САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Романов Роман Владимирович

Вопросы спектральной теории абстрактных и дифференциальных операторов для неядерных возмущений и проблема порядка

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2019

Оглавление

Обзор основных результатов

В диссертации исследуется существенный спектр операторов в ситуациях, находящихся за пределами ядерной теории возмущений. Исследуемые задачи естественно можно классифицировать в зависимости от того, с какой стороны ядерного класса $\mathfrak{S}^p$ с $p = 1$ они находятся: $p < 1$ или $p > 1$. Разумеется, ядерная теория применима к спектральным задачам, приводящим к операторам из классов $\mathfrak{S}^p$ с $p < 1$, но ее выводы слишком грубы, чтобы описать поведение системы (например, формула Крейна–де Бранжа в теории неоднородных струн в случае чисто сингулярной нагрузки говорит лишь, что считающая функция спектра $N(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, что, разумеется, не дает никакого представления о реальном поведении собственных значений). В этом смысле мы говорим о задачах с $p < 1$ как находящихся за пределами ядерной теории. В ситуации $p > 1$ мы исследуем два вопроса – устойчивость абсолютно непрерывного спектра при несамосопряженных неядерных возмущениях самосопряженных операторов и характеризация наиболее общих одномерных дифференциальных операторов с единственной точкой накопления спектра в терминах идеалов компактных операторов. Первый из этих вопросов имеет абстрактную и прикладную стороны. Абстрактная сторона состоит в выяснении соотношения различных определений абсолютно непрерывного (а. н.) подпространства для неядерных возмущений, а прикладная – в исследовании устойчивости а. н. спектра при неядерных возмущениях дифференциальных операторов и анализе структуры множества спектральных особенностей в ситуациях, когда а. н. спектр сохраняется. Что касается второго вопроса, то он изучается для самосопряженных сингулярных канонических систем на полуоси. В задачах с $p < 1$ мы исследуем вопрос о спектральной асимптотике для общих канонических систем с вырожденным гамильтонианом, уделяя особое внимание важнейшему подклассу таких систем – матрицам Якоби в случае предельного круга.

Перейдем к детальному обзору результатов диссертации.

Основные результаты работы в абстрактной теории операторов состоят в решении двух проблем, касающихся а. н. подпространства несамосопряженных операторов. Фундаментальная трудность, связанная с определением такого подпространства в несамосопряженном случае состоит в отсутствии спектральной теоремы и, соответственно, спектральной меры для таких операторов. Более того, как было показано в работе Марченко [1], даже в весьма специальном случае одномерных операторов Шрёдингера с комплексным потенциалом спектральную меру можно определить лишь в очень обобщенном смысле как функционал над некоторым пространством целых функций.

К середине 80-х годов было известно два определения а. н. подпространства абстрактных несамосопряженных операторов. Первое, сильное, определение мотивировано функциональной моделью Секефальви-Надя–Фояша для диссипативных операторов. В рамках этой модели выделяется естественное инвариантное подпространство оператора, такое что часть оператора в этом подпространстве квазиподобна остаточной части его минимальной самосопряженной дилатации. В случае, когда характеристическая функция оператора ограниченно обратима, это квазиподобие в действительности будет подобием. Поскольку, согласно фундаментальной теореме Секефальви-Надя, минимальная дилатация вполне несамосопряженного оператора абсолютно непрерывна, такое определение весьма естественно. Оно было предложено Л. Сахновичем в [51]. Впоследствии Набоко [43] удалось переформулировать определение в эквивалентных терминах, не использующих функциональную модель. Ключевое свойство а. н. подпространства $H_{\mathrm{ac}}(L)$ несамосопряженного оператора L состоит в том, что действие резольвенты на этом пространстве сплетается с резольвентой некоего а. н. самосопряженного оператора. Более точно, существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}$ и самосопряженный а. н. оператор A в $\mathcal{H}$, такие что

$$(L-z)^{-1}P = P(A-z)^{-1},\ z \notin \mathbb{R}, \tag{0.1}$$

где $P\colon \mathcal{H} \to H$ – ограниченный оператор, причем $\operatorname{Ran} P$ плотен в $H_{\mathrm{ac}}(L)$. В диссипативном случае можно показать, что, если оператор L вполне несамосопряжен, то подпространство $H_{\mathrm{ac}}(L)$ совпадает с минимальным инвариантным подпространством оператора, содержащим все инвариантные подпространства X, такие что сужение $L|_X$ подобно какому-либо а. н. самосопряженному оператору.

Другое определение а. н. подпространства получается при попытке избавить определение в самосопряженном случае от использования спектральной теоремы. Поскольку преобразование Коши от спектральной меры совпадает с матричным элементом резольвенты оператора, естественно формулировать определение в терминах граничного поведения резольвенты. Один из способов сделать это состоит в использовании теоремы братьев Рисс, которая говорит, что мера, преобразование Коши которой принадлежит классу Харди, абсолютно непрерывна. Такое определение было предложено в первой половине 80-х годов А. Тихоновым [56]. В соответствии с этим определением, абсолютно непрерывное подпространство $H^w_{\mathrm{ac}}(L)$ несамосопряженного оператора L – это замыкание множества векторов, на которых матричный элемент резольвенты с любым другим вектором из пространства попадает в класс Харди. Отметим привлекательную черту слабого определения, состоящую в том, что оно очевидным образом инвариантно относительно подобия. В частности, пространство $H^w_{\mathrm{ac}}(L)$ содержит все инвариантные подпространства X оператора L, такие что сужение $L|_X$ подобно какому-либо а. н. самосопряженному оператору (не только в диссипативном случае).

Наличие двух определений ставит вопрос об их соотношении. Из сплетающего свойства (0.1) немедленно вытекает, что $H_{\mathrm{ac}}(L) \subset H^w_{\mathrm{ac}}(L)$ для любого оператора L. "Положительная" сторона вопроса (достаточные условия совпадения пространств) изучалась в работах Тихонова [56, 57] и Рыжова [48]. Наиболее общий результат, полученный ими, состоит в том, что $H_{\mathrm{ac}}(L) = H^w_{\mathrm{ac}}(L)$, если резольвента имеет слабые граничные значения почти всюду. В частности, они совпадают, если оператор представляет собой ядерное возмущение самосопряженного. Другой источник существования слабых пределов резольвенты – гладкая теория возмущений в смысле Като.

Вопрос о том, могут ли различаться сильное и слабое а. н. подпространства, был открыт даже для компактных возмущений. Не было известно и сохраняется ли сильное абсолютно непрерывное подпространство при подобиях.

Наш первый основной результат – теорема 2 – состоит в том, что сильное и слабое определения перестают быть эквивалентны при сколь угодно малом выходе за пределы класса ядерных возмущений. Наиболее полный результат формулируется в терминах возмущений унитарного оператора и состоит в том, что для любой монотонной последовательности положительных чисел π_n, такой что $\pi_n \notin l^1$, найдется оператор T вида $T = U + S$, где U – абсолютно непрерывный, а сингулярные числа оператора S мажорируются последовательностью π_n, для которого сильное а. н. подпространство тривиально, а слабое совпадает со всем пространством. Более того, оператор T в построенном примере подобен оператору U, и таким образом показано, что сильное определение не инвариантно относительно подобия. Для возмущений самосопряженных операторов соответствующий результат (теорема 1.13) наиболее прозрачно формулируется в терминах шкалы $\mathfrak{S}^p$ компактных операторов.

Вторая изученная нами задача – проблема двойственности спектральных компонент. Исходя из аналогии с самосопряженной теорией, для абстрактного несамосопряженного оператора L в гильбертовом пространстве H со спектром, не имеющим точек накопления вне вещественной оси, естественно определить сингулярное подпространство $H_s(L)$ как подпространство, полученное замыканием линеала векторов u, для которых матричный элемент резольвенты в слабом смысле имеет нулевой скачок почти всюду по мере Лебега, т.е. ($\operatorname{Re} z = k$)

$$\lim_{\operatorname{Im} z \downarrow 0} [((L-z)^{-1} u, v) - ((L-\overline{z})^{-1} u, v)] = 0$$

при $v \in H$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$. Легко понять, что пространство $H_s(L)$ ортогонально слабому а. н. подпространству $H^w_{\mathrm{ac}}(L^*)$ оператора L^*. Такое определение немедленно ставит вопрос о двойственности спектральных компонент, т. е. о том, верно ли, что $H = H^w_{\mathrm{ac}}(L^*) \oplus H_s(L)$. В работе Тихонова [57] было показано, что двойственность имеет место для ядерных возмущений.

Примеров отсутствия двойственности ранее известно не было.

Наш второй основной результат – теорема 3 – пример оператора T того же вида, что и в предыдущей теореме, для которого $H^w_{\mathrm{ac}}(T) \neq H$, но $H_s(T^*)$ – тривиально. Таким образом, проблема двойственности имеет отрицательное решение, и, более того, ядерный класс представляет собой точную границу возмущений, для которых двойственность имеет место.

Построенные нами примеры представляют собой явно заданные возмущения двустороннего сдвига (векторного в случае проблемы двойственности).

Помимо перечисленных примеров, в работе имеются и “позитивные” результаты. Нами установлено (теорема 4), что сильное и слабое а. н. подпространства совпадают в случае диссипативных (сжимающих) возмущений без всяких дополнительных предположений на возмущение, а также что в диссипативном случае слабое определение не зависит от выбора класса Харди для матричных элементов внутри шкалы H^p, $1 < p \leq 2$.

Следующий абстрактный результат работы возник в связи с потребностями спектральной теории несамосопряженных дифференциальных и разностных операторов, которым посвящены главы II и III. Выше уже упоминалась ядерная теория возмущений для абстрактных операторов. Ее основные результаты (существование и полнота волновых операторов, совпадение определений а. н. подпространства) относятся к ситуации, когда невозмущенный оператор – самосопряженный (или унитарный). В общем случае результаты такого рода неизвестны. В лемме 1.21 мы устанавливаем, что если а. н. подпространство диссипативного оператора $\widetilde{D}$ тривиально, то тривиальным будет и а. н. подпространство диссипативного оператора, полученного уменьшением мнимой части $\widetilde{D}$ на ядерный оператор. Отметим, что полученный результат носит локальный характер в следующем смысле. Пусть $\widetilde{S}$ – характеристические функции операторов $\widetilde{D}$ и D, соответственно, и пусть $\Delta = I - S^*S$, $\widetilde{\Delta} = I - \widetilde{S}^*\widetilde{S}$ – функции на вещественной оси, заданные почти всюду через граничные значения соответствующих характеристических функций указанными формулами. Как известно [64], остаточная часть минимальной самосопряженной дилатации диссипативного оператора L унитарно эквивалентна оператору умножения в весовом пространстве вектор-функций $L^2(\mathbb{R}; \Delta_L)$, где $\Delta_L = I - \mathfrak{S}^*\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ – характеристическая функция оператора L. Фактически в лемме 1.21 доказано, что существует множество полной меры на оси, такое что при всех k из этого множества если $\widetilde{\Delta}(k) = 0$, то $\Delta(k) = 0$. В лемме 1.24 мы обобщаем этот результат на случай ядерной разности резольвент.

Дальнейшие результаты работы в области несамосопряженной теории относятся к анализу операторов математической физики с неядерными возмущениями.

Первая группа результатов представляет относится к а. н. спектру операторов математической статистической механики. Важнейшая задача в теории ядерных реакторов – описание эволюции медленных нейтронов в средах с размножением. Нейтроны в этой ситуации представляют собой классические частицы, не взаимодействующие друг с другом, но поглощаемые средой. В процессе поглощения происходит деление ядер и образование вторичных нейтронов. В рамках модельных упрощений считается, что поглощение и размножение характеризуются, во-первых, двумя скалярными функциями на конфигурационном пространстве – локальными сечениями захвата и размножения. Сечение захвата – это средняя доля поглощенных частиц в малом объеме в данной точке пространства, а сечение размножения – среднее число вторичных частиц, возникающих в единичном акте поглощения. Направление движения вторичных частиц может зависеть от направления скорости поглощенной частицы. Соответственно, размножение характеризуется еще одной функцией, зависящей от двух переменных и описывающей угловое распределение вторичных частиц, называемой интегралом столкновений.

Функция распределения нейтронов в такой ситуации подчиняется интегро-дифференциальному уравнению, известному как линейное уравнение переноса (или Больцмана). Особый интерес представляет случай, когда сечение захвата постоянно[1], сечение размножения зависит лишь от одной координаты в конфигурационном пространстве, и можно пользоваться односкоростным приближением. В этих условиях уравнение переноса имеет следующий вид. Пусть $n = n_t(x, \mu)$ – функция распределения нейтронов по координатам $x \in \mathbb{R}$ и направлениям импульсов, заданных проекцией $\mu \in [-1, 1]$ скорости на направление x, $t \in \mathbb{R}$ – время, $c(x)$ – сечение размножения, $K(\mu, \mu')$ – интеграл столкновений, т. е. доля вторичных частиц, летящих в направлении μ', образовавшихся в результате поглощения частицы, летевшей в направлении μ. Задача состоит в описании поведения решений задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} n_t(x, \mu) = -\mu \dfrac{\partial}{\partial x} n_t(x, \mu) + c(x) \displaystyle\int_{-1}^{1} K(\mu, \mu') n_t(x, \mu') \mathrm{d}\mu' - \sigma n_t(x, \mu) \\ n_0(x, \mu) = n(x, \mu), \end{cases} \tag{0.2}$$

в подходящих функциональных пространствах при больших временах. Мы выбираем в качестве пространства $L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$, см. обсуждение в конце главы III.

Результаты работы относятся к классической случаю, когда функция c имеет компактный носитель (задача о пластине из размножающего материала), а ядро $K(\mu, \mu')$ полиномиально по своим аргументам и неотрицательно в операторном смысле. Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 0.1. *Обозначим через $V(t)$ эволюционную группу в пространстве $H = L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$, порожденную уравнением* (0.2) *в том смысле, что $V(t) n_0 = e^t n_t$ для $u_0 \in H$. Тогда*

(i) *Существуют конечные числа $l, n \geq 0$ и конечный набор точек $\lambda_j \in \mathbb{C}_+$, $1 \leq j \leq l$, такие что*

$$V(t) = \sum_{i=1}^{l} e^{-i\lambda_j t} P_j + O\left(t^n\right), \quad t \to +\infty. \tag{0.3}$$

Здесь O-символика относится к операторной норме, P_j, $j \leq l$, – операторы конечного ранга.

(ii) $\sup_{t>0} \|V(t)u\|$ *конечен при любом u из плотного подмножества в $\bigcap_j \ker P_j$.*

(iii) *В частном случае, когда ядро K постоянно ($K(\mu, \mu') \equiv \mathrm{const}$), асимптотика* (0.3) *справедлива с $n = 1$. При выполнении некоторого явного условия на функцию c асимптотика* (0.3) *справедлива с заменой $O(t)$ на $O(\ln t)$. Обе полученные асимптотики точны в том смысле, что, если остаточный член*

[1] За счет выбора единиц измерения без ущерба общности можно предполагать, что оно равно 1.

не ограничен, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует начальное распределение $u \in \cap_j \ker P_j$, для которого, в зависимости от выполнения упомянутого условия, либо $\|V(t)u\| \sim t^{1-\varepsilon}$, либо $\|V(t)u\| \sim (\ln t)^{1-\varepsilon}$ при $t \to +\infty$.

Детальная формулировка содержится в следствии 4.3 и теореме B. В частности, там выписано условие, о котором идет речь в пункте (iii). Результаты предшественников подробно описаны в главе III. Резюмируя, можно сказать, что в случае непостоянного ядра K все утверждения теоремы новы, а в случае $K(\mu, \mu') \equiv \mathrm{const}$ было известно лишь утверждение о конечности дискретного спектра и оценка (0.3) с $O(e^{\delta t})$ с произвольным $\delta > 0$ вместо $O(t)$. Утверждение (ii) в случае постоянного ядра было доказано в моей кандидатской диссертации как следствие установленной там абсолютной непрерывности существенного спектра [71].

В основе доказательства теоремы 0.1 лежит анализ существенного спектра генератора группы $V(t)$, который представляет собой аккретивное относительно компактное возмущение самосопряженного оператора $D_0 = i\mu\frac{\partial}{\partial x}$. В силу относительной компактности существенный спектр генератора совпадает с вещественной осью. Первая трудность анализа состоит в том, что возмущение не будет относительно ядерным при любой ненулевой функции c, так как ядро резольвенты генератора имеет логарифмическую особенность на диагонали. Таким образом, неприменима абстрактная ядерная теория рассеяния, упоминавшаяся выше.

Вместо этого мы доказываем методами, близкими гладкой теории возмущений, что дискретный спектр генератора в верхней полуплоскости конечен, а особенности знаменателя резольвенты на вещественной оси изолированы и имеют конечный степенной порядок. Из этого немедленно вытекает, что существенный спектр оператора абсолютно непрерывен, т. е. пространство H^w_{ac} совпадает с подпространством существенного спектра. Одновременно оказывается преодолена вторая трудность анализа операторов с а. н. спектром, специфическая для несамосопряженных задач, – возможное наличие спектральных особенностей. Дадим некоторые пояснения, начав с формулировки фундаментального критерия подобия.

Критерий Секефальви-Надя–Фояша. *Максимальный диссипативный оператор L со спектром на вещественной оси подобен самосопряженному, если, и только если, существует $C > 0$, такое что*

$$\left\|(L - z)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{\operatorname{Im} z}, \ \operatorname{Im} z > 0. \tag{0.4}$$

Таким образом, особую роль при анализе операторов играют точки на вещественной оси, в окрестности которых в верхней полуплоскости оценка (0.4) не выполняется. По определению [55], точка $k \in \mathbb{R}$ – спектральная особенность диссипативного оператора L, если норма резольвенты сужения L на его а. н. подпространство $H^w_{\mathrm{ac}}(L)$ не удовлетворяет оценке (0.4) в любой окрестности точки k в верхней полуплоскости. Спектральные особенности впервые обнаружил Наймарк при исследовании оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом [53]. Глубокие исследования спектральных особенностей были предприняты Павловым [54]. Спектральные особенности естественно классифицировать по характеру роста резольвенты около них. В частности, таким образом естественно определяются особенности конечного степенного порядка.

Проведенный нами анализ резольвенты показывает, что оператор Больцмана в рассматриваемой ситуации имеет лишь конечное число спектральных особенностей, причем все они имеют конечный степенной порядок. Пункты (i) и (ii) теоремы 4.3 после этого вытекают из общей теории. Что касается пункта (iii), то его доказательство в части отсутствия особенностей порядка выше первого носит трюковый характер, а в остальном сводится к анализу двух старших членов асимптотики характеристической функции оператора в нуле.

Структура изложения результатов об операторе переноса такова. В качестве основного утверждения соответствующей главы мы устанавливаем теорему 8, содержащую результаты спектрального анализа генератора группы $V(t)$. Выводы о динамике, резюмированные в теореме 0.1, затем доказываются в несколько более детальной форме в следствии 4.3 и теореме B. Заметим, что содержание теоремы 8 шире, нежели сведения о динамике, сведенные в теорему 4.3. В частности, из нее следует существование и полнота локальных волновых операторов, отвечающих интервалам, не содержащих спектральных особенностей.

Перейдем к изложению результатов по одномерным несамосопряженным дифференциальным операторам. В работе исследуется структура существенного спектра одномерных операторов Шрёдингера и Дирака и матриц Якоби на полуоси при медленно убывающем комплексном аддитивном возмущении. Центральный вопрос в этой тематике – вопрос об устойчивости а. н. спектра при возмущениях.

В самосопряженном случае исследование вопроса об устойчивости началось с ядерной теории рассеяния, построенной в конце 50-х – начале 60-х годов [60]. В применении к операторам Шрёдингера и Дирака абстрактная ядерная теория рассеяния позволяет установить существование и полноту волновых операторов в ситуации, когда потенциал суммируем на полуоси. Непосредственное обобщение этого результата на случай комплексных потенциалов невозможно из-за спектральных особенностей, но локальный вариант теории рассеяния допускает обобщение. Приведем типичный результат.

Теорема 0.2. *Пусть q – комплексная функция на $\mathbb{R}_+$, такая что $\operatorname{Im} q \in L^1(\mathbb{R}_+)$, а $\operatorname{Re} q \in L^\infty$, и пусть l и l_0 – операторы в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, заданные дифференциальными выражениями*

$$l = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + q, \; l_0 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \operatorname{Re} q$$

на области определения, выделенной произвольным самосопряженным граничным условием в нуле. Тогда существует возрастающая последовательность от-

крытых множеств $\mathcal{M}_n \subset \mathbb{R}$, такая что $|\mathbb{R} \setminus \cup_j \mathcal{M}_j| = 0$ и существуют ограниченные и полные локальные волновые операторы

$$W^{\pm}(l, l_0; \mathcal{M}_n) := \text{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itl} e^{-itl_0}\big|_{H_n},$$

где H_n – образ спектрального проектора а. н. части оператора l_0, отвечающего множеству $\mathcal{M}_n$. Операторы $W^{\pm}$ ограниченно обратимы, а а. н. подпространство исчерпывается их образами: $H^w_{\text{ac}}(l) = \overline{\cup_n \operatorname{Ran} W^{\pm}(l, l_0; \mathcal{M}_n)}$.

Исключительное множество в этой теореме содержит множество спектральных особенностей и во многих случаях сводится к нему. Таким образом, картина а. н. спектра в случае $\operatorname{Im} q \in L^1$ в первом приближении выглядит так: вне окрестности спектральных особенностей а. н. части операторов l и l_0 подобны, норма этого подобия растет при приближении к спектральным особенностям, но соответствующие спектральные пространства исчерпывают все H^w_{ac}.

В самосопряженной теории известны многочисленные обобщения теории рассеяния на несуммируемые потенциалы, поведение которых на бесконечности регулярно в том или ином смысле. Потребность в изучении таких потенциалов в теории оператора Шрёдингера существует с самого начала, поскольку таков потенциал свободной частицы $q(x) = 1/x$. Способ преодоления этой трудности был предложен Доллардом и состоит в модификации определения волновых операторов, т. е. исследованию пределов вида

$$\text{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itl} J(t) e^{-itl_0}\big|_{H^w_{\text{ac}}(L_0)}$$

с подходящей функцией J. Этот метод позволил доказать унитарную эквивалентность а. н. частей операторов для широких классов потенциалов, в которых решения обладают ВКБ-асимптотиками при большом x. При этом анализ опирался на методы асимптотической теории дифференциальных уравнений, и таким образом доказывал ВКБ асимптотику сразу для всех значений параметра, за исключением, возможно, концов спектра и каких-либо изолированных особенностей. При этом с середины 80-х годов был известен пример Набоко потенциала, сколь угодно близкого к суммируемому в шкале L^p, для которого положительный спектр оператора содержит плотное множество собственных значений, а для них ВКБ-асимптотика заведомо неверна, и таким образом, для дальнейших продвижений требовались новые методы.

Вопрос об а. н. непрерывном спектре дифференциальных операторов был выведен за рамки теории рассеяния теорией подчиненности Гильберт–Пирсона [60, 61]. Напомним ее основное определение.

Определение 0.3. *Решение u_1 дифференциального уравнения второго порядка на полуоси $[0, \infty)$ называется подчиненным, если*

$$\frac{\int_0^N |u_1|^2}{\int_0^N |u_1|^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

при $N \to \infty$ для любого решения u_2, линейно-независимого от u_1

В следующей теореме q – локально-суммируемый вещественный потенциал на полуоси $\mathbb{R}_+$ в случае предельной точки на бесконечности.

Теорема о подчиненности Гильберт–Пирсона. *Множество точек $k \in \mathbb{R}$, таких что уравнение $-y'' + qy = ky$ не имеет подчиненных решений, представляет собой существенный носитель а. н. части спектральной меры оператора $l = -\frac{d^2}{dx^2} + q$.*

Утверждение, характеризующее носитель сингулярной части меры через наличие подчиненных решений, также справедливо, но не столь полезно, и мы не будем его здесь формулировать. Замечательная особенность теории Гильберт–Пирсона (и отличие от ранних результатов такого типа) состоит в том, что ее условие не требует никакой равномерности поведения решений по спектральному параметру k и никаких априорных предположений о поведении потенциала на бесконечности (кроме тривиального условия предельной точки).

Теория подчиненности была использована Штольцем, А. Киселевым, Кристом, Набоко, Янасом и другими для доказательства наличия а. н. спектра для дискретных и непрерывных операторов Шрёдингера. В частности, используя методы гармонического анализа, Киселеву и Кристу удалось показать [42], что если $q \in L^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то при п. в. $E > 0$ уравнение Шрёдингера $-y'' + qy = Ey$ имеет решения $y_\pm(x, E)$ с асимптотикой

$$y_\pm(x, E) \sim e^{\pm i(\sqrt{E}x - \frac{1}{2\sqrt{E}}\int^x q(t)\mathrm{d}t)}, x \to +\infty. \tag{0.5}$$

Отсюда по лемме Штольца немедленно вытекает отсутствие подчиненных решений, и, таким образом, положительная полуось является существенным носителем а. н. спектра соответствующего оператора Шрёдингера. Впоследствии Киселев и Крист доказали [41] теми же методами и существование модифицированных волновых операторов, и, таким образом, вопрос об а. н. спектре вернулся в рамки теории рассеяния.

В случае $p = 2$ решить задачу о сохранении а. н. спектра этим способом не удалось. Более того, эффективное рассмотрение случая $q \in L^2$ методами теории подчиненности остается важнейшим открытым вопросом теории. Утвердительный (и окончательный) ответ при $p = 2$ был дан в работе Дайфта и Килипа [40].

Теорема Дайфта–Килипа. *Пусть $q \in L^2(\mathbb{R})$ – вещественная функция, l – оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$, заданный формулой $lu = -u'' + qu$ на области определения, выделенной произвольным самосопряженным граничным условием в нуле. Тогда положительная полуось $\mathbb{R}_+$ есть существенный носитель а. н. спектра оператора l.*

Окончательность этого результата состоит в том, что при любом $\varepsilon > 0$ существуют примеры, построенные Пирсоном [60], функции $q \in L^{2+\varepsilon}$, такой что а. н. спектр оператора l пуст. Таким образом, в самосопряженном случае а. н.

спектр оператора Шрёдингера совпадает с а. н. спектром оператора с $q \equiv 0$, т.е. полуосью $[0, +\infty)$, если потенциал принадлежит L^2. Этот результат означает, в частности, что а. н. спектр может сохраняться и в ситуации, когда теория рассеяния неприменима. В основе доказательства Дайфта и Килипа лежит формула следа типа Буслаева–Фаддеева [39], позволяющая контролировать логарифмический интеграл функции Вейля для срезок потенциала через норму потенциала в L^2.

Нашей целью будет показать, что поведение а. н. спектра диссипативных операторов Шрёдингера и Дирака и матриц Якоби совершенно иное, нежели самосопряженных. Мы установим ряд утверждений (теоремы 1–3 главы II), основное содержание которых можно резюмировать такой метатеоремой.

“Теорема” о неустойчивости. *Пусть l_0 – самосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси, и пусть $l = l_0 + iq$, где q – оператор умножения на неотрицательную функцию на полуоси $\mathbb{R}_+$. Тогда $H_{\mathrm{ac}}(l) = \{0\}$, если $q \notin L^1(\mathbb{R}_+)$.*

Таким образом, в несамосопряженном случае а. н. спектр исчезает сразу же по выходе потенциалов возмущения из класса L^1, причем речь идет не о патологических примерах: в терминах шкалы L^p просто нет “зазора”, в котором, в зависимости от регулярности потенциала на бесконечности, оператор может как иметь а. н. спектр, так и быть чисто сингулярным, как это происходит в самосопряженной задаче при $p > 2$, где, наряду с примерами Пирсона, имеются целые классы потенциалов (например, монотонно убывающие к нулю), для которых а. н. спектр совпадает с полуосью $\mathbb{R}_+$.

Эвристическая мотивация теоремы о неустойчивости может быть дана с помощью ВКБ-приближения (подробности см. в главе II). Формально заменяя в асимптотиках (0.5) потенциал q на iq и ограничиваясь абсолютной величиной решений, получим асимптотики

$$|y_\pm| \sim \exp\left(\pm\frac{1}{2\sqrt{k}}\int^x q(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right). \tag{0.6}$$

Таким образом, если функция $q \geq 0$ и несуммируема, то решение u_+ – возрастающее, а u_- – убывающее, откуда вытекает, что соответствующий спектр сингулярен. Такое рассуждение, однако, нельзя превратить в строгое доказательство в декларируемой общности, поскольку

- нет никаких шансов оправдать асимптотику (0.6) хотя бы почти всюду при потенциалах $q \notin L^2$.
- вывод об отсутствии а. н. спектра из наличия растущих и убывающих решений требует использования теории подчиненности, неизвестной в несамосопряженном случае.

Мы докажем теорему о неустойчивости в каждом из трех случаев: l_0 – оператор Шрёдингера, оператор Дирака, матрица Якоби. Точные формулировки отличаются от приведенной метатеоремы аккуратным описанием условий на оператор l_0, гарантирующих существование оператора l. В случае оператора Шрёдингера нам еще понадобится небольшое техническое условие ограниченности в среднем вещественной части потенциала.

Опишем основные шаги нашего доказательства теоремы о неустойчивости.

- Сначала мы показываем, что а. н. подпространство оператора тривиально, если при п. в. $k \in \mathbb{R}$ найдется обобщенное решение u соответствующего спектрального уравнения $lu = ku$, для которого функция $q\,|u(\cdot,k)|^2$ несуммируема. Из диссипативности рассматриваемых операторов довольно легко следует, что $q\,|u(\cdot,k)|^2 \in L^1(\mathbb{R}_+)$ для хотя бы одного решения, а именно, для граничного значения решения Вейля в нижней полуплоскости. Таким образом, достаточно проверить, что решение, отвечающее какому-либо самосопряженному граничному условию в нуле, не будет квадратично суммируемо с весом q.

- В случае матриц Якоби и оператора Дирака условие $q\,|u(\cdot,k)|^2 \notin L^1$ проверяется сначала для некоторого размазанного потенциала $\tilde{q}$, такого что разность $\tilde{q} - q$ неотрицательна и суммируема, а затем используется теорема, упомянутая выше в обзоре наших результатов по абстрактной теории, согласно которой уменьшение мнимой части V абстрактного оператора на ядерный, коммутирующий с V, сохраняет тривиальность а. н. подпространства.

- В случае оператора Шрёдингера описанная в предыдущем пункте схема непосредственно не применима из-за необходимости оценивать производные решений через сами решения. Именно в этом месте возникает упомянутое условие на вещественную часть потенциала. Для преодоления этой трудности мы используем спектральное усреднение в невозмущенной самосопряженной задаче и развиваем аналог теории подчиненности в несамосопряженном случае. Именно в этом месте возникает упомянутое условие на вещественную часть потенциала.

Отметим, что, в случае оператора Шрёдингера, если не накладывать условий типа ограниченности вещественной части потенциала сверху, то можно показать (теорема 2.15), что абсолютно непрерывный спектр тривиален, если на функцию q выполнено несколько более сильное, чем несуммируемость, условие:

$$\sum_n \left(\int_n^{n+1} \sqrt{q}\,\mathrm{d}t \right)^2 = \infty.$$

Вторая часть работы посвящена спектральной теории канонических систем. Канонические системы представляют собой наиболее общую форму записи дифференциального оператора второго порядка на промежутке. Пусть $\mathcal{H}$ – локально суммируемая по мере Лебега функция (гамильтониан) на промежутке $(0, L)$,

$0 < L \le +\infty$, со значениями в неотрицательных матрицах 2×2 с вещественными элементами. Под локальной суммируемостью мы понимаем суммируемость на любом отрезке $I \subset (0, L)$. Канонической системой $(\mathcal{H}, L)$ называется матричное дифференциальное уравнение вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = z\mathcal{H}Y;\ z \in \mathbb{C},\ x \in (0, L). \tag{0.7}$$

Каноническая система называется *регулярной*, если $\mathcal{H} \in L^1(0, L)$, и *сингулярной* в противном случае. Нас будут интересовать канонические системы в ситуации, когда один (левый) конец промежутка регулярен, т. е. $\mathcal{H} \in L^1(0, a)$ при любом $a > 0$, а второй может быть как регулярным, так и сингулярным. Без ущерба общности можно предполагать, что $\operatorname{tr} \mathcal{H}(x) = 1$ п. в. Это и другие основные положения теории канонических систем могут быть найдены в [4, 5]. Сингулярной канонической системе можно сопоставить дифференциальный оператор, задаваясь каким-либо самосопряженным граничным условием в нуле.

Принципиальный вопрос спектрального анализа в случае сингулярного конца – когда спектр оператора дискретен? Этот вопрос был поставлен Луи де Бранжем в 1966 [4, p. 140]. Сам де Бранж сумел на него ответить в частном случае, охарактеризовав гамильтонианы, для которых соответствующая целая функция принадлежит классу Пойя [4, Теорема 41]. Другой частный случай, в котором ответ был известен, – диагональные гамильтонианы. В работе М. Крейна был установлен следующий

Критерий дискретности спектра струны. *Сингулярная каноническая система на промежутке* $(0, L)$ *с гамильтонианом* $\mathcal{H} = \operatorname{diag}(h_1, h_2)$ *имеет дискретный спектр тогда, и только тогда, когда либо*

$$\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t \to L]{} 0,$$

либо

$$\int_t^L h_2(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_1(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t \to L]{} 0.$$

Доказательство этого критерия ведется вариационными методами и принципиально зависит от полуограниченности соответствующего дифференциального оператора. По этой причине оно не может быть приспособлено к недиагональному случаю.

Один из главных наших результатов – теорема 12 – представляет собой ответ на вопрос де Бранжа. Мы установим, что дискретность спектра вовсе не зависит от внедиагональной части гамильтониана, т. е. критерий Крейна непосредственно переносится на общий случай. Точнее, сингулярная каноническая система на промежутке $(0, L)$ с гамильтонианом $\mathcal{H} = \left(\begin{smallmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{smallmatrix}\right)$, $h_1 \in L^1(0, L)$, имеет дискретный спектр тогда, и только тогда, когда

$$\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t\to L]{} 0.$$

Условие интегрируемости элемента h_1 в этом критерии имеет нормировочный характер (см. основной текст главы). Довольно легко видеть (и хорошо известно в фольклоре), что из дискретности спектра системы с гамильтонианом $\operatorname{diag}\mathcal{H}$ следует дискретность спектра системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$, и поэтому условие Крейна достаточно в общем случае, но независимость ответа от функции h_3 в части необходимости оказалась несколько неожиданной. Доказательство необходимости условия Крейна в недиагональном случае и составляет наш основной вклад.

В случае, когда каноническая система имеет дискретный спектр, естественно задаться вопросом о его асимптотическом распределении. Традиционный способ описания этого распределения состоит в указании показателя сходимости последовательности $\{1/|\lambda_n|\}$, где λ_n – собственные значения оператора, или, более общо, в указании условий сходимости ряда $\sum_n 1/\mathrm{g}(|\lambda_n|)$, где g – какая-либо характеристика роста. Именно такого рода результатам в основном и посвящена оставшаяся часть работы.

В регулярном случае старший член спектральной асимптотики дается знаменитой формулой Крейна–де Бранжа:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\pm}} = \frac{1}{\pi}\int_0^L \sqrt{\det\mathcal{H}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Здесь $\mathcal{H}$ – гамильтониан системы, а $\lambda_n^{\pm}$ – последовательности положительных/отрицательных собственных значений соответственно. Заметим, что если $\det\mathcal{H}(t) = 0$ п. в., то формула Крейна–де Бранжа говорит лишь, что $\lambda_n = o(n)$. В терминах шкал компактных операторов эта формула отвечает случаю $p = 1$. Мы будем изучать задачу о показателе сходимости последовательности $\{1/|\lambda_n|\}$ в двух ситуациях:

- В сингулярном случае – выяснить, когда показатель сходимости равен данному числу $p > 1$, т. е. указать условия принадлежности резольвенты оператора классу $\mathfrak{S}^p$ в терминах гамильтониана.

- В регулярном случае – найти показатель сходимости (≤ 1), если $\mathcal{H}(x)$ – матрица ранга 1.

Первая из этих задач решена нами полностью. В теореме 14 дано необходимое и достаточное условие суммируемости ряда $\sum_n 1/\mathrm{g}(|\lambda_n|)$ для широкого класса характеристик роста g порядка > 1. В важнейшем частном случае $\mathrm{g}(t) = t^p$ при естественных нормировках это условие имеет вид ($p > 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^p} < \infty \;\Leftrightarrow\; \int_0^L \Big(\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}-1} \Big(\int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}} h_1(t)\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{0.8}$$

Помимо описания поведения собственных значений в среднем, представляют интерес и “поточечные” оценки при больших n. Такие оценки получены в теореме 15 для упомянутого класса характеристик роста g. Приведем формулировку для случая $\mathrm{g}(t) = t^p$ при нормировках $L = \infty$, $h_1 \in L^1(0, \infty)$, $\operatorname{tr} \mathcal{H}(x) = 1$ п. в. Пусть возрастающая к бесконечности последовательность c_n, $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \dots$ определена равенствами

$$\int_{c_{n-1}}^{c_n} h_1(t)\,\mathrm{d}t = 2^{-n} \int_0^\infty h_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

Обозначим через δ_n невозрастающую перестановку последовательности $2^{-n}(c_n - c_{n-1})$. Тогда

$$\frac{n}{|\lambda_n|^p} = O(1) \;\Leftrightarrow\; n\delta_n^{p/2} = O(1),$$
$$\frac{n}{|\lambda_n|^p} = o(1) \;\Leftrightarrow\; n\delta_n^{p/2} = o(1).$$

Основные инструменты в доказательстве этих результатов – теорема о диагональном преобладании и свойство Мацаева соответствующих идеалов компактных операторов. Теорема о диагональном преобладании сводит вопрос о принадлежности резольвенты симметрично нормированному идеалу $\mathfrak{I}$ к аналогичному вопросу для гамильтониана $\operatorname{diag} \mathcal{H}$, полученного заменой внедиагональных элементов на 0, используя алгебраические особенности строения резольвенты.

Согласно известной теореме Мацаева [7], если вещественная часть вольтерровского оператора принадлежит классу Шаттена – фон Неймана $\mathfrak{S}^p$, $1 < p < \infty$, то этому классу принадлежит и сам оператор. Поскольку резольвенты дифференциальных операторов имеют структуру вещественных частей вольтерровских операторов вида

$$f \mapsto \varphi \int_0^x \kappa f,$$

с известными функциями κ и φ, явно выражающимися через гамильтониан, теоремы типа Мацаева сводят трудную часть (т. е. необходимость) условий принадлежности резольвенты соответствующему идеалу к аналогичному вопросу для вольтерровских операторов. Про идеалы, для которых справедлив аналог теоремы Мацаева, будем говорить, что они обладают свойством Мацаева. Вопрос о том, когда симметрично нормированный идеал обладает свойством Мацаева, был решен Руссу и Митителом для широкого класса идеалов, который покрывает все потребности приложений. Например, он содержит все сепарабельные идеалы.

После упомянутых редукций остается выяснить, когда соответствующий вольтерровский оператор принадлежит идеалу $\mathfrak{I}$. Этот вопрос в существенном решен в работе Александрова, Пеллера, Рохберга и Янсона, где рассмотрен случай классов $\mathfrak{S}^p$ и $\kappa \equiv 1$. Небольшое обобщение их техники позволяет решить вопрос для любого идеала, обладающего свойством Мацаева. В результате мы получаем общую теорему 13, содержащую необходимое и достаточное условие принадлежности резольвенты любому идеалу компактных операторов, удовлетворяющему условиям Митителa–Руссу. Теоремы 14 и 15 получаются как следствия этого общего результата сравнительно несложной проверкой условий Митителa–Руссу для соответствующих идеалов (типа Орлича в случае теоремы 14 и типа Лоренца в случае теоремы 15).

Перейдем к описанию наших результатов в регулярном случае для порядков, меньших 1. Пусть $\mathcal{H}(x)$ – гамильтониан на конечном промежутке $(0, L)$, нормированный условием $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$ п. в., такой что $\det\mathcal{H}(x) = 0$ п. в. Такие гамильтонианы параметризуются измеримыми функциями $e\colon (0, L) \to \mathbb{T}^1$, так что $\mathcal{H}(x) = \langle\cdot, e(x)\rangle_{\mathbb{R}^2}\, e(x)$. Все ранее известные результаты о порядке в этой ситуации относятся к двум частным случаям:

- гамильтонианы, отвечающие неопределенной проблеме моментов Гамбургера (матрицам Якоби в случае предельного круга) [13, 14, 16],
- диагональные гамильтонианы [29, 30, 32].

В работе [14] было доказано следующее утверждение. Рассмотрим симметричную матрицу Якоби
$$\begin{pmatrix} q_1 & \rho_1 & 0 & \dots & & \\ \rho_1 & q_2 & \rho_2 & 0 & \dots & \\ 0 & \rho_2 & q_3 & \rho_3 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$
для которой выполнен случай предельного круга.

Теорема 0.4 ([14])**.** *Если последовательность ρ_j удовлетворяет условию*
$$\rho_{j-1}\rho_{j+1} \le \rho_j^2$$
при всех достаточно больших j, а последовательность $q_j/\rho_{j-1} \in l^1$, то порядок соответствующей канонической системы совпадает с величиной $\inf\{\alpha > 0\colon \rho_j^{-\alpha} \in l^1\}$. То же самое утверждение справедливо, если обратить знак неравенства в условии на последовательность ρ_j.

В основе доказательства этой теоремы лежит обнаруженная Березанским оценка роста ортогональных полиномов, отвечающих логарифмически выпуклой последовательности ρ_j.

Первая и пока единственная оценка порядка снизу в случае матриц Якоби появилась в статье М. Лившица [13] 1939 года, посвященной неопределенной проблеме моментов Гамбургера. Указанная статья, вероятно, представляет собой первую публикацию, посвященную непосредственно проблеме порядка. Напомним, что моментами меры μ на вещественной оси называются числа
$$s_n = \int x^n \mathrm{d}\mu(x).$$

Пусть $\mathfrak{s}\colon = (s_n)_{n=0}^{\infty}$ – набор моментов меры на вещественной оси, отвечающий неопределенному случаю проблемы моментов Гамбургера. Пусть μ – какое-либо каноническое решение этой проблемы моментов (т. е. мера, имеющая s_n своими моментами и такая, что полиномы плотны в $L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu)$). Хорошо известно [3], что такая мера чисто точечна, а ее носитель не имеет точек накопления на конечном расстоянии. Обозначим через $N(t)$ считающую функцию этого носителя и назовем порядком проблемы моментов $\mathfrak{s}$ число $\rho(\mathfrak{s}) = \sup\{p\colon N(t) = O(t^{1/p})\}$. Тогда порядок ρ не меньше порядка целой функции $\sum z^{2j}/s_{2j}$, т. е. выполнено неравенство [13]:

$$\rho(\mathfrak{s}) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{2n\ln n}{\ln s_{2n}}, \tag{0.9}$$

которое и называется оценкой Лившица. Естественно задаться вопросом, может ли порядок отличаться от своей оценки Лившица, т. е. существуют ли проблемы моментов, для которых неравенство в (0.9) строгое. Этот вопрос становился все более актуальным по мере того, как накапливались примеры и классы примеров, в которых порядок удалось вычислить, поскольку во всех этих примерах $\rho(\mathfrak{s})$ совпадает с правой частью (0.9). Наконец, в работе [14] 2014 года было дано очень короткое современное доказательство оценки Лившица, а отсутствие примеров строгого неравенства упомянуто явным образом.

Помимо общих результатов, даваемых теоремами Березанского–Берга–Шварца и оценкой Лившица, известно несколько изолированных нетривиальных явнорешаемых примеров матриц Якоби в случае предельного круга, для которых порядок удается вычислить. Один из источников таких примеров – некоторые ортогональные полиномы, возникающие в q-схеме Аски, такие как (непрерывные) q^{-1}-полиномы Эрмита [26]. Эти полиномы примечательны тем, что спектр всех самосопряженных расширений оператора соответствующей системы вычисляется явно [26, Раздел 5]. Полный перечень систем, получаемых на этом пути, содержится в диссертации Кристиансена [27]. Отметим, что в примерах, происходящих из q-схемы Аски, спектр оператора оказывается экспоненциально растущим, и поэтому порядок равен нулю. Явнорешаемые примеры с порядком, отличным от нуля, были обнаружены Валентом и его сотрудниками в работах [23] (порядок 1/4), [24] (порядок 1/3) и [25] (порядок 1/2). Первые два примера возникли при анализе процессов рождения–уничтожения с полиномиальными законами, а третий – при исследовании некоторой производящей функции. Во всех этих примерах последовательности q_n и ρ_n^2 полиномиальны по n, причем $2\deg q_n = \deg p_n$. Отталкиваясь от первых двух примеров, Валент выдвинул гипотезу [28], что в классе матриц Якоби, отвечающих процессам рождения-уничтожения, с полиномиальными последовательностями ρ_n^2 и q_n порядок p равен $1/\deg q_n$. Как будет показано ниже, $p \geq 1/\deg q_n$ по почти тривиальным причинам, и таким образом, проверка гипотезы сводится к доказательству неравенства $p \leq 1/\deg q_n$. Следствием 10.4 теоремы 10 мы установим это неравенство и, тем самым, докажем гипотезу Валента.

