать здесь полностью решение $p_1(\zeta, z)$, произведя полные вычисления ниже для более общего случая. Как видно из формул (2.59), (2.60), на вычисление следующего ядра P_3 повлияют только слагаемые, аналитические по переменно $\overline{z}$, их мы и выпишем. Итак,

$$p_1(\zeta, z) = -\frac{1}{\tau}\log(1 + \tau\overline{\zeta}\overline{z}) - \frac{1}{\tau}\log(1 - \tau^2\zeta\overline{z}) + \ldots \tag{2.67}$$

2. Вычисление ядра $P_2(\zeta, z)$.

Согласно (2.54), ядро $P_2(\zeta, z)$ удовлетворяет уравнению

$$(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)P_2(\zeta, z) = (\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{P_1(\zeta, z)}\mathcal{C}. \tag{2.68}$$

Исходя из формул (2.63), (2.67), получаем

$$(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{P_1(\zeta, z)} = -\frac{1}{\tau}\partial^2\log(1 + \tau\zeta z)(1 - \tau^2\overline{\zeta}z),$$

так что P_2 можно представить в виде

$$P_2(\zeta, z) = -\frac{1}{\tau^2}\log(1 + \tau\zeta z)(1 - \tau^2\overline{\zeta}z) + p_2(\zeta, z), \tag{2.69}$$

где

$$p_2(\zeta,z)=\frac{1}{\tau^2}\mathcal{P}_\tau(z)\log(1+\tau\zeta z)+\frac{1}{\tau^2}\mathcal{P}_\tau(z)\log(1-\tau^2\overline{\zeta}z).$$

Первое слагаемое справа вычисляется применением формулы (2.66) с заменой в ней $\zeta\to-\tau\overline{\zeta}$, а второе слагаемое — с заменой $\zeta\to\tau^2\zeta$. Снова выписываем только слагаемые, аналитические по переменной $\overline{z}$, которые влияют на дальнейшие вычисления. Получаем

$$p_2(\zeta,z)=-\frac{1}{\tau^2}\log(1-\tau^2\zeta\overline{z})-\frac{1}{\tau^2}\log(1+\tau^3\overline{\zeta}\overline{z})+\ldots \tag{2.70}$$

3. Общая формула для ядер $P_n(\zeta,z)$.

Теперь можно записать следующую общую формулу:

$$\begin{aligned}
P_{2m}(\zeta,z)&=-\frac{1}{\tau^{2m}}\log(1-\tau^{2m}\overline{\zeta}z)(1+\tau^{2m-1}\zeta z)+p_{2m}(\zeta,z),\\
P_{2m+1}(\zeta,z)&=\frac{1}{\tau^{2m+1}}\log(1-\tau^{2m}\overline{\zeta}z)(1+\tau^{2m+1}\zeta z)\mathcal{C}+p_{2m+1}(\zeta,z)\mathcal{C},
\end{aligned}\tag{2.71}$$

где

$$\begin{aligned}
p_{2m}(\zeta,z)&=\mathcal{P}_\tau(z)\frac{1}{\tau^{2m}}\log(1-\tau^{2m}\overline{\zeta}z)(1+\tau^{2m-1}\zeta z),\\
p_{2m+1}(\zeta,z)&=-\mathcal{P}_\tau(z)\frac{1}{\tau^{2m+1}}\log(1-\tau^{2m}\overline{\zeta}z)(1+\tau^{2m+1}\zeta z).
\end{aligned}\tag{2.72}$$

Производя во вспомогательной формуле (2.66) замену $\zeta\to\tau^{2m}\zeta$, и умножая в полученном выражении числитель и знаменатель на ζ, получаем

$$\mathcal{P}_\tau(z)\log(1-\tau^{2m}\overline{\zeta}z)=\log\frac{\zeta_{\tau^{4m+1}}-\tau^{2m}z_\tau}{\zeta+\tau^{2m+1}\overline{z}}. \tag{2.73}$$

Аналогичным образом замена $\zeta\to-\tau^{2m-1}\overline{\zeta}$ в той же формуле приводит к результату

$$\mathcal{P}_\tau(z)\log(1+\tau^{2m-1}\zeta z)=\log\frac{\overline{\zeta}_{\tau^{4m-1}}-\tau^{2m-1}z_\tau}{\overline{\zeta}-\tau^{2m}\overline{z}}. \tag{2.74}$$

Подставляя (2.73), (2.74) в (2.72), а затем (2.72) в (2.71), записываем окончательно

$$\begin{aligned}
P_{2m}(\zeta,z)&=\frac{1}{\tau^{2m}}\log\frac{(\zeta_{\tau^{4m+1}}-\tau^{2m}z_\tau)(\overline{\zeta}_{\tau^{4m-1}}+\tau^{2m-1}z_\tau)}{(\zeta-\tau^{2m}z)(\zeta+\tau^{2m+1}\overline{z})(\overline{\zeta}+\tau^{2m-1}z)(\overline{\zeta}-\tau^{2m}\overline{z})},\\
P_{2m+1}(\zeta,z)&=\frac{1}{\tau^{2m+1}}\log\frac{(\zeta_{\tau^{4m+1}}-\tau^{2m}z_\tau)(\overline{\zeta}_{\tau^{4m+3}}+\tau^{2m+1}z_\tau)}{(\zeta-\tau^{2m}z)(\zeta+\tau^{2m+1}\overline{z})(\overline{\zeta}+\tau^{2m+1}z)(\overline{\zeta}-\tau^{2m+2}\overline{z})}\mathcal{C},
\end{aligned}\tag{2.75}$$

или в виде одной формулы:

$$P_n(\zeta, z) = \sum_{k=n-1}^{n} \log \frac{\mathcal{C}^k \zeta_{\tau^{2k+1}} + (-1)^{k+1} \tau^k z_\tau}{(\mathcal{C}^k \zeta + (-1)^{k+1} \tau^k z)(\mathcal{C}^k \zeta + (-1)^k \tau^{k+1} \overline{z})} \cdot \frac{\mathcal{C}^n}{\tau^n}.$$

Теперь, подставляя (2.55), (2.75) в (2.51), а затем результат в (2.50), дифференцируя и производя элементарные преобразования, получаем решение задачи Дирихле для круга.