Отметим, что методы работ [23–25] основаны на явных в той или иной степени решениях соответствующих спектральных задач и вряд ли могут быть использованы для доказательства гипотезы Валента во всей общности. Косвенно об этом свидетельствует тот факт, что формулы для полиномов q_n и ρ_n^2 в примерах [23,24] не содержат никаких параметров.

Мы привели наиболее существенные ранее известные результаты по проблеме порядка в случае матриц Якоби. Результаты предшественников в диагональном случае подробно описаны далее при обсуждении теоремы 1.

Основной наш результат в общей проблеме порядка состоит в точной верхней оценке порядка регулярной канонической системы, даваемой теоремой 10. Ввиду его технического характера, мы не воспроизводим его формулировку здесь, во Введении, и отсылаем в основной текст. Поясним лишь, что порядок оценивается в терминах скорости весовой аппроксимации гамильтониана кусочно-постоянными функциями. Поскольку оператор, отвечающий общей канонической системе, не полуограничен снизу, традиционные вариационные методы оценки собственных значений не пригодны для доказательства результатов такого рода. Вместо этого мы оцениваем порядок роста целой функции, порожденной спектром (фундаментального решения в правом конце промежутка), используя мультипликативное свойство фундаментального решения и частичную диагонализацию аппроксимантов. Результат о спектре после этого может быть получен из стандартных утверждений о связи роста целой функции и асимптотики ее нулей.

В качестве приложений теоремы 10, мы дадим уже упомянутое доказательство гипотезы Валента (следствие 10.4), укажем оценку порядка для гёльдеровских гамильтонианов в терминах гёльдеровского показателя (следствие 10.2) и дадим верхнюю оценку порядка для широкого класса матриц Якоби в терминах параметров соответствующего гамильтониана (теорема 11, раздел 11), которая при некотором условии регулярности поведения этих параметров превращается в равенство (теорема 11.18). Приведем упрощенный вариант одной из оценок теоремы 11 с тем, чтобы дать понять, о какого сорта утверждениях идет речь.

Пусть l_j – последовательность длин интервалов постоянства гамильтониана $\mathcal{H}$, отвечающего матрице Якоби, а φ_j – соответствующие углы, т. е. φ_j – аргумент вектора $e(x)$ на j-ом интервале постоянства.

Предложение. *Если $l_j = O(j^{-a})$, и $\varphi_j - \varphi_{j+1} = O(j^{-b})$ для некоторых $a > 1$ и $b > 0$, таких что $a + b \geq 2$, то порядок системы не превосходит $(a+b)^{-1}$.*

Выше уже упоминался важный класс канонических систем – системы с диагональными гамильтонианами $\mathcal{H}$. Такие системы возникают при описании механических струн переменной плотности, иногда называемых струнами Стилтьеса, Крейна, Крейна–де Бранжа и т. д. Сведение уравнения струны к канонической системе в ситуации, когда распределение масс струны задано произвольной мерой, детально описано в [12]. В контексте задачи о порядке матрица $\mathcal{H}(x)$ имеет ранг 1 почти всюду, что означает с учетом принятой нормировки $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$, что диагональный гамильтониан на множестве полной меры может принимать только два значения: $\mathcal{H}(x) = \operatorname{diag}(1,0)$ или $\mathcal{H}(x) = \operatorname{diag}(0,1)$.

Следующий основной результат работы – формула для порядка диагональных регулярных канонических систем. Согласно этой формуле, для диагональных гамильтонианов верхняя оценка порядка, даваемая теоремой 10, при оптимальном выборе параметров превращается в равенство. Положим:

$$X_1 = \left\{ x \in (0, L) \colon \mathcal{H}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$X_2 = \left\{ x \in (0, L) \colon \mathcal{H}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть при п. в.* $x \in [0, L]$ *либо* $\mathcal{H}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, *либо* $\mathcal{H}(x) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. *Тогда порядок канонической системы* $(\mathcal{H}, L)$ *совпадает с нижней гранью чисел* d, $0 < d < 1$, *таких что существует положительное число* $C = C(d)$, *такое что при каждом достаточно большом* R *интервал* $(0, L)$ *можно покрыть* $n = n(R)$ *интервалами* ω_j, *для которых*

(*A*)

$$\sum \sqrt{|\omega_j \cap X_1|\, |\omega_j \cap X_2|} \le C R^{d-1};$$

(*B*)

$$n(R) \le C R^d.$$

Расскажем о результатах предшественников. Некоторый класс диагональных гамильтонианов, для которых порядок известен явно, возникает при изучении невейлевских спектральных асимптотик для одномерных струн. По-видимому, первый пример такого рода дан в работе Уно и Хонга [29], в которой сосчитан спектр струны Кантора. В работе Соломяка и Вербицкого [30] найден старший член асимптотики (и, тем самым, вычислен порядок) для широкого класса струн с самоподобными весами. Порядок также известен для широкого класса струн, связанных с так называемыми d–множествами [31]. Заметим, что [29, 30] основаны на использовании минимаксимального принципа для оценок спектра, и поэтому их методы неприменимы в ситуации общей недиагональной канонической системы, поскольку соответствующие операторы не будут, вообще говоря, полуограниченными.

Общая формула для порядка струны была установлена в работе [32]. Согласно этой формуле, в ситуации теоремы 1 порядок системы $(\mathcal{H}, L)$ равен

$$\inf \left\{ d > 0 \colon \int_0^{\tilde{L}} \mathrm{d}M(x) \int_0^{\min\{x, \tilde{L}-x\}} \left(s(M(x+s) - M(x-s))\right)^{\frac{d}{2}-1} \mathrm{d}s < \infty \right\}. \quad (0.10)$$

Здесь M – неубывающая сингулярная функция на промежутке $[0, \tilde{L}]$, $\tilde{L} + M(\tilde{L}) = L$, такая что $X_1 = \{x + M(x) \colon x \in [0, \tilde{L}],\ M'(x) = 0\}$. Эта формула представляется неэффективной, и нам неизвестны примеры, в которых порядок струны рассматриваемого вида был бы вычислен с ее помощью (дальнейшее обсуждение см. в разделе 13.3). Тем не менее, ее вывод в [32] содержит полезное рассуждение, которое будет использовано при доказательстве теоремы 1, см. лемму 12.1.

В качестве первого приложения теоремы 1 мы дадим короткий вывод значения порядка для струны Кантора (см. раздел 13.1). Ввиду упомянутых результатов Уно–Хонга и Соломяка–Вербицкого, такой вывод имеет чисто методический характер, но показывает эффективность указанной в теореме формулы.

Основное применение теоремы 1 состоит в решении упомянутого выше вопроса об оценке Лившица. Именно, мы построим первый пример проблемы моментов, для которой порядок отличен от своей оценки Лившица (следствие 14.5). Более того, построенный пример показывает, что порядок может сколь угодно сильно (в пределах тривиальной границы $\rho(\mathfrak{s}) \le 1$) отличаться от правой части (0.9). Пример представляет собой матрицу Якоби с нулевой диагональю, заданную явным образом в терминах соответствующей канонической системы и может, в принципе, быть столь же явно выписан через параметры Якоби. Порядок в этом примере вычисляется применением теоремы 1.

Помимо этого результата, в теореме 11.18 мы указываем класс канонических систем, отвечающих неопределенной проблеме моментов, для которых порядок удается вычислить явно. Ключевое условие, выделяющее класс, состоит в регулярной распределенности последовательностей длин и углов канонической системы (определение 11.15). Оказывается, что для этого класса оценка сверху, вытекающая из теоремы 11, совпадает с сильным вариантом оценки Лившица.

Обозначения

В этом разделе собраны обозначения, некоторые определения и факты, используемые в двух и более главах работы. Обозначения, используемые в пределах лишь одной главы, как правило, даются во введении к ней.

$\mathbb{C}_\pm = \{z : \pm \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{T} = \{z\colon |z| = 1\}$; $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$;

$H^p_\pm$, $1 \le p \le \infty$, – классы Харди аналитических функций в $\mathbb{C}_\pm$;

H^2 – класс Харди в единичном круге;

для данного гильбертова пространства E векторные классы Харди $\mathbf{H}^2_\pm$ определяются как наборы функций $f : \mathbb{C}_\pm \to E$, аналитических в $\mathbb{C}_\pm$ соответственно и таких, что $\sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}} \|f(k \pm i\varepsilon)\|^2_H \, \mathrm{d}k < \infty$; если необходимо явно указать пространство значений E, то будем писать $\mathbf{H}^2_\pm(E)$.

$\{e_n\}$ – стандартный базис в $l^2(\mathbb{Z})$.

Индексы $_\pm$ у функций комплексного переменного обозначают соответственно их сужения на верхнюю и нижнюю полуплоскости.

Если не оговорено противное, сокращение п. в. относится к мере Лебега; $|M|$ для множества $M \subset \mathbb{R}$ обозначает меру Лебега.

Обозначение пространства $L^2(D)$ применительно к подмножеству $D \subset \mathbb{R}^1$ или $D \subset \mathbb{R}^2$ подразумевает стандартную меру Лебега на $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^2$.

Пусть μ – мера на $\mathbb{R}$. Множество $M \subset \mathbb{R}$ называется ее *существенным носителем*, если любое его подмножество положительной меры Лебега имеет ненулевую μ-меру.

Знак нормы $\|\cdot\|$ применительно к 2×2 комплексной матрице относится к норме заданного ей оператора в $\mathbb{C}^2$ со стандартным скалярным произведением (используется в главах II и IV).

Пусть L – оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда

$\mathcal{D}(L)$ – область определения L;

$\sigma(L)$, $\rho(L)$ – соответственно спектр и резольвентное множество оператора L;

$f_{u,v}(z) = \left\langle (L-z)^{-1} u, v\right\rangle$;

подпространство $X \subset H$ – *(регулярно) инвариантное подпространство оператора* L если $\overline{(L-\lambda)^{-1}X} = X$ при всех $\lambda \in \rho(L)$.

Оператор L называется *вполне несамосопряженным*, если у него нет приводящих подпространств, на которых он индуцирует самосопряженный оператор.

Компактные операторы

$\mathbf{B}(H)$ – пространство ограниченных операторов а гильбертовом пространстве H.

$s_n(T)$ – n-ое сингулярное число ограниченного оператора T:

$$s_n(T) := \inf\left\{\|T-A\|\colon A - \text{ограниченный оператор}, \dim\operatorname{ran} A < n\right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Симметрично нормированный идеал $\mathfrak{I}$ – это двусторонний операторный идеал в $\mathbf{B}(H)$, снабженный нормой $\|.\|_{\mathfrak{I}}$, такой что

- $(\mathfrak{I}, \|.\|_{\mathfrak{I}})$ – банахово пространство,
- $\|ATB\|_{\mathfrak{I}} \le \|A\| \cdot \|T\|_{\mathfrak{I}} \cdot \|B\|, \quad T \in \mathfrak{I},\ A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,
- $\|T\|_{\mathfrak{I}} = \|T\|$ для операторов T ранга 1.

$\mathfrak{S}^p$, $p \ge 1$, – классы Шаттена–фон Неймана компактных операторов, $\mathfrak{S}^p = \{T\colon \sum s_n(T)^p < \infty\}$.

$\|\cdot\|_2$ применительно к операторам обозначает норму Гильберта–Шмидта.

$\{a_n\} \in \mathfrak{I}$ для последовательности вещественных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и операторного идеала $\mathfrak{I}$ означает, что оператор a вида $au = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle u, e_n\rangle e_n$, где e_n – произвольный ортонормированный базис в H, принадлежит идеалу $\mathfrak{I}$.

Пусть $H = L^2(a,b)$, $-\infty < a < b \le \infty$. Трансформатор треугольного усечения (используется только в главе V) $\mathcal{C}$ в пространстве компактных операторов в H определяется формулой [7, глава III]

$$\mathcal{C}(X) = \int PX \mathrm{d}P,$$

где интегрирование ведется по полной цепочке, образованной ортогональными проекторами P_x, $x \in [a,b]$, на подпространства функций с носителями на промежутках $[a,x]$. Область определения трансформатора $\mathcal{C}$ состоит из компактных операторов X в H, для которых указанный интеграл сходится в смысле Римана (Шатуновского) по операторной норме.

Скалярное кратное

Пусть $\Theta\colon \mathbb{C}_+ \to \mathbf{B}(H)$ – ограниченная аналитическая функция.

Определение 0.5. *Ненулевая скалярная ограниченная функция g в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ называется скалярным кратным функции Θ, если существует ограниченная аналитическая функция $\Phi\colon \mathbb{C}_+ \to \mathbf{B}(H)$, такая что*

$$\Theta(z)\Phi(z) = \Phi(z)\Theta(z) = g(z)I$$

при всех $z \in \mathbb{C}_+$.

Важнейшее условие существования скалярного кратного дает следующая

Теорема Секефальви-Надя–Фояша. *Пусть $S\colon \mathbb{C}_+ \to \mathbf{B}(H)$ – сжимающая ($\|T(z)\| \le 1$) аналитическая функция, и пусть $S(z) - I \in \mathfrak{S}^1$, $z \in \mathbb{C}_+$. Если оператор $S(z)$ обратим при хотя бы одном $z \in \mathbb{C}_+$, то функция S обладает скалярным кратным.*

В приведенной форме эта теорема установлена в [43], в исходной работе, см. [64], доказан ее аналог для слабых сжатий.

а. н. – абсолютно непрерывный.

Буква C в формулах обозначает любую константу, точное значение которой не представляет интереса.

Глава I. Абсолютно непрерывное подпространство несамосопряженного оператора

1.1 Сильные и слабые а. н. подпространства

Пусть L - замкнутый плотноопределенный оператор в гильбертовом пространстве H, такой что множества $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_\pm$ дискретны. Пусть $1 < p \le 2$. Определим следующие подпространства в H,

$$H_{\mathrm{ac}}^{w,p}(L) := \mathrm{Clos}\, \widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p}}(L), \tag{1.1}$$
$$\widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p}}(L) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (L-z)^{-1} u \text{ аналитично в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \\ & \left\langle (L-z)^{-1} u, v \right\rangle_\pm \in H_\pm^p \text{ при всех } v \in H. \end{array} \right\}.$$

Определение 1.1. *$H_{\mathrm{ac}}^{w,2}(L)$ называется слабым абсолютно непрерывным подпространством оператора L. Элементы линеала $\widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p}}(L)$ называются слабыми гладкими векторами.*

Важное свойство слабых гладких векторов непосредственно вытекает из принципа равномерной ограниченности и стандартной поточечной оценки функций в скалярных классах Харди:

$$\left\| (L-z)^{-1} u \right\| \le C_u \left| \mathrm{Im}\, z \right|^{-1/p} \tag{1.2}$$

при всех $u \in \widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p}}$, $1 < p \le 2$.

Следующее утверждение имеет фольклорный характер и мотивирует определение а. н. подпространства.

Предложение. *Пусть оператор L самосопряжен, и пусть $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(L)$ – его абсолютно непрерывное подпространство, определенное стандартным образом через спектральную теорему. Тогда $H_{\mathrm{ac}}^{w,p}(L) = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(L)$ при всех $p \in (1,2]$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{d}\mu_{u,v}(t)$ – спектральная мера оператора L на векторах $u, v \in H$. Тогда

$$f_{u,v}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, \mathrm{d}\mu_{u,v}(t)$$

при всех $u, v \in H$. Положим $u = (L-z_0)^{-1} w$, где $w \in \widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p}}$ и $z_0 \in \rho(L)$. Тогда функция $f_{u,v}$ представима интегралом Коши своих граничных значений:

$$f_{u,v}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t-z)(t-z_0)}\, f_{w,v}(t+i0)\, \mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Заметим, что $(t-z_0)^{-1} f_{w,v}(t)\, \mathrm{d}t$ – конечный борелевский заряд. Сравнивая указанные представления и используя теорему братьев Рисс, получим, что мера

$$\mathrm{d}\mu_{u,v} - (t-z_0)^{-1} f_{w,v}(t) \mathrm{d}t$$

абсолютно непрерывна при всех v. Следовательно, абсолютно непрерывна и мера $\mathrm{d}\mu_{u,v}$. Поскольку линеал векторов u рассматриваемого вида плотен в $H_{\mathrm{ac}}^{w,p}$, отсюда будем иметь включение $H_{\mathrm{ac}}^{w,p} \subset \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$. С другой стороны, очевидным образом

$$\{u \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}} \colon \ \mathrm{d}\mu_{u,u}/\mathrm{d}t \in L^{\infty}(\mathbb{R})\} \subset H_{\mathrm{ac}}^{w,p}.$$

Так как линеал слева плотен в $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$, справедливо включение $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} \subset H_{\mathrm{ac}}^{w,p}$. ❑

Важное свойство слабого а. н. подпространства – ковариантность относительно подобия операторов.

В дальнейшем индекс p при $p = 2$ в обозначениях определяемых подпространств будет опускаться. Кроме того, в обозначениях подпространств будет опускаться явное указание оператора, к которому они относятся, если это не вызывает недоразумений.

В этой главе рассматривается ситуация теории возмущений. За исключением §3, всюду далее будет предполагаться, что

(A) *L – вполне несамосопряженный оператор вида $L = A + \mathrm{i}V$, $A = A^*$, $V = V^*$, $\mathcal{D}(L) := \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(V)$, такой что оператор V является A-ограниченным с относительной гранью, меньшей единицы, т. е. для некоторого $a < 1$*

$$\|Vu\|^2 \le a\,\|Au\|^2 + b\,\|u\|^2$$

при всех $u \in \mathcal{D}(A)$.

В работе будет часто использоваться такое следствие из этого предположения:

$$\mathrm{i}\tau\,(L + \mathrm{i}\tau)^{-1} \xrightarrow{s} I, \ \tau \to \pm\infty. \tag{1.3}$$

Условие полной несамосопряженности оператора в предположении (A) не ограничительно для рассматриваемых нами вопросов. Поясним это следующим утверждением.

Предложение 1.2 ([43], предложение 1)**.** *Пусть D – оператор, удовлетворяющий условию* (A) *за исключением требования вполне несамосопряженности, и пусть*

$$H' = \bigvee_{z \in \rho(D)} (D - z)^{-1}\,\mathrm{Ran}\,V.$$

Тогда подпространство H' приводит оператор D, сужение D на H' вполне несамосопряжено, а сужение D на $H \ominus H'$ — самосопряженный оператор.

Сужения оператора D из этого предложения на подпространства H' и $H \ominus H'$ называются, соответственно, его вполне несамосопряженной и самосопряженной частями. Сужение D на H' будет обозначаться через D'. Заметим еще, что пространство H' приводит также и оператор A, и сужения D и A на $H \ominus H'$ совпадают [43].

Определение 1.3 ([43, 51]). *Подпространство*

$$H_{\mathrm{ac}}(L) := \operatorname{Clos} \widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(L),$$
$$\widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(L) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (L-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \\ & \left(|V|^{1/2} (L-z)^{-1} u \right)_{\pm} \in \mathbf{H}^2_{\pm} \end{array} \right\}, \tag{1.4}$$

называется сильным а. н. подпространством оператора L. Элементы линеала $\widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(L)$ называются сильными гладкими векторами.

Это определение допускает естественное обобщение на случай операторов, у которых мнимая часть не отделяется и, в частности, для которых не выполнено предположение (A) [48]. Ниже мы приводим это общее определение в случае диссипативных операторов (см. определение 1.19). Заметим, что в случае диссипативного оператора L часть условия (1.4), относящаяся к нижней полуплоскости, может быть опущена:

Лемма 1.4 ([43], теорема 1). *Пусть L – диссипативный оператор. Тогда*

$$\left(\sqrt{V} (L-z)^{-1} u \right)_{-} \in \mathbf{H}^2_{-}$$

при всех $u \in H$.

Основное свойство сильных гладких векторов выражается следущим утверждением.

Предложение 1.5 ([43], теорема 4). *Существуют гильбертово пространство $\mathcal{N}$, а. н. самосопряженный оператор A_0 в в пространстве $\mathcal{N}$ и ограниченный оператор $P\colon \mathcal{N} \to H$, такие что $P\mathcal{N} = \widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(L)$ и равенство*

$$(L-z)^{-1} Pg = P (A_0 - z)^{-1} g$$

справедливо при всех $g \in \mathcal{N}$, $z \notin \mathbb{R}$, $z \in \rho(L)$.

Следствие 1.6. $H^w_{\mathrm{ac}}(L) \supset H_{\mathrm{ac}}(L)$.

Доказательство. Для вектора $g \in \mathcal{N}$ обозначим через $d\mu_g$ спектральную меру оператора A_0, сосчитанную на этом векторе. Пусть g таков, что $\frac{d\mu_g}{dt} \in L^\infty(\mathbb{R})$. Согласно спектральной теореме для оператора A_0 будем иметь:

$$\left\langle (L-z)^{-1} Pg, v \right\rangle = \left\langle (A_0 - z)^{-1} g, P^* v \right\rangle = \int \frac{1}{k-z} \rho(k)\, \mathrm{d}k,$$

где $\rho \in L^1 \cap L^\infty \subset L^2$ в силу выбора вектора g. Отсюда видно, что сужения левой части на верхнюю/нижнюю полуплоскости принадлежат соответствующим классам Харди при всех v, т. е. $Pg \in \widetilde{H^w_{\mathrm{ac}}}$. Поскольку множество векторов g рассмотренного вида плотно в $\mathcal{N}$ в силу абсолютной непрерывности оператора A_0, утверждение доказано. ❑

Это следствие справедливо и в общей ситуации, когда мнимая часть оператора не отделяется. Различные мотивации определения сильного а. н. подпространства и его связь с теорией рассеяния приведены в работах [43, 46, 49, 51, 52].

Аналогичным образом определяются инвариантные подпространства для возмущений унитарных операторов [50]. Пусть T – ограниченный вполне неунитарный оператор, спектр которого не имеет точек накопления вне окружности $\mathbb{T}$.

Определение 1.7. *Слабым а. н. подпространством оператора T называется пространство*

$$
\begin{gathered}
H^w_{\mathrm{ac}}(T) := \operatorname{Clos} \widetilde{H^w_{\mathrm{ac}}}(T), \\
\widetilde{H^w_{\mathrm{ac}}}(T) := \widetilde{H^w_+}(T) \cap \widetilde{H^w_-}(T), \\
\widetilde{H^w_+}(T) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (T-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{D}, \\ & \left\langle (T-z)^{-1} u, v \right\rangle\Big|_{\mathbb{D}} \in H^2 \text{ for all } v \in H \end{array} \right\}, \\
\widetilde{H^w_-}(T) := \left\{ \begin{array}{ll} u \in H\colon & (T-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \\ & \left\langle (I-zT)^{-1} u, v \right\rangle\Big|_{\mathbb{D}} \in H^2 \text{ при всех } v \in H \end{array} \right\}.
\end{gathered}
$$

Положим $D_T := |I - T^*T|^{1/2}$. Подпространство

$$
\begin{gathered}
H_{\mathrm{ac}}(T) := \operatorname{Clos} \widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(T), \\
\widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(T) := \left\{ \begin{array}{lll} u \in H: & (i) & (T-z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}, \\ & (ii) & D_T (T-z)^{-1} u\big|_{\mathbb{D}} \in \mathbf{H}^2, \\ & (iii) & D_T (I-zT)^{-1} u\big|_{\mathbb{D}} \in \mathbf{H}^2 \end{array} \right\}
\end{gathered}
$$

называется сильным а. н. подпространством оператора T. Элементы линеала $\widetilde{H_{\mathrm{ac}}}(T)$ называются сильными гладкими векторами.

Справедливо следующее утверждение, аналогичное следствию 1.6 [50].

Следствие 1.8. *$H^w_{\mathrm{ac}}(T) \supset H_{\mathrm{ac}}(T)$.*

Основной результат об устойчивости а. н. спектра в рамках ядерной теории возмущений дается следующей теоремой.

Теорема 1.9. *Если $V \in \mathfrak{S}^1$, то*

(1) $H^w_{\mathrm{ac}}(L) = H_{\mathrm{ac}}(L)$;

(2) $\sigma\left(L|_{H_{\mathrm{ac}}(L)}\right) = \sigma_{\mathrm{ac}}(A)$, где абсолютно непрерывный спектр самосопряженного оператора A определяется стандартным образом.

Утверждение (1) теоремы доказано в [57, предложение 4.10 и теорема C]. Утверждение (2) в существенном следует из локальной ядерной теории рассеяния, построенной в работах [43, 46]. Поскольку оно не приведено в [43, 46] в явном виде, дадим набросок его доказательства.

Доказательство. Согласно результатам работ [43, 49], из ядерности оператора V следует, что для любого борелевского подмножества $\omega \subset \mathbb{R}$ найдется единственное максимальное инвариантное подпространство H_ω оператора $L|_{H_{\rm ac}}$, такое что $\sigma\left(L|_{H_\omega}\right) \subset \overline{\omega}$. Это подпространство тривиально, если $|\omega| = 0$, совпадает с $H_{\rm ac}$ при $\omega = \mathbb{R}$ и обладает следующим свойством: если $\omega = \cup_n \omega_n$, то $\sigma\left(L|_{H_\omega}\right) = \overline{\cup_n \sigma\left(L|_{H_{\omega_n}}\right)}$. В ходе доказательства теоремы 5 в работе [43] показано, что существует такая сжимающая скалярная аналитическая функция m в верхней полуплоскости, что при любом $c > 0$ существуют ограниченные локальные волновые операторы $W_\pm^\omega(A, L)\colon H_\omega \to H$ для множества $\omega = \{k \in \mathbb{R} : |m(k)| \geq c\}$, которые полны в том смысле, что $\operatorname{Ran} W_\pm^\omega(A, L) = P_\omega H$. Здесь P_ω – спектральный проектор абсолютно непрерывной части оператора A, отвечающий множеству ω. Это означает, что операторы $L|_{H_\omega}$ и $A_\omega = A|_{\operatorname{Ran} P_\omega}$ подобны, и, таким образом, $\sigma\left(L|_{H_\omega}\right) = \sigma_{\rm ac}(A_\omega)$. Рассматривая теперь исчерпывающую последовательность $\{\omega_n\}$ множеств, определенных выбором константы $c = 1/n$, и принимая во внимание, что множество $\{k : m(k) = 0\}$ имеет нулевую меру Лебега, мы заключаем из свойства аддитивности, что $\sigma\left(L|_{H_{\rm ac}}\right) = \sigma_{\rm ac}(A)$. ❑

Отметим, что утверждение этой теоремы справедливо при более слабом условии $(L - z)^{-1} - (A - z)^{-1} \in \mathfrak{S}^1$. Множество $\sigma\left(L|_{H_{\rm ac}}\right)$ в дальнейшем и называется *абсолютно непрерывным спектром оператора* L. Аналогичное теореме 1.9 утверждение справедливо и для возмущений унитарных операторов.

Теорема 1.10. *Если $T = U + \Sigma$, где U – унитарный оператор, а $\Sigma \in \mathfrak{S}^1$, и $\rho(T) \cap \mathbb{D} \neq \varnothing$, то*

(1) $H_{\rm ac}^w(T) = H_{\rm ac}(T)$;

(2) $\sigma\left(T|_{H_{\rm ac}(T)}\right) = \sigma_{\rm ac}(U)$, *где абсолютно непрерывный спектр унитарного оператора U определяется стандартным образом.*

Перейдем к изложению наших результатов. Начнем с возмущений унитарных операторов.

Для данного самосопряженного оператора D обозначим через $\lambda_j(D)$ его собственные значения, упорядоченные по убыванию абсолютной величины.

Теорема 2. *Существует ограниченный вполне неунитарный оператор T, такой что*

(i) *T подобен а. н. унитарному оператору (и, таким образом, $H_{\rm ac}^w(T) = H$);*

(ii) $H_{\rm ac}(T) = \{0\}$;

(iii) $I - T^*T \in \mathfrak{S}^p$ *при любом* $p > 1$.

Более того, для любой монотонно убывающей последовательности $\{\pi_n\} \notin l^1$, $\pi_n > 0$, существует оператор T, удовлетворяющий условиям (i), (ii), *и такой что*

(iii′) $|\lambda_n(I - T^*T)| \leq \pi_n$.

Заметим, что если $0 \notin \sigma(T)$, то условие (iii) эквивалентно утверждению, что оператор T есть сумма оператора из $\mathfrak{S}^p$ и унитарного.

Замечание 1.11. В силу теоремы 1.10 сформулированный результат оптимален. В терминологии Гохберга–Крейна теорема 2 означает, что никакое условие вида $I - T^*T \in \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ – симметрично нормированный идеал компактных операторов, более широкий, чем $\mathfrak{S}^1$, не гарантирует совпадение пространств H^w_{ac} и H_{ac}.

Доказательство теоремы 2. Пусть $H = \ell^2(\mathbb{Z})$. Построим последовательность положительных чисел $\{\rho_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, такую что оператор взвешенного двустороннего сдвига T, заданный формулой

$$Te_j = \rho_{j-1} e_{j-1}, j \in \mathbb{Z},$$

обладает свойствами (i) – (iii). Предположим сначала, что

$$\sum_j |\rho_j - 1|^p < \infty \tag{$*$}$$

при всех $p > 1$. Нам понадобится явная формула для резольвенты оператора T, справедливая в любой точке $\lambda \in \rho(T)$, $|\lambda| \neq 1$:

$$\left((T-\lambda)^{-1} f\right)_m = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k<m} f_k \frac{\lambda^{m-k-1}}{\prod_k^{m-1} \rho_j}, & |\lambda| < 1, \\ \displaystyle -\sum_{k \geq m} f_k \frac{\prod_m^{k-1} \rho_j}{\lambda^{k-m+1}}, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Установим сначала следующую импликацию:

$$D_T (T-z)^{-1} u\big|_{\mathbb{D}} \in \mathbf{H}^2,\ u \neq 0 \Longrightarrow \sum_{n>0} \frac{|1-\rho_n^2|}{\prod_0^{n-1} \rho_j^2} < \infty. \tag{$**$}$$

Это делается прямым вычислением. В рассматриваемой ситуации оператор D_T диагонален:

$$(D_T f)_j = \left|1 - \rho_n^2\right|^{1/2} f_j.$$

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left\| D_T (T-z)^{-1} f \right\|^2 \mathrm{d}\theta &= \sum_n \left|1-\rho_n^2\right| \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k<n} f_k \frac{z^{n-k-1}}{\prod_k^{n-1} \rho_j} \right|^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \sum_n \left|1-\rho_n^2\right| \sum_{k<n} r^{2(n-k-1)} \frac{|f_k|^2}{\prod_k^{n-1} \rho_j^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $D_T\,(T-z)^{-1}f \in \mathbf{H}^2$, если, и только если, величина

$$\sum_n \left|1-\rho_n^2\right| \sum_{k<n} \frac{|f_k|^2}{\prod_k^{n-1}\rho_j^2} = \sum_k \left(\sum_{n>k} \frac{|1-\rho_n^2|}{\prod_k^{n-1}\rho_j^2}\right)|f_k|^2$$

конечна. Это означает, что если $D_T\,(T-z)^{-1}f \in \mathbf{H}^2$, то внутренняя сумма в круглых скобках в правой части конечна при некотором, а значит, и при любом, целом k. Подставляя $k=0$, получим импликацию $(**)$.

Для доказательства существования оператора T, обладающего свойствами (i) — (iii) теперь достаточно предъявить последовательность $\{\rho_j\}$, такую что оператор T подобен унитарному с а. н. спектром, сумма в $(**)$ расходится, и выполняется условие $(*)$. Пусть $a_j = 1-1/j$. Положим

$$\begin{gathered}\rho_j = 1, j \le 1,\\ \rho_{2j} = a_j, j \ge 1,\\ \rho_{2j+1} = a_j^{-1}, j \ge 1.\end{gathered}$$

При таком выборе условие $(*)$ и расходимость суммы в условии $(**)$ видны непосредственно. Для доказательства подобия унитарному оператору, определим последовательность

$$\begin{aligned} w_{2j+1} &= a_j^{-1}, j \ge 1;\\ w_j &= 1,\ j \le 0.\end{aligned}$$

Диагональный оператор W в H, заданный формулой $(Wf)_j = w_j f_j$, очевидным образом ограничен и ограниченно обратим. Легко проверяется, что $W^{-1}TW$ – унитарный оператор двустороннего (невзвешенного) сдвига. Первое утверждение теоремы доказано.

Для того, чтобы проверить второе утверждение теоремы, без потери общности можно предполагать, что $\pi_{2j+1} = \pi_{2j}$. Теперь достаточно взять в рассмотренной конструкции в качестве $\{a_j\}$ любую последовательность положительных чисел, такую что $a_j \to 1$, $|1-a_j| \le \pi_j/2$ и $\sum|1-a_j| = \infty$. ❑

Замечание 1.12. Теорема 2 показывает, что

- Условие линейного роста резольвенты

$$\sup_{z\notin\mathbb{T}} \left(\left|1-|z|\right| \left\|(T-z)^{-1}\right\|\right) < \infty \tag{1.5}$$

  (и даже его комбинация с условиями типа (iii')) также не обеспечивает совпадения пространств H_{ac} and H_{ac}^{w}.

- Подобие операторов, вообще говоря, не сохраняет сильное а. н. подпространство.

Перейдем к возмущениям самосопряженных операторов. Пусть $H = L^2(\mathbb{R})$, $q \notin L^1(\mathbb{R})$ – ограниченная вещественная несобственно интегрируемая функция на $\mathbb{R}$, такая что[1]:

$$\sum_n \left(\int_n^{n+1} |q|^2\right)^{p/2} < \infty \text{ при всех } p > 1.$$

Обозначим через L оператор в H, заданный дифференциальным выражением

$$L = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}q(x)$$

на своей естественной области определения. Заметим, что оператор L подобен оператору $A = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$:

$$L = WAW^{-1},$$

где W – оператор умножения на функцию $\exp\left(-\int_{-\infty}^x q\right)$.

Теорема 1.13.

(i) *Оператор L подобен а. н. самосопряженному оператору* (*и, таким образом,* $H^w_{\mathrm{ac}}(L) = H$)*;*

(ii) $H_{\mathrm{ac}}(L) = \{0\}$*;*

(iii) $(L - z)^{-1} - (A - z)^{-1} \in \mathfrak{S}^p$ *при всех* $p > 1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Доказательство. Пункт (i) немедленно вытекает из абсолютной непрерывности оператора A. Положим $V = \operatorname{Im} L$. Пусть u – сильный гладкий вектор оператора L. Поскольку оператор W коммутирует с умножением на функцию, это означает, что сужения функции

$$\varphi(z) = |V|^{1/2} (A - z)^{-1} g, \; g = Wu,$$

на $\mathbb{C}_\pm$ принадлежат соответствующим классам Харди $\mathbf{H}^2_\pm$. В свою очередь, в силу равенства Парсеваля последнее свойство эквивалентно такому:

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| |V|^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} g \right\|^2 \mathrm{d}t < \infty.$$

С другой стороны:

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| |V|^{1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tA} g \right\|^2 \mathrm{d}t = \int |q(x)| \; |g(x - t)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \|g\|^2 \int |q(x)| \mathrm{d}x = \infty,$$

если $g \neq 0$. Значит, а. н. подпространство оператора L тривиально. Свойство (iii) вытекает из следующего результата Бирмана и Соломяка [67]:

[1]Простейший пример $q(x) = \sin x/x$.

Для любого δ, $1 < \delta < 2$, и любых функций f, g, удовлетворяющих условию

$$\sum_n \left(\int_n^{n+1} |f|^2 \right)^{\delta/2} < \infty, \ \sum_n \left(\int_n^{n+1} |f|^2 \right)^{\delta/2} < \infty,$$

оператор T в пространстве H, заданный формулой

$$(Tu)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy} g(y) u(y) \, \mathrm{d}y,$$

принадлежит $\mathfrak{S}^\delta$.

Применяя эту теорему к функциям $f = q$ и $g(y) = (y - z)^{-1}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, получим, что оператор $V\,(A - z)^{-1} \in \mathfrak{S}^p$, $p > 1$, откуда свойство (iii) следует в силу резольвентного тождества. ❑

Пример, доказывающий теорему 1.13, был построен нами непосредственно. Вместо этого можно было бы взять пример для единичного круга (теорему 2) и применить преобразование Кэли. В таком подходе следует учесть, что преобразование Кэли приводит к оператору, вообще говоря, не имеющему отделимой мнимой части, и, таким образом, следует использовать более общее определение сильного а. н. подпространства [48], упомянутое выше. Заметим еще, что теорему 2 для случая классов $\mathfrak{S}^p$, $p > 1$, можно доказать сведением к теореме 1.13 обратным преобразованием Кэли, однако общее утверждение для круга ((iii') в теореме 2) вряд ли может быть получено на этом пути, поскольку неизвестно соответствующее обобщение использованного нами результата Бирмана–Соломяка.

1.2 Проблема двойственности спектральных компонент

Пусть T – ограниченный оператор, такой что $\sigma(T) \subset \mathbb{T}$.

Определение 1.14. *Замыкание линеала векторов $u \in H$, таких что при всех $v \in H$ некасательные пределы*

$$f^{\pm}_{u,v}(z) = \lim_{\substack{w \to z \\ |w|^{\pm 1} \in \mathbb{D}}} \left\langle (T - w)^{-1} u, v \right\rangle$$

существуют и совпадают при почти всех $z \in \mathbb{T}$, называется сингулярным подпространством оператора T. Оно обозначается $H_s(T)$.

Как обсуждалось во Введении, проблема двойственности [57] состоит в том, справедливо ли равенство

$$(H^w_{\mathrm{ac}}(T))^\perp = H_s(T^*). \tag{1.6}$$

Предложение 1.15 ([50], предложение 6.7)**.** *Если $I - T^*T \in \mathfrak{S}^1$, то равенство* (1.6) *справедливо.*

Заметим, что в работе [50] равенство (1.6) установлено для вполне неунитарных операторов и сильного а. н. подпространства вместо $H^w_{\mathrm{ac}}(T)$. Поскольку по теореме 1.10 сильное и слабое а. н. подпространства совпадают, когда $I - T^*T \in \mathfrak{S}^1$, и обсуждаемое равенство тривиальным образом справедливо для унитарных операторов, отсюда следует сформулированное предложение.

Известно, что (1.6) справедливо и при более слабом предположении, что характеристическая функция имеет некасательные граничные значения в слабом смысле п. в. на вещественной оси [48]. В следующем примере указано несжимающее зацепление двух двусторонних сдвигов, для которого равенство (1.6) не выполняется. В обозначениях определения 1.7 положим:

$$CN(T) := \mathrm{Clos}\left(\widetilde{H^w_+}(T) \vee \widetilde{H^w_-}(T)\right).$$

Пусть $\{\rho_n\}$, $n \geq 0$, – последовательность положительных чисел, монотонно убывающая к нулю, и пусть R – оператор в $l^2(\mathbb{Z})$, заданный равенством $Re_n = \rho_{|n|}e_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Положим $H = l^2(\mathbb{Z}) \oplus l^2(\mathbb{Z})$, и пусть U – оператор правого сдвига в $l^2(\mathbb{Z})$, $Ue_n = e_{n+1}$. Определим оператор T в пространстве H равенством

$$T = \begin{pmatrix} U & R \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

Очевидным образом, $\sigma(T) = \mathbb{T}$.

Теорема 3. *Пусть $\{\rho_j\} \notin l^1$. Тогда для оператора T справедливы следующие утверждения:*

(i) $CN(T) \neq H$;

(ii) $H_s(T^*) = \{0\}$;

(iii) *$T = T_0 + S$, где T_0 – унитарный оператор, а S – оператор, сингулярные числа которого удовлетворяют неравенству $\mu_n(S) \leq \rho_{[n/2]}$.*

Доказательство. Утверждение (iii) выполнено по построению:

$$\mu_{2n}(S) = \mu_{2n+1}(S) = \rho_n,\ n \geq 1.$$

Далее, для любого $\lambda \notin \mathbb{T}$ будем иметь:

$$(T^* - \lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} (U^* - \lambda)^{-1} & 0 \\ -(U^* - \lambda)^{-1} R (U^* - \lambda)^{-1} & (U^* - \lambda)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

принадлежит плотному множеству из определения пространства $H_s(T^*)$. Рассматривая матричный элемент резольвенты $\left\langle (T^* - \lambda)^{-1} f, g \right\rangle$ с вектором g вида $g =$

$\binom{f_1}{0}$, получим, что $f_1 = 0$, поскольку U – а. н. унитарный оператор. То же рассуждение с функцией g вида $g = \binom{0}{f_2}$ показывает, что $f_2 = 0$, и, таким образом, пространство $H_s(T^*)$ тривиально, т. е. выполнено свойство (ii).

Остается проверить свойство (i). Покажем, что на самом деле

$$CN(T) = \begin{pmatrix} l^2(\mathbb{Z}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Включение $CN(T) \supset \binom{l^2(\mathbb{Z})}{0}$ выполнено в силу абсолютной непрерывности оператора U. Проверим, что если для элемента $u = \binom{u_1}{u_2} \in H$ функция

$$\left\langle (T-\lambda)^{-1} u, \begin{pmatrix} e_j \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle (U-\lambda)^{-1} u_1, e_j \right\rangle - \left\langle (U-\lambda)^{-1} R \,(U-\lambda)^{-1} u_2, e_j \right\rangle \tag{1.7}$$

принадлежит H^2 при всех j и ее норма в H^2 ограничена равномерно по j, то $u_2 = 0$. В силу принципа равномерной ограниченности отсюда будет следовать, что $\widetilde{H^w_+} \subset \binom{l^2(\mathbb{Z})}{0}$. Поскольку

$$\left\| \left\langle (U-\cdot)^{-1} u_1, e_j \right\rangle \right\|^2_{H^2} = \sum_{1}^{\infty} |u_{1,k+j}|^2 \le \|u\|^2,$$

достаточно проверить, что если $u_2 \ne 0$, то норма в H^2 второго слагаемого в правой части (1.7) не ограничена при $j \to \infty$. В самом деле, прямое вычисление показывает, что при $\lambda \in \mathbb{D}$

$$\left\langle (U-\lambda)^{-1} R \,(U-\lambda)^{-1} u_2, e_j \right\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s u_{2,s+j+2} \sum_{m=1}^{s+1} \rho_{|m+j|},$$

откуда получим:

$$\left\| \left\langle (U-\cdot)^{-1} R \,(U-\cdot)^{-1} u_2, e_j \right\rangle \right\|^2_{H^2} = \sum_{s=0}^{\infty} |u_{2,s+j+2}|^2 \left| \sum_{m=j+1}^{j+s+1} \rho_{|m|} \right|^2.$$

Предположим, что $u_{2,r} \ne 0$ при некотором r. Тогда при достаточно большом отрицательном j норма в левой части ограничена снизу величиной

$$|u_{2,r}|^2 \left| \sum_{m=j+1}^{r-1} \rho_{|m|} \right|^2,$$

которая стремится к бесконечности при $j \to -\infty$ согласно предположению о последовательности ρ_j. Таким образом, $\widetilde{H^w_+} \subset \binom{l^2(\mathbb{Z})}{0}$. Включение $\widetilde{H^w_-} \subset \binom{l^2(\mathbb{Z})}{0}$ проверяется аналогично. ❑

Из доказательства видно, что в построенном примере подпространства $CN(T)$ и $H^w_{\mathrm{ac}}(T)$ совпадают. Заметим, что условие линейного роста резольвенты (1.5) в этом примере нарушается.

1.3 Случай диссипативных операторов

В этом параграфе изложен наш "положительный" результат об эквивалентности определений абсолютно непрерывного подпространства. В следующей лемме L – произвольный замкнутый оператор, такой что $\sigma(T) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ – дискретное множество, т. е. условие (A) не накладывается.

Лемма 1.16. *Пусть оператор L таков, что точка $-i\tau \in \rho(L)$ при всех достаточно больших τ, и*

$$\mathrm{i}\tau\,(L+\mathrm{i}\tau)^{-1} \xrightarrow{s} I,\ \tau \to +\infty.$$

Тогда

(i) $\overline{(L-z_0)^{-1}\, H_{\mathrm{ac}}^{w,p_1}} = H_{\mathrm{ac}}^{w,p_1} \subset H_{\mathrm{ac}}^{w,p_2}$ *при всех $z_0 \in \rho(L)$ и $1 < p_2 \le p_1 \le 2$;*

(ii) *любое регулярно инвариантное подпространство X оператора L инвариантно в "бытовом" смысле, т. е. $L(\mathcal{D}(L) \cap X) \subset X$, и таким образом, сужение L_X с областью определения $\mathcal{D}(L_X) = \mathcal{D}(L) \cap X$ – плотно заданный замкнутый оператор в X.*

Доказательство. (i). Применяя неравенство Гёльдера к резольвентному тождеству

$$f_{(L-z_0)^{-1}u,v}(z) = \frac{1}{z-z_0}\left(f_{u,v}(z) - f_{u,v}(z_0)\right),$$

получим, что

$$(L-z_0)^{-1}\,\widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p_1}} \subset \widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p_2}}$$

при всех $z_0 \in \rho(L)$. Поскольку линеал в левой части включения не зависит от выбора точки $z_0 \in \rho(L)$ (опять-таки в силу резольвентного тождества), равенство

$$(L-z_0)^{-1}\,\widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p_1}} = (L+i\tau)^{-1}\,\widetilde{H_{\mathrm{ac}}^{w,p_1}}$$

справедливо при любом $\tau > 0$. Далее асимптотика (1.3) позволяет заключить, что этот линеал плотен в H_{ac}^{w,p_1}.

(ii). Для любого $f \in \mathcal{D}(L) \bigcap X$ из тождества

$$(L+i\tau)^{-1} Lf = f - i\tau\,(L+i\tau)^{-1} f$$

следует, что $(L+i\tau)^{-1} Lf \in X$ при всех достаточно больших $\tau > 0$. Умножая на $i\tau$ и переходя к пределу $\tau \to +\infty$, получим, что $Lf \in X$. ❑

Замечание 1.17. Предположение леммы выполнено в двух важных частных случаях: операторы, удовлетворяющие условию (A), и произвольные максимальные диссипативные операторы. Асимптотика (1.3) для максимальных диссипативных операторов вытекает из существования самосопряженной дилатации.

Замечание 1.18. Из леммы 1.16 при $p_1 = p_2 = 2$ вытекает, что пространство $H_{\mathrm{ac}}^w(L)$ в ее условиях регулярно инвариантно, и поэтому сужение $L|_{H_{\mathrm{ac}}^w}$ с естественной областью определения $\mathcal{D}(L) \cap H_{\mathrm{ac}}^w$ будет замкнутым оператором в H_{ac}^w.

Пользуясь случаем, отметим, что в работе [I] в условие леммы 1.16 вкралась опечатка: не исключен случай $p_2 = 1$.

Основной результат этого параграфа относится к случаю диссипативных операторов. Приведем общее определение сильного а. н. подпространства, имеющее смысл в ситуации, когда мнимая часть оператора не отделяется.

Определение 1.19 ([43]). *Пусть L – вполне несамосопряженный максимальный диссипативный оператор. Подпространство*

$$H_{\mathrm{ac}}(L) := \operatorname{Clos} \widetilde{H}_{\mathrm{ac}}(L), \tag{1.8}$$

$$\widetilde{H}_{\mathrm{ac}}(L) := \left\{ \begin{aligned} u \in H\colon \ & (L - z)^{-1} u \text{ аналитична в } \mathbb{C}_+, \\ & \sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \Big(\varepsilon \left\| (L - k - i\varepsilon)^{-1} u \right\|^2 - \operatorname{Im} f_{u,u}(k + i\varepsilon) \Big) \mathrm{d}k < \infty \end{aligned} \right\},$$

называется сильным а. н. подпространством оператора L.

В качестве мотивировки этого определения укажем тождество ($\varepsilon = \operatorname{Im} \lambda$)

$$\left\| V^{1/2} (L - \lambda)^{-1} u \right\|^2 = \varepsilon \left\| (L - \lambda)^{-1} u \right\|^2 - \operatorname{Im} f_{u,u}(\lambda), \tag{1.9}$$

справедливое при всех $\lambda \in \rho(L)$, если выполнено условие (A). Это тождество показывает, что (1.8) – естественное обобщение определения 1.3, а элементы линеала $\widetilde{H}_{ac}(L)$ естественно называть сильными гладкими векторами и в общей ситуации. Заметим, что в силу диссипативности оператора L верхняя грань по $\varepsilon < 0$ интеграла в (1.8) будет конечной при любом $u \in H$, поэтому условие в определении 1.19 относится только к верхней полуплоскости. Сказанное легко вытекает из существования самосопряженной дилатации у L.

Теорема 4. *Для любого вполне несамосопряженного диссипативного оператора L имеем: $H^{w,p}_{\mathrm{ac}}(L) = H^{w}_{\mathrm{ac}}(L) = H_{\mathrm{ac}}(L)$ при всех $p \in (1, 2]$.*

Доказательство. Включение $H^{w}_{\mathrm{ac}} \subset H^{w,p}_{\mathrm{ac}}$ содержится в лемме 1.16 и замечании после нее. Покажем, что в пространстве $H^{w,p}_{\mathrm{ac}}$ имеется плотный линеал, состоящий из сильных гладких векторов. Поскольку $H^{w}_{\mathrm{ac}}(L) \supset H_{\mathrm{ac}}(L)$ согласно следствию 1.6, теорема таким образом будет доказана.

Пусть $\mathcal{D} = (L + \mathrm{i})^{-2}\, \widetilde{H^{w,p}_{\mathrm{ac}}}$. По лемме 1.16 линеал $\mathcal{D}$ плотен в пространстве $H^{w,p}_{\mathrm{ac}}$. Рассмотрим произвольный элемент $u \in \mathcal{D}$. Учитывая (1.2), можно легко проверить, что функция $(L - \cdot - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} u \in L^2(\mathbb{R}, H)$ при любом $\varepsilon > 0$. Покажем сначала, что

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left(\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left\| (L - k - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} u \right\|^2 \mathrm{d}k \right) < \infty. \tag{1.10}$$

Для $\varepsilon > 0$ и $t < 0$ положим:

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k + \mathrm{i}\varepsilon) t} (L - k - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} u \, \mathrm{d}k. \tag{1.11}$$

Тогда

1°. Предел в (1.11) существует при всех $t < 0$ и не зависит от ε.

2°. $\sup_{t<0} \|u(t)\| < \infty$.

Утверждение 1° немедленно следует из того, что (1.11) можно переписать в виде ($\lambda = k + \mathrm{i}\varepsilon$)

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}}{(\lambda+\mathrm{i})^2} (L-\lambda)^{-1} u_2 \, \mathrm{d}k - \mathrm{e}^t(\mathrm{i}t\, u_1 + u),$$

где $u_1 = (L+\mathrm{i})u$, $u_2 = (L+\mathrm{i})^2 u$.

Установим 2°. При любом $v \in H$ будем иметь:

$$\langle u(t), v\rangle = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}}{(\lambda+\mathrm{i})^2} f_{u_2,v}(\lambda)\, \mathrm{d}k + r_t,$$

где $|r_t| \le C\|v\|$, причем эта оценка равномерна по $t < 0$. Поскольку функция $f_{u_2,v} \in H^p$, можно перейти к пределу $\varepsilon \to 0$ в полученном интеграле и воспользоваться неравенством Гёльдера, что дает:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}}{(\lambda+\mathrm{i})^2} f_{u_2,v}(\lambda)\, \mathrm{d}k \right| \le C \left\| f_{u_2,v} \right\|_{H^p} \le C\|v\|,$$

причем константа C не зависит от t и v. Отсюда следует выполнение свойства 2°.

Пусть $\mathcal{F}$ – сопряженное преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}, H)$. В терминах преобразования Фурье равенство (1.11) означает, что сужение функции

$$\Psi(t) = -\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left[(L - \cdot - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} u\right]$$

на отрицательную полуось совпадает с функцией $\mathrm{e}^{\varepsilon t} u(t)$. С другой стороны, $\Psi(t) = 0$ при $t > 0$ по теореме Пэли–Винера. Применяя равенство Парсеваля и учитывая свойство 2°, получим, что

$$\int_{\mathbb{R}} \left\| (L - k - \mathrm{i}\varepsilon)^{-1} u \right\|^2 \mathrm{d}k = C \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2\varepsilon t} \left\| u(t) \right\|^2 \, \mathrm{d}t \le C\varepsilon^{-1}.$$

Оценка (1.10) доказана. Остается заметить, что

$$\operatorname{Im} f_{u,u}(\lambda) = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\lambda+\mathrm{i}} \left(f_{u_1,u}(\lambda) - f_{u_1,u}(-\mathrm{i}) \right) \right],$$

откуда следует, что функция $\operatorname{Im} f_{u,u}(k + i\varepsilon)$ несобственно интегрируема по k на вещественной оси, и ее интегралы равномерно ограничены по ε. Это и (1.10) означают, что

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}} \left(\varepsilon \left\| (L - k - i\varepsilon)^{-1} u \right\|^2 - \operatorname{Im} f_{u,u}(k + i\varepsilon) \right) \mathrm{d}k < \infty,$$

то есть $\mathcal{D} \subset \widetilde{H}_{\mathrm{ac}}(L)$. ❑

В дальнейшем будем называть диссипативный оператор L *абсолютно непрерывным*, если $H^w_{\mathrm{ac}}(L) = H$. В силу предыдущей теоремы такая терминология не вызывает недоразумений и удобна в ситуациях, когда у оператора может быть нетривиальная самосопряженная часть, абсолютно непрерывная в обычном смысле спектральной теории.

1.4 Когда а. н. подпространство тривиально?

В этом разделе мы установим условие тривиальности слабого а. н. подпространства, которое будет использовано в дальнейшем. В диссипативном случае это условие в неявной форме содержится в работе [52]. В следующем предложении L – оператор, удовлетворяющий условию (A).

Предложение 1.20. $H^w_{\mathrm{ac}}(L) = \{0\}$, *если при п. в.* $k \in \mathbb{R}$

$$D(z) \equiv \sqrt{\operatorname{Im} z}\,(L^* - z)^{-1}\,|V|^{1/2} \xrightarrow{\ s\ } 0 \tag{1.12}$$

as $\operatorname{Im} z \downarrow 0$.

В случае, когда оператор L диссипативен, условие (1.12) также и необходимо для тривиальности пространства $H_{\mathrm{ac}}(L)$, см. [52].

Доказательство. Задаваясь векторами $w \in \widetilde{H^w_{\mathrm{ac}}}$ и $v \in \mathcal{D}(V)$, обозначим через $F_\pm(z)$ сужения функции $\left\langle (L-z)^{-1} w, |V|^{1/2} v \right\rangle$ соответственно на полуплоскости $\mathbb{C}_\pm$. Покажем, что если (1.12) удовлетворяется, то $F_\pm$ обращаются в нуль тождественно при всех $v \in H$. Отсюда будет следовать требуемое утверждение. В самом деле, тогда при всех невещественных $z \in \rho(L^*)$ и всех $v \in \mathcal{D}(V)$ будем иметь:

$$\left\langle w, (L^* - z)^{-1}\,|V|^{1/2}\, v \right\rangle = \left\langle (L - \overline{z})^{-1} w, |V|^{1/2} v \right\rangle = 0.$$

С другой стороны, из предложения 1.2 следует, что пространство, натянутое на линеалы $(L^* - z)^{-1} \operatorname{Ran} V$, $z \notin \mathbb{R}$, $z \in \rho(L^*)$, совпадает с H, поскольку L – вполне несамосопряженный оператор по условию (A). Стало быть, $w = 0$, что и требовалось.

Поскольку $F_\pm \in \mathbf{H}^2_\pm$ для $w \in \widetilde{H^w_{\mathrm{ac}}}$, достаточно проверить, что граничные значения $F_\pm(k)$ совпадают при п. в. $k \in \mathbb{R}$. Имеем ($z = k + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$):

$$F_+(z) - F_-(\overline{z}) = 2i\varepsilon \left\langle (L - \overline{z})^{-1} (L - z)^{-1} w, |V|^{1/2} v \right\rangle = \\ 2i \left\langle \sqrt{\varepsilon}\,(L - z)^{-1} w, D(z) v \right\rangle \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

при п. в. $k \in \mathbb{R}$. На последнем шаге здесь было учтено свойство (1.2) слабых гладких векторов. ❑

Отметим, что в диссипативном случае в этом критерии достаточно проверять сильную сходимость на плотном множестве, поскольку, если L диссипативен, то функция $D(z)$ ограничена в $\mathbb{C}_+$. В самом деле, согласно тождеству (1.9), при всех $z \in \mathbb{C}_+$ и $u \in H$ будем иметь ($\varepsilon = \operatorname{Im} z$):

$$\|D(z)D^*(z)u\|^2 = -\varepsilon \operatorname{Im} f_{u,u}(\overline{z}) - \varepsilon^2 \left\|(L-\overline{z})^{-1} u\right\|^2 \le \varepsilon \left\|(L-\overline{z})^{-1} u\right\| \\ \left(\|u\| - \varepsilon \left\|(L-\overline{z})^{-1} u\right\|\right) \le \frac{1}{4}\|u\|,$$

так как $\varepsilon \| \left(L-\overline{z}\right)^{-1} \| \le 1$ в силу диссипативности оператора L.

§5. Согласно теореме 1.9 $\sigma\left(L_1|_{H_{\rm ac}(L_1)}\right) = \sigma\left(L_2|_{H_{\rm ac}(L_2)}\right)$ для любых операторов $L_{1,2}$, таких что $L_1 - L_2 \in \mathfrak{S}^1$ и $\operatorname{Im} L_{1,2} \in \mathfrak{S}^1$. Вопрос о том, верно ли, что спектры сужений $L_1|_{H_{\rm ac}(L_1)}$ и $L_2|_{H_{\rm ac}(L_2)}$ совпадают для пары операторов L_1, L_2, отличающихся на ядерный, по-видимому, открыт, если операторы $\operatorname{Im} L_{1,2}$ не являются ядерными по отдельности. Нам понадобится результат такого типа в специальном случае.

Лемма 1.21. *Пусть L и $\widetilde{L}$ - диссипативные операторы с ограниченной мнимой частью, такие что $\widetilde{L} - L = i\Gamma$ для некоторого оператора $\Gamma \in \mathfrak{S}^1$, $\Gamma \ge 0$. Тогда существует множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ полной меры, такое что если $k \in \mathcal{M}$ и*

$$\tilde{D}(k+i\varepsilon) \equiv \sqrt{\varepsilon}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1} \widetilde{V}^{1/2} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0,$$

то и $D(k+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0$.

В доказательстве этого утверждения будет использован следующий факт.

Лемма 1.22. *Пусть D – диссипативный оператор с ограниченной мнимой частью, а V_1 и V_2 – произвольные операторы, такие что $0 \le V_1 \le \operatorname{Im} D$, $0 \le V_2 \le \operatorname{Im} D$. Тогда операторы*

$$U(z) = I + i\sqrt{V_1}\,(D^* - z)^{-1}\sqrt{V_1}$$

и

$$W(z) = \sqrt{V_2}\,(D^* - z)^{-1}\sqrt{V_1}$$

суть сжатия при любом $z \in \mathbb{C}_+$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} I - U^*(z)U(z) = I - \left(I - i\sqrt{V_1}\,(D-\overline{z})^{-1}\sqrt{V_1}\right)\left(I + i\sqrt{V_1}\,(D^*-z)^{-1}\sqrt{V_1}\right) = \\ i\sqrt{V_1}\,(D-\overline{z})^{-1}\left((D^*-z) - (D-\overline{z}) + iV_1\right)(D^*-z)^{-1}\sqrt{V_1} = \\ \sqrt{V_1}\,(D-\overline{z})^{-1}\left(2\varepsilon + 2\operatorname{Im} D - V_1\right)(D^*-z)^{-1}\sqrt{V_1} \ge \\ \sqrt{V_1}\,(D-\overline{z})^{-1} V_2\,(D^*-z)^{-1}\sqrt{V_1} \equiv W^*(z)W(z) \ge 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

❑

Доказательство леммы 1.21. Пусть $\tilde{D}(k+i\varepsilon) \xrightarrow{s} 0$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$. Заметим, что для любого $u \in H$

$$\left\|\sqrt{\Gamma}u\right\|^2 = (\Gamma u, u)_H \leq \left(\widetilde{V}u, u\right)_H = \left\|\sqrt{\widetilde{V}}u\right\|^2. \tag{1.14}$$

Следовательно, существует сжимающий оператор $T\colon \overline{\operatorname{Ran}\widetilde{V}} \to \overline{\operatorname{Ran}\Gamma}$, такой что $T\sqrt{\widetilde{V}} = \sqrt{\Gamma}$. Переходя к сопряженным, получим:

$$\sqrt{\widetilde{V}}T^* = \sqrt{\Gamma},$$

и, следовательно ($z = k + i\varepsilon$),

$$\sqrt{\varepsilon}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1}\sqrt{\Gamma} = \tilde{D}(z)T^* \xrightarrow{s} 0.$$

Покажем сначала, что

$$\sqrt{\varepsilon}\,(L^* - z)^{-1}\sqrt{\Gamma} \xrightarrow{s} 0,$$

если k не принадлежит некоторому множеству нулевой меры. Имеем:

$$\sqrt{\varepsilon}\,(L^* - z)^{-1}\sqrt{\Gamma}\cdot G(z) = \sqrt{\varepsilon}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1}\sqrt{\Gamma}, \tag{1.15}$$

где

$$G(z) = I + i\sqrt{\Gamma}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1}\sqrt{\Gamma}.$$

Пусть $V = \operatorname{Im} L$. Из леммы 1.22 следует, что $G(z)$ – сжимающая функция в $\mathbb{C}_+$, а из ядерности оператора Γ – что $\sqrt{\Gamma}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1}\sqrt{\Gamma} \in \mathfrak{S}^1$. Стало быть, $G(z)$ – сжимающая аналитическая оператор-функция в верхней полуплоскости, такая что $I - G(z) \in \mathfrak{S}^1$. Далее, оператор $G(z)$ имеет ограниченный обратный при достаточно большой мнимой части $\operatorname{Im} z$, поскольку $G(z) \to I$ по операторной норме при $\operatorname{Im} z \to +\infty$, так как мнимая часть оператора $\widetilde{L}$ ограничена. Следовательно, по теореме Секефальви-Надя–Фояша функция $G(z)$ обладает скалярным кратным. По теореме Фату [64] отсюда вытекает существование сильных граничных значений $G^{-1}(k) = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} G^{-1}(k+i\varepsilon)$ у функции $G^{-1}(z)$ при п. в. $k \in \mathbb{R}$. Таким образом, если k не принадлежит множеству нулевой меры, то

$$\sqrt{\varepsilon}\,(L^* - z)^{-1}\sqrt{\Gamma} = \sqrt{\varepsilon}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1}\sqrt{\Gamma}\cdot G^{-1}(z) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0.$$

Теперь мы можем проверить выполнение условия (1.12) для оператора L. Имеем:

$$\sqrt{\varepsilon}\,(L^* - z)^{-1}\sqrt{V} = \sqrt{\varepsilon}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1}\sqrt{V} - i\sqrt{\varepsilon}\,(L^* - z)^{-1}\sqrt{\Gamma}\cdot Q(z), \tag{1.16}$$

где $Q(z)=\sqrt{\Gamma}\left(\widetilde{L}^{*}-z\right)^{-1}\sqrt{V}$ – ограниченная аналитическая функция в $\mathbb{C}_{+}$ в силу леммы 1.22. Вычисление, аналогичное (1.14), показывает, что первое слагаемое в правой части (1.16) есть $\tilde{D}(z)Q$ для некоторого ограниченного оператора Q, и поэтому сильно сходится к нулю. Применяя теорему Фату к функции $Q(z)$, убеждаемся, что второе слагаемое также сходится к нулю, если k не принадлежит множеству нулевой меры. ❑

Учитывая предложение 1.20, получим такое

Следствие 1.23. *В условиях леммы 1.21 если $\tilde{D}(k+i\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s}0$ при п. в. $k\in\mathbb{R}$, то $H_{\mathrm{ac}}(L)=\{0\}$.*

При исследовании операторов Дирака нам понадобится обобщение этого условия тривиальности а. н. подпространства на случай, когда ядерна разность резольвент.

Лемма 1.24. *Пусть L и $\widetilde{L}$ - диссипативные операторы с ограниченными мнимыми частями, такие что*

$$\left(L-z\right)^{-1}-\left(\widetilde{L}-z\right)^{-1}\in\mathfrak{S}^{1},\quad z\in\rho(L)\cap\rho(\widetilde{L}). \tag{1.17}$$

Предположим, что $\widetilde{L}-L=i\Gamma$ для некоторого $\Gamma\geq 0$. Тогда существует множество $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}$ полной меры, такое что при $k\in\mathcal{M}$ если $(z=k+i\varepsilon)$:

$$\tilde{D}(k+i\varepsilon)\equiv\sqrt{\varepsilon}\left(\widetilde{L}^{*}-z\right)^{-1}\widetilde{V}^{1/2}\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s}0,$$

то и

$$D(k+i\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s}0.$$

Доказательство. Рассуждение дословно повторяет доказательство леммы 1.21 вплоть до строки (1.15). Так же, как и в доказательстве леммы 1.21, из леммы 1.22 следует, что $G(z)$ – сжимающая функция в $\mathbb{C}_{+}$. Покажем, что эта функция обладает скалярным кратным[2]. Пусть $\{X_N\}_{N=1}^{\infty}$ – произвольный возрастающий по включению набор конечномерных подпространств в H, такой что $\bigvee_N X_N=H$, P_N – ортогональный проектор на X_N в H. Будем обозначать индексом N блоки операторов, отвечающие пространствам X_N, т. е. $G_N:=P_N G|_{X_N}$ и т. п. Положим: $g_N(z)=\det G_N(z)$. Проверим, что существует подпоследовательность N_k, такая что $g_{N_k}(z)$ имеет предел при $k\to\infty$ при всех $z\in\mathbb{C}_{+}$, и что этот предел $g(z)=\lim g_{N_k}(z)$ и является искомым скалярным кратным. Заметим, что оператор $G(z)$ имеет ограниченный обратный при достаточно большом $\operatorname{Im} z$, поскольку $G(z)\to I$

[2]Можно было бы доказать, что функция $G(z)$ представима в виде "единица плюс ядерная", и свести таким образом дело к доказательству леммы 1.21, но избранный нами путь представляется кратчайшим.

по операторной норме при $\operatorname{Im} z \to +\infty$. Выберем произвольное $z_0 \in \mathbb{C}_+$, такое что $\|I - G(z_0)\| \le 1/2$, и таким образом оператор $T = G(z_0)$ имеет ограниченный обратный. Тогда оператор T_N имеет ограниченный обратный при любом N, а $|\det T_N| \le 1$, так как T – сжатие. Имеем:

$$g_N(z) = \det G_N(z) = \det T_N \cdot \det\left(I_N + T_N^{-1}\left(G_N(z) - T_N\right)\right). \tag{1.18}$$

Убедимся, что второй сомножитель в правой части имеет предел при $N \to \infty$. Для этого сначала проверим, что $G(z) - T \in \mathfrak{S}^1$. Имеем:

$$G(z) - T = i\sqrt{\Gamma}\left(\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1} - \left(\widetilde{L}^* - z_0\right)^{-1}\right)\sqrt{\Gamma} =$$
$$i(z - z_0)\sqrt{\Gamma}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1}\cdot\left(\widetilde{L}^* - z_0\right)^{-1}\sqrt{\Gamma}.$$

Теперь достаточно проверить, что оператор $Z\colon = \sqrt{\Gamma}\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1} \in \mathfrak{S}^2$ при каком-либо (а тогда и при любом) $z \in \mathbb{C}_+$. Применяя резольвентное тождество дважды, для любого $z \in \mathbb{C}_+ \cap \rho(L) \cap \rho(\widetilde{L})$ будем иметь:

$$Z^*Z = \left(\widetilde{L} - \overline{z}\right)^{-1}\Gamma\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1} = (I + \text{огранич. оператор})\left(\widetilde{L} - z\right)^{-1}\Gamma\left(\widetilde{L}^* - z\right)^{-1} =$$
$$(\text{огранич. оператор})\left[\left(\widetilde{L} - z\right)^{-1}\Gamma\left(L - z\right)^{-1}\right](I + \text{огранич. оператор}).$$

Оператор в квадратных скобках ядерен, поскольку в силу того же резольвентного тождества и условия теоремы

$$i[\cdots] = (L - z)^{-1} - \left(\widetilde{L} - z\right)^{-1} \in \mathfrak{S}^1.$$

Значит, ядерен и оператор Z^*Z, и поэтому $Z \in \mathfrak{S}^2$. Таким образом, $G(z) - T \in \mathfrak{S}^1$, и, следовательно, $G_N - T_N \xrightarrow{\mathfrak{S}^1} G - T$. Далее, $T_N^{-1} \xrightarrow{s} T^{-1}$ при сделанном выборе точки z_0. Из этих фактов и стандартных свойств ядерных операторов получим, что

$$\det\left(I_N + T_N^{-1}\left(G_N - T_N\right)\right) \longrightarrow \det\left(I + T^{-1}\left(G - T\right)\right).$$

Выберем теперь подпоследовательность чисел N, такую что $\det T_N$ сходится при $N \to \infty$ вдоль этой подпоследовательности. Такой выбор возможен, так как T – сжатие, и поэтому $|\det T_N| \le 1$. Чтобы избежать громоздких обозначений, в дальнейшем мы считаем, что предельный переход $N \to \infty$ всегда осуществляется вдоль этой подпоследовательности. По построению, каждый сомножитель в правой части (1.18) имеет предел, и существование предельной функции $g(z)$ установлено. Далее, g – ограниченная аналитическая функция в верхней полуплоскости ($|g(z)| \le 1$), поскольку функции g_N аналитические и сжимающие в $\mathbb{C}_+$ при каждом N.

Убедимся, что $g \not\equiv 0$. Во-первых, в силу аналитической теоремы Фредгольма

$$\det\left(I + T^{-1}\left(G(z) - T\right)\right) \neq 0$$

при всех $z \in \mathbb{C}_+$ за исключением разве лишь дискретного множества. Остается показать, что $\lim \det T_N \neq 0$. Для этого рассмотрим величину $|\det T_N|^2 = \det\left(T_N^* T_N\right)$. Из тождества (1.13) видно, что $I - T^*T \in \mathfrak{S}^1$, а выкладка, аналогичная (1.13), показывает, что

$$I_N - T_N^* T_N = P_N \sqrt{\Gamma}\left(\widetilde{L} - \overline{z}_0\right)^{-1}\left(2\varepsilon + 2\widetilde{V} - \sqrt{\Gamma} P_N \sqrt{\Gamma}\right)\left(\widetilde{L}^* - z_0\right)^{-1}\sqrt{\Gamma}\Big|_{X_N}.$$

По общим свойствам операторов со следом отсюда вытекает, что правая часть, продолженная нулем на $X_N^{\perp}$, сходится по ядерной норме к $I - T^*T$. Значит,

$$\det\left(T_N^* T_N\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \det T^*T,$$

а $\det T^*T \neq 0$, поскольку $\ker T$ тривиально.

Функция $\Omega(z) = g(z)G^{-1}(z)$ будет сжимающей ($\|\Omega(z)\| \leq 1$) ввиду оценки $|g_N(z)|\left\|G_N^{-1}(z)\right\| \leq 1$, справедливой при всех N и всех z, таких что $g_N(z) \neq 0$, и таким образом $g(z)$ – скалярное кратное функции G. Из существования скалярного кратного и теоремы Фату теперь следует существование п. в. граничных значений $G^{-1}(k) = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} G^{-1}(k + i\varepsilon)$. Конец доказательства дословно совпадает с концом доказательства леммы 1.21. ❑

Следующее утверждение содержит частичный ответ на вопрос о сохранении а. н. спектра при ядерном возмущении в ситуации, когда возмущение затрагивает только вещественную часть. В дальнейшем оно не используется, но может представлять самостоятельный интерес.

Предложение 1.25. *Пусть L_1 и L_2 – вполне несамосопряженные диссипативные операторы с ограниченной и одинаковой мнимой частью, т. е.* $\operatorname{Im} L_1 = \operatorname{Im} L_2$. *Если*

$$(L_1 - z)^{-1} - (L_2 - z)^{-1} \in \mathfrak{S}^1$$

для некоторого $z \in \mathbb{C}_-$, то $H_{\mathrm{ac}}(L_1) = \{0\}$ тогда, и только тогда, когда $H_{\mathrm{ac}}(L_2) = \{0\}$.

В доказательстве будет использована явная формула для резольвенты минимальной самосопряженной дилатации, построенной Павловым [52]. Пусть D – максимальный диссипативный вполне несамосопряженный оператор, имеющий ограниченную мнимую часть $V = \operatorname{Im} D$. Положим: $E = \overline{\operatorname{Ran} V}$, χ_- – индикатор отрицательной полуоси $\mathbb{R}_-$. Тогда существует самосопряженный оператор $\mathcal{L}$ в пространстве $H \oplus L^2(\mathbb{R}, E)$, такой что при любом $z \in \mathbb{C}_+$ его резольвента задается формулами [47] ($u \in H$, $g \in L^2(\mathbb{R}, E)$):

$$(\mathcal{L} - z)^{-1} \begin{pmatrix} u \\ g \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (L^* - z)^{-1} F(u, g) \\ ie^{-iz\xi}\chi_- \left[\widehat{g}(z) - \sqrt{2V}\,(L^* - z)^{-1} F(u, g)\right] - i\int_{\xi}^{+\infty} e^{iz(t-\xi)} g(t)\mathrm{d}t \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

$$F(u, g)\colon = u - i\sqrt{2V}\widehat{g}(z)$$
$$\widehat{g}(z)\colon = \int_0^{+\infty} e^{izt} g(t)\mathrm{d}t.$$

Из этой формулы легко видеть, что подпространство

$$\mathcal{D}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\colon g(x) = 0 \text{ при п. в. } x \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

инвариантно относительно оператора $e^{it\mathcal{L}}$ при $t < 0$ (его действие на $\mathcal{D}_-$ совпадает с левым сдвигом на $|t|$ единиц).

Сформулируем нужную нам часть теоремы о структуре дилатации $\mathcal{L}$.

Теорема 1.26 ([52])**.** *Оператор $\mathcal{L}$ имеет абсолютно непрерывный спектр. Пусть P_H – ортопроектор на подпространство H в пространстве $\mathcal{H}$, и пусть $\mathcal{H}_- = \bigvee_{t\in\mathbb{R}} e^{it\mathcal{L}_1}\mathcal{D}_-$. Тогда для линеала сильных гладких векторов оператора D справедлива формула:*

$$\widetilde{H}_{\mathrm{ac}}(D) = P_H(\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_-).$$

В частности, а. н. подпространство $H_{\mathrm{ac}}(D)$ тривиально тогда, и только тогда, когда $\mathcal{H}_- = \mathcal{H}$.

Заметим, что пространство $\mathcal{N}$ и оператор A_0 в теореме 1.5 в диссипативном случае – это соответственно пространство $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_-$ и сужение на него оператора $\mathcal{L}$.

Доказательство предложения 1.25. Заметим, что пространство $\mathcal{H}$, его подпространство $\mathcal{D}_-$, функция F и действие оператора $e^{it\mathcal{L}}$ на подпространстве $\mathcal{D}_-$ при $t < 0$ не зависят от вещественной части оператора D. Пусть $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – дилатации (1.19) операторов L_1, L_2 соответственно. Разность их резольвент имеет вид:

$$(\mathcal{L}_1 - z)^{-1} - (\mathcal{L}_2 - z)^{-1} = \begin{pmatrix} \left((L_1 - z)^{-1} - (L_2 - z)^{-1}\right) F \\ ie^{-iz\xi}\chi_-\sqrt{2V}\left((L_1 - z)^{-1} - (L_2 - z)^{-1}\right) F \end{pmatrix},$$

где $F\colon \mathcal{H} \to H$ – ограниченный оператор. Видно, что

$$(\mathcal{L}_1 - z)^{-1} - (\mathcal{L}_2 - z)^{-1} \in \mathfrak{S}^1.$$

Из ядерной теории рассеяния для самосопряженных операторов, см. например [60], и абсолютной непрерывности операторов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ вытекает, что волновой оператор $W = \operatorname*{s-lim}_{t\to+\infty} e^{i\mathcal{L}_1 t}e^{-i\mathcal{L}_2 t}$ существует и задает унитарную эквивалентность между операторами $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Далее, из свойства экспонент, упомянутого в начале доказательства, вытекает, что $W|_{\mathcal{D}_-} = I$. Это означает, в частности, что если $\bigvee_{t\in\mathbb{R}} e^{it\mathcal{L}_1}\mathcal{D}_- = \mathcal{H}$, то и $\bigvee_{t\in\mathbb{R}} e^{it\mathcal{L}_2}\mathcal{D}_- = \mathcal{H}$. Из теоремы 1.26 теперь следует, что а. н. подпространства операторов L_1 и L_2 тривиальны либо нетривиальны одновременно, что и требовалось. ❑

Поясним смысл условия (1.12) в диссипативном случае в терминах функциональной модели и соответствущей динамики. Для простоты будем предполагать, что оператор $V = \operatorname{Im} L$ ограничен. Определим характеристическую функцию оператора L формулой

$$S(z) = I + 2i\sqrt{V}\,(L^* - z)^{-1}\sqrt{V}. \tag{1.20}$$

Следующие факты хорошо известны (и очевидны из выкладки (1.13) с $V_1 = 2\operatorname{Im} D$, $V_2 = 0$). Функция S представляет собой сжимающую ($\|S(z)\| \le 1$) аналитическую функцию в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ со значениями в пространстве $\mathbf{B}(E)$, причем

$$I - S^*(z)S(z) = 2D^*(z)D(z),\ z \in \mathbb{C}_+.$$

Таким образом, множество $\{k \in \mathbb{R}\colon D(k+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0\}$ с точностью до множества нулевой меры совпадает с множеством $k \in \mathbb{R}$, таких что граничное значение $S(k)$ – изометрический оператор. В частности, $D(k+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0$ при п. в. $k \in \mathbb{R}$ тогда, и только тогда, когда операторы $S(k)$ изометричны при п. в. $k \in \mathbb{R}$, т. е. функция S – внутренняя. Как показано в [52, 64], сужение оператора дилатации $\mathcal{L}$ из теоремы 1.26 на его приводящее подпространство $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_-$ унитарно эквивалентно оператору умножения в весовом пространстве вектор-функций $L^2(\mathbb{R}, \Delta)$, $\Delta(k)\colon = I - S^*(k)S(k)$. Таким образом, если условие (1.12) выполнено, то $\mathcal{H}_- = \mathcal{H}$. Пусть $Z_t = e^{itL}$, $t > 0$. Согласно общей теории функциональной модели [52, 64], если характеристическая функция оператора внутренняя, то $Z_t^* \xrightarrow{s} 0$. Получили такое

Следствие 1.27. *Пусть $D(k+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0$. Тогда $e^{-tL^*t} \xrightarrow{s} 0$ при $t \to +\infty$.*

Глава II. Абсолютно непрерывное подпространство дифференциальных операторов с медленно убывающим взаимодействием

2.1 Формулировка основных результатов

В этой главе изучается структура существенного спектра одномерных дифференциальных операторов на полуоси при медленно убывающем комплексном возмущении. Будут доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. *Пусть* $\{q_j\}$ *– последовательность комплексных чисел, таких что* $\operatorname{Im} q_j \geq 0$ *и* $\operatorname{Im} q_j \to 0$, *и пусть* l *– дискретный оператор Шрёдингера, определенный в пространстве* $l^2(\mathbb{N})$ *матрицей*

$$\begin{pmatrix} q_1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & q_2 & 1 & \ddots \\ 0 & 1 & q_3 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Если абсолютно непрерывное подпространство оператора l *нетривиально, то* $\operatorname{Im} q \in l^1$.

Теорема 6. *Пусть* q *– локально ограниченная функция на* $\mathbb{R}_+$, *такая что* $\operatorname{Im} q \geq 0$ *и* $\operatorname{Im} q(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$. *Предположим, что функция* $\operatorname{Re} q$ *ограничена снизу, а величина* $\sup_n \int_n^{n+1} |\operatorname{Re} q|^2 \, \mathrm{d}t$ *конечна, и зададим оператор Шрёдингера* l *с потенциалом* q *в пространстве* $L^2(\mathbb{R}_+)$ *формулой* $lu = -u'' + qu$ *на области определения, выделенной произвольным самосопряженным граничным условием в нуле. Если абсолютно непрерывное подпространство оператора* l *нетривиально, то* $\operatorname{Im} q \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Рассмотрим дифференциальное выражение вида

$$\ell_Q := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + Q(x), \quad x \in [0, \infty), \tag{2.1}$$

где

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & q_{12}(x) \\ q_{21}(x) & q_{22}(x) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Пусть $Q(x)$ – ограниченная функция, такая что $\operatorname{Im} Q(x) \geq 0$ при п. в. $x > 0$, а $q_{12}(x)$ и $q_{21}(x)$ – вещественные функции.

Теорема 7. *Пусть* L *– дифференциальный оператор в пространстве* $L^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$, *заданный выражением (2.1) на области определения, выделенной каким-либо самосопряженным граничным условием при* $x = 0$, *такой что множество* $\sigma(L) \cap \mathbb{C}_+$ *дискретно. Если абсолютно непрерывное подпространство оператора* L *нетривиально, то* $\operatorname{Im} Q(x) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$.

Формулировка теоремы 7 нуждается в пояснении. Оператор Дирака L в ее условиях не является, вообще говоря, вполне несамосопряженным, и поэтому под а. н. подпространством в ней понимается слабое а. н. подпространство H^w_{ac}. Напомним, что, согласно результатам предыдущей главы, сильной и слабое а. н. подпространства вполне несамосопряженной части оператора Дирака L совпадают. Утверждение теоремы 7 состоит в том, что, если $\operatorname{Im} Q(x) \notin L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^2)$, то вполне несамосопряженная часть оператора L имеет тривиальное а. н. подпространство в смысле любого из (эквивалентных в этой ситуации) определений, и самосопряженная часть оператора L имеют тривиальное а. н. подпространство в смысле спектральной теоремы. Условие дискретности невещественного спектра в теореме 3 выполнено, например, если $Q(x) \longrightarrow 0$ при $x \to +\infty$.

Перед тем, как перейти к доказательству этих трех теорем, заметим, что абстрактная локальная теория рассеяния для ядерных возмущений самосопряженных операторов, построенная в работах [43,46], показывает, что абсолютно непрерывные части произвольных операторов L и L_0 квазиподобны, а их спектры совпадают, если оператор L_0 самосопряжен, а оператор $L - L_0$ является ядерным. Набросок доказательства этого утверждения дан выше в теореме 1.9. В рассматриваемой ситуации отсюда следует, что а. н. спектр оператора l совпадает с а. н. спектром самосопряженного оператора Шрёдингера $\operatorname{Re} l$, если $\operatorname{Im} q \in L^1$ ($\operatorname{Im} q \in l^1$ в дискретном случае, $\operatorname{Im} Q \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^2)$ в случае оператора Дирака). Таким образом, теоремы 5–7 говорят о том, что для диссипативных дифференциальных операторов второго порядка на полуоси существование а. н. спектра эквивалентно наличию теории рассеяния. По-видимому, ранее нетривиальные *негативные* результаты об абсолютно непрерывном спектре несамосопряженных дифференциальных операторов известны не были.

Отметим, что при доказательстве теорем 5–7 нам удалось избежать использования в явной форме функциональной модели Секефальви-Надя–Фояша [64], обычно используемой при изучении а. н. подпространства диссипативных операторов [43,49]. Если же воспользоваться моделью, то эти теоремы можно дополнить следующим выводом о динамике, порожденной операторами.

Следствие 2.1. *В условиях теорем 5–7 пусть $Z_t = e^{itl}$, $t \geq 0$ в ситуации теорем 5, 6, $Z_t = e^{itL}$ в ситуации теоремы 7. Тогда при $t \to +\infty$*

$$Z_t \xrightarrow{s} 0, \quad Z_t^* \xrightarrow{s} 0.$$

Все три теоремы доказываются проверкой выполнения условия предложения 1.20 в рассматриваемых ситуациях. Первый шаг доказательства одинаков во всех случаях и состоит в вычислении предела $D(k + i\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Оказывается, что этот предел равен нулю, если найдется обобщенное собственное решение дифференциального (разностного) уравнения $lu = ku$, которое не будет квадратично суммируемым с весом $\operatorname{Im} q$ (леммы 2.3, 2.7(ii), 2.21 соответственно). При этом хотя бы одно решение, квадратично суммирумое с весом $\operatorname{Im} q$, у этого уравнения заведомо есть – это граничное значение Вейлевского решения из соответствующей полуплоскости (леммы 2.2, 2.6, 2.19). Умножая вронскиан Вейлевского решения и какого-либо линейно независимого от него решения на $\operatorname{Im} q$, интегрируя полученное равенство и применяя неравенство Шварца, мы рассчитываем получить, что это второе решение не будет квадратично суммируемым с весом $\operatorname{Im} q$. Препятствие на этом пути состоит в том, что условия интегрируемости с весом относятся к самим решениям, а вронискиан наряду с решениями содержит их производные (значения в соседней точке в дискретном случае). Для операторов Дирака и дискретного Шрёдингера это обстоятельство приводит к тому, что результат первоначально удается доказать для ситуации, когда несуммируемо некоторое локальное геометрическое среднее функции $\operatorname{Im} q$ (начало доказательства теоремы 2.4 и теорема 2.23). Из принципа равномерной ограниченности следует, что из произвольной несуммимируемой функции можно получить функцию с несуммируемым геометрическим средним, добавив подходящую неотрицательную суммируемую. Это позволяют применить результаты о ядерных возмущениях (леммы 1.21 и 1.24) и тем самым доказать результат в общем случае. В случае непрерывного оператора Шрёдингера схема существенно усложняется из-за отсутствия инфинитезмального аналога описанного усреднения. Вместо него приходится развивать теорию подчиненности в несамосопряженном случае и использовать спектральное усреднение для соответствующей самосопряженной задачи с потенциалом $\operatorname{Re} q$.

В этой главе через $T(x,k)$ обозначается матрица монодромии дифференциального уравнения $-y'' + py = ky$, рассматриваемого на полуоси $x \geq 0$:

$$T(x,k)\begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

для любого решения y этого уравнения.

2.2 Дискретный оператор Шрёдингера

Пусть $\{q_n\}$ – произвольная последовательность комплексных чисел, такая что $0 \leq \operatorname{Im} q_n \leq C < \infty$. Определим $\Theta(z)$ и $\Phi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, как решения разностного уравнения

$$u_{n+1} + u_{n-1} + q_n u_n = z u_n \tag{2.3}$$

при $n > 1$, удовлетворяющие начальным условиям $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = -1$, $\Phi_1 = 1$, $\Phi_2 = z - q_1$.

Дискретный оператор Шрёдингера l действует в гильбертовом пространстве $H = l^2(\mathbb{N})$ и имеет следующий вид:

$$l = S + S^* + Q,$$
$$(Su)_n = u_{n+1},\ (Qu)_n = q_n u_n.$$

Оператор l задан этой формулой на области определения оператора умножения Q и является на ней максимальным диссипативным оператором. Легко видеть, что оператор l вполне несамосопряжен, если $\operatorname{Im} q \not\equiv 0$. При $z \in \mathbb{C}_-$ положим

$u(z) = (l-z)^{-1}\,\delta_1$, где $H \ni \delta_1 = (1, 0, \dots)$. Таким образом, $u(z)$ при $n > 1$ является решением уравнения (2.3), принадлежащим l^2. Справедливо тождество:

$$u(z) = -\Theta(z) + m(z)\Phi(z),$$
$$m(z) := \left\langle (l-z)^{-1}\,\delta_1, \delta_1 \right\rangle.$$

Функция $-m(z)$, очевидно, представляет собой функцию Герглотца в полуплоскости $\mathbb{C}_-$ ($\operatorname{Im} m(z) \le 0$), и поэтому имеет конечные граничные значения $m(k) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} m(k - i\varepsilon)$ при п. в. $k \in \mathbb{R}$. При таких k определено решение $u(k)$ уравнения (2.3) с $z = k$: $u_j(k) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} u_j(k - i\varepsilon)$.