Глава 3

Геометрические и граничные свойства отображений решениями эллиптических систем

В этой главе исследуются отображения единичного круга решениями эллиптических систем $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$. Мы рассматриваем отображения трех классов: 1) гармонические отображениями, соответствующие значениям параметров $\tau = \sigma = 0$; 2) $\mathcal{L}_{\tau,0}$-отображения (отображающая функция f удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,0} f = 0$); 3) $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-отображения. Для гармонического случая исследуется вопрос о радиусе звездообразности образа круга при однолистном нормированном отображении. Для $\mathcal{L}_{\tau,0}$- и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-функций на основе полученных в предущей главе формул типа Пуассона изучается граничное поведение и строятся примеры отображений на области с углами.

3.1. Введение

Из обсуждаемых в этой главе вопросов специального введения требуют вопросы, связанные с гармоническими отображениями единичного круга, им и будет посвящен данный параграф. Что касается свойств $\mathcal{L}_{\tau,0}$- и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-отображений, то эта тема является мало изученной. Некоторые исследования проводились недавно А.Б. Зайцевым, который в работах [7] и [8] рассматривал вопрос об однолистности $\mathcal{L}_{\tau,0}$-отображений единичного круга и установил ряд достаточных условий.

Рассмотрим класс гармонических отображений единичного круга (т.е. однолистных гармонических в единичном круге комплекснозначных функций) с нормировкой

$$f(0) = 0, \quad f_z(0) = 1; \tag{3.1}$$

нижние индексы z и $\overline{z}$ означают взятие производных в смысле Коши — Римана, то есть $f_z = \partial f$, а $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f$.

Односвязная область $U \subset \mathbb{C}$ называется звездообразной относительно точки $a \in U$, если для любой точки $z \in U$ отрезок $[a, z]$, соединяющий ее с точкой a, содержится в U. В дальнейшем мы будем иметь дело только с областями, звездообразными относительно начала координат, и будем называть их просто звездообразными. Граница жордановой звездообразной области называется звездообразной кривой. Нетрудно видеть, что условие звездообразности аналитической жордановой кривой γ эквивалентно тому, что $\arg w$ не убывает при движении точки w по γ в положительном направлении.

Радиусом звездообразности для данного класса однолистных функций, определенных в окрестности начала координат, называется такое максимальное число $R > 0$ (если оно существует), что любой круг D_r радиуса $0 < r \leq R$ с центром в начале координат отображается всеми функциями данного класса на звездообразную область. Вопрос о радиусе звездообразности тесно связан с вопросом о радиусе выпуклости, который определяется аналогичным образом (образ круга D_r при соответствующих отображениях является выпуклой областью).

Так как любая выпуклая область является звездообразной, то значение радиуса выпуклости является нижней оценкой (возможно, неточной) радиуса звездообразности для одного и то же класса отображений.

В дальнейшем рассматривается класс $\mathcal{S}_H$ однолистных гармонических отображений f единичного круга $\mathbb{D}$ с условиями нормировки (3.1), сохраняющих ориентацию границ. Как известно (см. [30]), любое гармоническое отображение $f(z)$ представимо в виде $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, где $h(z)$ и $g(z)$ — голоморфные функции, называемые голоморфными компонентами гармонического отображения f. Для $f \in \mathcal{S}_H$ эти функции, голоморфные в круге $\mathbb{D}$, отвечают нормировке

$$h(0) = 0, \qquad h'(0) = 1, \qquad g(0) = 0; \tag{3.2}$$

таким образом, для функций из рассматриваемого класса справедливо представление

$$\mathcal{S}_H \ni f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \qquad h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n. \tag{3.3}$$

Из условий однолистности и сохранения ориентации отображением f следует (см., например, [30]), что его якобиан J_f положителен всюду в $\mathbb{D}$, т.е.

$$J_f(z) = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.4}$$

Условие (3.4) является критерием локальной однолистности f.

Введем еще класс $\mathcal{S}_H^0 := \{f \in \mathcal{S}_H \colon f_{\bar{z}}(0) = 0\}$. Отметим, что между классами $\mathcal{S}_H^0$ и $\mathcal{S}_H$ существует известная (см. [41]) связь: всякая функция

$f \in \mathcal{S}_H$ может быть представлена в виде

$$f = F + \bar{b}_1 \overline{F}, \tag{3.5}$$

где $F \in \mathcal{S}_H^0$. В самом деле, для произвольной функции $f \in \mathcal{S}_H$ можно положить

$$F = \frac{f - b_1 \overline{f}}{1 - |b_1|^2},$$

причем функция F корректно определена, поскольку из (3.4) при $z = 0$ следует, что $|b_1| < 1$. Можно показать (см. [30]), что класс $\mathcal{S}_H^0$ является компактным семейством.

Хорошо изученным подклассом класса $\mathcal{S}_H$ является класс $\mathcal{S}$ конформных отображений f единичного круга $\mathbb{D}$, удовлетворяющих условиям нормировки $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$ (см., например, [3]). Нам понадобится также подкласс $\mathcal{C}_H$, состоящий из гармонических отображений единичного круга $\mathbb{D}$ на выпуклые области; кроме того, положим $\mathcal{C}_H^0 := \{f \in \mathcal{C}_H \colon f_{\bar{z}}(0) = 0\}$.

Напомним, что область U называется выпуклой в горизонтальном направлении, если ее пересечение с любой горизонтальной прямой либо связно, либо пусто. Иными словами, любая прямая, параллельная вещественной оси, либо пересекает область по целому интервалу (возможно, неограниченному), либо вовсе не пересекает. Аналогичным образом определяется выпуклость в любом другом направлении. Область U является выпуклой тогда и только тогда, когда она выпукла во всех направлениях.

В работе [41] был доказан следующий критерий выпуклости образа круга при гармоническом отображении. *Пусть гармоническая функция $f = h + \overline{g}$ локально однолистна в круге $D_R = \{|z| < R\}$, $R > 0$. Тогда она однолистно отображает этот круг на выпуклую область в том и только в том случае, когда при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) := h(z) + e^{i\beta} g(z)$ конформно отображает D_R на область, выпуклую в горизонтальном направлении.*

Пусть γ — простая замкнутая аналитическая кривая и $0 \notin \gamma$. Скажем, что γ звездообразна в направлении β, если луч, выходящий из начала координат под углом β относительно положительного направления вещественной оси, пересекает γ не внешним образом не более чем в одной точке. Под пересечением кривой γ с прямой не внешним образом мы подразумеваем такое пересечение, при котором любая окрестность точки пересечения содержит точки γ, лежащие как в одной, так и в другой полуплоскости относительно данной прямой. Жорданову область U, ограниченную такой кривой, назовем звездообразной в заданном направлении β. Звездообразность в направлениях $\pm\dfrac{\pi}{2}$ естественно назвать звездообразностью в вертикальном направлении.

Жорданова область U с аналитической границей звездообразна в том и только том случае, когда она звездообразна по всем направлениям $\beta \in [0, 2\pi)$.

Аналог теоремы Клуни и Шейл-Смолла для звездообразных областей оказывается неверным для произвольного гармонического отображения f класса $\mathcal{S}_H$ (см., например, [30, п. 6.7]). Однако в случае, когда функция f принадлежит более узкому классу $\mathcal{C}_H$, ниже доказывается следующая

Теорема 3.1. *Функция $f = h + \overline{g} \in \mathcal{C}_H$ отображает круг D_r радиуса $r \in (0, 1)$ на звездообразную область в том и только в том случае, когда при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) = h(z) + e^{i\beta}g(z)$ отображает окружность T_r на кривую, звездообразную в вертикальном направлении.*

Из этого утверждения следует, что для класса $\mathcal{C}_H$ справедлива оценка

$$R_s(\mathcal{C}_H) \geq R_s(\mathcal{S}) = \operatorname{th}\frac{\pi}{4} \approx 0.65$$

радиуса звездообразности. Эта оценка является наилучшей из известных в настоящий момент. Другие оценки и точные значения радиусов выпуклости и звездообразности для различных классов однолистных конформных и гармонических отображений можно найти в работах [36], [32], [31], [40], [42], [26], [47].

3.2. Радиус звездообразности гармонических отображений

Пусть $f = h + \overline{g}$ гармоническая в $\mathbb{D}$ комплексная функция; введем обозначение $T_r := \{|z| = r\}$. Как показано в [30], выпуклость образа окружности $f(T_r)$ эквивалентна выполнению следующего аналитического условия:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial\theta}\right\} \geq 0 \tag{3.6}$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi)$. Это условие можно переписать в терминах голоморфных компонент h и g в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z^2h''(z) + \overline{z}^2\overline{g''(z)}}{zh'(z) - \overline{z}\overline{g'(z)}} + \frac{zh'(z) + \overline{z}\overline{g'(z)}}{zh'(z) - \overline{z}\overline{g'(z)}}\right\} \geq 0, \tag{3.7}$$

где $z = re^{i\theta}$. В частности, если f — голоморфная функция, то есть $g \equiv 0$, то неравенство (3.7) обращается в хорошо известное условие выпуклости (см. [3])

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0. \tag{3.8}$$

Звездообразность образа $f(T_r)$ окружности T_r эквивалентна (см. [30]) аналитическому условию

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{f(re^{i\theta})\right\} \geq 0 \tag{3.9}$$

для всех $\theta \in [0, 2\pi)$. Это условие в терминах голоморфных компонент h и g записывается в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z) - \overline{z}\overline{g'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right\} \geq 0, \qquad \text{или} \qquad \left|\arg\left\{\frac{zh'(z) - \overline{z}\overline{g'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right\}\right| \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.10}$$

В том случае, когда f — голоморфная функция ($g \equiv 0$), получаем известные условия (см. [3])

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq 0, \qquad \text{или} \qquad \left|\arg\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}\right| \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.11}$$

Классическая теорема Александера гласит, что образ области U при отображении голоморфной функцией f является выпуклым тогда и только тогда, когда ее образ при отображении функцией $zf'(z)$ является звездообразной областью. Этот результат обобщается на случай гармонических функций f (см. схожую формулировку в [30, стр. 108]).

Лемма 3.2. *Пусть $f = h + \overline{g}$ и $F = H + \overline{G}$ — две комплекснозначные гармонические функции, голоморфные компоненты которых связаны соотношениями*

$$zH'(z) = h(z), \qquad zG'(z) = -g(z). \tag{3.12}$$

Тогда образ $f(T_r)$ окружности T_r является звездообразной кривой в том и лишь в том случае, когда $F(T_r)$ — выпуклая кривая.

Доказательство. В самом деле, дифференцируя соотношения (3.12), находим

$$h'(z) = zH''(z) + H'(z), \qquad -g'(z) = zG''(z) + G'(z).$$

Подставляя это вместе с (3.12) в первую формулу из (3.10), получаем

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zh'(z) - \overline{z}\overline{g'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{z^2H''(z) + \overline{z}^2\overline{G''(z)}}{zH'(z) - \overline{z}\overline{G'(z)}} + \frac{zH'(z) + \overline{z}\overline{G'(z)}}{zH'(z) - \overline{z}\overline{G'(z)}}\right\}.$$

Неотрицательность левой части этого равенства эквивалентна звездообразности кривой $f(T_r)$ (см. формулу (3.10)), а неотрицательность правой — выпуклости кривой $F(T_r)$ (см. (3.7)). Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Определим для функции f соответствующую ей функцию F согласно (3.12) с дополнительными условиями нормировки $H(0) = G(0) = 0$. Поскольку $f \in \mathcal{C}_H$, то при $0 < |z| < 1$ имеет место неравенство $|h(z)| > |g(z)|$ (см. [41]). Но тогда для якобиана $J_F(z)$ функции F справедливо

$$J_F(z) = |H'(z)|^2 - |G'(z)|^2 = \frac{|h(z)|^2 - |g(z)|^2}{|z|^2} > 0,$$

что означает локальную однолистность отображения F. По лемме 3.2 звездообразность кривой $f(T_r)$ равносильна выпуклости кривой $F(T_r)$. Но поскольку функция F локально однолистна в $\mathbb{D}$, то, согласно теореме **??**, область $F(D_r)$ и соответствующая кривая $F(T_r)$ являются выпуклыми в том и только в том случае, когда при любом выборе $\beta \in [0, 2\pi)$ голоморфная функция $\Phi_\beta(z) = H(z) - e^{i\beta}G(z)$ осуществляет конформное отображение круга D_r на выпуклую в горизонтальном направлении область.

Будем считать сначала, что кривая $\Phi_\beta(T_r)$ не содержит прямолинейных горизонтальных участков. Рассмотрим функцию $V(\theta) := \operatorname{Im}\{\Phi_\beta(re^{i\theta})\}$, непостоянную и обладающую периодом 2π. Не нарушая общности, будем считать, что она возрастает в окрестности точек $\theta = \pm\pi$. Покажем, что выпуклость образа $\Phi_\beta(D_r)$ в горизонтальном направлении равносильна тому, что $V(\theta)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ ровно по одной точке строгого локального максимума и минимума.