Лемма 2.2. *Если существует конечное граничное значение $m(k)$, то сумма $\sum_j \operatorname{Im} q_j \left|u_j(k)\right|^2$ сходится, а*

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\varepsilon \left\|u(k - i\varepsilon)\right\|_H^2\right) \le -\operatorname{Im} m(k). \tag{2.4}$$

Доказательство. Оба утверждения немедленно следуют из тождества ($z = k - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Im} q_j \left|u_j(z)\right|^2 + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \left|u_j(z)\right|^2 = -\operatorname{Im} m(z),$$

поскольку каждое слагаемое в левой части неотрицательно. Для проверки тождества достаточно заметить, что его левая часть есть

$$\operatorname{Im} \langle (l-z)u(z), u(z)\rangle = \operatorname{Im} \langle \delta_1, u(z)\rangle = \operatorname{Im} \overline{m(z)} = -\operatorname{Im} m(z).$$

❑

Следующая лемма содержит удобное достаточное условие тривиальности подпространства $H_{\mathrm{ac}}(l)$ в терминах поведения решений уравнения (2.3) при вещественных значениях спектрального параметра. Для функции ψ, аналитической в $\mathbb{C}_-$, введем обозначение $\widetilde{\psi}(z) = \overline{\psi\left(\overline{z}\right)}$. Положим $\alpha_j = \sqrt{\operatorname{Im} q_j}$, $\alpha = \{\alpha_j\}$. Будем использовать обозначение α также и для оператора умножения в l^2, заданного последовательностью α_j, $\left(\alpha u\right)_n = \alpha_n u_n$. Определим оператор $D(z)$, $\operatorname{Im} z > 0$, формулой (см. (1.12))

$$D(z) :\, = \sqrt{\operatorname{Im} z}\,(l^* - z)^{-1}\,\alpha.$$

Лемма 2.3. *Пусть $k \in \mathbb{R}$ таково, что граничное значение $m(k)$ существует и конечно. Тогда если $\{\alpha_j \Phi_j(k)\} \notin l^2$, то $D(k + i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0$.*

Доказательство. Мы установим требуемый предел на некотором плотном множестве векторов с компактным носителем. Рассмотрим действие резольвенты оператора l^* на таких векторах. Прямым вычислением получим, что для всех f с компактным носителем и $z = k + i\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\left[(l^* - z)^{-1} f\right]_j = \widetilde{\Phi}_j(z) \sum_{n=j}^{\infty} \widetilde{u}_n(z) f_n + \widetilde{u}_j(z) \sum_{n=1}^{j-1} \widetilde{\Phi}_n(z) f_n.$$

Первое слагаемое в правой части, очевидно, исчезает, когда j находится справа от носителя f. Так как $m(k)$ конечно, то $\widetilde{u}_n(z)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ для каждого n, и оба слагаемых в правой части ограничены при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $j \le N$ при любом фиксированном N. Для любого k из условия леммы отсюда будем иметь:

$$(l^* - z)^{-1} f = c_\varepsilon[f]\widetilde{u}(z) + r(\varepsilon), \qquad (2.5)$$
$$c_\varepsilon[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\Phi}_n(k + i\varepsilon) f_n,$$

где последовательность $r(\varepsilon)$ исчезает справа от носителя f и является ограниченной равномерно и тем более в норме l^2 при $\varepsilon \to 0$. Подставляя (2.5) в определение оператора $D(z)$ и принимая во внимание, что величина $\varepsilon^{1/2} \|\widetilde{u}(z)\|_H$ ограничена при $\varepsilon \to 0$ в силу (2.4), находим, что для любого вектора v с компактным носителем

$$\|D(z)v\|_H \le C\, |c_\varepsilon[\alpha v]| + o(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

Заметим теперь, что линеал

$$\mathcal{D} = \left\{ v \in l^2(\mathbb{N}) : v \text{ имеет компактный носитель, и} \sum_j v_j \alpha_j \widetilde{\Phi}_j(k) = 0 \right\}$$

плотен в l^2, если $\{\alpha_j \Phi_j(k)\} \notin l^2$. Поэтому достаточно проверить, что $D(k+i\varepsilon)v \to 0$ для $v \in \mathcal{D}$. В самом деле, для $v \in \mathcal{D}$

$$c_\varepsilon[\alpha v] \longrightarrow \sum_n \alpha_n \widetilde{\Phi}_n(k) v_n = 0$$

при $\varepsilon \to 0$, откуда следует требуемый предел. ❑

Теорема 2.4. *Пусть $\{q_j\}$ - последовательность комплексных чисел, такая что $0 \le \operatorname{Im} q_n \le C$ для некоторого конечного C, и $\sigma_{ess}(l) \subset \mathbb{R}$. Тогда если $\operatorname{Im} q \notin l^1$, то $H_{\mathrm{ac}} = \{0\}$.*

Доказательство. Согласно предыдущей лемме и предложению 1.20, достаточно показать, что если $\operatorname{Im} q \notin l^1$, то $\sum_j \operatorname{Im} q_j \, |\Phi_j(k)|^2 = \infty$ при п. в. $k \in \mathbb{R}$. При произвольном k, таком что $m(k)$ существует и конечно, рассмотрим вронскиан решений Φ и u:

$$1 = W[\Phi(k), u(k)] \equiv \Phi_{j-1}(k) u_j(k) - \Phi_j(k) u_{j-1}(k), \ j > 1. \qquad (2.6)$$

Умножая это тождество на $\alpha_j \alpha_{j-1}$ и суммируя по j, получим:

$$\sum^n \alpha_j \alpha_{j-1} \le \sum^n \alpha_{j-1} |\Phi_{j-1}(k)| \cdot \alpha_j |u_j(k)| + \sum^n \alpha_j |\Phi_j(k)| \cdot \alpha_{j-1} |u_{j-1}(k)| \le$$
$$2 \left(\sum^n \operatorname{Im} q_j \, |\Phi_j(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum^n \operatorname{Im} q_j \, |u_j(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Последний сомножитель в правой части ограничен по n в силу леммы 2.2. Следовательно, ряд $\sum_j \operatorname{Im} q_j \left|\Phi_j(k)\right|^2$ расходится при п. в. $k \in \mathbb{R}$, если расходится ряд $\sum_j \alpha_j \alpha_{j-1}$, и теорема в этом случае доказана.

Общий случай сводится к только что рассмотренному, так как если $\operatorname{Im} q \notin l^1$, то существует неотрицательная функция $d \in l^1$, такая что функция $\widetilde{q} = q + id$ удовлетворяет условию $\sum_j \widetilde{\alpha}_j \widetilde{\alpha}_{j-1} = \infty$, где $\widetilde{\alpha}_j = (\operatorname{Im} \widetilde{q}_j)^{1/2}$. В самом деле, согласно принципу равномерной ограниченности из условия $\alpha \notin l^2$ следует, что найдется элемент $\rho \in l^2$, такой что $\sum_j \rho_j \alpha_j = \infty$, и при этом ρ может, очевидно, быть выбрано неотрицательным. Теперь достаточно положить $d_j = \rho_{j-1}^2$, поскольку $\widetilde{\alpha}_j \widetilde{\alpha}_{j-1} \geq \rho_{j-1} \alpha_{j-1}$. Доказательство теоремы заканчивается применением следствия 1.23. ❑

Так как $\sigma_{ess}(l) \subset \mathbb{R}$, если $\operatorname{Im} q_n \to 0$, эта теорема содержит теорему 5. Если учесть, что при $\operatorname{Im} q \in l^1$ из ядерной теории следует, что $\sigma\left(l|_{H_{\mathrm{ac}}}\right) = \sigma_{\mathrm{ac}}(\operatorname{Re} l)$, она дает полное описание абсолютно непрерывного спектра диссипативного дискретного оператора Шрёдингера.

Указанное рассуждение распространяется без изменений на случай общих матриц Якоби с самосопряженной внедиагональной частью. Для данной ограниченной последовательности положительных чисел $\{\rho_n\}$ рассмотрим матрицу Якоби J,

$$J = \begin{pmatrix} q_1 & \rho_1 & 0 & \dots & & \\ \rho_1 & q_2 & \rho_2 & 0 & \dots & \\ 0 & \rho_2 & q_3 & \rho_3 & 0 & \dots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Эта формула определяет максимальный диссипативный оператор рассматриваемого класса.

Теорема 2.5. *Пусть $\{q_j\}$ – последовательность комплексных чисел, такая что $0 \leq \operatorname{Im} q_n \leq C < \infty$, и $\sigma_{ess}(J) \subset \mathbb{R}$. Тогда если $\operatorname{Im} q \notin l^1$, то $H_{\mathrm{ac}}(J) = \{0\}$.*

Доказательство. Предполагая без потери общности, что $\rho_1 = 1$, можно определить решения Θ и Φ уравнения $\rho_{n+1} u_{n+1} + \rho_n u_{n-1} + q_n u_n = z u_n$, удовлетворяющие тем же начальным условиям, что и в случае $\rho \equiv 1$, и положить $u(z) = (J - z)^{-1} \delta_1$. Рассуждение далее проводится дословно так же, как и в случае оператора Шрёдингера, вплоть до формулы (2.6), вместо которой будем иметь:

$$W_j[\Phi, u] \equiv \Phi_{j-1}(k) u_j(k) - \Phi_j(k) u_{j-1}(k) = \rho_{j-1}^{-1}.$$

Так как последовательность ρ_j ограничена, левая часть отделена от нуля, и доказательство завершается так же, как и в теореме 2.4. ❑

2.3 Непрерывный случай. Предварительные сведения и начало доказательства теоремы 6

Пусть q - локально ограниченная функция на полуоси $\mathbb{R}_+$, такая что $\operatorname{Im} q(x) \geq 0$ п. в., и пусть h - произвольное вещественное число. Всюду будет предполагаться, что функция $\operatorname{Im} q \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, а функция $\operatorname{Re} q$ ограничена снизу. Определим решения $\Theta(x,z)$ и $\Phi(x,z)$ уравнения

$$-u'' + \overline{q}u = zu,\ z \in \mathbb{C}, \tag{2.7}$$

удовлетворяющие начальным условиям $\Phi(0,z) = \Theta'(0,z) = 0$, $\Phi'(0,z) = \Theta(0,z) = 1$. Хорошо известно, что решения Θ и Φ непрерывны по z равномерно по $x \in I$ для любого компактного интервала I.

Оператор Шрёдингера l, $ly = -y'' + qy$, задан в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R}_+)$ на области определения своей вещественной части, оператора Шрёдингера с потенциалом $\operatorname{Re} q$, выделенной граничным условием $y'(0) = hy(0)$. При сделанных предположениях l является вполне несамосопряженным максимальным диссипативным оператором, если $\operatorname{Im} q \not\equiv 0$ [52].

Следующая лемма является непрерывным аналогом леммы 2.2.

Лемма 2.6. *При всех $z \in \mathbb{C}_+$ существует в точности одно линейно независимое решение $u(x,z)$ уравнения (2.7), принадлежащее L^2. Это решение может быть выбрано в виде*

$$u(x,z) = \Theta(x,z) + m(z)\Phi(x,z). \tag{2.8}$$

Функция $m(z)$ является аналитической в $\mathbb{C}_+$ и имеет при п. в. $k \in \mathbb{R}$ конечные граничные значения $m(k) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} m(k+i\varepsilon)$. При таких k решение $u(x,k) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} u(x,k+i\varepsilon)$ обладает следующим свойством:

$$\int_0^\infty \operatorname{Im} q(x)\, |u(x,k)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{2.9}$$

Более того, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо тождество

$$\operatorname{Im} m(z) = \int_0^\infty (\operatorname{Im} q(t) + \varepsilon)\, |u(t,z)|^2 \, \mathrm{d}t,\ z = k + i\varepsilon. \tag{2.10}$$

В частности,

$$\limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \left(\varepsilon \, \|u(\cdot, k+i\varepsilon)\|_H^2\right) \leq \operatorname{Im} m(k) \tag{2.11}$$

всегда, когда существует граничное значение $m(k)$.

Доказательство. Как известно (см., например, [60]), из ограниченности функции $\operatorname{Re} q$ снизу следует, что дифференциальное выражение, соответствующее потенциалу $\operatorname{Re} q$, находится в случае предельной точки на бесконечности, т. е. минимальный оператор $\widetilde{l} = \operatorname{Re} l|_{C_0^\infty}$ имеет индексы дефекта $(1,1)$. Отсюда вытекает, что для оператора $l_0 = \widetilde{l} + i\mathrm{Im}\, q$ подпространство $\ker(l_0^* - z)$ одномерно при достаточно большой мнимой части $\mathrm{Im}\, z$, а следовательно, и при всех $z \in \mathbb{C}_+$, поскольку $\mathbb{C}_- \subset \widehat{\rho}(l_0)$. Таким образом, при всех $z \in \mathbb{C}_+$ уравнение (2.7) имеет в точности одно линейно-независимое решение $u(x, z)$, принадлежащее L^2.

Предположим теперь, что представление (2.8) для решения из L^2 уже доказано[1], и рассмотрим тождество

$$0 = \int_0^x (-u'' + (\overline{q} - z)u)\,\overline{u}\,\mathrm{d}t = -u'(x)\overline{u(x)} + m(z) + \int_0^x (\overline{q} - z)\,|u|^2\,\mathrm{d}t + \int_0^x |u'|^2\,\mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

Поскольку функция $\mathrm{Re}\, q$ ограничена снизу, оно показывает, что функция $|u'\overline{u}|$ имеет предел (возможно, бесконечный) при $x \to +\infty$. Вычисляя вещественную часть, находим:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,|u(x)|^2 = \mathrm{const} + \int_0^x \mathrm{Re}\,(q - z)\,|u|^2\,\mathrm{d}t + \int_0^x |u'|^2\,\mathrm{d}t,$$

откуда видно, что $u' \in L^2$ (иначе $|u(x)| \to \infty$ при $x \to +\infty$). Следовательно, $u'(x)\overline{u(x)} \to 0$ при $x \to +\infty$. Беря теперь мнимую часть от (2.12) и переходя к пределу $x \to +\infty$, мы получим тождество (2.10). Оно показывает, что $m(z)$ является функцией Герглотца в верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}\, m(z) \geq 0$) и, стало быть, имеет конечные граничные значения при п. в. вещественных k, и при любом таком k интеграл

$$\int^x \mathrm{Im}\, q(t)\,|u(t,k)|^2\,\mathrm{d}t$$

ограничен по x (величиной $\mathrm{Im}\, m(k)$). Отсюда вытекает конечность интеграла в (2.9).

Для того, чтобы получить представление (2.8), достаточно заметить, что решение $\Phi(x, z)$ не может принадлежать L^2 ни при каком $z \in \mathbb{C}_+$, иначе сходное вычисление привело бы к формуле $\int_0^\infty (\mathrm{Im}\, q + \varepsilon)\,|\Phi|^2\,\mathrm{d}t = 0$, откуда $\Phi \equiv 0$. Доказательство аналитичности функции m может быть найдено в работе [58]. ❑

В дальнейшем мы часто опускаем аргумент x и используем обозначение $u(z)$ для элемента пространства H заданного функцией $u(x, z)$ при каждом $z \in \mathbb{C}_+$.

Впредь с этого места будем предполагать, что $\mathrm{Im}\, q(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда $\sigma_{ess}(l) \subset \mathbb{R}$, так как возмущение относительно компактно, и, таким образом, l является оператором класса, рассмотренного в разделе 2.

В следующей лемме оператор $D(z)$ определен формулой (1.12) с $L = l$. Пусть $u_h = \Theta + h\Phi$.

[1] Коль скоро единственность решения из L^2 установлена, представление (2.8) с аналитической функцией m и тождество (2.10) являются результатами анализа кругов Вейля для уравнения (2.7), выполненного в работе [58]. Для полноты мы приводим здесь простое доказательство всех этих фактов, за исключением аналитичности m.

Лемма 2.7. *Пусть число $k \in \mathbb{R}$ таково, что существует конечное граничное значение $m(k)$, и $m(k) \neq h$. Тогда:*

(i) *для любой функции $v \in H$ с компактным носителем ($z = k + i\varepsilon$)*

$$D(z)v = \sqrt{\varepsilon}\, C_\varepsilon[v] u(z) + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.13}$$

где

$$C_\varepsilon[v] = \frac{1}{h - m(k+i\varepsilon)} \int_0^\infty u_h(x, k+i\varepsilon) \sqrt{\operatorname{Im} q(x)}\, v(x) \mathrm{d}x, \tag{2.14}$$

а о-символика относится к норме L^2;

(ii) *если $\sqrt{\operatorname{Im} q}\, u_h(\cdot, k) \notin L^2$, то $D(k+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0$.*

Доказательство этой леммы совершенно аналогично доказательству леммы 2.3. Пусть $f \in H$ исчезает вне конечного интервала $[0, X]$. Прямым вычислением получим, что для любого $z = k + i\varepsilon$ с $\varepsilon > 0$

$$\big((l^* - z)^{-1} f\big)(x) = \\ \frac{1}{h - m(z)} \left[u(x,z) \int_0^x u_h(s,z) f(s) \mathrm{d}s + u_h(x,z) \int_x^\infty u(s,z) f(s) \mathrm{d}s \right]. \tag{2.15}$$

Функция в квадратных скобках, очевидно, совпадает с

$$\left(\int_0^\infty u_h(s,z) f(s) \mathrm{d}s \right) u(x,z)$$

при $x > X$ и сходится при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in [0, X]$. Принимая во внимание, что условие $m(k) \neq h$ обеспечивает ограниченность общего множителя в правой части (2.15), получим, что

$$(l^* - z)^{-1} f = \left(\frac{1}{h - m(z)} \int_0^\infty u_h(s,z) f(s) \mathrm{d}s \right) u(z) + r(z),$$

где функция $r(x,z)$ исчезает при $x > X$ и равномерно ограничена при $\varepsilon \to 0$. Утверждение (i) доказано.

Заметим, что, как показывает (2.11), величина $\varepsilon^{1/2} \left\| u(k + i\varepsilon) \right\|_H$ ограничена при $\varepsilon \to 0$, и, таким образом,

$$\left\| D(z) v \right\|_H \leq C \left| C_\varepsilon[v] \right| + o(1)$$

для любого вектора v с компактным носителем. Ясно, что

$$C_\varepsilon[v] \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} C_0[v] := \frac{1}{h - m(k)} \int_0^\infty u_h(x,k) \sqrt{\operatorname{Im} q(x)}\, v(x) \mathrm{d}x,$$

и, значит, $D(z)v \to 0$, если $C_0[v] = 0$. Так как линеал векторов $v \in H$ с компактным носителем, таких что $C_0[v] = 0$, плотен в H, когда $\sqrt{\operatorname{Im} q} u_h(\cdot, k) \notin L^2$, отсюда следует утверждение (ii). $\square$

Поскольку множество вещественных k, для которых $m(k) = h$, имеет меру нуль по теореме единственности для функций Герглотца, немедленно получаем такое

Следствие 2.8. *Если* $\sqrt{\operatorname{Im} q}\, u_h(\cdot, k) \notin L^2$ *при п. в.* $k \in \mathbb{R}$, *то* $H_{\mathrm{ac}}(L) = \{0\}$.

Перед тем, как перейти к доказательству основного результата (теоремы 6), поясним его в терминах асимптотик ВКБ для решений. Как показывается в асимптотической теории обыкновенных дифференциальных уравнений [59], для потенциалов q обладающих достаточно регулярным поведением на бесконечности, асимптотики решений уравнения (2.7) могут быть вычислены явно. В частности, из теории следует существование пары решений $u_\pm$ уравнения $-u'' + \overline{q} u = ku$ при $k > 0$, имеющих асимптотику вида

$$u_\pm \sim \exp\left[\pm i \left(\sqrt{k} x - \frac{1}{2\sqrt{k}} \int^x \overline{q(\xi)}\, \mathrm{d}\xi\right)\right], \quad x \to \infty, \tag{2.16}$$

(асимптотика ВКБ), если q принадлежит некоторым классам убывающих функций. Например, асимптотика (2.16) справедлива при всех $k > 0$, если $q \in L^2$ и $q' \in L^1$ [59]. Пусть $\operatorname{Im} q \notin L^1$ и асимптотика ВКБ справедлива при $k > 0$. Заметим, что тогда решение u_- – растущее:

$$|u_-| \sim \exp\left(\frac{1}{2\sqrt{k}} \int^x \operatorname{Im} q\, \mathrm{d}\xi\right),$$

а решение u_+ – убывающее. Далее, если некоторое решение v уравнения (2.7) при $z = k > 0$ удовлетворяет $\sqrt{\operatorname{Im} q} v \in L^2$, то оно должно быть пропорционально решению u_+, поскольку

$$\int^\infty \operatorname{Im} q\, |u_-|^2\, \mathrm{d}x \sim \int^\infty \operatorname{Im} q(x) \exp\left(C \int^x \operatorname{Im} q(\xi)\, \mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}x = \exp\left(C \int^\infty \operatorname{Im} q(x)\, \mathrm{d}x\right) = \infty.$$

Будем называть убывающую функцию q *потенциалом класса ВКБ*, если асимптотика (2.16) справедлива при п. в. $k > 0$. Таким образом, если q является потенциалом класса ВКБ, то решения $u_h(\cdot, k)$ и $u(\cdot, k)$ должны совпадать при п. в. $k > 0$, таких что $\sqrt{\operatorname{Im} q}\, u_h(\cdot, k) \in L^2$. Это возможно лишь для тех k, при которых $m(k) = h$, и, стало быть, $\sqrt{\operatorname{Im} q}\, u_h(\cdot, k) \notin L^2$ при п. в. $k > 0$. Согласно следствию 2.8, мы таким образом доказали теорему 2 для потенциалов класса ВКБ. В частности, из результата, цитированного выше, немедленно следует, что оператор с потенциалом $q(x) = ix^{-\beta}$, $1/2 < \beta \le 1$, имеет тривиальное абсолютно непрерывное подпространство. Отметим, что рассмотрение соответствующего уравнения в комплексной плоскости показывает, что собственные значения этого оператора накапливаются только к нулю (наблюдение С. Набоко).

Перейдем к доказательству теоремы 6. Структура рассуждения усложняется по сравнению с дискретным случаем, поскольку для оценки вронскиана решений u и u_h требуется оценить их производные, а это можно сделать только в среднем по спектральному параметру, что и приводит к некоторым слабым условиям на вещественную часть потенциала в теореме 6. Доказательство использует спектральное усреднение для самосопряженной задачи с потенциалом $\operatorname{Re} q$ [62] и теорию подчиненности Гильберт–Пирсона [60]. Приведем необходимую в дальнейшем часть результата Ласта и Саймона.

Теорема 2.9 ([62], теорема 2.1C)**.** *Пусть V - локально ограниченный вещественный потенциал, который ограничен снизу, и пусть $\mathrm{d}\mu = \min\{\mathrm{d}\rho^D, \mathrm{d}\rho^N\}$, где $\mathrm{d}\rho^{D/N}$ - спектральные меры самосопряженного оператора Шрёдингера с потенциалом V и граничным условием Дирихле/Неймана соответственно. Пусть Θ и Φ – решения уравнения $-y''+Vy = ky$ с начальными данными $\Phi(0,k) = \Theta'(0,k) = 0$, $\Phi'(0,k) = \Theta(0,k) = 1$. Тогда для любого компактного интервала $I \subset \mathbb{R}$ найдется константа $C(I)$, такая что при всех $x > 0$*

$$\int_I \left(|\Theta(x,k)|^2 + |\Phi(x,k)|^2\right) \mathrm{d}\mu(k) \le C(I), \tag{2.17}$$

$$\int_I \left[\int_{x-1}^{x+1} \left(|\Theta'(y,k)|^2 + |\Phi'(y,k)|^2\right) dy\right] \mathrm{d}\mu(k) \le C(I). \tag{2.18}$$

Если, кроме того, величина $\sup_n \int_n^{n+1} |V(t)|^2 \,\mathrm{d}t$ конечна, то

$$\int_I \left(|\Theta'(x,k)|^2 + |\Phi'(x,k)|^2\right) \mathrm{d}\mu(k) \le C(I). \tag{2.19}$$

В терминах матрицы монодромии $T(x,k)$ для уравнения $-y'' + Vy = ky$ совокупность оценок (2.17) и (2.19) эквивалентна оценке

$$\int_I \|T(t,k)\|^2 \,\mathrm{d}\mu(k) \le C(I). \tag{2.20}$$

Нам понадобится следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес. В ней предполагается, что $\operatorname{Im} q \not\equiv 0$.

Лемма 2.10. *Пусть y_0 – любое решение уравнения $-y'' + \overline{q}y = ky$, такое что $r = y_0'(0)/y_0(0) \in \mathbb{R}$ (или $y_0(0) = 0$). Тогда для любого другого решения y этого уравнения найдется константа C, такая что $|y(x)| \le C|y_0(x)|$ при достаточно больших x.*

Доказательство. Как будет показано далее, решение $y_0(x)$ не обращается в нуль[2] при достаточно больших x. Таким образом, достаточно установить требуемую оценку для решения

$$y_1(x) = \left(\int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{y_0^2(\xi)} \right) y_0(x),$$

линейно-независимого от y_0. Умножая уравнение для y_0 на $\overline{y_0}$ и интегрируя от 0 до x, будем иметь:

$$- y_0'(x)\overline{y_0(x)}\Big|_0^x + \int_0^x |y_0'|^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^x (\overline{q} - k) \, |y_0|^2 \, \mathrm{d}t = 0.$$

Вычисляя мнимую часть и замечая, что величина $y_0'(0)\overline{y_0(0)} = r \, |y_0(0)|^2$ вещественна, отсюда получим:

$$-\mathrm{Im} \, \left[y_0'(x)\overline{y_0(x)} \right] = \int_0^x \mathrm{Im} \, q \, |y_0|^2 \, \mathrm{d}t.$$

Обозначим левую часть через $\rho(x)$. Из полученного тождества видно, что $\rho(x) > 0$ при достаточно больших x. В частности, $y_0(x) \neq 0$, и можно ввести новые переменные R, Ψ, $R > 0$, по формуле $y_0 = Re^{-i\Psi}$. Вычисляя, находим, что $\rho = R^2\Psi'$, и, стало быть, $\Psi' > 0$, и фаза Ψ может быть выбрана непрерывной монотонно возрастающей функцией. Следовательно,

$$\int^x \frac{\mathrm{d}\xi}{y_0^2(\xi)} = \int^x e^{2i\Psi(\xi)} \frac{\Psi'(\xi)\mathrm{d}\xi}{R^2(\xi)\Psi'(\xi)} = \int^{\Psi(x)} \frac{e^{2i\Psi}\mathrm{d}\Psi}{\rho(\xi(\Psi))}.$$

Поскольку неотрицательная функция $\zeta(s) = 1/\rho\left(\xi(s)\right)$ является монотонно убывающей, интеграл в правой части равномерно ограничен, и теорема доказана. ❑

Эта лемма показывает, в частности, что решение $u_h(x, k)$ оценивает сверху решение $u(x, k)$ при больших x: $u = O(|u_h|)$ всегда, когда u существует. В следующей лемме стандартная асимптотическая теория возмущений [59] используется для сравнения асимптотик решений, отвечающих потенциалам q и $\mathrm{Re}\, q$.

Лемма 2.11. *Пусть $k \in \mathbb{R}$ таково, что $m(k)$ существует, и $m(k) \neq h$. Тогда если $\sqrt{\mathrm{Im}\, q}\, u_h(\cdot, k) \in L^2$, то уравнение*

$$-y'' + (\mathrm{Re}\, q)y = ky \tag{2.21}$$

имеет решения $y_{1,2}$, такие что

$$\begin{aligned} y_1 &= u_h(1 + o(1)), \\ y_2 &= u + o(|u_h|) \end{aligned}$$

при $x \to \infty$, а для вронскиана справедливо равенство

$$W[y_1, y_2] = W[u, u_h] = m(k) - h. \tag{2.22}$$

[2]Это можно увидеть и немедленно из того абстрактного факта, что вполне несамосопряженный диссипативный оператор не имеет вещественных собственных значений.

Доказательство. Записывая уравнение (2.21) в матричной форме

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{Re} q - k & 0 \end{pmatrix} Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix},$$

и применяя метод вариации произвольной постоянной, мы получим такое уравнение:

$$Z' = \frac{i}{h - m(k)} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} q\, u_h u & \operatorname{Im} q\, u^2 \\ -\operatorname{Im} q\, u_h^2 & -\operatorname{Im} q\, u_h u \end{pmatrix} Z, \tag{2.23}$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} u_h & u \\ u_h' & u' \end{pmatrix} Z.$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Im} q\, u_h u & \operatorname{Im} q\, u^2 \\ -\operatorname{Im} q\, u_h^2 & -\operatorname{Im} q\, u_h u \end{pmatrix} \in L^1,$$

так как $\sqrt{\operatorname{Im} q}\, u(\cdot, k) \in L^2$ согласно (2.9), а $\sqrt{\operatorname{Im} q}\, u_h(\cdot, k) \in L^2$ по условию. Применяя теперь теорему Левинсона к уравнению (2.23), заключаем, что оно имеет решение Z с асимптотикой $Z(x) = I + o(1)$. Если принять во внимание, что $u = O(|u_h|)$, отсюда следует существование решений $y_{1,2}$ с требуемой асимптотикой. Вычисляя детерминант Y на бесконечности, получаем (2.22). ❑

Доказательство теоремы 6 (начало). Предположим, что подпространство H_{ac} нетривиально. Тогда, согласно предложению 1.20, найдется такое множество $M \subset \sigma_{ess}(l)$ положительной меры Лебега, что при $k \in M$ оператор $D(k + i\varepsilon)$ не сходится к нулю в сильном смысле при $\varepsilon \downarrow 0$, и, стало быть, согласно лемме 2.7(ii), функция $\sqrt{\operatorname{Im} q}\, u_h(\cdot, k)$ лежит в L^2 при п. в. $k \in M$. Для таких k пусть $y_{1,2}(\cdot, k)$ – решения уравнения (2.21), определенные[3] в лемме 2.11. Из леммы немедленно вытекает, что решения $y_{1,2}(\cdot, k)$ квадратично суммируемы с весом $\operatorname{Im} q$ при п. в. $k \in M$. Пусть теперь μ – абсолютно непрерывная мера, определенная по формуле: $\mathrm{d}\mu = \min\{\mathrm{d}\rho^D, \mathrm{d}\rho^N\}$, где $\mathrm{d}\rho^{D/N}$ – спектральные меры самосопряженного оператора Шрёдингера с потенциалом $\operatorname{Re} q$ и граничным условием Дирихле/Неймана соответственно. Выберем произвольные числа c_0, N и A так, чтобы множество

$$I = \left\{ k \in M \colon\ |m(k)| \le c_0,\ \int_0^\infty \operatorname{Im} q \left(|y_1(t,k)|^2 + |y_2(t,k)|^2 \right) \mathrm{d}t \le N \right\} \cap [-A, A]$$

имело положительную μ - меру. Это возможно, поскольку, как будет показано ниже, $\mu(M) > 0$. Положим:

$$\rho(k) = 1 + \max\{ |y_{1,2}(0,k)|, |y_{1,2}'(0,k)| \},$$

и пусть $T(x, k)$ – матрица монодромии для уравнения (2.21). Тогда

$$|y_{1,2}'(x,k)| \le \rho(k) \|T(x,k)\|.$$

[3]без потери общности можно считать, что $m(k)$ существует и отлично от h при всех $k \in M$.

Учитывая (2.22), имеем:

$$|h - m(k)| = |W[y_1, y_2]| \le \rho(k)\|T(x,k)\| \left(|y_1| + |y_2|\right). \tag{2.24}$$

Умножая это равенство на функцию $(\rho(k))^{-1}\operatorname{Im} q$ и интегрируя, мы получим:

$$\int_I \frac{|h - m(k)|}{\rho(k)}\,\mathrm{d}\mu(k) \int^x \operatorname{Im} q\,\mathrm{d}t \le C\left(\int_I \mathrm{d}\mu(k)\int^x \operatorname{Im} q\,\left(|y_1|^2 + |y_2|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$
$$\left(\int^x \mathrm{d}t\,\operatorname{Im} q(t)\int_I \|T(t,k)\|^2\,\mathrm{d}\mu(k)\right)^{1/2}.$$

Согласно теореме 2.9 (см. (2.20)), величина

$$\int_I \|T(t,k)\|^2\,\mathrm{d}\mu(k)$$

ограничена равномерно по t. Здесь мы воспользовались предположением о равномерной локальной L^2–ограниченности функции $\operatorname{Re} q$. Следовательно,

$$C\left(\int^x \operatorname{Im} q\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le C\left(\int_I \mathrm{d}\mu(k)\int^x \operatorname{Im} q\,\left(|y_1|^2 + |y_2|^2\right)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \le C\sqrt{N\mu(I)},$$

и, стало быть, интеграл в левой части ограничен.

Таким образом, остается показать, что $\mu(M) > 0$. Доказательство этого факта займет следующий параграф и потребует построения аналога теории подчиненности [60] для диссипативных операторов Шрёдингера.

2.4 Непрерывный случай. Теория подчиненности и конец доказательства теоремы 6

В этом разделе используются обозначения $\|\cdot\|_N \equiv \|\cdot\|_{L^2(0,N)}$, $\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$. Напомним [60], что решение u_1 дифференциального уравнения второго порядка на полуоси $[0,\infty)$ называется *подчиненным*, если

$$\frac{\|u_1\|_N}{\|u_2\|_N} \to 0$$

при $N \to \infty$ для любого решения u_2, линейно-независимого от u_1.

Теорема 2.12. *Пусть* $\operatorname{Im} q \not\equiv 0$. *Тогда при п. в.* $k \in \mathbb{R}$ *следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $D(k + i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0$*;*

(ii) *существует подчиненное решение уравнения* $-y'' + qy = ky$.

Как показывает доказательство, множество полной меры в этой теореме может быть отождествлено с множеством вещественных k, таких что конечное граничное значение $m(k)$ существует, и $m(k) \neq h$. Мы дадим полное доказательство только для импликации (ii) $\Rightarrow$ (i), поскольку обратная импликация в работе не используется. Доказательство будет разделено на несколько предложений.

Лемма 2.13. *При любом вещественном k, таком что граничное значение $m(k)$ существует и отлично от h, следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $D(k+i\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0$;

(ii)
$$\varepsilon \left\| u(\cdot, k+i\varepsilon) \right\|^2 \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} 0. \tag{2.25}$$

Доказательство. Из леммы 2.7(i) получим, что для любой функции $v \in H$ с компактным носителем справедлива оценка

$$\|D(k+i\varepsilon)v\| \le C\varepsilon^{1/2} \left\| u(k+i\varepsilon) \right\| + o(1),$$

поскольку $C_\varepsilon[v]$, определенное в (2.14), сходится при $\varepsilon \to 0$. Стало быть, если (2.25) выполняется, то $D(k+i\varepsilon)v \to 0$ для любой функции $v \in H$ с компактным носителем, откуда следует (i).

Чтобы установить обратную импликацию, задаваясь ограниченным интервалом $\Delta \subset (0, +\infty)$, выберем функцию v в виде:

$$v(x) = \begin{cases} \overline{u_h(x,k)}, & x \in \Delta, \\ 0, & x \notin \Delta. \end{cases}$$

Будем иметь:

$$C_\varepsilon[v] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{h - m(k)} \int_\Delta \left| u_h(s,k) \right|^2 \sqrt{\operatorname{Im} q}\, \mathrm{d}s.$$

Ясно, что при достаточно большом Δ правая часть отлична от нуля. Теперь лемма 2.7(i) показывает, что (2.25) выполнено, если $D(z)v \to 0$. ❑

Доказательство следующего предложения, которое является центральным в теории подчиненности, переносится с небольшим упрощением с самосопряженного случая [60].

Предложение 2.14. *Если уравнение $-y'' + \overline{q}y = ky$ имеет подчиненное решение при некотором $k \in \mathbb{R}$, таком что $m(k)$ существует и $m(k) \neq h$, то это решение пропорционально $u(x,k)$.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $u(\cdot,k) \notin L^2$. Пусть v – подчиненное решение из условия, нормированное так, что $v = \Theta + c_0\Phi$, и, таким образом, вронскиан $W[\Phi, v]$ равен единице. Такой выбор нормировки возможен, поскольку, как показывает лемма 2.10, Φ не может быть подчиненным решением. Требуемое утверждение тогда сводится к равенству $c_0 = m(k)$.

Прямым вычислением проверяется, что решение $u(x,z)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$g(x) = \Theta(x,k) + m(z)\Phi(x,k) - i\varepsilon\left[\Phi(x,k)\int_0^x v(s)g(s)\mathrm{d}s - v(x)\int_0^x \Phi(s,k)g(s)\mathrm{d}s\right].$$

Рассмотрим это уравнение в пространстве $L^2(0, A(\varepsilon))$ с конечным $A(\varepsilon)$, которое будет выбрано позднее таким образом, что $A(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Если

$$\varepsilon \left\|\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)} \left\|v\right\|_{A(\varepsilon)} < \frac{1}{2}, \tag{2.26}$$

то уравнение можно итерировать в $L^2(0, A(\varepsilon))$, что дает

$$\begin{aligned}\left\|u(\cdot,z)\right\|_{A(\varepsilon)} \asymp \left\|\Theta(\cdot,k) + m(z)\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)} = \\ \left\|v(\cdot,k) + (m(z)-c_0)\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)} = \\ (|m(z)-c_0| + o(1))\left\|\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что v – подчиненное решение, и поэтому отношение $\left\|v\right\|_{A(\varepsilon)} / \left\|\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)}$ стремится к нулю. Определим функцию $A(\varepsilon)$ равенством

$$\begin{gathered}\left\|\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)} \left\|v\right\|_{A(\varepsilon)} = \tfrac{1}{3C}\left\|u(\cdot,k+i\varepsilon)\right\|^2, \\ C = \limsup_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Im} m(k+i\varepsilon).\end{gathered}$$

Тогда условие (2.26) выполняется в силу (2.11), и $A(\varepsilon)$ стремится к бесконечности при $\varepsilon \downarrow 0$, поскольку иначе норма $\|u(\cdot,k)\| \le \liminf \|u(\cdot,k+i\varepsilon)\|$ была бы конечной. Следовательно,

$$|c_0 - m(z)| \le \frac{\|u(\cdot,k+i\varepsilon)\|}{\left\|\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)}} + o(1) = \left(3C\frac{\left\|v\right\|_{A(\varepsilon)}}{\left\|\Phi(\cdot,k)\right\|_{A(\varepsilon)}}\right)^{1/2} + o(1) \to 0. \ \square$$

Доказательство теоремы 2.12 (ii) $\Rightarrow$ (i). Для того, чтобы установить требуемую импликацию, остается показать, что если $u(\cdot,k)$ - подчиненное решение, то выполнено условие (2.25). Мы покажем, что в действительности если $u(\cdot,k)$ – подчиненное решение, то

$$\int_0^\infty \operatorname{Im} q(x)\,|u(x,k)|^2\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im} m(k).$$

Из тождества (2.10) ясно, что тогда выполняется и (2.25). Мы будем использовать прием из доказательства леммы 2.10. Умножая тождество $-u'' + (\overline{q} - k)u = 0$ на $\overline{u}$, интегрируя и вычисляя мнимую часть, получим:

$$\operatorname{Im}\left[u'(x,k)\overline{u(x,k)}\right] = \operatorname{Im} m(k) - \int_0^x \operatorname{Im} q(t)\ |u(t,k)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Как видно из (2.10), правая часть неотрицательна при всех x, откуда требуемое утверждение следует немедленно, если левая часть имеет нуль. Предположим теперь, что левая часть не обращается в нуль при всех $x > 0$, и, стало быть, $u(x) \neq 0$, и можно ввести переменные R, Ψ, $R > 0$, по формуле $u = Re^{i\Psi}$. Вычисляя, находим, что левая часть есть $\rho(x) := R^2(x)\Psi'(x)$. Поскольку $\rho(x)$ положительно, отсюда следует, что фаза Ψ может быть выбрана абсолютно непрерывной монотонно возрастающей функцией. Для решения v, линейно-независимого от u, тогда получим:

$$v(x) = \left(\int_a^x \frac{\mathrm{d}\xi}{u^2(\xi)}\right) u(x) = \left(\int^x e^{-2i\Psi(\xi)} \frac{\Psi'(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{R^2(\xi)\Psi'(\xi)}\right) u(x) =$$
$$\left(\int^{\Psi(x)} e^{-2i\Psi} \zeta(\Psi)\,\mathrm{d}\Psi\right) u(x),$$

где $\zeta(s) = 1/\rho\left(\Psi^{-1}(s)\right)$ – положительная монотонно возрастающая функция. Отсюда следует, что $\zeta(s) \to \infty$, так как иначе интеграл в правой части будет ограничен, и, таким образом, v будет оцениваться через u сверху, что противоречит предположению о подчиненности решения u. Стало быть,

$$\int_0^x \operatorname{Im} q\,|u|^2\,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \operatorname{Im} m(k),$$

что и требовалось. ❑

Замечание 1. В самосопряженной теории утверждение, соответствующее последней части доказательства теоремы 2.12 (если $u(\cdot, k)$ - подчиненное решение, то $\operatorname{Im} m(k) = 0$), *тривиально*, поскольку подчиненное решение, нормализованное условием $u(0) = 1$, будет вещественным при $\operatorname{Im} q \equiv 0$.

Замечание 2. Мы оставили недоказанным только один шаг в импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) в теореме 2.12: если $\varepsilon \left\|u(k + i\varepsilon)\right\|^2 \to 0$ при некотором $k \in \mathbb{R}$, таком что $m(k)$ существует и $m(k) \neq h$, то $u(x, k)$ – подчиненное решение. Доказательство этого утверждения переносится дословно с самосопряженного случая [60].

Доказательство теоремы 6 (конец). Нужно показать, что $\mu(M) > 0$. Предположим, что $\mu(M) = 0$. Поскольку мера μ эквивалентна абсолютно непрерывной части спектральной меры самосопряженного оператора Шрёдингера с потенциалом $\operatorname{Re} q$, применимо следующее предложение самосопряженной теории Гильберт–Пирсона.

Предложение. [60] *Пусть V – локально ограниченный вещественный потенциал, отвечающий случаю предельной точки на бесконечности, и пусть $d\nu$ – абсолютно непрерывная часть спектральной меры оператора Шрёдингера с потенциалом V, заданного каким-либо самосопряженным граничным условием в нуле. Тогда если $\nu(S) = 0$, то уравнение $-y'' + Vy = ky$ имеет подчиненные решения при п. в. (по мере Лебега) $k \in S$.*

Отсюда получим, что уравнение (2.21) обладает подчиненным решением при п. в. $k \in M$. Из леммы 2.11 теперь следует, что уравнение $-y'' + \overline{q}y = ky$ также обладает подчиненным решением при п. в. $k \in M$. В самом деле, пусть $y = c_0 y_1 + y_2$ – подчиненное решение уравнения (2.21). Тогда $y \sim u + c_0 u_h + o(u_h)$, откуда будем иметь:

$$\frac{\|u + c_0 u_h\|_N}{\|u_h\|_N} \sim \frac{\|y\|_N}{\|y_1\|_N} \to 0,$$

т. е. $u + c_0 u_h$ – подчиненное решение уравнения (2.7) при $z = k$. Остается заметить, что y_1 не может быть подчиненным решением. Применяя теперь теорему 2.12, заключаем, что $D(k + i\varepsilon) \xrightarrow{s} 0$ при п. в. $k \in M$, и мы пришли к противоречию. $\square$

Как уже было отмечено, условия на вещественную часть потенциала в теореме 6 требуются для того, чтобы применить спектральное усреднение. В частности, условие равномерной локальной L^2-ограниченности функции $\operatorname{Re} q$ позволяет использовать следующую стандартную оценку производных решений дифференциальных уравнений второго порядка (см., например, [63, лемма 3.1]): если величина $\sup_n \int_n^{n+1} |V(t)|^2 \mathrm{d}t$ конечна, то для любого решения g уравнения $-y'' + Vy = ky$ справедлива оценка

$$|g'(x)|^2 \le C(1 + k^2) \int_{x-1}^{x+1} |g(s)|^2 \,\mathrm{d}s$$

с константой C зависящей только от потенциала V. Как было замечено в [62], комбинация этой оценки с (2.17) позволяет опустить дополнительное интегрирование по y в (2.18), приводя, таким образом, к оценке (2.19). Согласно следующей теореме, если опустить условие на положительную часть $\operatorname{Re} q$, то из нетривиальности абсолютно непрерывного подпространства вытекает, что функция $\operatorname{Im} q$ принадлежит несколько более широкому, нежели L^1, классу.

Теорема 2.15. *Пусть q – локально ограниченная функция на полуоси $\mathbb{R}_+$, такая что $\operatorname{Im} q \ge 0$ и $\operatorname{Im} q(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Предположим, что функция $\operatorname{Re} q$ ограничена снизу. Тогда если абсолютно непрерывное подпространство оператора Шрёдингера l нетривиально, то*

$$\sum_n \left(\int_n^{n+1} \sqrt{\operatorname{Im} q} \,\mathrm{d}t \right)^2 < \infty.$$

Доказательство. Рассуждение проводится аналогично доказательству теоремы 2 вплоть до оценки вронскиана (2.24). Умножим равенство

$$|h - m(k)| = |W[y_1, y_2]|$$

на функцию $(\rho(k))^{-1} \sqrt{\operatorname{Im} q(t)}$ и проинтегрируем по t по интервалу $(n, n+1)$ и по

k по промежутку I по мере $d\mu$. Получим:

$$\int_I \frac{|h-m(k)|}{\rho(k)}\,\mathrm{d}\mu(k)\int_n^{n+1}\sqrt{\operatorname{Im} q}\,\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq C\left(\int_I \mathrm{d}\mu(k)\int_n^{n+1}\operatorname{Im} q(t)\,\left(|y_1(t,k)|^2+|y_2(t,k)|^2\right)\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Здесь мы учли оценку (2.18). Возводя в квадрат и суммируя по n, приходим к требуемому результату. ❑

Остается неясным, можно ли перенести доказательство теоремы 6 на дискретный случай. Трудность здесь состоит в том, что не известен подходящий дискретный аналог тригонометрической подстановки $u = Re^{i\Psi}$ в доказательстве теоремы 2.12.

Наконец, следует отметить, что условие поточечного убывания функции $\operatorname{Im} q$ при $x \to \infty$ в теореме 6 может быть заменено любым другим условием, обеспечивающим, что $\sigma_{ess}(l) \subset \mathbb{R}$.

2.5 Несамосопряженный оператор Дирака

В этом разделе мы докажем теорему 7. Начнем с со строгого определения оператора, заданного дифференциальным выражением ℓ_Q (2.1).

Пусть $\Theta(\cdot, z)$ и $\Phi(\cdot, z)$ – решения задач Коши

$$\ell_{Q^*}\Theta = z\Theta, \quad \Theta(0,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\ell_{Q^*}\Phi = z\Phi, \quad \Phi(0,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для $h \in \mathbb{C}$ положим:

$$\Psi_h(x,z) = \Theta(x,z) + h\Phi(x,z).$$

Хорошо известно, что $\Theta(x,z)$ и $\Phi(x,z)$ – целые функции аргумента z при любом $x > 0$, непрерывные по z равномерно по $x \in I$ для любого компактного интервала I.