Пусть $\Phi_\beta(D_r)$ выпукла в горизонтальном направлении. Предположим, что функция $V(\theta)$ имеет две различные точки θ_1 и θ_2 строгого локального максимума и $V(\theta_1) \le V(\theta_2)$. Тогда между ними имеется точка $\theta_{\min}$ такая, что $V(\theta_{\min}) < V(\theta_1)$. В окрестности точки θ_1 найдутся две различные точки θ_1' и θ_1'', где $\theta_1' < \theta_1'' < \theta_{\min}$, такие, что $V(\theta_{\min}) < V(\theta_1') = V(\theta_1'') < V(\theta_1) \le V(\theta_2)$. Но тогда непрерывная на отрезке $[\theta_1'', \theta_2]$ функция $V(\theta)$ принимает на нем все свои промежуточные значения от $V(\theta_{\min})$ до $V(\theta_2)$, в том числе существует точка $\theta_2' > \theta_1''$ такая, что $V(\theta_2') = V(\theta_1') = V(\theta_1'')$, а это противоречит выпуклости кривой $F(T_r)$ в горизонтальном направлении. Для случая локального минимума рассуждения аналогичны.

Пусть теперь, обратно, известно, что функция $V(\theta)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ по одной точке строгого локального максимума и минимума $\theta_{\max}$ и $\theta_{\min}$ соответственно. Поскольку $V(\theta)$ возрастает в окрестности точек $\pm\pi$, то $\theta_{\max} < \theta_{\min}$. На интервале $(-\pi, \pi)$ найдется точка θ_0, такая, что $V(\theta_0) = V(-\pi) = V(\pi)$, причем $\theta_{\max} < \theta_0 < \theta_{\min}$.

Покажем, что на отрезке $[-\pi, \theta_0]$ функция $V(\theta)$ принимает любое свое значение не более, чем два раза. В самом деле, если какое-либо значение принимается, например, в трех различных точках $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$, то на отрезке $[\theta_1, \theta_3]$ имеется точка строгого локального минимума, что противоречит тому, что на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ есть только одна точка минимума. Аналогичные рассуждения применимы к отрезку $[\theta_0, \pi]$.

Поскольку множества значений, принимаемых функцией $V(\theta)$ на интервалах $(-\pi, \theta_0)$ и (θ_0, π), не пересекаются, то и на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $V(\theta)$ принимает любое свое значение не более, чем два раза, что означает, что кривая $\Phi_\beta(D_r)$ выпукла в горизонтальном направлении.

Таким образом, существуют только два значения $\theta = \theta_{\min}$ и $\theta = \theta_{\max}$, при которых

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\,\left\{\Phi_\beta(re^{i\theta})\right\} = 0$$

и при этом $V'(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\,\left\{\Phi_\beta(re^{i\theta})\right\}$ меняет знак при переходе через точки $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$. Действительно, если найдется еще какое-либо значение θ', при котором $V'(\theta') = 0$, то при переходе через это значение функция $V'(\theta)$ не меняет знака, иначе θ' — точка экстремума.

Используя соотношения (3.12), получим для $z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{Im}\,\{\Phi_\beta(z)\} = \mathrm{Im}\left\{iz\Phi'_\beta(z)\right\} = \mathrm{Re}\,\left\{z\Phi'_\beta(z)\right\} = \\ = \mathrm{Re}\,\left\{z(H'(z) - e^{i\beta}G'(z))\right\} = \mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(z)\}\,.\end{aligned}$$

Из вышесказанного следует, что только при $\theta = \theta_{\min}$ и $\theta = \theta_{\max}$ будет

$$\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\} = 0,$$

причем величина $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\}$ имеет разные знаки справа и слева от $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$. Для остальных точек θ, где $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\} = 0$, величина $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\}$ не меняет знак при переходе через них.

Это значит, что мнимая ось пересекает не внешним образом кривую $\varphi_\beta(T_r)$ ровно в двух точках $w_{\max} = \varphi_\beta(re^{i\theta_{\max}})$ и $w_{\min} = \varphi_\beta(re^{i\theta_{\min}})$; всем остальным точкам пересечения будут соответствовать значения θ, при переходе через которые $\mathrm{Re}\,\{\varphi_\beta(re^{i\theta})\}$ не меняет знак, то есть кривая $\varphi_\beta(T_r)$ пересекает мнимую в точке $\varphi_\beta(re^{i\theta})$ внешним образом. Таким образом, $\varphi_\beta(T_r)$ звездообразна в вертикальном направлении.

Если же кривая $\Phi_\beta(T_r)$ содержит прямолинейные горизонтальные участки, то им соответствуют прямолинейные вертикальные участки кривой $\varphi_\beta(T_r)$, что не нарушает звездообразности последней в вертикальном направлении. Теорема доказана.

Следствие 3.3. *Для класса $\mathcal{C}_H$ справедлива оценка*

$$R_s(\mathcal{C}_H) \geq \mathrm{th}\,\frac{\pi}{4} \approx 0.65$$

радиуса звездообразности.

Доказательство. Пусть сначала функция $f = h+\overline{g} \in \mathcal{C}_H^0$. Тогда, согласно теореме 3.1, при любом $\beta \in [0, 2\pi)$ функция $\varphi_\beta(z) = h(z) + e^{i\beta}g(z)$ конформна во всем единичном круге $\mathbb{D}$. Кроме того, из условий нормировки (3.2) для класса $\mathcal{S}_H$ и дополнительного условия $g'(0) = 0$, определяющего его подкласс $\mathcal{S}_H^0$, следует, что $\varphi_\beta \in \mathcal{S}$. Но для класса $\mathcal{S}$ конформных отображений, как известно (см. выше), радиус звездообразности равен

$$R_s(\mathcal{S}) = \operatorname{th}\frac{\pi}{4} \approx 0.65.$$

Поэтому при любом $r \leq R_s(\mathcal{S})$ область $\varphi_\beta(D_r)$ является звездообразной (во всех направлениях, в том числе и в вертикальном). Но тогда, согласно теореме 3.1, область $f(D_r)$ также звездообразна. Ввиду связи (3.5) между функциями классов $\mathcal{C}_H$ и $\mathcal{C}_H^0$, область $f(D_r)$ будет звездообразной и для произвольной функции $f \in \mathcal{C}_H$. Следствие доказано. $\square$

3.3. Отображения круга решениями систем

В предыдущей главе были получены формулы интеграла Пуассона для сильно эллиптических операторов $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$. Эти формулы в общем случае содержат ряд по степеням параметров τ и σ. Однако в частных случаях, когда один из этих параметров обращается в нуль, показано, что интеграл Пуассона для соответствующих систем $\mathcal{L}_{\tau,0}$ и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$ записывается в простом виде, который получается аналитическим суммированием ряда по соответствующему параметру. Далее мы рассмотрим эти два оператора и для каждого из них исследуем граничное поведение интеграла Пуассона, когда граничная функция имеет скачок в некоторых точках. Кроме того, будут построены отображения единичного круга функциями, заданными в виде интеграла Пуассона для операторов $\mathcal{L}_{\tau,0}$ и $\mathcal{L}_{0,\sigma}$ с кусочно-постоянной граничной функцией.