Лемма 2.16. *При каждом $z \in \mathbb{C}_+$ существует единственное с точностью до скалярного множителя решение дифференциального уравнения $\ell_{Q^*}\Psi = z\Psi$, принадлежащее пространству $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$. Это решение можно представить в виде*

$$\Psi(x,z) = \Theta(x,z) + m(z)\Phi(x,z). \tag{2.27}$$

Доказательство. Умножив уравнение $\ell_{Q^*}y = zy$ слева на матрицу $-\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, мы получим уравнение вида $y' = A(x)y$, в котором матрица $A(x)$ имеет чисто мнимый след в силу предположения о матричных элементах Q. По теореме Лиувилля отсюда следует, что модуль определителя фундаментального решения этого уравнения не зависит от x. Таким образом, для любых двух линейно независимых решений $u = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$ и $v = \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix}$ уравнения $\ell_{Q^*}y = zy$ величина (вронскиан)

$$W[u, v] := u_+(x)v_-(x) - u_-(x)v_+(x)$$

постоянна по модулю и отлична от нуля. Интегрируя модуль вронскиана по x и используя неравенство Шварца, находим, что хотя бы одно из решений u и v не принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$. Это рассуждение представляет собой вариант стандартного аргумента, см. например [45, глава 13, §7].

Пусть L_{min} – замыкание оператора, определенного дифференциальным выражением ℓ_Q на линеале $C_0^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$, в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$. Интегрируя по частям, убеждаемся, что L_{min} – диссипативный оператор. Поскольку L_{min} очевидным образом не максимальный диссипативный оператор, $\dim\ker(L^*_{min} - zI)$ равна либо 1, либо 2 при всех $z \in \mathbb{C}_+$. Соображение из предыдущего абзаца показывает, что размерность 2 невозможна. Значит, уравнение $\ell_{Q^*}y = zy$ имеет ровно одно решение, принадлежащее $L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$, с точностью до скалярного множителя. Обозначим это решение через Ψ.

Для того, чтобы доказать, что решение Ψ можно выбрать в виде (2.27), остается заметить, что $\Phi(\cdot, z) \notin L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$ при любом $z \in \mathbb{C}_+$: если бы функция Φ была квадратично суммируема для некоторого $z \in \mathbb{C}_+$, то это число z было бы собственным значением в верхней полуплоскости "минус"диссипативного оператора, отвечающего дифференциальному выражению ℓ_{Q^*} и вещественному граничному условию, что невозможно. ❑

Определение 2.17. *Выберем произвольное $h \in i\mathbb{R}$. Обозначим через L оператор в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$, задаваемый дифференциальным выражением ℓ_Q на области определения*

$$D(L) = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in H \mid y \in AC_{loc}(\mathbb{R}^+), \;\; \ell_Q y \in H, \;\; y_-(0) = hy_+(0) \right\}.$$

Используя лемму 2.16, легко видеть, что L – максимальный диссипативный оператор, и, таким образом, $\sigma(L) \subset \overline{\mathbb{C}_+}$.

Заметим, что оператор L, вообще говоря, не является вполне несамосопряженным. Соответствующий пример, принадлежащий Марлетте, указан в нашей совместной работе [IV]. Как показывает следующее предложение, самосопряженная часть оператора L не имеет значения при доказательстве теоремы 7. Обозначим эту самосопряженную часть через L_0.

Предложение 2.18. *Если $\operatorname{Im} Q \not\equiv 0$, то а. н. подпространство $\mathcal{N}$ оператора L_0, определенное стандартным образом через спектральную теорему, тривиально.*

Доказательство. Рассуждая в контрапозитивной форме, предположим, что $\mathcal{N} \neq \{0\}$. Согласно абстрактной теории (см. предложение 1.2 и замечание после него), подпространство $H_0 = H \ominus H'$ приводит оператор $\operatorname{Re} L$, и L_0 совпадает с сужением оператора $\operatorname{Re} L$ на H_0. Поскольку $\operatorname{Re} L$ имеет простой спектр, отсюда следует, что найдется компакт $\Omega \subset \mathbb{R}$ положительной меры Лебега, такой что образ спектрального проектора P_Ω а. н. части оператора $\operatorname{Re} L$, отвечающего множеству Ω, отличен от нуля и содержится в H_0. Будем обозначать с помощью верхнего индекса r функцию Вейля–Титчмарша и решения задачи Коши, отвечающие функции $\operatorname{Re} Q$ вместо Q. Без потери общности можно считать, что граничные значения функции m^r на множестве Ω ограничены. Из спектральной теоремы для оператора L_0 (см., например, [45, глава 11]) следует, что любой вектор вида

$$\int_\Omega \Psi_h^r(x,k) g(k) \operatorname{Re} m^r(k) \mathrm{d}k$$

с ограниченной функцией g содержится в $\operatorname{Ran} P_\Omega$. Допустим, что $\operatorname{Im} q_1 \not\equiv 0$. Поскольку самосопряженное подпространство H_0 ортогонально $\operatorname{Ran} V$, существует $X \in \mathbb{R}$, такое что для любой функции $f \in D(L_0)$ будем иметь: $f_+(X) = 0$. В частности,

$$\int_\Omega \Psi_{h,+}^r(X,k) g(k) \operatorname{Re} m_r(k) \mathrm{d}k = 0$$

для любой ограниченной функции g. Выбирая в качестве функции g подходящим образом нормализованный индикатор интервала $(k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon)$ и переходя к пределу $\varepsilon \to 0$, отсюда получим в силу аналитичности функции Ψ, что $\Psi_{h,+}^r(X, k_0) = 0$ для любой лебеговской точки множества $\Omega \cap \{k : \operatorname{Re} m^r(k) \neq 0\}$. Поскольку множество таких точек имеет положительную меру Лебега, это означает, что самосопряженный оператор, порожденный дифференциальным выражением $\ell_{\operatorname{Re} Q}$ на интервале $(0, X)$ с граничными условиями $y_-(0) = hy_+(0)$, $y_+(X) = 0$ имеет несчетное множество собственных чисел. Это – противоречие, значит, $\operatorname{Im} q_1 \equiv 0$. Аналогично устанавливается, что $\operatorname{Im} q_2 \equiv 0$. ❑

Всюду далее в этой главе для любого вектора-столбца $v \in \mathbb{C}^2$ через v^T обозначается вектор-строка, полученная транспонированием. Положим $E = \operatorname{diag}(1, -1)$. Нам понадобится выражение для действия резольвенты $(L^* - z)^{-1}$ на векторах $u \in H$ с компактным носителем, аналогичное (2.15). Оно имеет вид:

$$(L^* - z)^{-1} u = \frac{i}{m(z) - h} \times$$
$$\left\{ \Psi_h(x,z) \int_x^\infty \frac{1}{W(s)} \Psi^T(s,z) E u(s) \mathrm{d}s + \Psi(x,z) \int_0^x \frac{1}{W(s)} \Psi_h^T(s,z) E u(s) \mathrm{d}s \right\}, \quad (2.28)$$
$$W(x) := \exp\left(i \int_0^x (q_{12}(t) + q_{21}(t)) \, \mathrm{d}t \right),$$

и получается прямым вычислением, учитывающим, что по формуле Лиувилля

$$\det(\Psi_h(x), \Psi(x)) = (m(z) - h) W(x). \quad (2.29)$$

Заметим, что $m(z) \neq h$ при $z \in \mathbb{C}_+$, так как в противном случае z было бы собственным числом оператора L^*.

Лемма 2.19. *Функция $m(z)$, определенная в лемме 2.16, аналитична в $\mathbb{C}_+$, и при всех $z \in \mathbb{C}_+$ справедливо тождество* ($\varepsilon = \operatorname{Im} z > 0$):

$$-\operatorname{Re} m(z) = \varepsilon \int_0^\infty \|\Psi(x,z)\|^2_{\mathbb{C}^2}\, \mathrm{d}x + \int_0^\infty \langle \operatorname{Im} Q(x)\Psi(x,z), \Psi(x,z)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, \mathrm{d}x. \qquad (2.30)$$

В частности, $\operatorname{Re} m(z) < 0$ *при всех* $z \in \mathbb{C}_+$, *и*

$$\limsup_{\varepsilon \searrow 0} \left(\varepsilon \|\Psi(\cdot, k+i\varepsilon)\|^2_H\right) \le -\operatorname{Re} m(k)$$

при всех $k \in \mathbb{R}$, *для которых существует предел* $m(k) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} m(k+i\varepsilon)$.

Доказательство. Из формулы для резольвенты (2.28) следует, что для любых векторов $u, v \in H$ с компактным носителем

$$F(z) \equiv \left\langle (L^* - z)^{-1} u, v\right\rangle = \frac{Am(z)+B}{m(z)-h},$$

где A, B – комплексные константы, зависящие от u и v. Заметим, что при подходящем выборе векторов u and v число $B \neq -hA$, иначе из асимптотики $F(z) \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$ следовало бы что $F(z) \equiv 0$ для любых $u, v \in H$ с компактным носителем, что невозможно. Аналитичность функции m в верхней полуплоскости теперь следует из аналитичности резольвенты. Другое доказательство аналитичности m можно получить, используя анализ гнездящихся окружностей Вейля, подобно тому, как это делается в случае диссипативного оператора Шрёдингера [58].

Установим тождество (2.30). Из дифференциального уравнения на функцию $\Psi(x,\lambda)$, $\lambda = k + i\varepsilon$, следует, что

$$\frac{d}{dx}\left\langle \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Psi, \Psi \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle (\lambda + Q)\Psi, \Psi\rangle_{\mathbb{C}^2} - \langle \Psi, (\lambda+Q)\Psi\rangle_{\mathbb{C}^2} = 2i\left\langle (\varepsilon + \operatorname{Im} Q)\Psi, \Psi\right\rangle_{\mathbb{C}^2}.$$

Беря мнимую часть и интегрируя по промежутку $[0, X]$, находим:

$$\operatorname{Re}\left(\overline{\Psi_+(X)}\Psi_-(X)\right) = \int_0^X \left(\varepsilon \|\Psi(x,\lambda)\|^2_{\mathbb{C}^2} + \langle \operatorname{Im} Q(x)\Psi(x,\lambda), \Psi(x,\lambda)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right) \mathrm{d}x + \operatorname{Re} m(k+i\varepsilon).$$

Интеграл в правой части монотонен по X, поэтому левая часть имеет предел, конечный или бесконечный, при $X \to \infty$. Поскольку $\Psi \in L^2$, функция $\overline{\Psi}_+\Psi_- \in L^1$, и, значит, этот предел нуль. ❑

Лемма 2.20. *Для любой финитной функции* $u \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^2)$ *и любого* $z = k + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, *имеем:*

$$(L^* - z)^{-1} u = \beta_z[u]\Psi(x,z) + r(x,z),$$

$$\beta_z[u] = \frac{i}{m(z)-h} \int_0^\infty \frac{1}{W(s)} \Psi_h^T(s,z) E u(s)\, \mathrm{d}s, \qquad (2.31)$$

где функция $r(x,z)$ удовлетворяет $\limsup_{\varepsilon\searrow 0}\|r(\cdot,z)\|_H < \infty$ при всех k, таких что конечное граничное значение $m(k) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} m(k+i\varepsilon)$ существует и отлично от h.

Доказательство. Выберем произвольное $X < \infty$ справа от носителя функции u и рассмотрим формулу (2.28) для действия резольвенты. Первый член в фигурных скобках исчезает при $x > X$, и поэтому функция

$$r = (L^* - z)^{-1}\, u - \beta_z \Psi$$

равна нулю при $x > X$ при всех $z \in \mathbb{C}_+$. Далее, из общей теории возмущений для задачи Коши следует, что функции $\Psi_h(x,z)$ и $\Psi(x,z)$ сходятся соответственно к $\Psi_h(x,k)$ и $\Psi(x,k)$ при $\varepsilon \searrow 0$ равномерно по $x < X$ при всех k, таких что граничное значение $m(k)$ существует и конечно. Собирая эти факты вместе, получим, что функция $r(x,z)$ сходится при $\varepsilon \searrow 0$ равномерно по $x < X$, если множитель перед фигурной скобкой в правой части (2.28) имеет конечный предел. Лемма доказана. ❑

2.6 Доказательство теоремы 7

Оператор $R(x) = (\operatorname{Im} L)^{1/2}$ представляет собой оператор умножения слева на матрицу-функцию $\sqrt{\operatorname{Im} Q(x)}$. Пусть $\mathcal{S}$ – множество вещественных точек k, таких что существует граничное значение $m(k) := \lim_{\varepsilon\searrow 0} m(k+i\varepsilon)$, и $m(k) \neq h$. В силу стандартной теоремы единственности для функций Герглотца множество $\mathbb{R} \setminus \mathcal{S}$ имеет нулевую меру Лебега. Пусть

$$D(z) = \sqrt{\varepsilon}\, (L - z)^{-1} R, z = k + i\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

Лемма 2.21. *Пусть $k \notin \mathcal{S}$. Если $R(\cdot)\Psi_h(\cdot,k) \notin L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^2)$, то $D(k+i\varepsilon) \xrightarrow{s} 0$ as $\varepsilon \searrow 0$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ линеал финитных функций $u \in H$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty \frac{1}{W(s)} \Psi_h^T(s,k) E R(s) u(s)\, \mathrm{d}s = 0.$$

Линеал $\mathcal{D}$ плотен в пространстве H, если $R^T(\cdot)E\Psi_h(\cdot,k) \notin H$. Поскольку $ER = R^T E$, последнее свойство эквивалентно предположению $R(\cdot)\Psi_h(\cdot,k) \notin H$. Согласно замечанию после предложения 1.20, достаточно доказать, что в условиях леммы

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D(k+i\varepsilon)u = 0 \tag{2.32}$$

при любом $u \in \mathcal{D}$. Из леммы 2.20 при любом $u \in \mathcal{D}$ будем иметь ($z = k + i\varepsilon$):

$$D(k+i\varepsilon)u = \varepsilon^{1/2}\beta_z[Ru]\Psi(\cdot,z) + o(1), \ \ \varepsilon \searrow 0.$$

Здесь o-символика относится к норме в L^2. Из существования граничного значения $m(k)$ и леммы 2.19 следует, что выражение $\varepsilon^{1/2} \|\Psi(k+i\varepsilon)\|_H$ ограничено сверху при $\varepsilon \searrow 0$. Так как $m(k) \neq h$, в выражении (2.31) для β_z можно перейти к пределу $\varepsilon \searrow 0$. Получим, что $\beta_{k+i\varepsilon}$ сходится к

$$\int_0^\infty \Psi_h^T(s,k) E R(s) u(s) ds,$$

умноженному на константу, а этот интеграл нуль, поскольку $u \in \mathcal{D}$. Таким образом, (2.32) справедливо, и лемма доказана. ❑

Применим критерий 1.12.

Следствие 2.22. *Если $R(\cdot)\Psi_h(\cdot,k) \notin L^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^2)$ при п. в. $k \in \mathbb{R}$, то а. н. подпространство вполне несамосопряженной части оператора L тривиально.*

Предложение 2.23. *Если $\det R(x) \notin L^1(\mathbb{R}_+)$, то $R(\cdot)\Psi_h(\cdot,k) \notin L^2$ при п. в. $k \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Из формулы Лиувилля (2.29) при любом $k \in \mathcal{S}$ будем иметь:

$$\det R(x) = \frac{1}{|m(k)-h|} |\det(R\Psi_h(x,k), R\Psi(x,k))| \leq \\ (\mathrm{const}) \|R\Psi_h(x,k)\|_{\mathbb{C}^2} \cdot \|R\Psi(x,k)\|_{\mathbb{C}^2}.$$

Интегрируя это неравенство по x и используя неравенство Шварца, находим, что

$$\int^N \det R(x)\, dx \leq (\mathrm{const.}) \left(\int^N \|R\Psi_h(x,k)\|^2_{\mathbb{C}^2}\, dx \right)^{1/2} \left(\int^N \|R\Psi(x,k)\|^2_{\mathbb{C}^2}\, dx \right)^{1/2}.$$

Далее, из леммы 2.19 и теоремы Фату следует, что $R\Psi(\cdot,k) \in L^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^2)$ при всех $k \in \mathcal{S}$. Рассматривая предел $N \to \infty$, приходим к требуемому утверждению. ❑

Таким образом, а. н. подпространство вполне несамосопряженной части оператора L тривиально, если $\det R \notin L^1(\mathbb{R}_+)$ в силу следствия 2.22. Сведем теперь общий случай к этому частному.

Доказательство теоремы 7. Докажем требуемое утверждение в контрапозитивной форме. Предположим, что $\operatorname{Im} Q \notin L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^2)$. Заметим сразу, что, как показано в предложении 2.18, а. н. подпространство самосопряженной части оператора L тривиально.

Пусть $r_1(x)$ и $r_2(x)$, $r_1(x) \leq r_2(x)$, – собственные числа матрицы $R(x)$. Тогда $r_2 \notin L^2(\mathbb{R}_+)$, и в силу принципа равномерной ограниченности существует функция $d \in L^2(\mathbb{R}_+)$, такая что $r_2 d \notin L^1(\mathbb{R}_+)$. Ясно, что функцию d без ущерба общности можно считать неотрицательной п. в. Обозначим через $U(x)$ унитарное преобразование, диагонализующее матрицу $\operatorname{Im} Q(x)$, т. е.

$$R(x) = U^*(x) \begin{pmatrix} r_1(x) & 0 \\ 0 & r_2(x) \end{pmatrix} U(x),$$

а через L_d – оператор Дирака, отвечающий потенциалу

$$Q_d = Q + U^* \begin{pmatrix} id^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U,$$

и положим: $R_d = (\operatorname{Im} Q_d)^{1/2}$. Тогда $\det R_d \notin L^1$ в силу выбора функции d, и поэтому а. н. подпространство вполне несамосопряженной части оператора L'_d тривиально согласно предложению 2.23.

Убедимся, что операторы L и $\widetilde{L} = L_d$ удовлетворяют условиям леммы 1.21. В рассматриваемой ситуации Γ – оператор умножения на матрицу $U^* \operatorname{diag}(d^2, 0)\, U$, и, очевидным образом,

$$\Gamma = \widetilde{V} T,\ T\colon = U^* \begin{pmatrix} \dfrac{r_1^2}{r_1^2 + d^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U.$$

Остается проверить, что

$$(L - z)^{-1} - (L_d - z)^{-1} \in \mathfrak{S}^1. \tag{2.33}$$

Пусть A_0 – оператор Дирака, отвечающий потенциалу $Q \equiv 0$. Тогда $\sqrt{\Gamma}\,(A_0 - z)^{-1}$ – оператор Гильберта-Шмидта при любом $z \notin \mathbb{R}$, так как его интегральное ядро $K(x, s)$ удовлетворяет оценке:

$$\|K(x, s)\|_{\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})} \le C d(x) \exp(-\varepsilon |x - s|), \quad \varepsilon = |\operatorname{Im} z| > 0,$$

с константой C, зависящей только от z. Применяя несколько раз резольвентное тождество и учитывая, что функция Q ограничена, получим, что при любом невещественном $z \in \rho(L_d) \cap \rho(L)$

$$(L - z)^{-1} - (L_d - z)^{-1} = \Xi_1(z)\,(A_0 - z)^{-1} \sqrt{\Gamma} \cdot \sqrt{\Gamma}\,(A_0 - z)^{-1}\, \Xi_2(z),$$

где $\Xi_{1,2}(z)$ – ограниченные операторы. Отсюда следует включение (2.33), а с ним и утверждение теоремы. ❑

Приведенное доказательство теоремы 7 следует нашей работе [IV] с одним заслуживающим упоминания упрощением и обобщением. Упрощение относится к выводу теоремы из частного случая $\det \operatorname{Im} Q \notin L^2$ (предложение 2.23). Здесь мы воспользовались тем фактом, что произвольный потенциал Q с $\operatorname{Im} Q \notin L^1$ может быть представлен в виде суммы потенциала $\tilde{Q}$ с $\det \operatorname{Im} \tilde{Q} \notin L^2$ и мнимой отрицательной суммируемой функции, а в [IV] изначально предполагалось, что матрица $\operatorname{Im} Q$ диагональна, и задача сводилась к случаю, когда один из диагональных элементов $\operatorname{Im} Q$ обращается в нуль [IV, лемма 3.5 и следствие 3.6], что невозможно в общем случае. Соответственно, в качестве основного результата в [IV] приведен частный случай теоремы 7, когда мнимая часть потенциала диагональна.

2.7 Заключительные замечания

Доказательство следствия 2.1. Тот факт, что $Z_t^* \xrightarrow{s} 0$ непосредственно вытекает из следствия 1.27. Докажем сильную сходимость к нулю полугруппы Z_t в каждом из трех случаев. Во-первых, $Z_t \xrightarrow{s} 0$ в ситуации теоремы 5, поскольку оператор $-l^*$ унитарно эквивалентен оператору l: $-l^* = U^* l U$, где $(Uf)_k = (-1)^k i f_k$. Далее, в ситуации оператора Дирака (теорема 7) оператор $-L^*$ унитарно эквивалентен оператору $\widetilde{L}$, порожденному дифференциальным выражением $\ell_{\widetilde{Q}}$ и граничным условием $y_-(0) = -hy_+(0)$ с потенциалом

$$\widetilde{Q} = -EQE, \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что

$$\widetilde{L} = E(-L^*)E.$$

Поскольку матрицы $\operatorname{Im}\widetilde{Q}(x)$ и $\operatorname{Im}Q(x)$ очевидным образом унитарно эквивалентны, $\operatorname{Im}\widetilde{Q} \notin L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^2)$, и, значит, к оператору $\widetilde{L}$ применима теорема 7. Применяя ее и следствие 1.27 и учитывая, что $-(-L^*)^* = L$, получим, что $Z_t \xrightarrow{s} 0$.

Осталось рассмотреть случай дифференциального оператора Шрёдингера из теоремы 6. Условие из предложения 1.20 для оператора $L = -l^*$ принимает вид ($z = k - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$):

$$\sqrt{\varepsilon}\,(l-z)^{-1}\,(\operatorname{Im} l)^{1/2} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{s} 0 \quad \text{при п. в. } k \in \mathbb{R}. \tag{2.34}$$

Заметим, что

$$\overline{(l-z)^{-1}\,(\operatorname{Im} l)^{1/2}\,u} = (l^* - \overline{z})^{-1}\,(\operatorname{Im} l)^{1/2}\,\overline{u},$$

где $\bar{\ }$ обозначает комплексное сопряжение. Выполнение условия (2.34) теперь непосредственно вытекает из установленного в ходе доказательства теоремы 6 при п. в. $k \in \mathbb{R}$ предела (1.12) для оператора $L = l$. Снова применяя следствие 1.27, получим, что $Z_t \xrightarrow{s} 0$ и в этом случае.

❑

Замечание 2.24. Доказательство следствия 2.1 по сути состоит в проверке того факта, что характеристическая функция рассматриваемых операторов является двусторонне внутренней. Имеющиеся содержательные результаты по анализу операторов с внутренней характеристической функцией в основном относятся к дискретной части спектра и эффективны только в случае ядерных возмущений, поскольку требуют наличия скалярного кратного [65]. Примеры, рассмотренные в нашей работе, говорят о том, что характеристические функции с нетривиальным "сингулярным"внутренним сомножителем естественным образом возникают в приложениях, когда возмущение неядерно.

Отметим ещё, что явление неустойчивости, описанное в работе, скорее всего, специфично для диссипативного случая. В недиссипативном случае все решения уравнения (2.7) при п. в. $z > 0$ будут ограничены, если потенциал принадлежит классу ВКБ и имеет несобственно интегрируемую мнимую часть. В этом случае абсолютно непрерывное подпространство, по-видимому, нетривиально даже если $\operatorname{Im} q \notin L^1$.

Глава III. Абсолютно непрерывный спектр и спектральные особенности односкоростного оператора переноса

3 Введение

В этой главе изучается абсолютно непрерывный спектр генератора эволюции в линейной теории переноса нейтронов. В качестве основного приложения полученных результатов мы находим точные в степенной шкале асимптотики решений задачи Коши при больших временах. Основное уравнение модели (0.2) подробно обсуждается в обзоре основных результатов, открывающем работу. После выделения убывающей экспоненты оно приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(x,\mu) = -\mu\frac{\partial}{\partial x}u_t(x,\mu) + c(x)\int_{-1}^{1} K(\mu,\mu')u_t(x,\mu')\mathrm{d}\mu', \qquad x \in \mathbb{R}, \mu \in [-1,1]. \tag{3.1}$$

В уравнении имеется два параметра: $c(x)$ – локальное среднее число вторичных частиц, возникающих в единичном акте поглощения, которое предполагается неотрицательной функцией с компактным носителем на вещественной оси, и интегральное ядро $K(\mu,\mu')$ (интеграл столкновений). Задача о поведении решений уравнения (3.1) при $t \to \infty$ впервые исследовалась в работах [68–70] в важном частном случае $K(\mu,\mu') \equiv \mathrm{const}$. Ленер и Винг установили, что в этом случае существует конечный набор чисел $\beta_j > 0$ и конечномерных проекторов P_j, такой что при любом $u_0 \in L^2(\mathbb{R}\times[-1,1])$ при любом $\delta > 0$ справедлива асимптотика:

$$u_t = \sum_j e^{\beta_j t}P_j u_0 + O\left(e^{\delta t}\right), \quad t \to +\infty. \tag{3.2}$$

После этого основной проблемой стало проанализировать остаток в асимптотике 3.2. Сами Ленер и Винг доказали [70], что остаток убывает поточечно для x из носителя функции c, если данное Коши u принадлежит некоему плотному множеству в подпространстве непрерывного спектра. Кроме того, они утверждали справедливость логарифмической оценки резольвенты [70, лемма 6], из которой следовало бы, что остаток есть $\|u\|\,O(\ln t)$. В нашей работе [71] была найдена ошибка в доказательстве этой оценки и показано, что сама оценка, вообще говоря, не верна. Насколько нам известно, никакие оценки остатка в норме L^2 при больших временах с тех пор не появлялись, а дальнейшие работы посвящены иным моделям. В этой главе мы получим точную оценку остатка в случае изотропного ядра ($K(\mu,\mu') \equiv \mathrm{const}$) и степенную оценку нормы остатка в случае полиномиального интеграла столкновений. Эти оценки будут получены как следствия теорем о структуре существенного спектра генератора эволюции, к формулировке которых мы и перейдем. Используемое в формулировке понятие спектральной особенности и связанная с ним терминология подробно поясняется ниже в разделе 3.1.

Уточним условия на параметры c и K. Всюду в этой главе будем предполагать, что $c \in L^\infty(\mathbb{R})$ – п. в. неотрицательная функция с компактным носителем, а K – интегральный оператор в пространстве $L^2(-1,1)$ вида

$$K = \sum_{i=1}^{N} k_i^2 \left\langle \cdot, \mathcal{P}_i \right\rangle_{L^2(\Omega)} \mathcal{P}_i,$$

где $N < \infty$, $k_i > 0$, а $\mathcal{P}_i$ – вещественные попарно ортогональные полиномы единичной нормы в пространстве $L^2(\Omega)$.

Обозначим через D оператор в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R} \times [-1,1])$, заданный выражением

$$D = i\mu\partial_x - ic(x)K, \tag{3.3}$$

на естественной области определения

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in H : \begin{array}{ll} \text{(i)} & f(\cdot,\mu) \text{ абсолютно непрерывна при п.в. } \mu \in [-1,1]; \\ \text{(ii)} & \mu\partial_x f \in H \end{array} \right\}.$$

самосопряженного оператора $D_0 = i\mu\partial_x$. Оператор D представляет собой генератор эволюции, порожденной уравнением (3.1) в том смысле, что

$$u_t = e^{itD} u_0, \; t \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что при наложенных на параметры c и K условиях оператор D представляет собой сумму самосопряженного оператора D_0 и ограниченного, поэтому существование ограниченных операторов e^{itD} не требует пояснений.

Пусть $T = D^*$.

Теорема 8. *Существенный спектр оператора T совпадает с вещественной осью. Пусть H_{ess} – инвариантное подпространство оператора T, отвечающее существенному спектру. Тогда $H_{ess} = H^w_{\mathrm{ac}}(T)$. Оператор T имеет разве лишь конечное число спектральных особенностей и собственных значений. Если $z = 0$ – спектральная особенность, то она имеет конечный степенной порядок. Все остальные спектральные особенности имеют конечный порядок в строгом смысле.*

Второй результат относится к изотропной задаче. В этом случае генератор не имеет ненулевых спектральных особенностей, см. [70, 71], а ситуация в точке 0 описывается следующим утверждением [71], доказанным в моей кандидатской диссертации. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество функций c, для которых нуль есть спектральная особенность. Тогда для любой ненулевой неотрицательной функции $c \in L^\infty$ с компактным носителем существует возрастающая к бесконечности последовательность значений константы $\varkappa > 0$, такая что $\varkappa c$ принадлежит $\mathcal{E}$ тогда, и только тогда, когда $\varkappa$ принадлежит этой последовательности. В этой работе мы покажем (предложение 5.4), что особенность в нуле или логарифмическая, или первого порядка, и укажем явное условие, различающее эти возможности. Из описанного результата следуют выводы об асимптотическом поведении решений на больших временах.

Теорема 9. *Пусть $K(\mu, \mu') \equiv 1/2$, и пусть $c \in \mathcal{E}$. В обозначениях равенства* (3.2) *положим:*

$$Z_t = V(t) - \sum_{i=1}^{l} e^{\beta_j t} P_j.$$

Тогда

$$\|Z_t\| = O(t)$$

при $t \to +\infty$, причем выполнено одно из следующих взаимоисключающих утверждений.

(i) *Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует вектор $u \in H$, такой что*

$$\|Z_t u\| = t^{1-\varepsilon}(1 + o(1)), \quad t \to +\infty;$$

(ii)

$$\|Z_t\| = O(\ln t),\ t \to +\infty,$$

причем при для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется вектор $u \in H$, такой что

$$\|Z_t u\| = (\ln t)^{1-\varepsilon} (1 + o(1)), \quad t \to +\infty.$$

При этом (i) *реализуется тогда, и только тогда, когда существует ненулевая функция $h \in L^2(\mathbb{R})$, такая что*

$$\frac{1}{2}\sqrt{c(x)} \int_{\mathbb{R}} \ln|x - y| \sqrt{c(y)} h(y) \mathrm{d}y + h(x) = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(y) \sqrt{c(y)} \mathrm{d}y = 0.$$

Доказательства этих результатов основаны на анализе асимптотического поведения характеристической функции S генератора эволюции. В рассматриваемой задаче характеристическая функция аналитична на вещественной оси всюду кроме точки $z = 0$. Мы покажем, что точка $z = 0$ представляет собой неизолированную особенность характеристической функции типа точки ветвления, что собственные значения и спектральные особенности не могут к этой точке накапливаться, а функция $S^{-1}(z)$ допускает степенную оценку при $z \to 0$. Этим мы сделаем основной шаг в доказательстве теоремы 8. Указанные свойства, дополненные асимптотиками функции $S(z)$ на бесконечности, сводят теорему 8 к утверждениям абстрактной теории.

В изотропном случае отсутствие накопления особенностей к нулю было доказано в [68, 69] с использованием некоторой открытой Ленером и Вингом симметрии, которой не обладает общее полиномиальное ядро K и которая не имеет полезного обобщения. Наше доказательство основано на других идеях и не сводится к доказательству Ленера и Винга в изотропном случае.

Чтобы доказать теорему 9, мы строим двухчленное асимптотическое разложение обратной характеристической функции в точке $z = 0$ (предложение 5.4). Это разложение позволяет выяснить точный порядок особенности в нуле. Точные оценки остатка в (4.9) после этого вытекают из результатов абстрактной теории, см. [72]. Именно в этом месте доказательство основных результатов использует функциональную модель Секефальви-Надя–Фояша, поскольку доказательство точности оценки в абстрактной теории в работе [72] состоит в явном построении вектора с требуемой асимптотикой в терминах модели оператора.

В этой главе, помимо общих, используются следующие обозначения:

$\omega_\delta(z) = \{z' \in \mathbb{C}_+ \colon |z' - z| \le \delta\}$;

(X, Y) – угол между подпространствами X, Y гильбертова пространства;

Для замкнутого оператора A в гильбертовом пространстве H:

$\sigma_+(A) = \sigma(A) \bigcap \mathbb{C}_+$;

$\sigma_{ess}(A)$ – существенный спектр оператора A; по определению, $\sigma_{ess}(A) \colon = \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A)$, где $\sigma_{disc}(A)$ – множество изолированных точек спектра, таких что соответствующий проектор Рисса – оператор конечного ранга;

$H_{ess}(A) \colon = \bigcap \ker \mathcal{P}_d$, где оператор $\mathcal{P}_d$ пробегает все проекторы Рисса, отвечающие точкам множества $\sigma(A) \setminus \sigma_{ess}(A)$. Подпространство $H_{ess}(A)$ – регулярно инвариантное подпространство оператора A. Явное указание оператора в этом обозначении опускается, когда из контекста ясно, какой оператор имеется в виду. То же относится к а. н. подпространству $H^w_{\mathrm{ac}}(A)$.

Подпространство $\mathcal{J} \subset H$ называется порождающим, если

$$H = \bigvee_{\lambda \in \rho(A)} (A - \lambda)^{-1} \mathcal{J}.$$

Кратностью спектра оператора A называется наименьшая из размерностей порождающих подпространств. Обозначается кратность через $m(A)$. Если все порождающие подпространства бесконечномерны, считаем, что $m(A) = \infty$.

Пусть L_0 – самосопряженный оператор, $V \ge 0$ – ограниченный оператор, $L \colon = L_0 + iV$. Для $z \in \mathbb{C}_+$ определим оператор

$$Q(z) \colon = i\sqrt{V}\,(L_0 - z)^{-1}\sqrt{V}. \tag{3.4}$$

Он удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} Q(z) \le 0$. Справедлива следующая версия теоремы Вейля об относительно компактных возмущениях.

Лемма. *Если оператор $Q(z)$ компактен при некотором $z \in \mathbb{C}_+$, то $\sigma_{ess}(L) = \sigma_{ess}(L_0)$, $\sigma_+(L) = \{z \in \mathbb{C}_+ : \ker(I + Q(z)) \ne \{0\}\}$.*

Мы сохраним обозначение $Q(z)$ для сужения оператора (3.4) на его приводящее подпространство $\overline{\operatorname{Ran} V} \subset H$.

Ограниченная скалярная аналитическая функция $s(z)$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ называется *внешней*, если $\overline{sH^2_+} = H^2_+$.

3.1 Абсолютно непрерывное подпространство – II

Пусть L – максимальный диссипативный оператор в гильбертовом пространстве H с ограниченной мнимой частью $V = \operatorname{Im} L$, существенный спектр которого расположен на вещественной оси. Заметим сразу, что слабое а. н. подпространство $H^w_{\mathrm{ac}}(L) \subset H_{ess}(L)$.

В главе I было дано определение характеристической функции оператора L, см. (1.20), представляющей собой сжимающую аналитическую функцию со значениями в операторах в гильбертовом пространстве $E\colon = \overline{\operatorname{Ran} V}$. Определение (1.20) можно переписать в виде [8]

$$S(z) = \frac{I + Q(z)}{I - Q(z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{3.5}$$

При п. в. $k \in \mathbb{R}$ функция S имеет нормальные граничные значения $S(k)$ в сильном смысле. При всех $z \in \mathbb{C}_+ \bigcap \rho(L)$ оператор $S(z)$ имеет ограниченный обратный, заданный на всем пространстве E, причем [64]

$$\left\| S^{-1}(z) \right\| \asymp \operatorname{Im} z \left\| (L - z)^{-1} \right\|, \; z \in \mathbb{C}_+. \tag{3.6}$$

Следующий факт служит основным средством при доказательстве абсолютной непрерывности существенного спектра, т. е. равенства $H_{ess} = H_{\mathrm{ac}}$.

Лемма 3.1 ([55, 64])**.** *Пусть самосопряженная часть оператора L абсолютно непрерывна. Если характеристическая функция S обладает скалярным кратным d, допускающим факторизацию вида $d = bd_e$, где функция d_e – внешняя, а b – произведение Бляшке, то инвариантное подпространство H_d оператора L, натянутое на его корневые вектора, и пространство H^w_{ac} порождают все пространство H, т. е.*

$$\overline{H^w_{\mathrm{ac}} \dot{+} H_d} = H.$$

Переходя к определению спектральных особенностей, заметим сначала, что критерий Секефальви-Надя–Фояша (0.4), согласно (3.6) эквивалентен условию ограниченности нормы $\|S^{-1}(z)\|$ в $\mathbb{C}_+$. Согласно результатам работы [43], сильное а. н. пространство H_{ac} совпадает с инвариантным подпространством, отвечающим канонической характеризации характеристической функции оператора. Характеристическая функция сужения оператора на пространство H_{ac}, таким образом, будет внешней, а для внешней функции ограниченность обратной функции в полуплоскости эквивалентна ограниченной обратимости ее граничных значений на вещественной оси. Таким образом, мы приходим к критерию Секефальви-Надя–Фояша в граничной форме: сужение оператора L на подпространство H^w_{ac} подобно самосопряженному оператору тогда, и только тогда, когда

$$\operatorname*{ess\,sup}_{k \in \mathbb{R}} \left\| S^{-1}(k) \right\| < \infty.$$

Определение 3.2. *Точка $k_0 \in \mathbb{R}$ называется*

- *спектральной особенностью оператора L, если*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{k\in\omega}\left\|S^{-1}(k)\right\| = \infty$$

для любой окрестности $\omega \subset \mathbb{R}$ точки k_0;

- *спектральной особенностью конечного порядка, если существуют число $p > 0$ и окрестность $\omega \subset \mathbb{R}$ точки k_0, такие что*

$$\left\|S^{-1}(k)\right\| \leq C\,|k-k_0|^{-p} \tag{3.7}$$

при п. в. $k \in \omega$;

- *спектральной особенностью порядка $p > 0$ в строгом смысле, если выполнено условие* (3.7) *и для некоторого ненулевого вектора $e_0 \in E$ и константы $C_1 > 0$*

$$\|S(k)e_0\|_E \leq C_1\,|k-k_0|^p$$

при п. в. k.

- *логарифмической спектральной особенностью в строгом смысле, если существуют окрестность $\omega \subset \mathbb{R}$ точки k_0 и вектор $e_0 \in E$, такие что при п. в. $k \in \omega$*

$$\left\|S^{-1}(k)\right\| \leq -C' \ln|k-k_j|,$$

$$\|S(k)e_0\|_E \leq \frac{C}{|\ln|k-k_0||}.$$

Приведенное определение спектральной особенности совпадает со стандартным в случае, когда характеристическая функция обладает скалярным кратным [55].

4 Оператор переноса: анизотропный случай

Перейдем к анализу генератора D. Будем использовать обозначения $\Omega \equiv [-1,1]$ и $V = -\operatorname{Im} D$, тогда $V \geq 0$. Мы не будем различать в обозначениях оператор K и оператор $I \otimes K$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}\times\Omega) = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\Omega)$. Используя базис полиномов $\{\mathcal{P}_i\}$, можно естественно отождествить образ оператора K в пространстве H с пространством $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ вектор-функций переменной x: $KH = L^2(\mathbb{R})\otimes\mathcal{L}\{\mathcal{P}_j\}_1^N \simeq L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$. Подпространство $E \equiv \overline{\operatorname{Ran} V}$ естественно отождествляется с подпространством в $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$, состоящим из функций, исчезающих вне носителя функции c. Положим:

$$Q(z) = i\sqrt{V}\,(D_0 - z)^{-1}\sqrt{V}\Big|_E,\ z \in \mathbb{C}_+.$$

Резольвента оператора D_0 при $\operatorname{Im} z > 0$ имеет вид:

$$\left((D_0 - z)^{-1} f\right)(x,\mu) = \frac{i}{\mu} \begin{cases} -\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-iz(x-s)/\mu} f(s,\mu)\,\mathrm{d}s, & \mu < 0 \\ \displaystyle\int_{x}^{\infty} e^{-iz(x-s)/\mu} f(s,\mu)\,\mathrm{d}s, & \mu > 0. \end{cases}$$

Подставляя и заменяя переменную, получим:

$$Q(z) = \sum_{0}^{2N} T_j(z) \otimes G_j, \tag{4.1}$$

где $T_j(z)$ – интегральные операторы с ядрами

$$t_j(x,y) = \sqrt{c(x)}\,(\operatorname{sign}(x-y))^j\; E_j(-iz|x-y|)\sqrt{c(y)},$$

функции E_j при $\operatorname{Re} s > 0$ заданы равенством:

$$E_j(s) = \int_1^{\infty} e^{-st} t^{-j-1} \mathrm{d}t, \tag{4.2}$$

а G_j – матрицы $N \times N$ с вещественными элементами. Поскольку функция c имеет компактный носитель, $Q(z)$ – оператор Гильберта-Шмидта при любом $z \in \mathbb{C}_+$. С этого места нижний индекс 0 будет опускаться при $j = 0$, т. е., например, будем писать E вместо E_0.

Лемма 4.1.

(i)

$$Q(z) = \ln(-iz)\,\langle \cdot, \ell \rangle\, \ell + Q_0 + \Theta(z), \tag{4.3}$$

где Q_0 – оператор Гильберта-Шмидта, функция $\ell \in E$ задается формулой:

$$\ell = \sqrt{c}\,\mathbf{e},\ \mathbf{e} := \begin{pmatrix} k_1 \mathcal{P}_1(0) \\ k_2 \mathcal{P}_2(0) \\ \dots \\ k_N \mathcal{P}_N(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}_N,$$

а $\Theta(z)$ – аналитическая функция в области $\mathcal{O} \equiv \mathbb{C} \setminus \{-it, t \geq 0\}$, такая что $\|\Theta(z)\| \leq C|z \ln z|$ при $|z| \leq 1/2$. Эта формула определяет аналитическое продолжение функции $Q(z)$ из $\mathbb{C}_+$ на плоскость с разрезом $\mathcal{O}$.

(ii) $\|Q(z)\| \to 0$ *при* $|z| \to \infty$ *равномерно в верхней полуплоскости.*

Доказательство. Интегрируя в (4.2) по частям, получим:

$$E_j(s) = p_{j-1}(s)e^{-s} + c_j s^j E(s),$$

где p_{j-1} – полином степени $j-1$, $c_j = (-1)^j/j!$. Функция $E(s)$ допускает представление [69]:

$$E(s) = -\ln s - \gamma + \theta(s),\ \operatorname{Re} s > 0, \tag{4.4}$$

где

$$\theta(s) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-s)^m}{m!m},$$

а γ – постоянная Эйлера. Эта формула задает аналитическое продолжение функции E, а, значит, и всех функций E_j, на плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \le 0\}$. Подставляя эти представления для функций E_j в представление (4.1), собирая слагаемые сообразно с их поведением по переменной z и учитывая, что $G_0 = \{k_i k_j \mathcal{P}_i(0)\mathcal{P}_j(0)\}_{i,j=1}^N$, получим (i). Чтобы доказать (ii), проверим, что $\|T_j(z)\|_2 \to 0$ при $|z| \to \infty$ равномерно в верхней полуплоскости при любом j. Проинтегрируем по частям в представлении (4.2) в направлении, противоположном использованному в доказательстве пункта (i). Получим, что найдется константа $C > 0$, такая что $|E_j(s)| \le C|s|^{-1}$ при всех s, $\operatorname{Re} s \ge 0$. Пусть χ_ε – индикатор интервала $[0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Представим оператор T_j в виде суммы

$$T_j = T_j^\varepsilon + R_j^\varepsilon,$$

где T_j^ε – интегральный оператор с ядром $t_j(x,y)\chi_\varepsilon(|x-y|)$. Из оценки на функцию E_j следует, что $\left\|R_j^\varepsilon\right\|_2 \le C|z|^{-1}\varepsilon^{-1}$. С другой стороны, из определения (4.2) и представления (4.4) непосредственно видно, что $\left\|T_j^\varepsilon\right\|_2 \le C\varepsilon^{1/2}$ при $j \ge 1$, и что

$$\|T_0^\varepsilon\|_2 \le C\varepsilon^{1/2}(1 + |\ln(\varepsilon z)|).$$

Теперь, полагая, например, $\varepsilon = |z|^{-1/2}$, получим (ii). ❑

Из приведенного доказательства ясно, что функция Θ допускает представление вида:

$$\Theta(z) = A(z) + \ln(-iz)B(z), \tag{4.5}$$

где $A(z)$ и $B(z)$ – целые функции, такие что $A(0) = B(0) = 0$.