Обозначим через $\Lambda_{\theta,\alpha}$ прямую, проходящую через точку $e^{i\theta}$ и составляющую угол α с касательной в этой точке к окружности $\mathbb{T}$. При этом α отсчитывается в отрицательном направлении относительно стандартной ориентации репера Френе в точке $e^{i\theta}$.

Теорема 3.4. *Пусть функция f задана интегралом Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{\tau,0}$, $\tau \in [0, 1)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|^2)(e^{it}+\tau e^{-it})}{(e^{it}-z)_\tau(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})}\varphi(t)dt, \tag{3.13}$$

где $\varphi(t)$ кусочно-непрерывная функция с конечным числом точек разрыва. Тогда для любого $\alpha \in (0, \pi)$ предел функции f при стремлении точки z к

$e^{i\theta}$ *вдоль* $\Lambda_{\theta,\alpha}$ *равен*

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in\Lambda_{\theta,\alpha}}} f(z) = p(\theta,\alpha)\varphi_+(\theta) + (1-p(\theta,\alpha))\varphi_-(\theta), \tag{3.14}$$

где $\varphi_\pm(\theta) = \lim\limits_{t\to\theta\pm}\varphi(t)$ *и*

$$p(\theta,\alpha) = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\tau e^{-2i\theta}}{1+\tau e^{2i(\alpha-\theta)}}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Нам будет удобно использовать формулу (3.13) в эквивалентном виде (см. формулу (2.21) при $\sigma = 0$)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\varphi(t)d\log\frac{(e^{it}-z)_\tau}{(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})}. \tag{3.16}$$

При $z\to e^{i\theta}$ и достаточно малом угле $\delta>0$ имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\varphi(t)d\log\frac{(e^{it}-z)_\tau}{(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})} + o(1) =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\theta-\delta}^{\theta} + \int_{\theta}^{\theta+\delta}\right)\varphi(t)d\log\frac{(e^{it}-z)_\tau}{(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})} + o(1).$$

Воспользовавшись обобщенной теоремой о среднем для каждого из двух записанных интегралов, а также тем обстоятельством, что при $z\to e^{i\theta}$ ядро Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{\tau,0}$ обращается в нуль при всех $t\neq\theta$, получим

$$f(z) + o(1) =$$
$$= \frac{\varphi(t')}{2\pi i}\log\frac{(e^{it}-z)_\tau}{(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})}\bigg|_{t=\theta-\pi}^{t=\theta} + \frac{\varphi(t'')}{2\pi i}\log\frac{(e^{it}-z)_\tau}{(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})}\bigg|_{t=\theta}^{t=\theta+\pi}, \tag{3.17}$$

где $t'\in(\theta-\delta,\theta)$, $t''\in(\theta,\theta+\delta)$. Отметим, что сумма множителей перед $\varphi(t')$ и $\varphi(t'')$ равна единице, поэтому достаточно вычислить лишь один из них. С учетом того, что при $z\in\Lambda_{\theta,\alpha}$ будет $\arg(e^{i\theta}-z) = \frac{\pi}{2}+\theta-\alpha$, элементарными вычислениями получаем

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in\Lambda_{\alpha}}}\frac{1}{2\pi i}\log\frac{(e^{it}-z)_\tau}{(e^{-it}-\overline{z})(e^{it}+\tau\overline{z})}\bigg|_{t=\theta}^{t=\theta+\pi} =$$
$$= \lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in\Lambda_{\alpha}}}\frac{1}{2\pi i}\log\frac{e^{2i\arg(e^{it}-z)}-\tau}{e^{it}+\tau\overline{z}}\bigg|_{t=\theta}^{t=\theta+\pi} = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\tau e^{-2i\theta}}{1+\tau e^{2i(\alpha-\theta)}}. \tag{3.18}$$

Остается заметить, что при $\delta \to 0+$ будет $\varphi(t') \to \varphi_-(\theta)$ и $\varphi(t'') \to \varphi_+(\theta)$. Вместе с (3.17), (3.18) это приводит к результату (3.14), (3.15). Теорема доказана. $\square$

Построим отображение единичного круга $\mathbb{T}$ на область с n углами при помощи функции f, заданной интегралом Пуассона (3.13) от кусочно-постоянной функции

$$\varphi(t) = e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad t \in \left(\frac{2k-1}{n}, \frac{2k+1}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3.19}$$

Эта функция φ отображает интервалы $\left(\frac{2k-1}{n}, \frac{2k+1}{n}\right)$ в соответствующие точки $e^{2\pi k i/n}$, лежащие на единичной окружности и являющиеся корнями n–ой степени из единицы.

Подставив в (3.16) граничную функцию (3.19), получим

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} \log \frac{(e^{it} - z)_\tau}{(e^{-it} - \overline{z})(e^{it} + \tau \overline{z})} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{it} \log \left| \frac{(e^{it} - z)_\tau}{(e^{-it} - \overline{z})(e^{it} + \tau \overline{z})} \right| \Bigg|_{t=(2k-1)\pi/n} + \\ &\qquad + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi k i}{n}} \arg \frac{(e^{it} - z)_\tau}{(e^{-it} - \overline{z})(e^{it} + \tau \overline{z})} \Bigg|_{t=(2k-1)\pi/n}^{t=(2k+1)\pi/n}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Эта формула задает отображение внутренности единичного круга. Что касается его границы, то она отобразится в замкнутую кривую, состоящую из точек $\theta_k = (2k-1)\pi/n$ и последовательно соединящих эти точки открытых дуг $\mathit{\Gamma}_{\theta_k}$, где

$$\mathit{\Gamma}_\theta = \left\{ z(\alpha) = p(\theta, \alpha)\varphi_+(\theta) + (1 - p(\theta, \alpha))\varphi_-(\theta), \quad \alpha \in (0, \pi) \right\}. \tag{3.21}$$

На рис. 3.1 показаны образы концентрических окружностей с центром в нуле и радиальных отрезков при отображении единичного круга функцией (3.20) для $n = 3$ и значений параметра $\tau = 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$. При $\tau = 0$ получаем хорошо известное гармоническое отображение на правильный треугольник. При изменении параметра τ наблюдается деформация этого треугольника. Отметим, что все радиальные сегменты, кроме сегментов $\{re^{i\theta} \colon r \in [0, 1), \theta = \theta_k\}$, $k = 0, \ldots, n-1$, отображаются в кривые с концевыми точками в вершинах $e^{2\pi k i/n}$ — в соответствии с граничным отображением, заданным кусочно–постоянной функцией $\varphi(t)$. Заметим также, что только при $\tau = 0$ функция (3.20) сохраняет на месте начало координат.

Теорема 3.5. *Пусть функция f задана интегралом Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{0,\sigma}$, $\sigma \in [0,1)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(1-|z|^2)\left(\frac{1}{|e^{it}-z|^2}\mathcal{I} + \sigma\frac{2-e^{-it}z}{(e^{it}-z)^2}\mathcal{C}\right)\varphi(t)dt, \tag{3.22}$$

где $\varphi(t)$ — кусочно-непрерывная функция с конечным числом точек разрыва. Тогда

$$\lim_{\substack{z\to e^{i\theta}\\ z\in\Lambda_{\theta,\alpha}}} f(z) = p(\theta,\alpha)\varphi_+(\theta) + (\mathcal{I} - p(\theta,\alpha))\varphi_-(\theta), \tag{3.23}$$

где

$$p(\theta,\alpha) = \frac{\alpha}{\pi}\mathcal{I} + \frac{\sigma}{2\pi i}\left(e^{-2i\theta} - e^{2i(\alpha-\theta)}\right)\mathcal{C}. \tag{3.24}$$

Этот результат получается тем же способом, что и результат теоремы 3.13, поэтому не будем останавливаться на доказательстве.

Запишем интеграл Пуассона для оператора $\mathcal{L}_{0,\sigma}$ в виде (см. формулу (2.21) при $\tau = 0$)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\varphi(t)d\log\frac{e^{it}-z}{1-e^{it}\overline{z}} - \sigma\overline{\varphi(t)}d\left(\frac{e^{-it}-\overline{z}}{e^{it}-z} + e^{-it}\overline{z}\right).$$

Подставив сюда граничную функцию (3.19), получим

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi ki}{n}}\arg\frac{e^{i\theta_{k+1}}-z}{e^{i\theta_k}-z} + \frac{\sigma(1-|z|^2)}{\pi i}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{e^{-2i\theta_k}}{e^{i\theta_k}-z}. \tag{3.25}$$

При этом окружность $\mathbb{T}$ снова отображается в замкнутую кривую $\cup_{\theta\in\mathbb{T}}\mathit{\Gamma}_\theta$, где $\mathit{\Gamma}_\theta$ определяется по формуле (3.21), а $p(\theta,\alpha)$ — с помощью (3.24).

На рис. 3.2 продемонстрированы отображения единичного круга функцией (3.25) для $n = 4$ при некоторых значениях параметра σ. Отметим, что при любых значениях σ функция (3.25) сохраняет начало координат на месте.

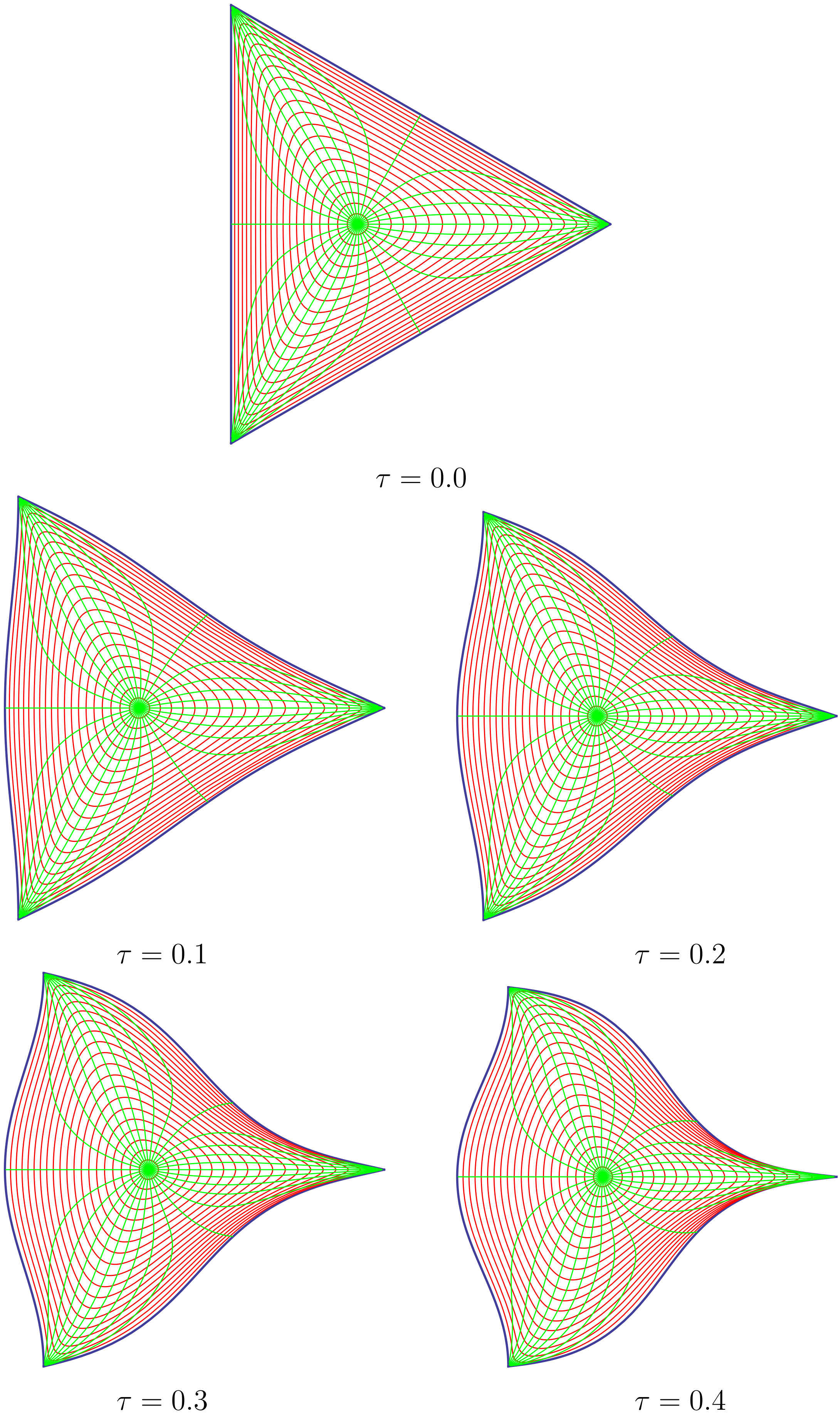

Рис. 3.1: $\mathcal{L}_{\tau,0}$-отображение единичного круга на треугольную область