Пусть $T = D^*$, и пусть S – характеристическая функция оператора T. Определим $\widetilde{Q}(z)$ как сумму первых двух членов в правой части представления (4.3), так что

$$Q(z) = \widetilde{Q}(z) + \Theta(z),\ z \in \mathbb{C}_+. \tag{4.6}$$

Выберем произвольное $\delta > 0$, такое что оператор $I - \widetilde{Q}(i\delta)$ ограниченно обратим. Такое δ существует, поскольку $\operatorname{Re} Q(z) \le 0$ при $z \in \mathbb{C}_+$. Обозначим через S_1 оператор ранга 1 в пространстве E вида:

$$S_1 = \left\langle \cdot, \left(I - \widetilde{Q}^*(i\delta)\right)^{-1} \ell \right\rangle \left(I - \widetilde{Q}(i\delta)\right)^{-1} \ell.$$

Предложение 4.2. *Характеристическая функция S оператора T непрерывна по норме вплоть до вещественной оси, аналитична на вещественной оси вне точки $z = 0$, и допускает аналитическое продолжение из полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на малую окрестность точки 0, разрезанную по отрицательной мнимой оси. При $z \to 0$ справедлива следующая равномерная по аргументу z асимптотика:*

$$S(z) = S(0) + \frac{2}{\vartheta_c(1+\alpha(z)\vartheta_c)} S_1 + O\left(|z \ln z|\right), \; z \in \Pi,$$

$$S(0) = \frac{I + \widetilde{Q}(i\delta)}{I - \widetilde{Q}(i\delta)} - \frac{2}{\vartheta_c} S_1,$$

$$\alpha(z) = -\ln\left(-\frac{iz}{\delta}\right), \; \vartheta_c = \left\langle \left(I - \widetilde{Q}(i\delta)\right)^{-1} \ell, \ell \right\rangle.$$

O-символика здесь относится к операторной норме.

Доказательство. Получим сначала аналитическое продолжение и асимптотику в нуле дял функции $(I - Q(z))^{-1}$. Соответствующий результат для функции S после этого непосредственно считывается из определения (3.5). Заметим, во-первых, что функция $S(z)$ аналитична на вещественной оси вне точки $z = 0$ вместе с функцией $Q(z)$. Далее, поскольку

$$\widetilde{Q}(z) = \widetilde{Q}(i\delta) + \alpha(z) \left\langle \cdot, \ell \right\rangle \ell,$$

прямым вычислением получим, что

$$\left(I - \widetilde{Q}(z)\right)^{-1} = \left(I - \widetilde{Q}(i\delta)\right)^{-1} - \frac{\alpha(z)}{1+\alpha(z)\vartheta_c} S_1.$$

Постоянная ϑ_c в этой формуле не обращается в нуль, так как иначе левая часть была бы не ограничена в окрестности нуля в верхней полуплоскости, а она на самом деле ограничена, поскольку $\operatorname{Re} Q(z) \le 0$ при $z \in \mathbb{C}_+$, и, значит, $\operatorname{Re} \widetilde{Q}(z) \le 1/2$ в достаточно малой окрестности нуля в $\mathbb{C}_+$. Правая часть полученной формулы непрерывна в нуле в $\overline{\mathbb{C}_+}$, допускает аналитическое продолжение на малую окрестность Π точки 0, разрезанную по отрицательной мнимой оси, и это продолжение ограничено по норме в Π. Тогда функция $\left(I - \widetilde{Q}(z)\right)^{-1} \Theta(z)$ также допускает аналитическое продолжение в окрестность Π, причем в этой окрестности

$$\left\| \left(I - \widetilde{Q}(z)\right)^{-1} \Theta(z) \right\| = O(|z \ln z|),$$

согласно лемме 4.1. Выражая $(I - Q(z))^{-1}$ через $\left(I - \widetilde{Q}(z)\right)^{-1}$ при помощи резольвентного тождества, отсюда получим, что функция $(I - Q(z))^{-1}$ также допускает аналитическое продолжение на область Π, причем это продолжение может быть представлено в виде:

$$(I - Q(z))^{-1} = \left(I - \widetilde{Q}(i\delta)\right)^{-1} - \frac{\alpha(z)}{1+\alpha(z)\vartheta_c} S_1 + O\left(|z \ln z|\right), \; z \in \Pi.$$

Сравнивая это представление с определением характеристической функции (3.5), переписанным в виде

$$S(z) = -I + 2\left(I - Q(z)\right)^{-1},$$

получим доказываемое утверждение. ❑

Доказательство теоремы 8. Существенные спектры операторов T и D_0 совпадают в силу теоремы Вейля, так что $\sigma_{ess}(T) = \mathbb{R}$. Из аналитичности функции $Q(z)$ на вещественной оси вне точки $z = 0$ следует, что множества спектральных особенностей и собственных значений в верхней полуплоскости не имеют вещественных точек накопления, отличных от нуля. Функция $S(k)$ непрерывна по норме вплоть до вещественной оси в силу предложения 4.2, $S(k) \to I$ по норме при $k \to \pm\infty$ в силу леммы 4.1(ii), и, наконец, оператор $S(k) - I$ - компактный.

Покажем теперь, что множества $\sigma_+(T)$ и σ_0 конечны. Из сказанного выше следует, что для этого достаточно доказать, что точки $z \in \overline{\mathbb{C}_+}$, такие что $\ker\left(I + Q(z)\right)$ нетривиально, не накапливаются к 0. Отсюда и до конца доказательства будем обозначать через $\mathbf{P}_1$ оператор ранга 1, не зависящий от точки z, точное вид которого нам не важен. Пусть $\mathcal{P}$ – проектор Рисса оператора Q_0, определенного в (4.3), отвечающий точке -1, и пусть $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$. Тогда оператор $I + Q_0\mathcal{Q}$ ограниченно обратим, причем

$$I + Q(z) = (I + Q_0\mathcal{Q})\left(I + Q_0\mathcal{P} + \ln(-iz)\mathbf{P}_1 + \widetilde{\Theta}(z)\right),$$

где $\widetilde{\Theta}(z)$ – функция, аналитическая в области $\mathcal{O}$ и допускающая следующее представление (см. (4.5)):

$$\widetilde{\Theta}(z) = \Theta_1(z) + \ln(-iz)\Theta_2(z)$$

с целыми функциями $\Theta_{1,2}$, такими что $\Theta_1(z) = \Theta_2(z) = 0$. Таким образом, подпространство $\ker(I + Q(z))$ нетривиально, если, и только если, нетривиально ядро оператора

$$Z = I + Q_0\mathcal{P} + \ln(-iz)\mathbf{P}_1 + \widetilde{\Theta}(z).$$

Этот оператор можно представить в виде:

$$Z = (I + \Theta_1(z))\left(I + H_1(z)\mathcal{P} + \ln(-iz)\left(\mathbf{P}_1 + H_2(z)\right)\right),$$

где $H_{1,2}$ – функции, аналитические в окрестности точки $z = 0$, причем $H_2(0) = 0$. Обозначим через P ортопроектор на ортогональное дополнение пространства $\ker\mathbf{P}_1 \cap \ker\mathcal{P}$. Продолжая выносить обратимые множители и используя ряд Неймана для обращения операторов вида "$I+$оператор с нормой, меньшей 1', получим:

$$I + H_1(z)\mathcal{P} + \ln(-iz)\left(\mathbf{P}_1 + H_2(z)\right) = \left(I + \ln(-iz)H_2(z)\right)\left(I + H(z)P\right),$$

где функция H допускает представление вида:

$$H(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \ln^j(-iz)F_j(z)$$

с функциями F_j и G, аналитическими в окрестности нуля и удовлетворяющими в этой окрестности оценке $\|F_j(z)\| \le (C|z|)^{j-1}$ при $j \ge 1$. Здесь мы учли, что $\mathcal{P}P = \mathcal{P}$, $\mathbf{P}_1 P = \mathbf{P}_1$. В силу своей треугольной структуры, оператор $I + H(z)P$ имеет нетривиальное ядро, если, и только если, нетривиально ядро сужения оператора $I + PH(z)$ на образ проектора P. Следовательно, найдется окрестность нуля U°, такая что при $z \in U^\circ$ ядро $\ker(I + Q(z)) \ne \{0\}$, если, и только если, $\det(I + PH(z)P) = 0$, и выполнена оценка:

$$\left\|(I + Q(z))^{-1}\right\| \le \frac{C}{|\det(I + PH(z)P)|}\left(1 + \left\|P^\perp H(z)P\right\|\right)\|PH(z)P\|^{\operatorname{rank} P}, \qquad (4.7)$$

где константа C зависит только от ранга проектора P. Раскладывая определитель, получим:

$$\det(I + PH(z)P) = \sum_{j=0}^{\infty} \ln^j(-iz) f_j(z), \qquad (4.8)$$

где функции $f_j(z)$ аналитичны в окрестности U° и при достаточно большом M при всех $j > M$ удовлетворяют оценке $|f_j(z)| \le (C|z|)^{j-M}$. Предположим теперь, что существует последовательность $z_l \to 0$, $z_l \in \overline{\mathbb{C}_+}$, такая что $\det(I + PH(z_l)P) \to 0$. Переходя к пределу $z_l \to 0$, последовательно найдем, что $f_M(0) = 0$, $f_{M-1}(0) = 0$, $\ldots, f_0(0) = 0$. Так как $f_j(0) = 0$ при $j > M$, это означает, что $f_j(0) = 0$ при всех $j \ge 0$. Рассмотрим теперь функцию

$$g(z) = z^{-1}\det(I + PH(z)P).$$

Ясно, что либо функция $g(z)$ отделена по модулю от нуля в окрестности точки 0, и тогда $|\det(I + PH(z)P)| \ge C|z|$, либо найдется последовательность $z'_l \to 0$, $z'_l \in \overline{\mathbb{C}_+}$, такая что $g(z'_l) \to 0$. Во втором случае, повторяя рассуждения выше, получим, что $f'_j(0) = 0$ при всех $j \ge 0$. Далее рассмотрим функцию $z^{-2}\det(I + PH(z)P)$: либо эта функция также отделена от нуля в окрестности точки 0, либо $f''_j(0) = 0$ пр всех j, и т. д. Этот процесс должен оборваться за конечное число шагов, иначе из аналитичности получится, что все функции f_j, а, значит, и сам определитель (4.8), тождественно обращаются в нуль во всей окрестности U°, что противоречит дискретности спектра в верхней полуплоскости. Следовательно, существует номер n, такой что

$$|\det(I + PH(z)P)| \ge C\,|z|^n$$

при $z \in \overline{\mathbb{C}_+}$ в некоторой окрестности нуля. Отсюда вытекает, что спектр в верхней полуплоскости и спектральные особенности не накапливаются к нулю. Подставляя полученное неравенство в оценку (4.7) и учитывая, что $\|H(z)\| = O(|\ln z|)$ в окрестности точки 0, находим, что

$$\left\|(I + Q(z))^{-1}\right\| \le \frac{C}{|z|^n}\left|\ln^{\operatorname{rank} P + 1} z\right|.$$

Переписывая формулу (3.5) для характеристической функции в виде

$$S^{-1}(z) = -I + 2\,(I + Q(z))^{-1},$$

получим:
$$\left\|S^{-1}(z)\right\| \le C\,|z|^{-n-1}\,, z \in \overline{\omega_\delta(0)},\ z \ne 0.$$
Отсюда следует, что спектральная особенность в точке $z = 0$ имеет конечный порядок.

Осталось показать, что $H_{ess} = H^w_{\mathrm{ac}}$. Для этого мы докажем, используя лемму 3.1, что замкнутая линейная сумма а. н. подпространства H^w_{ac} и подпространства H_d, натянутого на корневые вектора оператора T, совпадает с пространством H. Мы только что доказали, что пространство H_d конечномерно, и, стало быть, угол между пространствами H^w_{ac} и H_d отличен от нуля. Проверим теперь, что характеристическая функция $S(z)$ обладает скалярным кратным. Тот факт, что все спектральные особенности имеют конечный порядок, означает, что существует набор положительных чисел m_j, такой что функция $\prod_{k_j\in\sigma_0}(z-k_j)^{m_j}\,S^{-1}(z)$ ограничена на любом компакте в замкнутой верхней полуплоскости, не содержащем собственных значений оператора. Согласно пункту (ii) леммы 4.1, $S(z) \to I$ по операторной норме при $z \to \infty$ в верхней полуплоскости равномерно по аргументу. Пусть теперь b – произведение Бляшке, отвечающее $\sigma_+ :\ = \sigma(T) \cap \mathbb{C}_+$, т. е.
$$b(z) = \prod_{z_j\in\sigma_+} \frac{z - z_j}{z - \overline{z_j}},$$
где каждый множитель берется с учетом кратности соответствующей точки. Тогда функция
$$\pi(z) = (z+i)^{-J}\prod (z-k_j)^{m_j}\, b(z),\ J = \sum_j m_j,$$
– скалярное кратное функции $S(z)$. Функция π очевидным образом представляет собой произведение множителя Бляшке и внешней функции. Из леммы 3.1 теперь следует, что $H^w_{\mathrm{ac}}\dot{+}H_d = H$, поскольку самосопряженная часть оператора T_{ess}, если она нетривиальна, очевидным образом абсолютно непрерывна – она представляет собой сужение а. н. самосопряженного оператора D_0 на его приводящее подпространство, см. лемму 1.2. ❑

Заметим, что последняя фраза доказательства представляет собой содержательную оговорку – как показано в нашей работе [IX], уже в изотропном случае $K(\mu,\mu') \equiv \mathrm{const}$ оператор T имеет нетривиальное самосопряженное подпространство.

Перейдем к формулировке заключения о временной эволюции.

Следствие 4.3. *Пусть $c \in L^\infty(\mathbb{R})$. Предположим, что интегральное ядро K полиномиально по переменным μ, μ', и что интегральный оператор K, заданный этим ядром в пространстве $L^2(-1,1)$, неотрицателен. Обозначим через $V(t)$ эволюционную группу в пространстве $H = L^2(\mathbb{R}\times[-1,1])$, порожденную уравнением* (3.1) *в том смысле, что $V(t)u_0 = u_t$ для $u_0 \in H$. Тогда*

(i) *Существуют конечные числа* $l, n \geq 0$ *и конечный набор точек* $\lambda_j \in \mathbb{C}_+$, $1 \leq j \leq l$, *такие что*

$$V(t) = \sum_{i=1}^{l} e^{-i\lambda_j t} P_j + O\left(t^n\right), \quad t \to +\infty. \tag{4.9}$$

Здесь O*-символика относится к операторной норме,* P_j, $j \leq l$, *– операторы конечного ранга.*

(ii) $\sup_{t>0} \|V(t)u\|$ *конечен при любом* u *из плотного подмножества в* $\bigcap_j \ker P_j$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{K}$ – интегральный оператор в пространстве $L^2(\Omega)$ с ядром $K(-\mu, -\mu')$. Применим теорему 8 к оператору

$$\widetilde{T} = i\mu\partial_x + ic(x)\widetilde{K}.$$

Очевидно, что операторы D и $-\widetilde{T}$ унитарно эквивалентны:

$$D = J(-\widetilde{T})J^*, \ (Jf)(x, \mu) \colon = f(x, -\mu).$$

Пункт (ii) теперь вытекает из абсолютной непрерывности существенного спектра[1] (т. е. равенства $H_{ess}(\widetilde{T}) = H_{\mathrm{ac}}(\widetilde{T})$), см. [55]. Пункт (i) вытекает из следующего предложения типа функционального исчисления [72, следствие 2]:

Предложение 4.4. *Пусть* L *– максимальный диссипативный оператор, имеющий конечное число спектральных особенностей* k_j, *и пусть* $\mathcal{S}$ *– его характеристическая функция. Если для некоторого* $p > 0$ *функция* $|k - k_j|^p \left\|\mathcal{S}^{-1}(k)\right\|$ *в существенном ограничена в некоторой окрестности точки* k_j *на вещественной оси при каждом* j, *и, кроме того,* *ess* $\mathit{sup}_{|k|>b} \left\|\mathcal{S}^{-1}(k)\right\|$ *конечен при достаточно большом* b, *то*

$$\left\| e^{-itL}\big|_{H_{\mathrm{ac}}(L)} \right\| = O\left(t^p\right)$$

as $t \to +\infty$.

❑

5 Спектральная особенность в изотропном случае

В этом разделе мы рассмотрим оператор K простейшего вида, ядро которого постоянно: $K(\mu, \mu') \equiv 1/2$. Константу $1/2$ можно было бы включить в функцию c, но нам удобно, чтобы оператор K совпадал с ортопроектором на константы в $L^2(\Omega)$. Пространство E в изучаемой ситуации состоит из функций, не зависящих от переменной μ, и таким образом отождествляется с подпространством в $L^2(\mathbb{R})$,

[1] Пользуясь случаем, укажем на опечатку в [71, следствие 3.15]: отсутствуют знаки нормы вокруг оператора $e^{itL}u$.

образованном функциями, сосредоточенными на носителе функции c; операторы $Q(z)$ и $\widetilde{Q}(z)$ (см. (4.6)) имеют интегральные ядра

$$-\frac{1}{2}\sqrt{c(x)}E(-iz|x-y|)\sqrt{c(y)}$$

и

$$\frac{1}{2}\sqrt{c(x)}(\ln(-iz|x-y|)+\gamma)\sqrt{c(y)},$$

соответственно, а $\Theta(z)$ – целая функция, такая что $\Theta(0)=0$.

Лемма 5.1 ([69]). *Если* $\mp\mathrm{Re}\, z>0$, $\mathrm{Im}\, z\geq 0$, *то* $\pm\mathrm{Im}\, Q(z)>0$.

Для замкнутости изложения приведем набросок доказательства. Детали могут быть найдены в [69, 71].

Доказательство. При $\mathrm{Im}\, z>0$ рассмотрим оператор

$$\Xi(z)=iK\left(D_0-z\right)^{-1}\big|_{KH},$$

действующий в пространстве KH. В представлении Фурье по переменной x этот оператор действует как умножение на функцию

$$\xi(p,z)=\frac{i}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{p\mu-z}.$$

Заметим, что функция $\mathrm{Im}\,\xi(p,z)$ положительна (отрицательна), если отрицательна (соответственно, положительна) $\mathrm{Re}\, z$, и, следовательно, $\pm\mathrm{Im}\,\Xi(z)$ – (строго) положительный оператор $\mp\mathrm{Re}\, z>0$ в пространстве KH. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\pm\mathrm{Im}\, Q(z)>0$ при $\mp\mathrm{Re}\, z>0$, поскольку $\mathrm{Im}\, Q(z)=X\mathrm{Im}\,\Xi(z)X\big|_E$, где $X\colon L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ – оператор умножения на функцию $\sqrt{c}$. Соответствующее утверждение для $\mathrm{Im}\, z=0$, $\mathrm{Re}\, z\neq 0$ легко проверяется предельным переходом $\mathrm{Im}\, z\downarrow 0$. ❑

Из этой леммы немедленно вытекает, что множество $\sigma_+(T)$ расположено на мнимой оси [68]. Комбинируя утверждение леммы и тот факт, что $Q(k)\to 0$ по норме при $k\to\pm\infty$ (см. пункт (ii) в лемме 4.1), получаем такое

Следствие 5.2. *При любом вещественном* $k\neq 0$ *оператор* $S(k)$ *ограниченно обратим, и, более того,*

$$\sup_{k\in\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]}\left\|S^{-1}(k)\right\|<\infty \tag{5.1}$$

при любом $\delta>0$.

Всюду далее до конца главы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$. При таком обозначении утверждение предложения 4.2 справедливо с $\ell=\sqrt{c/2}$. Пусть $\{\eta_n(\varepsilon)\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta_{n+1}(\varepsilon)\leq\eta_n(\varepsilon)$,– собственные значения оператора $\widetilde{Q}(i\varepsilon)$, и пусть $\mathcal{B}_c=\{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\eta_n(\varepsilon)\}$. Применяя критерий Секефальви-Надя–Фояша и учитывая следствие 5.2, получим такое описание спектральных особенностей оператора.

Следствие 5.3 ([71], предложение 3.9 и следствие 3.7)**.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) 0 – *спектральная особенность;*

(ii) *оператор* T_{ess} *не подобен самосопряженному;*

(iii) $\ker S(0) \neq \{0\}$,

(iv) $-1 \in \mathcal{B}_c$.

Будем говорить, что $c \in \mathcal{E}$, если выполнено любое из эквивалентных утверждений этого следствия. Пусть Y, Y_1 – интегральные операторы в пространстве E, заданные соответственно ядрами

$$\frac{1}{2}\sqrt{c(x)}(\gamma + \ln|x-y|)\sqrt{c(y)},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{c(x)}|x-y|\sqrt{c(y)}.$$

Еще положим:

$$\mathrm{N} = \{u \in \ker(I+Y)\colon \left\langle u, \sqrt{c}\right\rangle = 0\},$$

и обозначим через P_{N} ортопроектор на подпространство N в пространстве E. Дальнейший анализ разделяется на два случая в зависимости от того, тривиально пространство N или нет. В следующем предложении O–символика относится к операторной норме.

Предложение 5.4. *Пусть* $c \in \mathcal{E}$. *Если подпространство* N *тривиально, то при всех* $\xi > 0$, *кроме, возможно, одного,* $-1 \notin \sigma\big(\widetilde{Q}(i\xi)\big)$, *и при любом таком* ξ *справедлива следующая асимптотика при* $z \to 0$ *в* $\overline{\mathbb{C}}_+$*:*

$$S^{-1}(z) = G - \ln\left(\frac{-iz}{\xi}\right)\langle \cdot, \tilde{e}\rangle\, \tilde{e} + O(|z\ln^2 z|), \tag{5.2}$$

где

$$G = \frac{I - \widetilde{Q}(i\xi)}{I + \widetilde{Q}(i\xi)},$$

$$\tilde{e} = \left(I + \widetilde{Q}(i\xi)\right)^{-1}\sqrt{c}.$$

Если подпространство N *нетривиально, то оператор* $M = P_{\mathrm{N}} Y_1|_{\mathrm{N}}$ *– обратимый оператор в пространстве* N. *Если, кроме того, сужение оператора* $I+Y$ *на его приводящее подпространство* $\mathrm{N}^{\perp}$ *обратимо, то при* $z \to 0$ *в* $\overline{\mathbb{C}}_+$ *справедлива следующая асимптотика. Пусть*

$$\Lambda = \left(\left(I+Y\right)|_{\mathrm{N}^{\perp}}\right)^{-1}, \vartheta = \left\langle \Lambda\sqrt{c}, \sqrt{c}\right\rangle,$$

$$B_0 = -I + 2\left(I - M^{-1}P_N Y_1\right)\Lambda P_{\mathrm{N}}^{\perp}\left(I - Y_1 M^{-1} P_N\right).$$

Тогда

$$S^{-1}(z) = -\frac{1}{z}2iM^{-1}P_N + B_0 + O\left(|\ln z|^{-1}\right) \tag{5.3}$$

при $\vartheta \neq 0$;

$$S^{-1}(z) = -\frac{1}{z}2iM^{-1}P_N - \ln(iz)\left\langle \cdot, \Lambda^* \sqrt{c}\right\rangle \left(I - M^{-1}P_N Y_1\right)\Lambda\sqrt{c} \\ + B_0 + O\left(|\ln z|^{-1}\right)$$

при $\vartheta = 0$.

Как уже отмечалось в нашей работе [71], существуют функции $c \in \mathcal{E}$, такие что пространство N нетривиально, и таким образом, вторая возможность в этом предложении реализуется. Например, $\mathrm{N} \neq \{0\}$ уже для функции

$$c(x) = \varkappa \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

при подходящем выборе константы $\varkappa > 0$.

Доказательство предложения 5.4. Пусть сначала подпространство N тривиально. Тогда число $\xi > 0$, такое что $-1 \in \sigma\big(\widetilde{Q}(i\xi)\big)$, если существует, то единственно, поскольку иначе нашлась бы ненулевая линейная комбинация элементов пространства $\ker\Big(I + \widetilde{Q}(i\xi)\Big)$, отвечающих различным значениям ξ, принадлежащая N. Выберем произвольное число ξ, такое что $-1 \notin \sigma(\widetilde{Q}(i\xi))$. Пусть

$$\alpha(z) = \frac{1}{2}\ln\left(-\xi^{-1}iz\right).$$

Имеем:

$$\Big(I + \widetilde{Q}(z)\Big)^{-1} = \Big(I + \widetilde{Q}(i\xi)\Big)^{-1} - \frac{\alpha(z)}{1 + \alpha(z)\varrho_c}\left\langle \cdot, \tilde{e}\right\rangle \tilde{e}, \ \varrho_c := \left\langle \tilde{e}, \sqrt{c}\right\rangle.$$

Поскольку $c \in \mathcal{E}$, число $\varrho_c = 0$, иначе левая часть полученного равенства была бы ограничена по норме в окрестности $z = 0$. Выражая оператор $(I + Q(z))^{-1}$ через $\Big(I + \widetilde{Q}(z)\Big)^{-1}$ с помощью резольвентного тождества и учитывая, что $\Theta(z) = O(z)$, получим:

$$(I + Q(z))^{-1} = \Big(I + \widetilde{Q}(i\xi)\Big)^{-1} - \alpha(z)\left\langle \cdot, \tilde{e}\right\rangle \tilde{e} + O\left(|z \ln^2 z|\right), \ z \in \omega_\delta(0).$$

Представление (5.2) теперь следует из определения (3.5), записанного в виде

$$S^{-1}(z) = -I + 2\left(I + Q(z)\right)^{-1}. \tag{5.4}$$

Теперь пусть подпространство N нетривиально. Покажем сначала, что оператор M обратим. Поскольку подпространство N конечномерно, для этого достаточно проверить, что $\ker M = \{0\}$. В самом деле, пусть $h \in E$ – вещественная функция, такая что $\langle \sqrt{c}, h\rangle = 0$. Положим: $f = \sqrt{c}h$. Интегрируя по частям, тогда будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\langle Y_1 h, h\rangle &= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{x}(x-y)f(x)f(y)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x\right)\int_{-a}^{a}(a-y)f(y)\mathrm{d}y - \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\left|\int_{-a}^{x} f(y)\mathrm{d}y\right|^2.
\end{aligned}
$$

Внеинтегральный член в правой части обнуляется, поскольку $\int f(x)\mathrm{d}x = 0$ в силу условия ортогональности. Стало быть,

$$
\langle Y_1 f, f\rangle = -\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\left|\int_{-a}^{x} f(y)\mathrm{d}y\right|^2.
$$

Правая часть этого равенства обнуляется только при $f = 0$. С другой стороны, квадратичная форма оператора Y_1, очевидно, обнуляется на любом векторе $h \in \ker M$. Значит, $\ker M = \{0\}$, что и требовалось.

Докажем представление (5.3). Пусть $\beta(z) = (1/2)\ln(-iz)$,

$$
Q_1(z) = Y + \beta(z)\left\langle \cdot, \sqrt{c}\right\rangle \sqrt{c} + izY_1.
$$

Вычислим сначала асимптотику в нуле функции $(I + Q_1(z))^{-1}$. Для этого распишем уравнение

$$
(I + Q_1(z))f = g
$$

по компонентам $f_{\mathrm{N}} = P_{\mathrm{N}} f$, $f_{\mathrm{N}}^{\perp} = f - f_{\mathrm{N}}$:

$$
\begin{aligned}
(I+Y)f_{\mathrm{N}}^{\perp} + izP_{\mathrm{N}}^{\perp}Y_1 f + \beta(z)\left\langle f_{\mathrm{N}}^{\perp}, \sqrt{c}\right\rangle P_{\mathrm{N}}^{\perp}\sqrt{c} &= P_{\mathrm{N}}^{\perp} g, \\
izP_{\mathrm{N}}Y_1 f &= P_{\mathrm{N}} g.
\end{aligned}
$$

Используя доказанную выше обратимость оператора M, разрешим второе уравнение относительно f_{N} и подставим результат в первое уравнение. В результате получим:

$$
f_{\mathrm{N}} = \frac{1}{iz}M^{-1}P_{\mathrm{N}} g - M^{-1}P_{\mathrm{N}}Y_1 f_{\mathrm{N}}^{\perp}, \tag{5.5}
$$

$$
V(z)f_{\mathrm{N}}^{\perp} + \beta(z)\left\langle f_{\mathrm{N}}^{\perp}, \sqrt{c}\right\rangle \sqrt{c} = P_{\mathrm{N}}^{\perp}\left(g - Y_1 M^{-1}P_{\mathrm{N}} g\right), \tag{5.6}
$$

где $V(z)$ – функция со значениями в операторах в пространстве $\mathrm{N}^{\perp}$, такая что

$$
V(z) = (I+Y)|_{\mathrm{N}^{\perp}} + O(|z|).
$$

Пусть $\vartheta \neq 0$. Находя $f_{\mathrm{N}}^{\perp}$ из (5.6) и подставляя обратно в (5.5), получим:

$$
\begin{aligned}
f = {} & \frac{1}{iz} M^{-1} P_N g + \left(I - M^{-1} P_N Y_1\right) \Lambda P_{\mathrm{N}}^{\perp} \left(I - Y_1 M^{-1} P_N\right) g \\
& - \frac{1}{\vartheta} \left\langle g, \Lambda^* \sqrt{c} \right\rangle \left(I - M^{-1} P_N Y_1\right) \Lambda \sqrt{c} + O\left(|\ln z|^{-1}\right) \|g\|.
\end{aligned}
$$

Поскольку

$$
Q(z) - Q_1(z) = O\left(|z|^2\right),
$$

найденное представление сохранит свою силу, если вектор f в левой части заменить на $(I + Q(z))^{-1} g$. Асимптотика (5.3) теперь вытекает из (5.4). Случай $\vartheta = 0$ рассматривается аналогично. ❑

Предположение об обратимости оператора $I + Y$ на подпространстве $\mathrm{N}^{\perp}$ во втором утверждении этого предложения было сделано лишь для удобства. Если оператор $I + Y$ не обратим на подпространстве $\mathrm{N}^{\perp}$, то при некотором положительном $\delta \neq 1$ на этом подпространстве обратимо сужение оператора $I + \tilde{Y}$,

$$
\tilde{Y} = Y + \frac{1}{2} \ln \delta \left\langle \cdot, \sqrt{c} \right\rangle \sqrt{c}.
$$

В этом случае асимтотика (5.3) сохраняет свою силу, если заменить в ней Y на $\tilde{Y}$, z – на z/δ, а Y_1 – на δY_1.

Следствие 5.5. *Существует число $C > 0$, такое что*

$$
\left\| S^{-1}(z) \right\| \leq \frac{C}{|z|}, \ z \in \omega_\delta(0). \tag{5.7}
$$

Если подпространство N *нетривиально, то для любого $h \in \mathrm{N}$*

$$
\|S(k)h\| = O(|k|), \ k \to 0. \tag{5.8}
$$

Если $c \in \mathcal{E}$ и $\mathrm{N} = \{0\}$, то найдется ненулевой вектор $h \in E$, такой что

$$
\|S(k)h\| = O\left(-\frac{1}{\ln |k|}\right), \ k \to 0.
$$

В частности, это будет верно для $h = \tilde{e}$.

Это следствие немедленно вытекает из асимптотик (5.2) и (5.3). Теперь можно применить [72, теорема 3].

Теорема 5.6 ([72], теорема 3)**.** *Если максимальный диссипативный оператор L имеет спектральную особенность порядка 1 в строгом смысле, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется вектор $u \in H_{\mathrm{ac}}(L)$, такой что*

$$
\left\| e^{-itL} u \right\| = t^{1-\varepsilon}(1 + o(1)), \quad t \to +\infty.
$$

Утверждения, сходные с этой теоремой и предложением 4.4, использованным в конце предыдущего раздела, справедливы и для логарифмических особенностей [72, следствие 4 и теорема 5]. Собирая вместе полученные результаты и учитывая унитарную эквивалентность операторов D и $-T$ (напоминаем, что $D = J(-T)J^*$) получим следующий вывод об асимптотике эволюции.

Следствие 5.7.

$$\left\| e^{itD}\big|_{JH_{ess}(T)} \right\| = O(t),\ t \to +\infty.$$

Если подпространство N *нетривиально, то для любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *найдется вектор* $u \in JH_{ess}(T)$, *такой что*

$$\left\| e^{itD} u \right\| = t^{1-\varepsilon}(1 + o(1)), \quad t \to +\infty. \tag{5.9}$$

Если подпространство N *тривиально, и* $c \in \mathcal{E}$, *то*

$$\left\| e^{itD}\big|_{JH_{ess}(T)} \right\| = O(\ln t),\ t \to +\infty,$$

и при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ *найдется вектор* $u \in JH_{ess}(T)$, *такой что*

$$\left\| e^{itD} u \right\| = (\ln t)^{1-\varepsilon} (1 + o(1)), \quad t \to +\infty.$$

Теорема 9 представляет собой переформулировку этого следствия в удобных обозначениях.

В заключение отметим, что выбор пространства $H = L^2(\mathbb{R} \times \Omega)$ вместо естественного с точки зрения физики пространства L^1 в качестве пространства функций распределения может показаться странным. В качестве оправдания отметим, что результаты об оценках остатка в асимптотиках решений в задачах теории переноса в естественном пространстве L^1 никогда не идут далее оценок типа $O(e^{\delta t})$ с произвольным $\delta > 0$, основанных на применении преобразования Лапласа и теореме Хилле–Иосиды. Имеющиеся результаты о деталях поведения состояний непрерывного спектра на больших временах, вроде упоминавшейся выше теоремы Ленера и Винга, относятся к поточечному поведению или, в лучшем случае, к поведению в гладких классах. В этом смысле наши теоремы выгодно отличаются тем, что, хотя и не используют пространство L^1, дают точную информацию о поведении на больших временах состояний непрерывного спектра в правильной "шкале" L^p.

Глава IV. Проблема порядка для канонических систем

6 Введение

Пусть $0 < L \leq +\infty$, и пусть $\mathcal{H}$ – локально суммируемая по мере Лебега функция на промежутке $[0, L)$ со значениями в матрицах 2×2 с вещественными элементами, такая что $\mathcal{H}(x) \geq 0$ п. в. Под локальной суммируемостью мы понимаем поэлементную принадлежность классу $L^1(0, L - \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$. Положим: $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Канонической системой* $(\mathcal{H}, L)$ называется матричное дифференциальное уравнение вида:

$$J\frac{dY}{dx} = z\mathcal{H}Y;\ z \in \mathbb{C},\ x \in [0, L). \tag{6.1}$$

В контексте уравнения (6.1) функция $\mathcal{H}$ называется гамильтонианом. Решение $M(x, z)$ этого уравнения с начальным условием $M(0, z) = I$ называется матрицей монодромии. Каноническая система называется *регулярной*, если $\mathcal{H} \in L^1(0, L)$, и *сингулярной* в противном случае. В случае регулярной системы решение $M(x, z)$ определено и при $x = L$, и его значение в этой точке будет обозначаться через $M(z)$: $M(z) = M(L, z)$. Будем предполагать, что $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$ п. в. Такое предположение не влечет потери общности. Это и другие основные положения теории канонических систем могут быть найдены в [4, 5].

В случае $L = \infty$ канонической системе можно сопоставить дифференциальный оператор, задаваясь каким-либо самосопряженным граничным условием в нуле. Приведем соответствующее утверждение.

Введем пространство $L^2(0, L; \mathcal{H})$, полученное факторизацией линеала $\mathbb{C}^2$–значных функций на $(0, L)$, квадратично суммируемых по мере Лебега, по линеалу $\ker\mathcal{H}(x)$ и последующим пополнением относительно скалярного произведения

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} \langle \mathcal{H}(x)u(x), v(x)\rangle_{\mathbb{C}^2}\, dx.$$

В дальнейшем мы не будем различать в обозначениях элементы пространства $L^2(0, L; \mathcal{H})$ (классы эквивалентности) и их представителей.

Определение 6.1. *Гильбертово пространство канонической системы* $(\mathcal{H}, L)$ *- это подпространство* H *в* $L^2(0, L; \mathcal{H})$*, элементы которого обладают следующим свойством. Пусть* $I \subset (0, L)$ *– такой интервал, что существует вектор* $e \in \mathbb{R}^2$ *(вообще говоря, зависящий от интервала* I*), для которого*

$$\mathcal{H}(x) = \langle \cdot, e\rangle e,\ \text{п.в. } x \in I, \tag{6.2}$$

χ_I *– индикатор интервала* I*. Тогда для любого* $f \in H$ *существует число* $c = c(f, I)$*, такое что* $\chi_I f = c(f, I)\chi_I$ *в смысле равенства элементов* $L^2(0, L; \mathcal{H})$*.*

Иными словами, подпространство H состоит из функций, эквивалентных константе на любом интервале постоянства гамильтониана в множестве $\{x \in (0,L)\colon \operatorname{rank}\mathcal{H}(x) = 1\}$. Заметим, что множество таких интервалов может быть как пустым (например, если $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x) = 2$ п.в.), так и исчерпывать промежуток $(0,L)$, как в важном частном случае гамильтонианов, отвечающих матрицам Якоби (см. ниже).

Естественная область определения оператора, отвечающего граничному условию $f_-(0) = 0$, имеет следующий вид.

Определение 6.2.

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in H\colon \begin{array}{cc} \text{(i)} & f \textit{ абсолютно непрерывна на } (0,\infty) \\ \text{(ii)} & \exists g \in H\colon Jf' = \mathcal{H}g \\ \text{(iii)} & f_-(0) = 0 \end{array} \right\}.$$

Говоря более формально, требуется, чтобы класс эквивалентности элемента $f \in \mathcal{D}$ содержал абсолютно непрерывного представителя, для которого выполняются равенства, указанные в (ii) и (iii).

Будем предполагать, что (b,∞) не есть интервал постоянства гамильтониана в множестве $\{x \in (0,L)\colon \operatorname{rank}\mathcal{H}(x) = 1\}$ при любом $b > 0$, поскольку иначе пространство H совпадает с пространством системы на конечном интервале $(0,b)$ с гамильтонианом $\mathcal{H}|_{(0,b)}$.

Теорема 6.3 ([66])**.** *Линеал $\mathcal{D}$ плотен в пространстве H, если, и только если, функция*

$$\begin{cases} e, & x < \varepsilon \\ 0, & x > \varepsilon \end{cases}, \ e = (0,1)^T, \textit{не принадлежит } H \textit{ при любом } \varepsilon > 0 \qquad (L).$$

Если условие (L) выполнено, то отображение

$$A_{[\mathcal{H}]}\colon f \mapsto g$$

корректно определено на линеале $\mathcal{D}$ и представляет собой самосопряженный оператор в H.

Условие (L) в этой теореме носит нормировочный характер.

Нам понадобится явное выражение для матрицы монодромии системы в случае, когда $\mathcal{H}(x)$ – постоянная матрица-функция ранга 1, т. е.

$$\mathcal{H}(x) = \langle \cdot, e\rangle\, e, \ e = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}: \tag{6.3}$$

$$M(z) = I - zLJ \begin{bmatrix} e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{6.4}$$

Канонические системы представляют собой наиболее общий вид спектральных задач для дифференциальных операторов второго порядка. В виде канонической системы могут быть представлены операторы Шрёдингера и Дирака, уравнение неоднородной струны, матрицы Якоби. Приведем соответствующие формулы для матриц Якоби (они будут использоваться в дальнейшем) из работы [17].

Напомним, что матрицей Якоби называется полубесконечная матрица вида

$$\begin{pmatrix} q_1 & \rho_1 & 0 & \dots & & & \\ \rho_1 & q_2 & \rho_2 & 0 & \dots & & \\ 0 & \rho_2 & q_3 & \rho_3 & 0 & \dots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

где q_j и ρ_j – вещественные числа, $\rho_j > 0$. Пусть b_j – монотонная последовательность вещественных чисел, $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots$, $L = \lim b_j \leq \infty$, и пусть $e_j \in \mathbb{R}^2$, $j \geq 1$ – последовательность векторов единичной нормы, причем $e_j \neq \pm e_{j-1}$. Положим: $\Delta_j = (b_{j-1}, b_j)$, $j \geq 1$, и определим гамильтониан $\mathcal{H}$ на промежутке $(0, L)$, отвечающий этим последовательностям, формулой

$$\mathcal{H}(x) = \langle \cdot, e_j \rangle e_j, \quad x \in \Delta_j. \tag{6.6}$$

Числа b_j в этом определении в дальнейшем называются *узлами* гамильтониана $\mathcal{H}$.

Между гамильтонианами указанного вида и матрицами Якоби можно установить соответствие, взаимно-однозначное при подходящем выборе нормировок и такое, что соответствующие операторы унитарно эквивалентны. Положим $l_j = |\Delta_j|$.

Предложение 6.4. *Сопоставим любому гамильтониану вида* (6.6) *с* $e_1^+ \neq 0$ *матрицу Якоби* (6.5)*, заданную формулами*[1]

$$\rho_j = -\frac{1}{\langle e_j^\perp, e_{j+1} \rangle \sqrt{l_{j+1} l_j}}, \ j \geq 1, \tag{6.7}$$

$$q_j = \frac{1}{l_j} \left(\frac{\langle e_j, e_{j+1} \rangle}{\langle e_j^\perp, e_{j+1} \rangle} - \frac{\langle e_j, e_{j-1} \rangle}{\langle e_j^\perp, e_{j-1} \rangle} \right), \ j \geq 1. \tag{6.8}$$

Полученная матрица Якоби принадлежит случаю предельного круга тогда, и только тогда, когда $L < \infty$. *Операторы, отвечающие системе* $(\mathcal{H}, L)$ *и граничному условию* $Y_-(0) = 0$, *унитарно эквивалентны соответствующей матрице Якоби. Для любой матрицы Якоби найдется гамильтониан вида* (6.6)*, такой что выполнены соотношения* (6.7), (6.8)*, и* $e_1^+ \neq 0$. *Для данных вектора* $e \in \mathbb{R}^2$, $e \neq (0,1)^T$, $\|e\| = 1$, *и числа* $\Delta > 0$ *этот гамильтониан может быть выбран так, чтобы* $e_1 = e$, $\Delta_1 = \Delta$, *и такой выбор единственен.*

Под утверждением об унитарной эквивалентности здесь понимается следующее: симметричные операторы, заданные матрицей Якоби в пространстве $l^2(\mathbb{N})$

[1] В выражении (6.8) при $j = 1$ полагаем $e_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Явные формулы для последовательности q_j не будут использоваться в этой работе.

на плотном линеале финитных последовательностей, и канонической системой в ее пространстве H на линеале абсолютно непрерывных функций, обращающихся в нуль в точке $x = L$, в случае $L < \infty$ или на линеале $\mathcal{D}$ в случае $L = \infty$, унитарно эквивалентны. В случае $L = \infty$ эти операторы в существенном самосопряжены, а в случае $L < \infty$ отсюда вытекает унитарная эквивалентность соответствующих самосопряженных расширений.

Для данной канонической системы величины

$$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|M_{ij}(z)|}{|z|}$$

и

$$\limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log\log|M_{ij}(z)|}{\log|z|}$$

не зависят от i, j (см. например [9]) и называются соответственно типом и порядком системы. Тип системы вычисляется через гамильтониан по классической формуле Крейна–де Бранжа [4]:

$$\text{тип } (\mathcal{H}, L) = \int_0^L \sqrt{\det \mathcal{H}(t)}dt. \tag{6.9}$$

Эта формула, в частности, показывает, что если $\det \mathcal{H}(x) = 0$ п. в., то матричные элементы $M(z)$ имеют минимальный тип. Фундаментальная проблема в этой ситуации – найти или оценить порядок системы. Именно эта проблема имеется в виду в названии главы. Заметим сразу, что операторы, отвечающие каноническим системам, как правило не полуограничены снизу, и поэтому традиционные вариационные методы не пригодны для оценки соответствующих спектров.

Установим точную в степенной шкале оценку сверху для порядка системы в терминах гамильтониана. Во всех случаях, когда порядок системы известен, эта оценка совпадает с точным значением. Для формулировки результата нам понадобится следующее

Определение 6.5. *Будем говорить, что гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет конечный ранг, если существуют конечные наборы чисел x_j, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = L$, и векторов $\{e_j\}_{j=0}^{N-1} \subset \mathbb{R}^2$, единичной нормы, такие что*

$$\mathcal{H}(x) = \langle \cdot, e_j \rangle_{\mathbb{C}^2} e_j, \ x \in (x_j, x_{j+1}), \ j = 0, \ldots, N-1.$$

Элементы множеств $\{x_j\}$, $\{e_j\}$ и число N называются, соответственно, параметрами и рангом гамильтониана[2]. *Числа $l_j = x_{j+1} - x_j$ и $\varphi_j \in [0, 2\pi)$, определенные равенством*

$$e_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j \\ \sin\varphi_j \end{pmatrix},$$

называются, соответственно, длинами и углами гамильтониана $\mathcal{H}$.

[2]Мы не требуем, чтобы $e_j \neq \pm e_{j+1}$, , таким образом, ранг гамильтониана конечного ранга не определен единственным образом.

Теорема 10. *Пусть $(\mathcal{H}, L)$ – каноническая система, $L < \infty$, и пусть $0 < d < 1$.*

1. Предположим, что для некоторого $C > 0$ при всех достаточно больших R существует гамильтониан $\mathcal{H}_R$ конечного ранга $N(R)$, заданный на $(0, L)$, и набор чисел (зависящих от R) $\{a_j\}_0^{N(R)-1}$, $0 < a_j \leq 1$, для которых выполнены следующие условия ($P_j = \langle \cdot, e_j \rangle e_j$; x_j, e_j– параметры гамильтониана $\mathcal{H}_R$):

(i)
$$\sum \frac{1}{a_j^2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \|\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}_R(t)\| \, \mathrm{d}t \leq CR^{d-1},$$

(ii)
$$\sum a_j^2 (x_{j+1} - x_j) \leq CR^{d-1},$$

(iii)
$$\sum \log \left(1 + \frac{\|P_j - P_{j+1}\|}{a_j a_{j+1}} \right) \leq CR^d,$$

(iv)
$$\log a_0^{-1} + \log a_{N(R)-1}^{-1} + \sum \left| \log \frac{a_j}{a_{j-1}} \right| \leq CR^d.$$

Тогда существует число $K > 0$, такое что

$$\|M(z)\| \leq e^{K|z|^d}$$

при всех $z \in \mathbb{C}$.