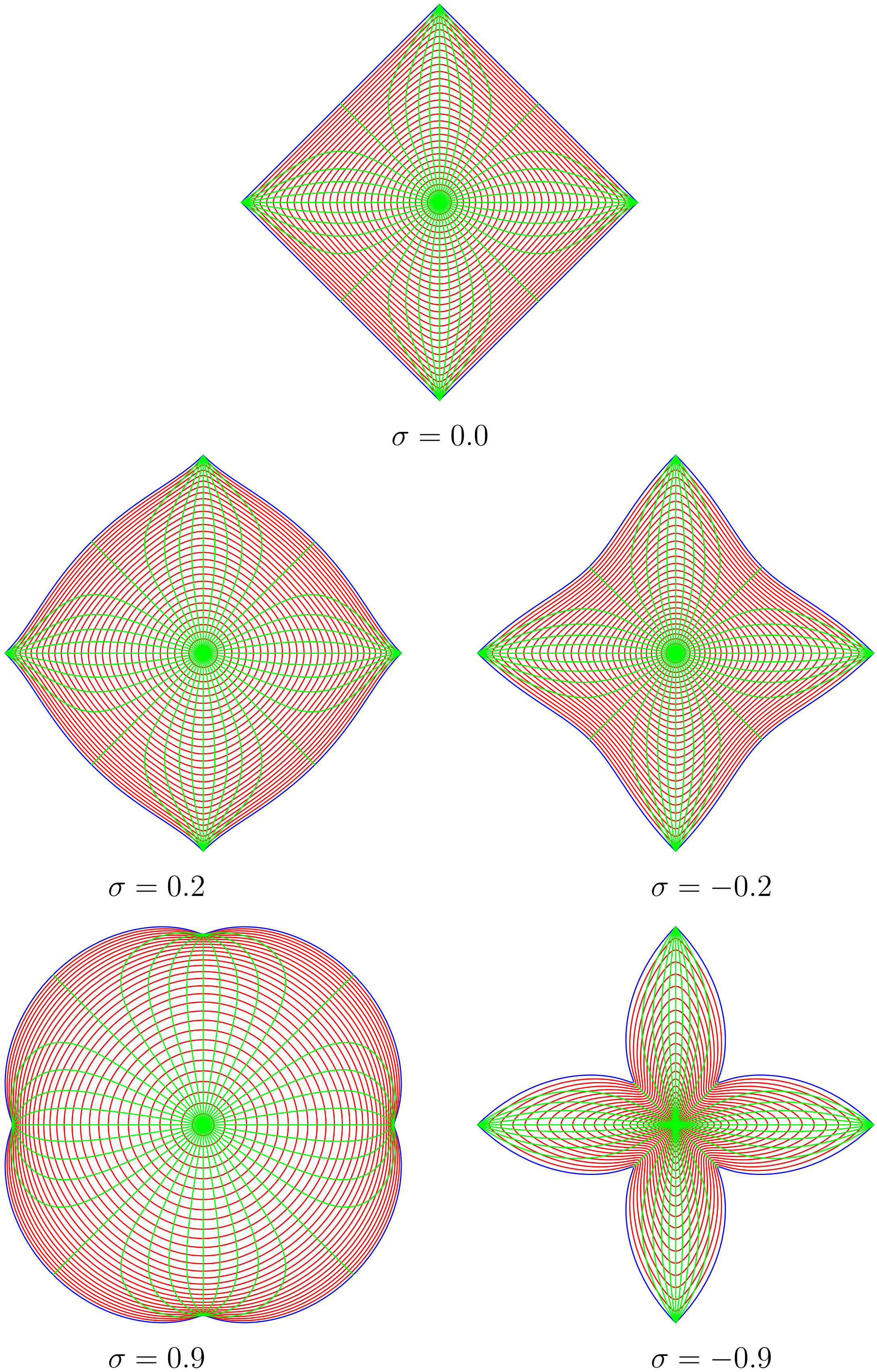

Рис. 3.2: $\mathcal{L}_{0,\sigma}$-отображение единичного круга на четырехугольную область

Основные выводы и результаты работы

К числу основных полученных в работе результатов можно отнести следующие.

1. Получен критерий C^1-слабой аппроксимации функций полиномиальными решениями общих однородных эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами на компактах в плоскости.

2. Предложен новый метод решения задачи Дирихле для однородных сильно эллиптических систем второго порядка, основанный на представлении соответствующего дифференциального оператора в виде возмущения оператора Лапласа по двум малым параметрам. С помощью этого метода для таких систем получены новые формулы для интеграла Пуассона и функции Грина в круге.

3. Установлено, что ограниченные односвязные области, границы которых содержат аналитические дуги, не регулярны относительно задачи Дирихле для однородных систем второго порядка, не являющихся сильно эллиптическими: в каждой такой области существует неразрешимая задача Дирихле для любой такой системы.

4. Для класса нормированных гармонических отображений единичного круга на выпуклые области получен критерий звездообразности образа круга и найдена новая (наилучшая из известных на данный момент) нижняя оценка радиуса звездообразности.

5. Исследованы отображения круга решениями сильно эллиптических систем, представленными в виде интеграла типа Пуассона от кусочно-непрерывной граничной функции, получены формулы, описывающие граничное поведение таких функций.

Литература

[1] *Бицадзе А.В.* О единственности задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. №6(28). С. 211–212.

[2] *Вишик М.И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1951. Т. 29. №3. С. 615–676.

[3] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука. 1966.

[4] *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир. 1966.

[5] *Зайцев А. Б.* О равномерной приближаемости функций полиномами специальных классов на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Матем. заметки. 2002. Т. 71. №1. С. 75–87.

[6] *Зайцев А. Б.* О равномерной аппроксимации полиномиальными решениями эллиптических уравнений второго порядка и о соответствующей задаче Дирихле // Комплексный анализ и приложения. Сборник статей. Тр. МИАН. 2006. Т. 253. С. 67–80.

[7] *Зайцев А.Б.* Об отображениях решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. заметки. 2014. Т. 95. №5. С. 718–733.

[8] *Зайцев А.Б.* О взаимной однозначности решений эллиптических уравнений второго порядка в единичном круге на плоскости // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 434. С. 91–100.