2. Для каждого p, $0 < p < 1$, существует каноническая система $(\mathcal{H}, L)$ порядка p, которая при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условиям первого пункта теоремы с $d = p + \varepsilon$.

Сформулированная теорема дает оценку сверху для порядка в терминах скорости приближения гамильтниана кусочно-постоянными функциями. Выбор кусочно-постоянных функций в качестве аппроксимирующих представляется естественным в задаче о порядке, поскольку они имеют нулевой порядок (см. также раздел 9.1 ниже). Соответствующие матрицы монодромии суть полиномы, и таким образом на спектральной стороне задача соответствует классическому вопросу о полиномальной аппроксимации в классах целых функций.

Кусочно-постоянные или, в общем случае, кусочно-полиномальные приближения давно используются при анализе спектральных асимптотик дифференциальных операторов, см. например [10, 11]. В порядке сравнения отметим, что в этих исследованиях, как правило, оценивают число кусочков, требуемых для приближения данной функции с заданной точностью, в то время как в теореме 10 число $N(R)$ не играет непосредственной роли. Причину этого различия можно пояснить тем фактом, что как функция множества тип имеет аддитивный характер, а порядок – булев. Точнее говоря, возьмем два произвольных гамильтониана, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, заданных соответственно на интервалах $A = (a, b)$ и $B = (b, c)$ и рассмотрим гамильтониан на промежутке (a, c), совпадающий с $\mathcal{H}_1$ на A и с $\mathcal{H}_2$ – на B. Тогда тип полученной системы будет суммой типов двух исходных систем, а ее порядок равен наибольшему из порядков систем $(\mathcal{H}_1, A)$, $(\mathcal{H}_2, B)$. Поскольку упомянутые работы и позднейшие исследования в их русле направлены в первую очередь на вопрос о типе и его уточнениях, таких как вопрос о старшем члене спектральной асимптотики, в них возникают характеристики аналогичные числу $N(R)$. Отметим, что в частных случаях число $N(R)$ может возникать явным образом и при оценке порядка (см. предположение (B) в условии следующей теоремы).

Перейдем к случаю диагональных гамильтонианов. Напомним формулировку основного результата (теорема 1 во введении). Пусть

$$\mathfrak{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathfrak{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

и

$$X_1 = \{x \in (0, L)\colon \mathcal{H}(x) = \mathfrak{H}_1\}, \; X_2 = \{x \in (0, L)\colon \mathcal{H}(x) = \mathfrak{H}_2\},$$

и пусть $|\cdot|$ обозначает меру Лебега множеств.

Теорема 6.6. *Пусть при п. в.* $x \in [0, L]$ *либо* $\mathcal{H}(x) = \mathfrak{H}_1$*, либо* $\mathcal{H}(x) = \mathfrak{H}_2$*. Тогда порядок канонической системы* $(\mathcal{H}, L)$ *совпадает с нижней гранью чисел* d*,* $0 < d < 1$*, таких что существует положительное число* $C = C(d)$*, такое что при каждом достаточно большом* R *интервал* $(0, L)$ *можно покрыть* $n = n(R)$ *интервалами* ω_j*, для которых*

(A)

$$\sum \sqrt{|\omega_j \cap X_1|\,|\omega_j \cap X_2|} \le C R^{d-1};$$

(B)

$$n(R) \le C R^d.$$

Как уже упоминалось во введении, при нормировке $\operatorname{tr} \mathcal{H}(x) = 1$ п. в. указанный в теореме вид имеет любой диагональный гамильтониан $\mathcal{H}$, для которого $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x) = 1$ п. в.

Приведем несколько примеров использования теорем 10 и 6.6. Мы получим оценку порядка сверху для гамильтонианов в классических классах гладкости (Гёльдера, ограниченной вариации), применяя теорему 10, см. следствие 10.1, докажем гипотезу Валента о порядке некоторого класса матриц Якоби, связанных с процессами рождения–уничтожения (следствие 10.4).

Дадим краткий обзор имеющейся литературы по проблеме порядка. Все имеющиеся в ней результаты относятся к частному случаю систем (описание таких систем дано ниже), отвечающих матрицам Якоби с индексами дефекта $(1, 1)$ или, иными словами, неопределенной проблеме моментов. Основной из них – приведенная во Введении теорема 0.4 из работы [14], согласно которой если последовательность ρ_j логарифмически выпукла или вогнута при больших j, а последовательность q_j мала по отношению к ρ_j, то порядок системы совпадает с показателем сходимости последовательности ρ_j. Эта теорема в существенном восходит к работе Березанского [16], в которой было дано достаточное условие принадлежности случаю предельного круга для матриц Якоби с растущей последовательностью ρ_j. Хотя никаких выводов о порядке в работе не формулировалось, в ней сделано ключевое наблюдение, позволяющее оценить соответствующие ортогональные полиномы при больших j в терминах последовательности ρ_j^{-1}. В работе [14] было замечено, что метод Березанского позволяет дать оценку порядка, и что эта оценка в рассматриваемой ситуации в действительности совпадает с порядком.

Теорема 0.4 и наш результат соотносятся следующим образом: часть теоремы 0.4 утверждающая, что порядок не превосходит показателя сходимости, легко вытекает из теоремы 10, см. обсуждение ниже.

Опишем структуру этой главы. В разделе 7 приведено с небольшим упрощением доказательство неравенства "левая часть (6.9)"$\leq$ "правая часть (6.9)"из оригинальной работы де Бранжа [33]. Мы приводим его потому, что одна из идей этого доказательства используется в теореме 10 в более сложной ситуации. Доказательства теорем 10 и 1 занимают соответственно названные разделы. В разделе Комментарии мы обсуждаем посылки этих теорем и сравниваем их с результатами предшественников. В разделе Приложения установлена оценка сверху для порядка гамильтонианов в классах Гёльдера и ограниченной вариации и доказана гипотеза Валента. В разделе Регулярные гамильтонианы теорема 10 применяется для вычисления порядка канонических систем, отвечающих матрицам Якоби, с некоторыми условиями регулярности на асимптотическое поведение параметров e_j и δ_j.

В этой главе используются следующие обозначения. Матрицы $\mathfrak{H}_{1,2}$ определены в (6.10). Если не оговорено иное, суммирования распространяются на все значения значков, при которых параметр суммирования определен. Для данной матрицы Якоби (6.5) через $P_j(\lambda)$ и $Q_j(\lambda)$ обозначены решения соответствующего трехчленного рекуррентного соотношения, удовлетворяющие начальным условиям $P_1 = 1$, $P_0 = 0$, $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1/\rho_1$ (иными словами, $P_j(\lambda)$ и $Q_j(\lambda)$ – ортогональные полиномы, соответственно, первого и второго родов).

7 Верхняя оценка в формуле Крейна–де Бранжа

Предложение 7.1. *Пусть $(\mathcal{H}, L)$ – каноническая система. Тогда*

$$\textit{type of}\ (\mathcal{H}, L) \leq \int_0^L \sqrt{\det \mathcal{H}(t)}\mathrm{d}t. \tag{7.1}$$

Обозначим через $p(x)$ экспоненциальный тип функции $M(x,\cdot)$. Для каждого $y \in (0, L)$ матрица монодромии $M(x,\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$M(x,\lambda) = M(y,\lambda) - \lambda \int_y^x J\mathcal{H}(t)M(t,\lambda)\mathrm{d}t. \tag{7.2}$$

Грубая оценка вольтерровских итераций этого уравнения показывает, что $|p(x) - p(y)| \leq |x - y|$, и таким образом, функция $p(x)$ липшицева. Идея доказательства состоит в том, чтобы оценить производную функции p в терминах гамильтониана $\mathcal{H}$, а затем проинтегрировать полученное неравенство.

Доказательство. Пусть Ω – постоянная обратимая матрица 2×2, вид которой мы выберем позднее. Тогда уравнение (7.2) можно записать в следующем виде:

$$\Omega M(x,\lambda) = \Omega M(y,\lambda) - \lambda \int_y^x \left(\Omega J\mathcal{H}(t)\Omega^{-1}\right)\Omega M(t,\lambda)\mathrm{d}t.$$

Получилось вольтеррово уравнение на функцию ΩM. Решая его итерациями, получим оценку типа леммы Гроноулла:

$$\|\Omega M(x,\lambda)\| \le \|\Omega M(y,\lambda)\| \exp\left(|\lambda| \int_y^x \left\|\Omega J\mathcal{H}(t)\Omega^{-1}\right\| \mathrm{d}t\right),\ y \le x. \tag{7.3}$$

Следовательно, функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству

$$p(x) \le p(y) + \int_y^x \left\|\Omega J\mathcal{H}(t)\Omega^{-1}\right\| \mathrm{d}t.$$

Переходя к пределу $y \uparrow x$, отсюда получим, что при п.в. $x \in [0, L]$

$$p'(x) \le \left\|\Omega J\mathcal{H}(x)\Omega^{-1}\right\|.$$

Левая часть этого неравенства не зависит от Ω, поэтому попытаемся минимизировать правую часть подходящим выбором Ω.

Лемма 7.2. *Пусть A – матрица 2×2, такая что $\operatorname{tr} A = 0$. Тогда*

$$\inf_{\Omega:\ \det\Omega\neq 0} \left\|\Omega A\Omega^{-1}\right\| = \sqrt{|\det A|}. \tag{7.4}$$

Доказательство. Если $\det A \neq 0$, то матрица A диагонализуема, и утверждение тривиально – достаточно взять в качестве Ω преобразование, диагонализующее A. Если $\det A = 0$, то без потери общности можно считать, что $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, выбрать $\Omega = \operatorname{diag}(a^{-1}, a)$, и рассмотреть предел $a \to 0$. ❑

Применяя эту лемму, получим, что $p'(x) \le \sqrt{\det\mathcal{H}(x)}$ почти всюду. Интегрируя это неравенство, приходим к (7.1). ❑

Приведенное доказательство в существенном следует оригиналу [33, теорема X] за исключением того, что де Бранж использует явный вид преобразования, диагонализующего матрицу $J\mathcal{H}(x)$, в то время как на самом деле достаточно лишь знать, что диагонализатор существует.

8 Доказательство теоремы 10

8.1 Оценка

Пусть $(\mathcal{H}, L)$ – каноническая система. Для произвольных наборов чисел x_j, $0 \le j \le N$, таких что $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = L$, и обратимых матриц Ω_j, $0 \le j \le N$, рассуждение из доказательства Предложения 1 (рассмотрим (7.3) при $y = x_j$, $x = x_{j+1}$, $\Omega = \Omega_j$) показывает, что

$$\|\Omega_j M(x_{j+1}, \lambda)\| \le \|\Omega_j M(x_j, \lambda)\| \exp\left(|\lambda| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left\|\Omega_j J \mathcal{H}(t) \Omega_j^{-1}\right\| \mathrm{d}t\right)$$

при $0 \le j < N$. Введем обозначение: $M_j = M(x_j, \lambda)$. Имеем:

$$\|\Omega_{j+1} M_{j+1}\| \le \left\|\Omega_{j+1}\Omega_j^{-1}\right\| \cdot \|\Omega_j M_{j+1}\| \le \left\|\Omega_{j+1}\Omega_j^{-1}\right\| \|\Omega_j M_j\| \exp\left(|\lambda| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left\|\Omega_j J \mathcal{H}(t) \Omega_j^{-1}\right\| \mathrm{d}t\right).$$

Логарифмируя, суммируя возникающие неравенства по j и полагая $\Omega_N = I$, получим:

$$\log \|M(\lambda)\| \le |\lambda| \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left\|\Omega_j J \mathcal{H}(t) \Omega_j^{-1}\right\| \mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{N-1} \log \left\|\Omega_{j+1}\Omega_j^{-1}\right\| + \log \|\Omega_0\|. \quad (8.1)$$

Пусть $\{e_j\} \subset \mathbb{R}^2$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, – произвольный набор векторов единичной нормы, и пусть P_j – ортогональный проектор на вектор e_j, т. е. $P_j = \langle \cdot, e_j \rangle e_j$. Оценим интегралы в первой сумме в правой части полученного неравенства следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left\|\Omega_j J \mathcal{H}(t) \Omega_j^{-1}\right\| \mathrm{d}t \le \\ \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left\|\Omega_j J \left(\mathcal{H}(t) - P_j\right) \Omega_j^{-1}\right\| \mathrm{d}t + (x_{j+1} - x_j) \left\|\Omega_j J P_j \Omega_j^{-1}\right\| \le \\ \le \|\Omega_j\| \left\|\Omega_j^{-1}\right\| \int_{x_j}^{x_{j+1}} \|\mathcal{H}(t) - P_j\| \mathrm{d}t + (x_{j+1} - x_j) \left\|\Omega_j J P_j \Omega_j^{-1}\right\|. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Выберем теперь матрицы Ω_j в виде:

$$\Omega_j = \operatorname{diag}\left(a_j^{-1}, a_j\right) U_j,$$

где U_j – унитарное преобразование, приводящее матрицу JP_j к ее форме Жордана, т. е.

$$U_j J P_j U_j^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а $a_j \in (0,1]$. Зафиксируем преобразование U_j в виде: $U_j = e^{-\varphi_j J}$, где $\varphi_j \in [0, 2\pi)$ определено равенством:

$$e_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j \\ \sin\varphi_j \end{pmatrix}.$$

Сделанный выбор матриц Ω_j подсказывается доказательством леммы 7.2. При таком выборе

1°.

$$\|\Omega_j\| = \left\|\Omega_j^{-1}\right\| = a_j^{-1}, \ \left\|\Omega_j J P_j \Omega_j^{-1}\right\| = a_j^2,$$

откуда, подставляя в (8.2), получим:

$$\text{rhs of (8.2)} = \frac{1}{a_j^2}\int_{x_j}^{x_{j+1}} \|\mathcal{H}(t) - P_j\|\,\mathrm{d}t + a_j^2\left(x_{j+1} - x_j\right). \tag{8.3}$$

2°. При $j \le N-2$

$$\begin{aligned}\Omega_{j+1}\Omega_j^{-1} \quad = \quad & \begin{pmatrix} a_{j+1}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{j+1} \end{pmatrix} U_{j+1}U_j^{-1} \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ 0 & a_j^{-1} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} a_{j+1}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{j+1} \end{pmatrix} e^{(\varphi_j - \varphi_{j+1})J} \begin{pmatrix} a_j & 0 \\ 0 & a_j^{-1} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} a_j a_{j+1}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{j+1}a_j^{-1} \end{pmatrix} + O\left(\frac{\|P_{j+1} - P_j\|}{a_j a_{j+1}}\right).\end{aligned}$$

Поскольку $\log(x+y) \le |\log y| + \log(1+x)$ при $x, y > 0$, отсюда следует, что

$$\log\left\|\Omega_{j+1}\Omega_j^{-1}\right\| \le \left|\log\left(a_j a_{j+1}^{-1}\right)\right| + C\log\left(1 + \frac{\|P_{j+1} - P_j\|}{a_j a_{j+1}}\right).$$

Подставляя это неравенство и оценку (8.3) в (8.1) и учитывая, что $\|\Omega_0\| = a_0^{-1}$, $\left\|\Omega_{N-1}^{-1}\right\| = a_{N-1}^{-1}$, приходим к первому утверждению теоремы 1.

8.2 Точность оценки

В доказательстве будет использован тот факт, что для произвольной канонической системы $(\mathcal{H}, L)$ все нули матричных элементов матрицы $M(x,\lambda)$ как функции λ вещественны при любом $x \in (0, L)$, см. [4]. Пусть $p \in (0,1)$, $\alpha = p^{-1} - 1$, $d = p + \varepsilon$. Положим: $b_j = 1 - j^{-\alpha}$, $j \ge 1$, и для $x \in [0,1]$ определим гамильтониан

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} \mathfrak{H}_1, \ x \in \bigcup_j [b_{2j-1}, b_{2j}] \\ \mathfrak{H}_2, \ x \notin \bigcup_j [b_{2j-1}, b_{2j}]. \end{cases}$$

Покажем, что (a) гамильтониан $\mathcal{H}$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) теоремы 10 при любом $\varepsilon > 0$, (b) порядок системы $(\mathcal{H}, 1)$ не меньше p. Требуемое утверждение тогда будет установлено. Задаваясь числом $R > 0$, определим функцию

$$\mathcal{H}_R(x) = \begin{cases} \mathcal{H}(x), \ x \in [0, b_{N-1}] \\ \mathfrak{H}_1, \ x \in [b_{N-1}, 1], \end{cases}$$

где номер $N = N(R)$ будет выбран позднее. При $j \leq N-2$ положим: $a_{N-1} = 1$, $a_j = R^{\frac{d-1}{2}}$. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}
\text{lhs of (i)} &\leq \frac{2}{a_{N-1}^2 (N-1)^\alpha} = O\left(N^{-\alpha}\right), \\
\text{lhs of (ii)} &\leq C \sum_0^{N-2} a_j^2 j^{-1-\alpha} + N^{-\alpha} = O\left(R^{d-1}\right) + O\left(N^{-\alpha}\right), \\
\text{lhs of (iii)} &\leq C(N-1)\log R + O(\log R) = O\left(N \log R\right), \\
\text{lhs of (iv)} &= O(\log R).
\end{aligned}$$

Выберем $N \sim R^p$ при $R \to \infty$. Тогда условия (i)–(iv) теоремы 10 выполнены.

Осталось показать, что порядок системы $(\mathcal{H}, 1)$ больше либо равен p. Для этого воспользуемся следующим тождеством. Пусть $\Theta(x, \lambda)$ – первый столбец матрицы $M(x, \lambda)$. Дифференцируя функцию $\langle \Theta, J\Theta \rangle_{\mathbb{C}^2}$ в силу уравнения (6.1), находим, что

$$\operatorname{Im}\left(M_{11}(1,\lambda)\overline{M_{21}\left(1,\lambda\right)}\right) = \operatorname{Im}\lambda \int_0^1 \langle \mathcal{H}(t)\Theta(t,\lambda), \Theta(t,\lambda)\rangle_{\mathbb{C}^2} \, \mathrm{d}t. \tag{8.4}$$

В рассматриваемой ситуации правая часть равна

$$\operatorname{Im}\lambda \sum (b_j - b_{j-1}) \left| \begin{array}{ll} M_{11}(b_j,\lambda), & j \text{ even} \\ M_{21}(b_j,\lambda), & j \text{ odd} \end{array} \right|^2 .$$

При $\operatorname{Im}\lambda > 0$ эту величину можно оценить снизу. Пусть $\delta_j = b_j - b_{j-1}$. Будем иметь:

$$\text{правая часть (8.4)} \geq \operatorname{Im}\lambda \sum \delta_{2j} \left|M_{11}(b_{2j},\lambda)\right|^2 = \operatorname{Im}\lambda \sum \delta_{2j} \left|M_{11}(b_{2j-1},\lambda)\right|^2 . \tag{8.5}$$

Здесь мы учли, что в рассматриваемой ситуации $M_{11}(b_{2j},\lambda) = M_{11}(b_{2j-1},\lambda)$, так как $M_{11}'(x,\lambda) = 0$ при $x \in (b_{2j-1}, b_{2j})$.

Для оценки правой части (8.5) снизу воспользуемся вещественностью нулей матричных элементов $M(x,\lambda)$, их которой непосредственно вытекает следующее

Замечание 8.1. Пусть (G, L) – каноническая система, такая что промежуток $(0, L)$ представляет собой объединение попарно непересекающихся интервалов I_j, имеющих точку L единственной точкой накопления, а функция $G(x)$ постоянна на каждом из интервалов I_j и имеет единичный ранг при п. в. $x \in (0, L)$. Тогда $M(x,\cdot)$ – полином при всех $x \in (0, L)$. Для произвольных m, l, $1 \leq m, l \leq 2$, определим $k(x)$ как степень полинома $M_{ml}(x,\cdot)$, и обозначим через $c(x)$ его старший коэффициент, так что

$$M_{ml}(x,\lambda) = c(x)\lambda^{k(x)} + (\text{многочлен степени} \leq k(x) - 1).$$

Тогда

$$|M_{ml}(x, i\tau)| \geq |c(x)|\tau^{k(x)}$$

при всех $\tau > 1$.

Применяя это утверждение при $m = l = 1$ в точке $x = b_{2j-1}$, $j \geq 1$, в рассматриваемой ситуации получим, что

$$|M_{11}(b_{2j-1}, i\tau)| \geq |c_j|\, \tau^{k_j},\ \tau > 1.$$

Здесь через c_j и k_j обозначены соответственно старший коэффициент и степень полинома $M_{11}(b_{2j-1}, \cdot)$.

Вычислим k_j и c_j. Пусть $M_j(\lambda)$ – значение решения матричной задачи Коши (6.1) с начальным данным $Y(b_j) = I$ в точке $x = b_{j+1}$. Согласно мультипликативному свойству фундаментальных решений, будем иметь:

$$M(b_{2j-1}, \lambda) = M_{2j-2}(\lambda) M_{2j-3}(\lambda) \cdots M_2(\lambda) M_1(\lambda). \tag{8.6}$$

Прямое вычисление дает:

$$M_j(\lambda) = I + \lambda \delta_{j+1} \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & j \text{ нечетное} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & j \text{ четное.} \end{cases}$$

Старший член в матричном многочлене $M(b_{2j-1}, \lambda)$ соответствует выбору слагаемых первого порядка по λ в каждом множителе в (8.6) при раскрытии скобок и имеет вид:

$$(-1)^{j+1}\, \delta_{2j-1} \delta_{2j-2} \cdots \delta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$k_j = 2j - 2,\ |c_j| = \prod_{n=2}^{2j-1} \delta_n,$$

и мы можем продолжить оценку (8.5):

$$\text{правая часть (8.5)} \geq \sum \delta_{2j} \left(\prod_{n=2}^{2j-1} \delta_n^2 \right) |\lambda|^{2(2j-2)}$$

С другой стороны, если ρ – порядок системы, то при любом $\varepsilon > 0$ левая часть в тождестве (8.4) не превосходит $\exp\left(C_\varepsilon r^{\rho+\varepsilon}\right)$ по модулю. Применяя стандартную оценку коэффициентов Тейлора целой функции в терминах ее экспоненциального порядка (см. например [35]), отсюда получим, что при больших j

$$\delta_{2j} \left(\prod_{n=2}^{2j-1} \delta_n^2 \right) \leq \left(\frac{C}{j} \right)^{\frac{4j}{\rho+\varepsilon}}.$$

Так как последовательность $\delta_j = j^{-\alpha} - (j+1)^{-\alpha}$ монотонно убывает, из полученного неравенства вытекает, что $\delta_{2j} = O\left(j^{-1/(\rho+\varepsilon)}\right)$. Поскольку $\delta_j \asymp j^{-1-\alpha} = j^{-1/p}$, отсюда заключаем, что $\rho + \varepsilon \geq p$ при всех $\varepsilon > 0$, т. е. $\rho \geq p$. Доказательство теоремы 10 таким образом закончено.

9 Обсуждение теоремы 10

9.1 Выбор аппроксимирующих функций

Рассмотрим каноническую систему с гамильтонианом вида

$$\mathcal{H} = \langle \cdot, e(x) \rangle e(x),\ e(x) := \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix},$$

где u и v – гладкие функции на промежутке $(0, L)$, удовлетворяющие тождеству $u'v - v'u = -1$. Порядок канонической системы $(\mathcal{H}, L)$ равен $1/2$, поскольку, если $Y = \begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix}$ – решение системы (6.1), то непосредственное вычисление [36] показывает, что функция $y = Y_+ u + Y_- v$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$-y'' + qy = \lambda y,\ q = u''/u.$$

Если функция u такова, что потенциал q суммируем, то, как известно, порядок фундаментального решения этого уравнения равен $1/2$. Отсюда вытекает, что гладкие функции не подходят в качестве аппроксимантов по крайней мере для порядков в промежутке $(0, 1/2)$.

9.2 Формулировка

Из формулы Крейна–де Бранжа для типа следует, что, если условия теоремы 10 выполнены при некотором $d < 1$, то $\operatorname{rank} \mathcal{H}(x) = 1$ п. в. В этом нетрудно убедиться и непосредственно. Действительно, предположим, что $(\mathcal{H}, L)$ – каноническая система, такая что для некоторого $d \in (0, 1)$ при достаточно большом R выполнены условия (i)–(iv). Пусть

$$S_\varepsilon = \{t\colon \|\mathcal{H}(t) f\| \geq \varepsilon \|f\| \text{ for all } f \in \mathbb{C}^2\},\ \varepsilon > 0.$$

Рассуждая от противного, предположим, что $|S_\varepsilon| > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Применяя неравенство Коши–Буняковского и используя условия (i) и (ii), находим, что

$$T\colon = \sum \sqrt{(x_{j+1} - x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \|\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}_R(t)\| \, \mathrm{d}t} \leq CR^{d-1}.$$

Величина $|[x_j, x_{j+1}] \cap S_\varepsilon|$ оценивает снизу оба сомножителя в общем члене суммы, и, стало быть,

$$T \geq \sum |[x_j, x_{j+1}] \cap S_\varepsilon| = |S_\varepsilon| > 0.$$

Переходя к пределу $R \to \infty$, получим противоречие.

9.3 Точность оценки

В примере, использованном в доказательстве части 2 теоремы 10 условия (i)–(iv) выполнены при $d = p$, если вставить множитель $\log R$ в правые части. Вопрос о возможности избавиться от логарифмического множителя, т. е. справедливо ли утверждение части 2 при $\varepsilon = 0$, открыт.

9.4 Сравнение с теоремой 0.4

Интересующая нас часть теоремы 0.4 состоит в том, что при сформулированных предположениях, если $\{\rho_j^{-1}\} \in l^\alpha$, то порядок $\leq \alpha$. Переведем условия теоремы 0.4 на язык канонических систем. Для этого воспользуемся явными формулами (6.7), (6.8) для параметров Якоби q_j, ρ_j в терминах соответствующего гамильтониана $\mathcal{H}$. Пусть e_j и b_j – параметры гамильтониана $\mathcal{H}$, и пусть φ_j – аргумент вектора e_j, $\Delta_j = (b_{j-1}, b_j)$, $\delta_j = |\Delta_j|$. Формула (6.7) в таких обозначениях принимает вид:

$$\rho_j = \frac{1}{|\sin(\varphi_j - \varphi_{j+1})|\sqrt{\delta_{j+1}\delta_j}},\ j \geq 1. \tag{9.1}$$

В следующей теореме P_n и Q_n – соответственно, ортогональные полиномы первого и второго родов, построенные по матрице Якоби (6.5).

Теорема 9.1 ([17]). *Соответствие между каноническими системами и матрицами Якоби может быть выбрано так, что*

$$\delta_{n+1} = P_n(0)^2 + Q_n(0)^2,$$

Дадим короткий элементарный вывод интересующего нас утверждения на языке канонических систем. Для простоты рассмотрим подробно только случай $q_j = 0$. В этом случае из (6.8) видно, что $e_j \perp e_{j-1}$, и стало быть,

$$\frac{1}{\rho_j} = \sqrt{\delta_j \delta_{j+1}}.$$

Разрешая относительно δ_j, получим:

$$\delta_{j+1} = \left(\frac{\rho_{j-1}\rho_{j-3}\cdots}{\rho_j\rho_{j-2}\cdots}\right)^2.$$

Пусть последовательность ρ_j удовлетворяет условию теоремы 0.4. Тогда последовательность ρ_{j-1}/ρ_j монотонна при достаточно больших j и сходится к пределу ≤ 1, причем если предел равен 1, то эта последовательность возрастает. Отсюда вытекает, что $\delta_j = O\left(\rho_{j-1}^{-1}\right)$, и, стало быть, $\{\delta_j\} \in l^d$ при любом d большем показателя сходимости последовательности ρ_j. Заметим, что матрица монодромии, отвечающая интервалу Δ_j, есть $I + O(|\lambda|\delta_j)$. Комбинируя этот факт, мультипликативное свойство фундаментальных решений, и то, что $\{\delta_j\} \in l^d$, получим, что матрица монодромии рассматриваемой системы есть $O\left(e^{C|\lambda|^d}\right)$, что и требуется.

Столь же легко вывести обсуждаемое утверждение из теоремы 10. Пусть d таково, что $\{\rho_j^{-1}\} \in l^d$, и пусть $\mathfrak{N} = \{j\colon \delta_j > R^{-1}\}$. Положим: $\mathcal{H}_R(x) = \mathcal{H}(x)$ при $x \in \Delta_k$, $k \in \mathfrak{N}$. Доопределим $\mathcal{H}_R$ на дополнении множества $\cup_{k\in\mathfrak{N}}\Delta_k$ произвольным постоянным ортопроектором ранга 1. Определенный таким образом, $\mathcal{H}_R$ представляет собой гамильтониан конечного ранга, параметры которого обозначим через x_j, f_j. Пусть $a_j = R^{(d-1)/2}$ для таких j, что промежуток $[x_j, x_{j+1}]$ совпадает с одним из интервалов Δ_k, $k \in \mathfrak{N}$, и пусть $a_j = 1$ для всех остальных j. Тогда условия (i) и (ii) в теореме 10 удовлетворяются, поскольку $\{\delta_j\} \in l^d$, и, таким образом, $\sum_{\delta_j \le R^{-1}} \delta_j = O\left(R^{d-1}\right)$; условия (iii) и (iv) удовлетворяются, поскольку число номеров j для которых $\delta_j > R^{-1}$ есть $O\left(R^d\right)$ опять-таки поскольку $\{\delta_j\} \in l^d$, и поэтому ранг гамильтониана $\mathcal{H}_R$ есть также $O\left(R^d\right)$. Применяя теорему 10, заключаем, что в предположениях теоремы 0.4 с $q_j = 0$ порядок не превосходит d. Таким образом, теорему 10 можно рассматривать как обобщение верхней оценки в теореме 0.4.

10 Приложения

10.1 Гладкие гамильтонианы

Рассмотрим следствие теоремы 10, которое получается, если условия (i)–(iv) выполнены с числами a_j постоянными по j. В этом случае условие (ii) сводится к оценке $a_j^2 = O\left(R^{d-1}\right)$, левые части трех остальных условий монотонно убывают как функции a_j, и таким образом можно без ущерба общности считать, что $a_j^2 = R^{d-1}$. Введем следующее обозначение. Для данного гамильтониана G конечного ранга с параметрами $\{e_j\} \subset \mathbb{R}^2$ определим полную вариацию формулой

$$\operatorname{Var} \mathsf{G} := \sum \|P_j - P_{j+1}\|\,,\ P_j = \langle\cdot, e_j\rangle e_j.$$

Следствие 10.1. *Пусть $1/2 \le d < 1$, и пусть $(\mathcal{H}, L)$ – каноническая система. Предположим, что при любом $\varepsilon > 0$ существует гамильтониан $\mathcal{H}^\varepsilon$ конечного ранга, определенный на промежутке $(0, L)$, такой что*

(a)

$$\|\mathcal{H} - \mathcal{H}^\varepsilon\|_{L^1(0,L)} \le \varepsilon,$$

(b)

$$\operatorname{Var} \mathcal{H}^\varepsilon \le C\varepsilon^{\frac{2d-1}{2d-2}}.$$

Тогда порядок системы $(\mathcal{H}, L)$ не превосходит d.

Доказательство. Система $(\mathcal{H}, L)$ удовлетворяет условиям теоремы 10, если положить $\mathcal{H}_R = \mathcal{H}^{\varepsilon(R)}$, $\varepsilon(R) = R^{2(d-1)}$, $a_j = R^{(d-1)/2}$. Из условия (a) вытекает (i), из условия (b) легко вытекает (iii), а условия (ii) и (iv) непосредственно очевидны. ❑

Это следствие позволяет дать простую оценку порядка для гамильтонианов в классических классах гладкости. Приведем два примера.

Следствие 10.2. *Пусть* $(\mathcal{H}, L)$ *– каноническая система, причем* $\operatorname{rank}\mathcal{H}(x) = 1$ *п. в.*

(i) *Если* $\mathcal{H} \in C^\alpha[0, L]$, $0 < \alpha \le 1$, *то порядок системы не превосходит* $1 - \alpha/2$.

(ii) *Если* $\mathcal{H}$ *has имеет ограниченную вариацию, то порядок системы не превосходит* $1/2$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (i) достаточно взять в качестве $\mathcal{H}^\varepsilon$ гамильтониан конечного ранга с параметрами $x_j = Lj/N$, $e_j \in \operatorname{Ran}\mathcal{H}(x_j)$, и оптимизировать выбор N. Утверждение (ii) тривиально. ❑

Заметим, что, хотя оценка теоремы 10 точна, гамильтониан в соответствующем примере разрывен. Вопрос о точности только что полученной оценки для гёльдеровских гамильтонианов тем самым открыт. Отметим еще, что утверждение следствия, относящееся к гамильтонианам ограниченной вариации, можно доказать и элементарным образом, используя прием из работы [37, теорема 3.6].

10.2 Матрица Берга–Валента

В этом подразделе мы рассмотрим матрицу Якоби порядка 1/4, изученную в работе [23], в качестве “разогрева” перед доказательством гипотезы Валента. Нам не понадобятся явные формулы для параметров Якоби q_n и ρ_n. Мы будем использовать лишь следующие два факта:

1°. $\rho_n \sim n^4$ при $n \to \infty$.

2°. Значения соответствующих ортогональных полиномов $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ в точке $z = 0$ имеют асимптотики [23, (2.33), (3.2)]

$$P_n(0) \sim c_1 n^{-1},\ Q_n(0) \sim c_2 n^{-1},\ c_{1,2} \ne 0.$$

Согласно теореме 9.1 и формуле (9.1), будем иметь:

$$\delta_j \sim C j^{-2},\ \sin(\varphi_j - \varphi_{j+1}) = O\left(j^{-2}\right).$$

Пусть $N \sim R^{1-d}$, $1/4 \le d \le 1/2$. Определим функцию $\mathcal{H}_R$ следующим образом. На промежутке $(0, b_{N-1})$ положим $\mathcal{H}_R = \mathcal{H}$, а на (b_{N-1}, L) доопределим $\mathcal{H}_R$ произвольным образом так, чтобы получился гамильтониан конечного ранга на $(0, L)$. Пусть $a_{N-1} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
\text{левая часть (i)} &\le 2(L - b_{N-1}) = 2\sum_{j\ge N} \delta_j = O\left(R^{d-1}\right),\\
\text{левая часть (ii)} &= \sum_{j=0}^{N-2} \frac{a_j^2}{j^2} + O\left(R^{d-1}\right),\\
\text{левая часть (iii)} &\le \sum \log\left(1 + \frac{1}{j^2 a_j a_{j+1}}\right) + O(\log R).
\end{aligned}$$

Положим:

$$a_j^2 = \begin{cases} R^{d-1}, \ j \le R^d, \\ R^{2d-1}, \ R^d < j \le N-2. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_0^{N-2} a_j^2 j^{-2} = O\left(R^{d-1}\right),$$

$$\text{левая часть (iv)} = O(\log R),$$

$$\sum \log\left(1 + \frac{1}{j^2 a_j a_{j+1}}\right) \le$$
$$\le CR^d \log R + R^{1-2d} \sum_{j>R^d} \frac{1}{j^2} = O\left(R^d \log R\right) + O\left(R^{1-3d}\right) =$$
$$= O\left(R^d \log R\right),$$

поскольку $d \ge 1/4$. Применяя теорему 10, получим, что порядок не превосходит $1/4$. Как показано в [23], из явных представлений матрицы Неванлинны этой задачи следует, что порядок на самом деле равен $1/4$.

10.3 Гипотеза Валента

Следующее утверждение обобщает предыдущий пример.

Предложение 10.3. *Предположим, что матрица Якоби* (6.5) *такова, что при* $n \to \infty$

$$P_n^2(0) + Q_n^2(0) \asymp Cn^{\Delta - D}, \ \rho_n \asymp n^D,$$

где числа Δ, D *удовлетворяют неравенству* $1 < \Delta < D - 1$. *Тогда матрица* (6.5) *находится в случае предельного круга, и ее порядок не превосходит* $1/D$.

Доказательству предложения предпошлем формулировку гипотезы Валента и нашего основного утверждения.

Пусть λ_n, μ_n, $n \ge 0$, – последовательности вещественных чисел, причем $\lambda_n > 0$ при $n \ge 0$, $\mu_n > 0$ при $n \ge 1$, $\mu_0 = 0$. Положим:

$$q_{n+1} = \lambda_n + \mu_n, \ \rho_{n+1} = \sqrt{\lambda_n \mu_{n+1}}. \tag{10.1}$$

О матрице Якоби, заданной таким образом, говорят, что она отвечает процессам рождения–гибели с параметрами λ_n и μ_n. Справедливы следующие формулы [23]:

$$|P_n(0)| = \sqrt{\pi_n}, \ |Q_n(0)| = \sqrt{\pi_n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\pi_j \mu_j}; \tag{10.2}$$

$$\pi_n\colon = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n}.$$

Гипотеза Валента. *Пусть $\ell > 2$ – натуральное число, а A_j и B_j – вещественные числа, такие что $1 < \sum(B_j - A_j) < \ell - 1$. Тогда порядок матрицы Якоби, отвечающей процессам рождения–гибели с параметрами вида*

$$\lambda_n = (n + B_1) \cdots (n + B_\ell),$$

$$\mu_n = (n + A_1) \cdots (n + A_\ell),$$

равен $1/\ell$.

Самим Валентом было показано [28], что при наложенных условиях реализуется случай предельного круга, так что утверждение имеет смысл. Мы докажем несколько более общее утверждение.

Следствие 10.4. *Пусть $\ell > 2$ – натуральное число, а A и B – вещественные числа, такие что $1 < B - A < \ell - 1$. Тогда матрица Якоби, отвечающая процессам рождения–гибели с параметрами вида*

$$\lambda_n = n^\ell + Bn^{\ell-1} + o(n^{\ell-1}),$$

$$\mu_n = n^\ell + An^{\ell-1} + o(n^{\ell-1}),$$

находится в случае предельного круга, и ее порядок равен $1/\ell$.

Доказательство предложения 10.3. Из теоремы 9.1 и формулы (9.1) следует, что при наложенных условиях

$$\delta_j \sim Cj^{\Delta - D},\ \sin(\varphi_j - \varphi_{j+1}) = O\left(j^{-\Delta}\right).$$

Таким образом, последовательность δ_j суммируема, и поэтому имеет место случай предельного круга. Пусть b_j – узлы канонической системы $(\mathcal{H}, L)$, отвечающей рассматриваемой матрице Якоби. Выберем произвольное $d > D^{-1}$ и обозначим через $\mathcal{H}_R$ произвольный гамильтониан конечного ранга, совпадающий с гамильтонианом $\mathcal{H}$ на промежутке $(0, b_{N-1})$. Значение N нужно выбрать так, чтобы

$$\sum_{j \ge N} \delta_j \asymp N^{\Delta - D + 1} = O\left(R^{d-1}\right),$$

поэтому положим $N \sim R^{\frac{d-1}{\Delta - D + 1}}$. Пусть

$$a_j^2 = \begin{cases} R^{d-1}, & j \le R^d, \\ R^{d-1+d(D-\Delta-1)}, & R^d < j < N-1 \\ 1, & j = N-1 \end{cases}.$$

Заметим, что $R^d \ll N-1$, так что "средний" промежуток значений j непуст. При таком выборе условие (i) теоремы 10 выполнено в силу выбора N, условие (ii) удовлетворяется, поскольку

$$\sum_{R^d<j<N-1} \delta_j = O\left(R^{d(\Delta-D+1)}\right),$$

а значение a_j для этого промежутка выбрано ровно так, чтобы сделать соответствующий член $O\left(R^{d-1}\right)$, и, наконец, левая часть в условии (iv) есть $O(\log R)$. Далее,

$$\text{левая часть (iii)} \le \sum_j \log\left(1+\frac{1}{j^\Delta a_j a_{j+1}}\right) + O(\log R) \le CR^d \log R + \\ \frac{1}{R^{d-1+d(D-\Delta-1)}} \sum_{j>R^d} \frac{1}{j^\Delta} = O\left(R^{d+\varepsilon}\right) + O\left(R^{1-dD+d}\right).$$

Здесь правая часть есть $O\left(R^{d+\varepsilon}\right)$ при $d > D^{-1}$ и любом $\varepsilon > 0$. Применяя теорему 10, получим требуемое утверждение. □

Доказательство следствия 10.4. Покажем, что порядок не превосходит $1/\ell$. Последовательность $\rho_n \sim n^\ell$ очевидным образом. Далее, подставляя в (10.2), получим:

$$\pi_n \asymp \frac{C}{\mu_n} n^{B-A} \sim Cn^{B-A-\ell},$$

и поэтому

$$P_n(0)^2 + Q_n(0)^2 \asymp \pi_n.$$

Таким образом, условия предложения 10.3 выполнены с $D=\ell$ и $\Delta = B-A$, и, значит, порядок не превосходит $1/\ell$.

С другой стороны, применяя [14, предложение 7.1], получим, что порядок больше либо равен $1/\ell$. Мы установим несколько более сильное утверждение – что функции $M_{ij}(z,L)$ имеют либо нормальный, либо максимальный тип по отношению к порядку $1/\ell$, причем сделаем это двумя способами. Первый способ уточняет соображения из [14], второй не зависит от этой работы. В первом рассуждении будет использован следующий хорошо известный (и очевидный из рекуррентного соотношения) факт [3]: старший коэффициент p_{jj} ортогонального полинома P_j выражается формулой

$$p_{jj} = \frac{1}{\rho_1 \cdots \rho_j}. \tag{10.3}$$

Формула Кристоффеля–Дарбу в рассматриваемой ситуации имеет вид:

$$\operatorname{Im}\left(M_{11}(z)\overline{M_{21}(z)}\right) = \operatorname{Im} z \sum |P_j(z)|^2.$$

Поскольку все нули полиномов P_j вещественны, при $\tau > 0$

$$|P_j(i\tau)| \ge p_{jj}\tau^j.$$

Стало быть,

$$\operatorname{Im}\left(M_{11}(i\tau)\overline{M_{21}(i\tau)}\right) \geq \tau \sum_j \frac{\tau^{2j}}{(\rho_1 \dots \rho_j)^2} \geq \tau \sum_j \frac{\tau^{2j}}{C^j j^{2\ell j}}. \qquad (10.4)$$

Здесь на последнем шаге мы учли, что $\rho_j \sim j^\ell$ и применили формулу Стирлинга. Тип ряда Тейлора в правой части относительно порядка $1/\ell$ равен [35, глава I, теорема 2]

$$\frac{1}{e\ell} \limsup_{j\to\infty} 2j \left(C^j j^{-2\ell j}\right)^{\frac{1}{2j\ell}} > 0,$$

Подставляя это в (10.4), получим, что существует $C > 0$, такое что при достаточно большом $\tau > 0$

$$\operatorname{Im}\left[M_{11}(i\tau)\overline{M_{21}(i\tau)}\right] \geq e^{C\tau^{1/\ell}}.$$

Учитывая, что M_{11}/M_{21} – функция Герглотца в верхней полуплоскости, заключаем, что функции M_{11} и M_{21} имеют неминимальный тип относительно порядка $1/\ell$.

Второе доказательство носит операторный характер.

Лемма 10.5. *Пусть последовательности q_j и ρ_j удовлетворяют $q_j = O(j^p)$, $\rho_j = O(j^p)$, $p > 0$, и пусть $N(t)$ – размерность спектрального подпространства самосопряженного оператора[3], заданного матрицей Якоби* (6.5)*, отвечающего промежутку $(-t, t)$, $t > 0$. Тогда $N(t) = O(t^p)$.*

Доказательство. Применяя вариационный принцип к оператору J^2, получим, что размерность $N(t) \geq \dim \mathcal{L}$ для любого конечномерного пространства $\mathcal{L} \subset \operatorname{dom} J^2$, такого что $\|Ju\| \leq t\|u\|$ при всех $u \in \mathcal{L}$. Применим это утверждение к пространству l^2_M векторов $u \in l^2$, таких что $u_j = 0$ при $j > M$. Ясно, что

$$\|Ju\| \leq CM^p\|u\|, \; u \in l^2_M,$$

поэтому $N(t) \geq Ct^{1/p}$ с некоторой константой $C > 0$. ❑

Окончание доказательства следствия 10.4. Согласно стандартному неравенству между типом и нижней плотностью нулей [35, глава 1, лемма 4],

$$\liminf n(t)t^{-1/\ell} \leq e^{1/\ell}\sigma,$$

где σ – тип функции $M(z, L)$ по отношению к порядку $1/\ell$. Левая часть этого неравенства положительна в силу леммы. ❑

[3]Наложенные условия допускают как случай предельного круга, так и случай предельной точки. В случае предельного круга утверждение относится к произвольному самосопряженнному расширению исходного симметричного оператора.

Утверждение следствия 10.4 было сформулировано Валентом [28] как гипотеза на основании двух явнорешаемых примеров, один из которых мы вкратце рассмотрели в разделе 10.2, а другой [24] отвечает $\ell = 3$. В следующем разделе мы обобщим рассуждения, использованные при доказательстве гипотезы Валента, на произвольные степенные зависимости длин и углов канонических систем, отвечающих матрицам Якоби.