[9] *Кармона Дж.Дж., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю.* О равномерной аппроксимации полианалитическими многочленами и задаче Дирихле для бианалитических функций // Матем. сб. 2002. Т. 193. №10. С. 75–98.

[10] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука. 1987.

[11] *Мазалов М.Я.* Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений // Матем. сб. 2008. Т. 199. №1. С. 15–46.

[12] *Мазалов М.Я.* О задаче Дирихле для полианалитических функций // Матем. сб. 2009. Т. 200. №10. С. 59–80.

[13] *Мазалов М. Я., Парамонов П.В.* Критерии C^m–приближаемости бианалитическими функциями на плоских компактах // Матем. сб. 2015. Т. 206. №2. С. 77–118.

[14] *Мазалов М. Я., Парамонов П.В., Федоровский К.Ю.* Условия C^m-приближаемости функций решениями эллиптических уравнений // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67. №6(408). С. 53–100.

[15] *Парамонов П.В.* О гармонических аппроксимациях в C^1-норме // Матем. сб. 1990. Т. 181. №10. С. 1341–1365.

[16] *Парамонов П.В.* О приближениях гармоническими полиномами в C^1-норме на компактах в $\mathbf{R}^2$ // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. №2. С. 113–124.

[17] *Парамонов П.В.* C^m-приближения гармоническими полиномами на компактных множествах в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 1993. Т. 184. №2. С. 105–128.

[18] *Парамонов П.В., Федоровский К.Ю.* О равномерной и C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{R}^2$ решениями эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. №2. С. 123–144.

[19] *Петровский И.Г.* Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными // Матем. сб. 1939. Т. 5. С. 3–70.

[20] *Петровский И.Г.* О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1946. Т. 1. №3–4(13–14). С. 44–70.

[21] *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз. 1961.

[22] *Солдатов А.П.* О первой и второй краевых задач для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. №5. С. 674–686.

[23] *Солдатов А.П.* К теории анизотропной плоской упругости // Соврем. математика. Фундамент. направления. 2016. Т 60. С. 114–163.

[24] *Тарханов Н.Н.* Равномерная аппроксимация решениями эллиптических систем // Матем. сб. 1987. Т. 133. №3. С. 356–381.

[25] *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного. М.: Наука. 1985.

[26] *Эйлангoли, О.Р.* Об оценке радиуса звездности в классах гармонических отображений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. №17. С. 133–140.

[27] *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.

[28] *Carmona J.J.* Mergelyan's approximation theorem for rational modules // J. Approx. Theory. 1985. V. 44. №2. P. 113–126.

[29] *Ding Shia-Kuai, Wang Kan-Ting, Ma Ju-Nien, Shun Chia-Lo, Chang Tong.* On the definition of the second order elliptic system of partial differential equations with constant coefficients // Acta Math. Sinica. 1960. V. 10. P. 276–287; English translation: Chinese Math. 1960. V. 1. P. 288–299.

[30] *Duren P.* Harmonic mappings in the plane. Cambridge Tracts in Mathematics, 156. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2004.

[31] *Goodman A.W., Saff E.B.* On univalent functions convex in one direction // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 73. P. 183—187.

[32] *Grunsky G.M.* Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung // Jahresber. deutsch. Math. Vereining. 1934. V. 43. P. 140–142.

[33] *Hua Loo-Keng, Wu Ci-Quian, Lin Wei.* On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem of the elliptic system of differential equations // Acta Math. Sinica. 1965. №15(2).

[34] *Hua Loo Keng, Lin Wei, Wu Ci-Quian.* Second-order systems of partial differential equations in the plane. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1985.

[35] *Lebesgue H.* Sur le probleme de Dirichlet // Rend. circ. mat. Palern. 1907. V. 24. P. 371–402.

[36] *Nevanlinna R.* Über die schlichten Abbildungen der Einheitskreises // Oversckt av Finska Vet. Soc. Forth. (A). 1919–1920. V. 62. P. 1–14.

[37] *O'Farrel A.G.* Rational approximation and weak analyticity. II // Math. Ann. 1988. V. 281. №1. P. 169–176.

[38] *Paramonov P.V., Verdera J.* Approximation by solutions of elliptic equations on closed subsets of Euclidean space // Math. Scand. 1994. V. 74. №2. P. 249–259.

[39] *Pommerenke Ch.* Boundary behavior of conformal maps. Springer–Verlag Berlin Heidelberg. 1992.

[40] *Ruscheweyh St., Salinas L.* On the preservation of direction-convexity and the Goodman–Saff conjecture // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. 1989. V. 14. P. 63–73.

[41] *Clunie J.G., Sheil-Small T.* Harmonic univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. 1984. №9. P. 3–25.

[42] *Sheil-Small T.* Constants for planar harmonic mappings // J. London Math. Soc. 1990. V. 42. P. 237–248.

[43] *Somigliana C.* Sui sisteme simmetrici di equazioni a derivate parziali // Ann. Mat. Pure ed Appl., II. 1894. V. 22. P. 143–156.

[44] *Verchota G.C., Vogel A.L.* Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. №11. P. 4501–4535.

[45] *Verdera J.* C^m-approximation by solutions of elliptic equations and Calderón–Zygmund operators // Duke Math. J. 1987. V. 55. №1. P. 157–187.

[46] *Verdera J.* On the uniform approximation problem for the square of the Cauchy–Riemann operator // Pacific J. Math. 1993. V. 159. №2. P. 379–396.

[47] *Kalaj D., Ponnusamy S., Vuorinen M.* Radius of close-to-convexity and fully starlikeness of harmonic mappings. // Complex variables and elliptic equations. 2014. V. 59. №4. P. 539–552.

[48] *Walsh J.L.* The approximation of harmonic functions by polynomials and by harmonic rational funtions // Bull. Amer. Math. Soc. 1929. V. 35. P. 499–544.

Работы автора по теме диссертации

[1А] *Багапш А.О.* Интеграл Пуассона и функция Грина для одной сильно эллиптической системы уравнений в круге и эллипсе // Журнал вычислит. мат. и матем. физики. 2016. Т. 56. №12. С. 2065–2072.

[2А] *Багапш А.О.* О радиусе звездообразности гармонических отображений // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 456. С. 16–24.

[3А] *Багапш А.О.* Функция Грина и интеграл Пуассона в круге для сильно эллиптических систем с постоянными коэффициентами // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. 2017. №6. С. 4–18.

[4А] *Багапш А.О., Федоровский К.Ю.* C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в $\mathbb{R}^2$ // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 42–57.