11 Регулярные гамильтонианы

Введем некоторые характеристики асимптотического поведения последовательностей.

Определение 11.1. *Пусть $\vec{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность положительных вещественных чисел, и пусть $\alpha \geq 0$. Положим:*

$$\Delta^*(\vec{y}) := \sup\left\{\tau \geq 0 : y_n = \mathrm{O}(n^{-\tau})\right\},$$

$$\Delta(\vec{y}) := \sup\left\{\tau \geq 0 : \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} y_k = \mathrm{O}(n^{-\tau})\right\},$$

$$\delta(\vec{y}, \alpha) := \liminf_{n\to\infty} G(n;\vec{y},\alpha),\ G(n;\vec{y},\alpha) := \frac{-1}{n\ln n}\ln\Big(y_n^{\alpha}\prod_{k=1}^{n-1} y_k\Big).$$

Величинам $\Delta^*(\vec{y})$ и $\Delta(\vec{y})$ разрешается принимать значение ∞. Число $\delta(\vec{y},\alpha)$ a priori принадлежит $[-\infty, \infty]$.

Лемма 11.2. *Пусть $\vec{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная последовательность положительных вещественных чисел, и пусть $\alpha \geq 0$. Тогда*

$$\Delta^*(\vec{y}) \leq \Delta(\vec{y}) \leq \delta(\vec{y}, \alpha).$$

Доказательство. Неравенство $\Delta^*(\vec{y}) \leq \Delta(\vec{y})$ очевидно. Для проверки неравенства $\Delta(\vec{y}) \leq \delta(\vec{y},\alpha)$ рассмотрим произвольные числа $\tau \geq 0$ и $c \geq 1$, такие что

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} y_k \leq c n^{-\tau},\ n \in \mathbb{N}.$$

При $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, положим: $p(m) = \lfloor \log_2(m-1) \rfloor$, и определим $r(m) \in \{0, \dots, 2^{p(m)} - 1\}$ равенством $m - 1 = 2^{p(m)} + r(m)$. Используя выпуклость, будем иметь:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{m-1} y_k &= \prod_{j=1}^{p(m)} \prod_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} y_k \cdot \prod_{k=2^{p(m)}}^{m-1} y_k \\ &\leq \prod_{j=1}^{p(m)} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2^{j-1}}\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} y_k}_{\leq c(2^{j-1})^{-\tau}}\Bigg)^{2^{j-1}} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{1}{r(m)+1}\sum_{k=2^{p(m)}}^{m-1} y_k}_{\leq \frac{2^{p(m)}}{r(m)+1} c(2^{p(m)})^{-\tau}}\Bigg)^{r(m)+1},\end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\frac{-1}{m\log_2 m}\log_2\Big(y_m^\alpha\prod_{k=1}^{m-1}y_k\Big)\ge\frac{1}{m\log_2 m}\Big[-\alpha\underbrace{\log_2 y_m}_{\le\log_2\|\vec{y}\|_\infty}-\log_2 c\sum_{j=1}^{p(m)}2^{j-1}$$

$$+\,\tau\underbrace{\sum_{j=1}^{p(m)}(j-1)2^{j-1}}_{=p(m)2^{p(m)}+O(2^{p(m)})}-(r(m)+1)\log_2\frac{2^{p(m)}c}{r(m)+1}+(r(m)+1)\tau p(m)\Big]$$

$$\ge\tau\frac{p(m)}{\log_2 m}-\frac{r(m)+1}{m}\frac{1}{\log_2 m}\log_2\frac{2^{p(m)}c}{r(m)+1}+\mathrm{o}(1).$$

Оценивая логарифм его аргументом, получим, что второе слагаемое в правой части есть $\mathrm{o}(1)$. Так как $\lim_{m\to\infty}\frac{p(m)}{\log_2 m}=1$, отсюда следует, что $\delta(\vec{y},\alpha)\ge\tau$. ❑

11.1 Оценка порядка сверху

Обозначим через $\rho(H)$ порядок канонической системы $(\mathcal{H},L)$ вида (6.6). Терминология длин и углов гамильтониана, введенная при определении 6.5 гамильтонианов конечного ранга, очевидным образом распространяется на системы вида (6.6) и будет использоваться в дальнейшем.

Следующее утверждение с точностью до пересчета с помощью соотношений (6.7), (6.8), совпадает с [14, теорема 1.2].

Предложение 11.3. *Пусть $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ – соответственно, длины и углы системы $(\mathcal{H},L)$ вида* (6.6). *Тогда порядок этой системы не превосходит показателя сходимости последовательности $\vec{l}$, т. е.*

$$\rho(\mathcal{H})\le\inf\big\{p>0:\vec{l}\in\ell^p\big\}.$$

Первый основной результат этого раздела, теорема 11, – оценка сверху на порядок $\rho(\mathcal{H})$, которая учитывает асимптотическое поведение углов. Для количественной характеризации поведения длин и углов мы будем использовать степенную шкалу, а в ней – поточечную оценку для убывания длин, оценку Чезаровских средних для разностей углов, а также оценку скорости сходимости проекции вектора из $\mathbb{R}$, задающего функцию $\mathcal{H}(x)$, на фиксированное направление.

Определение 11.4. *Пусть $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ – соответственно, длины и углы системы $(\mathcal{H},L)$ вида* (6.6). *Положим:*

$$\begin{aligned}\Delta_l(\mathcal{H})\,&:=\Delta^*(\vec{l}),\qquad\Delta_l^+(\mathcal{H}):=\max\big\{1,\Delta_l(H)\big\},\\ \Delta_\phi(\mathcal{H})\,&:=\Delta\big((|\sin(\phi_{n+1}-\phi_n)|)_{n=1}^\infty\big).\end{aligned}$$

В случае, если $\Delta_l^+(\mathcal{H})<\infty$, положим еще

$$\Lambda(\mathcal{H})\,:=\sup_{\phi\in[0,\pi)}\sup\Big\{\tau\ge0:\sum_{j=n}^\infty l_j|\sin(\phi_j-\phi)|=\mathrm{O}\big(n^{1-\Delta_l^+-\tau}\big)\Big\}\in[0,\infty].$$

В дальнейшем мы будем опускать явное указание гамильтониана в обозначениях, когда это не может привести к недоразумениям.

Наличие оценки скорости сходимости углов ограничивает возможные значения величины $\Lambda(\mathcal{H})$. Об этом – следующие замечание и лемма.

Замечание 11.5. Полагая

$$\Lambda^*(\mathcal{H}) := \begin{cases} \Delta^*\big((|\sin(\phi_n - \phi)|)_{n=1}^{\infty}\big), & \phi \mod \pi = \lim_{n\to\infty}\phi_n \mod \pi \text{ существует}, \\ 0 & , \quad \vec{\phi} \mod \pi \text{ не имеет предела}, \end{cases}$$

будем иметь: $\Lambda^*(\mathcal{H}) \geq \Lambda(\mathcal{H})$.

Лемма 11.6. *Величины Δ_ϕ и Λ удовлетворяют неравенству:*

$$\Delta_\phi - 1 \leq \Lambda.$$

В частности, если $\Delta_\phi < \infty$, то $\Delta_l^+ - \Delta_\phi + \Lambda > 0$, за исключением случая

$$\begin{cases} \Delta_l^+ = 1 \\ \Delta_\phi = \Lambda + 1. \end{cases}$$

В этом и последующих доказательствах будем использовать следующее обозначение. Пусть X, Y – функции со значениями в $[0, +\infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} X \lesssim Y &\iff \exists c > 0;\ X \leq cY \\ X \asymp Y &\iff X \lesssim Y \text{ and } Y \lesssim X \end{aligned}$$

Доказательство. Доказываемое неравенство тривиально, если $\Delta_\phi \leq 1$. Пусть $\Delta_\phi > 1$. Для любого $\tau \in (1, \Delta_\phi)$ имеем:

$$\sum_{j=n}^{\infty} |\sin(\phi_{j+1} - \phi_j)| = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l n}^{2^{l+1}n-1} |\sin(\phi_{j+1} - \phi_j)| \lesssim \sum_{l=0}^{\infty} (2^l n)^{1-\tau} = \mathrm{O}\big(n^{1-\tau}\big).$$

Добавляя подходящее кратное числа π к каждому из углов ϕ_n, можно без потери общности считать, что $|\phi_{n+1} - \phi_n| \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\sum_{j=n}^{\infty} |\phi_{j+1} - \phi_j| \lesssim \sum_{j=n}^{\infty} |\sin(\phi_{j+1} - \phi_j)| = \mathrm{O}\big(n^{1-\tau}\big),$$

откуда получим, что последовательность $\vec{\phi}$ имеет предел:

$$\phi := \phi_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\phi_{n+1} - \phi_n).$$

Если $\Delta_l < 1$, а, значит, $\Delta_l^+ = 1$, из суммируемости последовательности $\vec{l}$ следует, что

$$\sum_{j=n}^{\infty} l_j |\sin(\phi_j - \phi)| \lesssim n^{1-\tau} \sum_{j=n}^{\infty} l_j = \mathrm{O}\big(n^{-(\tau-1)}\big).$$

Если же $\Delta_l \geq 1$, а, значит, $\Delta_l^+ = \Delta_l$, для произвольного $\varepsilon > 0$ будем иметь:

$$\sum_{j=n}^{\infty} l_j |\sin(\phi_j - \phi)| \lesssim \sum_{j=n}^{\infty} j^{-\Delta_l^+ + \varepsilon} \cdot j^{1-\tau} = \mathrm{O}\big(n^{1-\Delta_l^+ - (\tau-1)+\varepsilon}\big).$$

Таким образом, в обоих случаях $\tau - 1 \leq \Lambda$. ❑

Теорема 11. *Пусть $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ – соответственно, длины и углы системы $(\mathcal{H}, L)$ вида* (6.6)*. Предположим, что* $(\Delta_l^+, \Delta_\phi, \Lambda) \neq (1, 1, 0)$*. Тогда*

(i) (*область регулярного поведения*)*: если $\Delta_l^+ + \Delta_\phi \geq 2$, то*

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi}.$$

(ii) (*критический треугольник*)*: если $\Delta_l^+ + \Delta_\phi < 2$, то*

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \max\left\{\frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi}, \frac{1 - \Delta_\phi + \frac{1}{2}\Lambda}{\Delta_l^+ - \Delta_\phi + \Lambda}\right\}.$$

Обсудим утверждение теоремы.

Замечание 11.7 (точность оценки)*.* В дальнейшем будет показано, что для широко класса систем в области регулярного поведения $\rho(\mathcal{H})$ совпадает с указанной верхней оценкой, см. теорему 11.18. С другой стороны, в критическом треугольнике (при $\Delta_\phi > 0$) неизвестно, точна ли приведенная оценка. Примеры систем из критического треугольника, для которых порядок $\rho(\mathcal{H})$ может быть вычислен, неизвестны.

В исключенном из рассмотрения случае $(\Delta_l^+, \Delta_\phi, \Lambda) = (1, 1, 0)$ имеем лишь тривиальную оценку $\rho(\mathcal{H}) \leq 1$, и нам неизвестно, достигается ли она для какой-либо матрицы Якоби.

Рассмотрим поподробнее оценку в критическом треугольнике. Положим:

$$D := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ y \leq z + 1,\ x - y + z > 0\big\},$$
$$g(x, y, z) := \frac{1 - y + \frac{1}{2}z}{x - y + z}, \quad (x, y, z) \in D.$$

Функция $g(x, y, \cdot)$ убывает при $x + y < 2$, возрастает при $x + y > 2$, функция $g(x, \cdot, z)$ монотонно невозрастающая, и справедливы неравенства:

$$\frac{1}{x+y} \leq g(x, y, z) \ \Leftrightarrow\ 0 \leq (2 - x - y)\left(y - \frac{1}{2}z\right) \tag{11.1}$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2} \text{ if } x + y = 2, \qquad g(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow (x, z) = (1, 0). \tag{11.2}$$

Из неравенства (11.1) видно, что верхняя оценка в критическом треугольнике совпадает с $\frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi}$, если, и только если, $\Delta_\phi \leq \Lambda/2$.

Как уже было отмечено в лемме 11.2 и замечании 11.5, из поточечных оценок на углы вытекают оценки на величины Δ_ϕ и Λ. Отсюда получим такое следствие, в котором вместо Δ_ϕ и Λ участвуют более удобные в работе величины

$$\Delta_\phi^* := \Delta^*\big((|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^\infty\big)$$

и Λ^*.

Следствие 11.8. *Пусть $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ – соответственно, длины и углы системы $(\mathcal{H}, L)$ вида* (6.6). *Пусть $(\Delta_l^+, \Delta_\phi^*, \Lambda^*) \neq (1,1,0)$. Тогда*

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \begin{cases} \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi^*}, & \Delta_l^+ + \Delta_\phi^* \geq 2, \\ \frac{1 - \Delta_\phi^* + \frac{1}{2}\Lambda^*}{\Delta_l^+ - \Delta_\phi^* + \Lambda^*}, & \Delta_l^+ + \Delta_\phi^* < 2. \end{cases}$$

Это следствие, разумеется, слабее самой теоремы 11.

Вывод следствия 11.8 из теоремы 11. Разобьем доказательство на три случая.

— *Случай* $\Delta_l^+ + \Delta_\phi^* \geq 2$. Имеем:

$$\Delta_l^+ + \Delta_\phi \geq \Delta_l^+ + \Delta_\phi^* \geq 2,$$

т. е. реализуется случай области общего положения. Остается проверить, что $(\Delta_l^+, \Delta_\phi, \Lambda) \neq (1,1,0)$. Рассуждая от противного, предположим, что $(\Delta_l^+, \Delta_\phi, \Lambda) = (1,1,0)$. Тогда $\Delta_\phi^* \leq 1$, и из неравенства $\Delta_l^+ + \Delta_\phi^* \geq 2$ следует, что $\Delta_\phi^* = 1$. Далее, $\Lambda^* = 0$, поскольку $\Lambda^* \leq \Lambda$, а этот случай исключен условием следствия. Таким образом, из теоремы 11 получим, что

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi} \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi^*}.$$

— *Случай* $\Delta_l^+ + \Delta_\phi^* < 2, \Delta_l^+ + \Delta_\phi \geq 2$. Если $(\Delta_l^+, \Lambda) = (1,0)$, то $\Lambda^* = 0$, и поэтому $g(\Delta_l^+, \Delta_\phi^*, \Lambda^*) = 1$, см. (11.2). Пусть теперь $(\Delta_l^+, \Lambda) \neq (1,0)$. Тогда Теорема 11 и очевидное неравенство $\Lambda^* \leq \Delta_\phi^*$ показывают, что

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi} \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi^*} \leq g(\Delta_l^+, \Delta_\phi^*, \Lambda^*).$$

— *Случай* $\Delta_l^+ + \Delta_\phi^* < 2, \Delta_l^+ + \Delta_\phi < 2$. Имеем:

$$\rho(\mathcal{H}) \leq \max\Big\{\frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi}, g(\Delta_l^+, \Delta_\phi, \Lambda)\Big\}$$
$$\leq \max\Big\{\frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi^*}, g(\Delta_l^+, \Delta_\phi^*, \Lambda^*)\Big\} = g(\Delta_l^+, \Delta_\phi^*, \Lambda^*).$$

$\square$

Все величины, кроме Δ_l^+, использованные в оценке теоремы 11, измеряют асимптотическое поведение гамильтониана в среднем, в то время как убывание длин характеризуется величиной Δ_l^+ "поточечно". С другой стороны, элементарное предложение 11.3 использует шкалу l^p, т. е. характеристику убывания длин в среднем. Это наводит на мысль о возможности усиления теоремы 11 заменой поточечной оценки длин на усредненную. Примеры, однако, показывают, что на этом пути есть препятствия, связанные с сутью дела.

11.2 Доказательство теоремы 11

В начале разберем два простейших случая.

— Когда $(\Delta_l^+, \Lambda) = (1, 0)$, и, таким образом, $\Delta_\phi \le 1$, или когда $(\Delta_l^+, \Delta_\phi) = (1, 0)$, утверждение сводится к тривиальному: $\rho(\mathcal{H}) \le 1$.

— Если показатель сходимости последовательности $\vec{l}$ не превосходит $1/\Delta_l^+$. В этом случае из предложения 11.3 следует, что

$$\rho(\mathcal{H}) \le \frac{1}{\Delta_l^+}. \tag{11.3}$$

В частности, утверждение теоремы справедливо, если $\Delta_l^+ = \infty$.

Таким образом, в дальнейшем можно предполагать, что

$$(\Delta_l^+, \Lambda) \ne (1, 0),\ (\Delta_l^+, \Delta_\phi) \ne (1, 0),\ \Delta_l < \infty.$$

Заметим, что при этом предположении правая часть в доказываемой оценке строго меньше 1. Доказательство будет состоять в построении гамильтониана $\mathcal{H}_R$, удовлетворяющего условиям теоремы 10.

Введем следующее обозначение:

(i) Если $X, Y : [1, \infty) \to [0, \infty)$, то

$$X(R) \preceq Y(R) \quad \iff \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, C > 0\ \forall\, R \ge 1 :\ X(R) \le C R^\varepsilon Y(R)$$

(ii) Если $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, а $X_k \in \mathbb{C}$, $k \in [x, y] \cap \mathbb{Z}$, – набор комплексных чисел, то

$$\sum_{k \ge x}^{y} X_k := \sum_{k \in [x,y] \cap \mathbb{Z}} X_k.$$

Положим: $\Delta'_\phi := \Delta_\phi$, если $\Delta_\phi < \infty$; Δ'_ϕ – любое число > 1, если $\Delta_\phi = \infty$. Наконец, для $\phi \in [0, \pi)$ положим

$$\Lambda(\phi) := \sup \Big\{ \tau \ge 0 : \sum_{j=n}^{\infty} l_j |\sin(\phi_j - \phi)| = \mathrm{O}\big(n^{1 - \Delta_l^+ - \tau}\big) \Big\} \in [0, \infty],$$

$\Lambda(\phi)' := \Lambda(\phi)$, если $\Lambda(\phi) < \infty$; $\Lambda(\phi)'$ – любое число > 1, если $\Lambda(\phi) = \infty$. Выберем произвольное $\phi \in [0, \pi)$, такое что $(\Delta_l^+, \Lambda(\phi)') \neq (1, 0)$. Пусть $d(\phi)$ – любое число, для которого выполнено неравенство:

$$1 > d(\phi) > \begin{cases} \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta'_\phi}, & \Delta_l^+ + \Delta'_\phi \geq 2, \\ \max\left\{ \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta'_\phi}, \frac{1 - \Delta'_\phi + \frac{1}{2}\Lambda(\phi)'}{\Delta_l^+ - \Delta'_\phi + \Lambda(\phi)'} \right\}, & \Delta_l^+ + \Delta'_\phi < 2. \end{cases} \tag{11.4}$$

Задаваясь числом $R > 1$, определим аппроксимирующий гамильтониан $\mathcal{H}_R$:

$$\mathcal{H}_R(x) = \begin{cases} \mathcal{H}(x), & x < x_{N(R)} \\ \langle \cdot, e_\phi \rangle e_\phi, & x_{N(R)} < x < L. \end{cases} ; \ e_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

Здесь $x_{N(R)}$ – правый конец $N(R)$-ого интервала постоянства гамильтониана $\mathcal{H}$. Выберем номер $N(R)$ в виде:

$$N(R) = \left\lfloor R^{\frac{1-d(\phi)}{\Delta_l^+ - 1 + \Lambda(\phi)'/2}} \right\rfloor.$$

Заметим, что показатель степени R в этом выражении положителен.

Обозначим через l_n и ϕ_n соответственно длины и углы исходного гамильтониана $\mathcal{H}$. Положим:

$$\sigma := \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta'_\phi}$$

и выберем веса $a_n(R)$ в виде:

$$a_n(R)^2 := \begin{cases} \frac{1}{R} n^{\Delta_l}, & 1 \leq n \leq R^\sigma, \\ \frac{1}{\sqrt{R}} n^{\frac{1}{2}(\Delta_l^+ - \Delta'_\phi)}, & R^\sigma < n \leq N(R), \\ n^{-\frac{1}{2}\Lambda(\phi)'}, & n = N(R) + 1. \end{cases} \tag{11.5}$$

Проверим сначала, что $a_n(R) \leq 1$. Это очевидно во всех случаях, кроме $n \in (R^\sigma, N(R)]$ and $\Delta_l^+ > \Delta'_\phi$. В рассматриваемом случае достаточно показать, что

$$\frac{1 - d(\phi)}{\Delta_l^+ - 1 + \Lambda(\phi)'/2} (\Delta_l^+ - \Delta'_\phi) \leq 1,$$

или, эквивалентным образом, что

$$\frac{1 - \Delta'_\phi - \frac{1}{2}\Lambda(\phi)'}{\Delta_l^+ - \Delta'_\phi} \leq d(\phi). \tag{11.6}$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1 - \Delta'_\phi - \frac{1}{2}\Lambda(\phi)'}{\Delta_l^+ - \Delta'_\phi} \leq \frac{1 - \Delta'_\phi + \frac{1}{2}\Lambda(\phi)'}{\Delta_l^+ - \Delta'_\phi + \Lambda(\phi)'},$$

поскольку $a/b \leq (a+x)/(b+x)$ при $a \leq b$, $x \geq 0$, $b > 0$. Отсюда неравенство (11.6) следует в случае $\Delta_l^+ + \Delta'_\phi < 2$. В случае $\Delta_l^+ + \Delta'_\phi \geq 2$ имеем:

$$\frac{1-\Delta'_\phi}{\Delta_l^+ - \Delta'_\phi} \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta'_\phi},$$

и неравенство (11.6) вытекает просто из того, что $\Lambda(\phi)' \geq 0$.

Покажем теперь, что для построенного приближающего гамильтониана $\mathcal{H}_R$ и числа $d := d(\phi) + \varepsilon$ с произвольным $\varepsilon > 0$ все условия теоремы 10 выполняются. Для удобства записи аргумент R будет опускаться, когда это уместно.

пункт (i):

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{a_k^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \|\mathcal{H}(x) - \mathcal{H}^\star(x)\| \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a_{N+1}^2} \int_{x_N}^{x_\infty} \|\mathcal{H}(x) - \xi_\phi \xi_\phi^T\| \,\mathrm{d}x$$
$$\lesssim N^{\Lambda(\phi)'/2} \sum_{j=N+1}^{\infty} l_j |\sin(\phi_j - \phi)| \preceq N^{\Lambda(\phi)'/2} N^{1-\Delta_l^+ - \Lambda(\phi)'} \leq R^{d(\phi)-1}.$$

пункт (ii):

$$\sum_{k=1}^{N+1} a_k^2 l_k = \frac{1}{R} \sum_{k\geq 1}^{R^\sigma} k^{\Delta_l} l_k + \frac{1}{\sqrt{R}} \sum_{k\geq R^\sigma}^{N} k^{(\Delta_l^+ - \Delta'_\phi)/2} l_k + N^{-\Lambda(\phi)'/2}(x_\infty - x_N). \qquad (11.7)$$

Поскольку $l_k \preceq k^{-\Delta_l}$, первый член в правой части допускает оценку вида:

$$\frac{1}{R} \sum_{k\geq 1}^{R^\sigma} k^{\Delta_l} l_k \preceq R^{\sigma - 1} \leq R^{d(\phi)-1}.$$

Так как

$$x_\infty - x_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} l_k \preceq N^{1-\Delta_l^+},$$

третий член в (11.7) оценивается следующим образом:

$$N^{-\Lambda(\phi)'/2}(x_\infty - x_N) \preceq N^{-(\Delta_l^+ - 1 + \Lambda(\phi)'/2)} \lesssim R^{d(\phi)-1}.$$

Для оценки второго члена в правой части (11.7) рассмотрим отдельно случаи $\Delta_l^+ > 1$ и $\Delta_l^+ = 1$.

— *Случай* $\Delta_l^+ > 1$. Здесь $\Delta_l = \Delta_l^+$, и мы будем иметь:

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{k\geq R^\sigma}^{N} k^{(\Delta_l^+ - \Delta'_\phi)/2} l_k \preceq \frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{k\geq R^\sigma}^{N} k^{-(\Delta_l^+ + \Delta'_\phi)/2}$$

$$\lesssim \frac{1}{\sqrt{R}}\begin{cases}(R^\sigma)^{1-(\Delta_l^+ + \Delta'_\phi)/2}, & \Delta_l^+ + \Delta'_\phi > 2\\ \ln N, & \Delta_l^+ + \Delta'_\phi = 2\\ N^{1-(\Delta_l^+ + \Delta'_\phi)/2}, & \Delta_l^+ + \Delta'_\phi < 2\end{cases} \tag{11.8}$$

В первом случае

$$\sigma(1-(\Delta_l^+ + \Delta'_\phi)/2) = \sigma - 1/2 \leq d(\phi) - 1/2.$$

Во втором случае $d(\phi) > \frac{1}{2}$, и поэтому $\ln N \lesssim R^{d(\phi)-\frac{1}{2}}$. В третьем случае из неравенства (11.6) следует, что

$$\frac{1-d(\phi)}{\Delta_l^+ - 1 + \Lambda(\phi)'/2}\Big(1 - \frac{\Delta_l^+ + \Delta'_\phi}{2}\Big) \leq d(\phi) - \frac{1}{2},$$

а, значит, $N^{1-(\Delta_l^+ + \Delta'_\phi)/2} \lesssim R^{d(\phi)-\frac{1}{2}}$. Таким образом, правая часть в (11.8) есть $O(R^{d(\phi)-\frac{1}{2}})$ во всех случаях.

— *Случай* $\Delta_l^+ = 1$*:*

$$\frac{1}{\sqrt{R}}\sum_{k\geq R^\sigma}^{N} k^{(\Delta_l^+ - \Delta'_\phi)/2} l_k \leq \frac{1}{\sqrt{R}}\Big[\sum_{k\geq R^\sigma}^{N} l_k\Big] \max_{R^\sigma\leq k\leq N} k^{(1-\Delta'_\phi)/2}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{R}}\begin{cases}(R^\sigma)^{(1-\Delta'_\phi)/2}, & \Delta'_\phi \geq 1\\ N^{(1-\Delta'_\phi)/2}, & \Delta'_\phi < 1.\end{cases}$$

В случае $\Delta'_\phi \geq 1$ заметим, что

$$\sigma\frac{1-\Delta'_\phi}{2} \leq d(\phi) - \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 1 - \Delta'_\phi \leq 2\frac{d(\phi)}{\sigma} - (1+\Delta'_\phi) \;\Leftrightarrow\; 1 \leq \frac{d(\phi)}{\sigma},$$

а в случае $\Delta'_\phi < 1$ – что

$$\frac{1-d(\phi)}{\Lambda(\phi)'/2}\frac{1-\Delta'_\phi}{2} \leq d(\phi) - \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 1 - \Delta'_\phi + \frac{\Lambda(\phi)'}{2} \leq d(\phi)\big[1 - \Delta'_\phi + \Lambda(\phi)'\big].$$

Собирая вместе рассмотренные случаи, получим, что правая часть в (11.7) $\lesssim R^{d(\phi)-1}$.

пункт (iii). Числа a_n ограничены снизу равномерно по n подходящей степенью R, поэтому

$$\ln\Big(1+\frac{|\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)|}{a_{k+1}a_k}\Big)\lesssim \ln R$$

с подразумеваемыми константами не зависящими от k. Отсюда будем иметь:

$$\sum_{k\ge1}^{R^\sigma+1}\ln\left(1+\frac{|\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)|}{a_{k+1}a_k}\right)\ \lesssim R^\sigma\ln R\lesssim R^{d(\phi)},$$

$$\ln\left(1+\frac{|\sin(\phi-\phi_N)|}{a_{N+1}a_N}\right)\ \lesssim \ln R\lesssim R^{d(\phi)}.$$

В оставшейся части суммы числа a_j задаются второй строкой в (11.5). Подставляя, получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\ge R^\sigma+1}^{N-1}\ln\left(1+\frac{|\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)|}{a_{k+1}a_k}\right)\le\sum_{k\ge R^\sigma+1}^{N-1}\frac{1}{a_{k+1}a_k}\big|\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)\big|\\
&\quad=\sum_{k\ge R^\sigma+1}^{N-1}\sqrt{R}\cdot[(k+1)k]^{-\frac14(\Delta_l^+-\Delta'_\phi)}\cdot\big|\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)\big|\\
&\quad\lesssim\sqrt{R}\cdot\sum_{j\ge1}^{\log_2(N/R^\sigma)+1}\Bigg(\sum_{k\ge2^{j-1}R^\sigma}^{2^jR^\sigma-1}\big|\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)\big|\Bigg)\max_{k\in[2^{j-1}R^\sigma,2^jR^\sigma]}k^{-\frac12(\Delta_l^+-\Delta'_\phi)}\\
&\quad\lesssim\sqrt{R}\cdot\sum_{j\ge1}^{\log_2(N/R^\sigma)+1}\Bigg(\sum_{k\ge2^{j-1}R^\sigma}^{2^jR^\sigma-1}\big|\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)\big|\Bigg)\big(2^jR^\sigma\big)^{-\frac12(\Delta_l^+-\Delta'_\phi)}\\
&\quad\preceq\sqrt{R}\cdot(R^\sigma)^{-\frac12(\Delta_l^+-\Delta'_\phi)}\sum_{j\ge1}^{\log_2(N/R^\sigma)+1}\big(2^{j-1}R^\sigma\big)^{1-\Delta'_\phi}\cdot2^{-j\frac12(\Delta_l^+-\Delta'_\phi)}\\
&\quad\asymp\sqrt{R}\cdot(R^\sigma)^{1-(\Delta_l^++\Delta'_\phi)/2}\sum_{j\ge1}^{\log_2(N/R^\sigma)+1}2^{j[1-(\Delta_l^++\Delta'_\phi)/2]}\\
&\quad\lesssim\sqrt{R}\cdot\begin{cases}(R^\sigma)^{1-(\Delta_l^++\Delta'_\phi)/2}, & \Delta_l^++\Delta'_\phi>2\\ \ln R, & \Delta_l^++\Delta'_\phi=2\\ N^{1-(\Delta_l^++\Delta'_\phi)/2}, & \Delta_l^++\Delta'_\phi<2\end{cases}
\end{aligned}$$

Как было показано при рассмотрении условия (ii), полученное выражение $\lesssim R^{d(\phi)}$ во всех случаях.

пункт (iv). Согласно определению чисел a_n, имеем:

$$\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)^2=\begin{cases}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\Delta_l}, & 1\le k\le R^\sigma-1,\\ \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac12(\Delta_l^+-\Delta'_\phi)}, & R^\sigma<k\le N-1.\end{cases}$$

Поскольку величины $\ln a_1$ и $\ln a_{N+1}$ суть $O(\ln R)$ тривиальным образом, отсюда получим:

$$\big|\ln a_1\big| + \big|\ln a_{N+1}\big| + \sum_{k=1}^{N} \Big|\ln \frac{a_{k+1}}{a_k}\Big| \lesssim \ln R + \sum_{k=1}^{N} \ln\Big(1+\frac{1}{k}\Big) \lesssim \ln R \lesssim R^{d(\phi)}.$$

Применяя теорему 10, заключаем, что порядок $\rho(\mathcal{H}) \leq d(\phi)+\varepsilon$. Доказательство теоремы 11 теперь завершается предельным переходом $\varepsilon \searrow 0$, взятием нижней грани по всем $d(\phi)$, удовлетворяющим условию (11.4), взятием верхней грани по всем ϕ, для которых $(\Delta_l^+, \Lambda(\phi)') \neq (1,0)$, и, при необходимости, предельными переходами $\Delta'_\phi \nearrow \infty$, $\Lambda(\phi)' \nearrow \infty$, совершаемыми в указанной последовательности.

Замечание 11.9. Выбор весов a_j в доказательстве произведен почленной оптимизацией соответствующих слагаемых в в суммах из условий (ii), (iii), сделанной в априорном предположении, что замена величины $a_j a_{j+1}$ в знаменателе в общем члене (iii) на a_j^2 не сильно ухудшает оценку.

11.3 Оценка $\rho(\mathcal{H})$ снизу

При оценке порядка снизу естественно возникает следующая величина.

Определение 11.10. *Пусть $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ – соответственно, длины и углы системы $(\mathcal{H}, L)$ вида* (6.6)*. Тогда*

$$\delta_{l,\phi}(\mathcal{H}) := \liminf_{m\to\infty} \Big[G(m;\vec{l},\tfrac{1}{2}) + G\big(m;(|\sin(\phi_{n+1}-\phi_n)|)_{n=1}^{\infty},0\big)\Big].$$

Смысл величины $\delta_{l,\phi}$ легко пояснить с помощью ассоциированных с исходной матрицей (6.5) ортогональных полиномов P_j. Напомним, что через p_{jj} обозначается старший коэффициент ортогонального полинома P_j. Подставляя выражение (10.3) для p_{mm} через параметры Якоби в (9.1), будем иметь:

$$p_{mm} = \Big(\prod_{k=1}^{m-1} \rho_k\Big)^{-1} = \prod_{k=1}^{m-1} |\sin(\phi_{k+1}-\phi_k)|\sqrt{l_k l_{k+1}},$$

откуда получим:

$$\delta_{l,\phi} = \liminf_{m\to\infty} \frac{-\ln p_{mm}}{m\ln m} \tag{11.9}$$

Заметим, что в правой части этой формулы стоит величина, обратная к порядку целой функции $\sum_{n=0}^{\infty} p_{nn} z^n$, см. например [35, глава 1, теорема 2]. Согласно [14, предложение 7.1(iii)], порядок этой функции $\leq \rho(\mathcal{H})$. Выпишем полученную оценку.

Предложение 11.11. *Пусть $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ – соответственно, длины и углы системы $(\mathcal{H}, L)$ вида* (6.6)*. Тогда*

$$\rho(\mathcal{H}) \geq \frac{1}{\delta_{l,\phi}(\mathcal{H})}. \tag{11.10}$$

Предложение 11.11 можно доказать и непосредственно, т. е. не используя соответствие между гамильтонианами вида (6.6) и ортогональными полиномами. Приведем соответствующее рассуждение. Для этого мы воспользуемся представлением матрицы монодромии в виде произведения матриц, отвечающих интервалам (b_{j-1}, b_j), и учтем, что матричные элементы матрицы $W(b_j, z)$ суть полиномы по z с вещественными корнями, поэтому их абсолютные значения при $z = i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, оцениваются снизу через их старшие коэффициенты.

Доказательство предложения 11.11. Без потери общности можно считать, что $\phi_1 \neq \frac{\pi}{2}$, поскольку удаление одного интервала в начале не меняет ни порядок, ни значение $\delta_{l,\phi}$. В силу мультипликативного свойства, фундаментальное решение $W(x, z)$ в точке $x = b_n$ имеет вид:

$$W(b_n, z) = W_{n-1}(z)W_{n-2}(z)\dots W_1(z),$$

где матрица W_j задается (6.4) с $e = e_j$, $L = l_j$. Старший коэффициент матричного полинома $z \mapsto W(b_n, z)$ имеет вид:

$$(-1)^n l_1 l_2 \dots l_{n-1} J[e_{n-1}, 0] \cdot [e_{n-1}, 0]^T J[e_{n-2}, 0] \cdot [e_{n-2}, 0]^T J \dots [e_2, 0]^T J[e_1, 0] \cdot [e_1, 0]^T.$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}^T J \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} = \sin(\phi - \psi),$$

выражение для старшего коэффициента можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (-1)^n l_1 l_2 \cdot \ldots \cdot l_{n-1} \sin(\phi_2 - \phi_1)\sin(\phi_3 - \phi_2) \cdot \ldots \cdot \sin(\phi_{n-1} - \phi_{n-2}) J[e_{n-1}, 0] \cdot [e_1, 0]^T = \\ = (-1)^n \Big(\prod_{i=1}^{n-1} l_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n-2} \sin(\phi_{i+1} - \phi_i)\Big) J[e_{n-1}, 0] \cdot [e_1, 0]^T. \quad (11.11) \end{aligned}$$

С другой стороны, обозначая через $\Theta(x, z)$ первый столбец матрицы $W(x, z)$ и интегрируя в силу канонической системы (6.1), при всех $z \in \mathbb{C}$ будем иметь:

$$\operatorname{Im}\Big(\Theta_+(L, z)\overline{\Theta_-(L, z)}\Big) = \operatorname{Im} z \int_0^L \big(\mathcal{H}(t)\Theta(t, z), \Theta(t, z)\big)_{\mathbb{C}^2}\, \mathrm{d}t. \quad (11.12)$$

Подсчитаем интеграл в правой части. Для этого заметим, что подынтегральная функция постоянна на каждом интервале (x_n, x_{n+1}) и равна на нем величине

$$(H(b_n)\Theta(b_n, z))^T \Theta(b_n, z) = \left|\langle e_n, \Theta_n(b_n, z)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right|^2,$$

так что

$$\text{правая часть в (11.12)} = \operatorname{Im} z \sum_{n=1}^{\infty} l_n \left|\langle e_n, \Theta_n(b_n, z)\rangle_{\mathbb{C}^2}\right|^2.$$

Все нули полинома $z \mapsto \langle \Theta(b_n, z), e_n \rangle_{\mathbb{C}^2}$ вещественны, а степень равна $n-1$, поэтому его абсолютная величина при $z = i\tau$, $\tau > 0$, больше, чем модуль его старшего члена. Отсюда получим:

$$\begin{aligned}
&\text{правая часть в (11.12)} \geq \\
&\qquad \tau \sum_{n=1}^{\infty} l_n \prod_{i=1}^{n-1} l_i^2 \Big(\prod_{i=1}^{n-2} \sin^2(\phi_{i+1} - \phi_i) \Big) (e_1^+)^2 \left| \langle e_n, J e_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}^2} \right|^2 \tau^{2n-2} = \\
&\qquad\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \prod_{i=1}^{n-1} l_i^2 \prod_{i=1}^{n-1} \sin^2(\phi_{i+1} - \phi_i) \cos^2(\phi_1) \tau^{2n-1}.
\end{aligned}$$

По определению порядок $\rho(\mathcal{H})$ совпадает с порядком целых функций $\Theta_\pm(L, z)$, поэтому при любом $\varepsilon > 0$ найдутся константы $C, c > 0$, такие что

$$C e^{c|z|^{\rho(\mathcal{H})+\varepsilon}} \geq \operatorname{Im} \left(\Theta_+(L, z) \overline{\Theta_-(L, z)} \right).$$

Применяя упомянутую выше формулу для порядка целой функции в терминах коэффициентов Тейлора [35, глава 1, теорема 2] и сопоставляя два последних выносных неравенства, получаем требуемую оценку:

$$\begin{aligned}
\rho(\mathcal{H}) &\geq \limsup_{n \to \infty} \frac{(2n-1) \ln(2n-1)}{\ln (1/|a_{2n-1}|)} \\
&= \limsup_{n \to \infty} \frac{(2n-1) \ln(2n-1)}{-\ln \left(l_n \prod_{i=1}^{n-1} l_i^2 \prod_{i=1}^{n-1} \sin^2(\phi_{i+1} - \phi_i) \cos^2(\phi_1) \right)} \\
&= \limsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{-\ln \left(\sqrt{l_n} \prod_{i=1}^{n-1} l_i \left| \sin(\phi_{i+1} - \phi_i) \right| \right)} = \frac{1}{\delta_{l,\phi}}.
\end{aligned}$$

❑

Иногда бывает полезно загрубить оценку предложения 11.11, рассматривая по отдельности длины и углы гамильтониана вида (6.6). Получаемая в результате оценка будет удобна при рассмотрении конкретных примеров и важна при сравнении с верхней оценкой из теоремы 11.

Определение 11.12. *Пусть $\mathcal{H}$ – гамильтониан вида* (6.6) *с длинами и углами $\vec{l}$ и $\vec{\phi}$ соответственно. Положим:*

$$\begin{aligned}
\delta_l(\mathcal{H}) &:= \liminf_{m \to \infty} G(m; \vec{l}, \tfrac{1}{2}), \\
\delta_\phi(\mathcal{H}) &:= \liminf_{m \to \infty} G\big(m; (|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}, 0\big).
\end{aligned}$$

Следующее утверждение немедленно вытекает из теоремы 11.11.

Следствие 11.13. *Пусть $\mathcal{H}$ – гамильтониан вида* (6.6). *Предположим, что хотя бы одна из величин $\delta_l(\mathcal{H})$, $\delta_\phi(\mathcal{H})$ существует как предел*[4]. *Тогда*

$$\rho(\mathcal{H}) \geq \frac{1}{\delta_l + \delta_\phi}.$$

Приведем пример, показывающий что предположение в условии следствия не может быть опущено.

Предложение 11.14. *Пусть α, β и γ – положительные числа, такие что $\alpha > \beta > 1$ и $\beta + \frac{\gamma}{2} < \alpha < \beta + 2\gamma$. Пусть $\mathcal{H}$ – гамильтониан вида* (6.6) *с углами и длинами, заданными формулами*

$$l_n := \begin{cases} n^{-\alpha}\ , & 2^{2j} \leq n < 2^{2j+1}, j \in \mathbb{N}_0, \\ n^{-\beta}\ , & 2^{2j-1} \leq n < 2^{2j}, j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

$$\phi_1 := 0, \qquad \phi_{n+1} - \phi_n := \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ , & 2^{2j} \leq n < 2^{2j+1}, j \in \mathbb{N}_0, \\ n^{-\gamma}\ , & 2^{2j-1} \leq n < 2^{2j}, j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда

$$\rho(\mathcal{H}) < \frac{1}{\delta_l + \delta_\phi}.$$

Доказательство. Имеем:

$$\delta_l(\mathcal{H}) = \lim_{m\to\infty} G(2^{2m}; \vec{l}, \tfrac{1}{2}) = \frac{2\beta + \alpha}{3},$$

поскольку $\alpha > \beta$. Далее, очевидным образом

$$\delta_\phi(\mathcal{H}) = \lim_{m\to\infty} G\big(2^{2m+1}; (|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}, 0\big) = \frac{\gamma}{3}.$$

Оценим теперь $\rho(\mathcal{H})$ снизу. Обозначая через $M_n(z)$ матрицу монодромии, отвечающую интервалу Δ_n гамильтониана, при любом $\varepsilon > 0$ будем иметь:

$$\log \prod_{n=2^{2j}}^{2^{2j+1}-1} \big\|M_n(z)\big\| \leq \log \prod_{n=2^{2j}}^{2^{2j+1}} \left(1 + \frac{|z|}{n^\alpha}\right) \leq C_\varepsilon |z|^{1/\alpha+\varepsilon} \sum_{n=2^{2j}}^{2^{2j+1}} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

и, таким образом, произведение норм матриц M_n по множеству индексов $n \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}_0} [2^{2j}, 2^{2j+1})$ оценивается сверху величиной $e^{C|z|^{1/\alpha+\varepsilon}}$.

Для анализа произведения по остальным индексам воспользуемся оценкой

$$\log \Big\| \prod_{n=2^{2j-1}}^{2^{2j}-1} M_n(z) \Big\| \leq C_\varepsilon |z|^{1/(\beta+\gamma)+\varepsilon} \sum_{n=2^{2j-1}}^{2^{2j}} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}.$$

[4] т. е. хотя бы одна из последовательностей $G(m; \vec{l}, \frac{1}{2})$, $G\big(m; (|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}, 0\big)$ сходится.

Доказательство этого факта переносится дословно из соответствующего места доказательства теоремы 10, если числа a_n^2 выбрать как в доказательстве теоремы 11 (в случае $\Delta_l > 1$, $\Delta_l + \Delta_\phi > 2$). Суммируя эти оценки по j, находим, что

$$\prod_{j=1}^{\infty} \Big\| \prod_{n=2^{2j-1}}^{2^{2j}-1} M_n(z) \Big\| \le e^{C|z|^{1/(\beta+\gamma)+\varepsilon}}.$$

В силу мультипликативного свойства матрицы монодромии, отсюда следует, что $\rho(\mathcal{H}) \le \max\{\alpha^{-1}, (\beta+\gamma)^{-1}\}$. Остается заметить, что наложенные условия на параметры α, β и γ означают, что

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\delta_l + \delta_\phi} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\beta+\gamma} < \frac{1}{\delta_l + \delta_\phi}.$$

❑

11.4 Регулярно распределенные параметры

Основной результат этого раздела – теорема 11.18 – состоит в том, что для некоторого класса гамильтонианов вида (6.6) оценка $\rho(\mathcal{H}) \ge 1/(\delta_l + \delta_\phi)$ из предложения 11.13 превращается в равенство. Утверждение получается сравнением упомянутой оценки с оценкой сверху из теоремы 11. Основное свойство, выделяющее нужный класс гамильтонианов, состоит в некоторой регулярности последовательностей длин и углов.

Определение 11.15. *Назовем последовательность $\vec{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел* регулярно распределенной*, если*

$$\frac{y_n}{\Big(\prod\limits_{k=1}^{n} y_k\Big)^{\frac{1}{n}}} = \mathrm{O}(1).$$

Регулярно распределенные последовательности не могут сильно осциллировать и не могут иметь редкие пики с очень большими или очень маленькими значениями. Следующее замечание показывает, что класс регулярно распределенных последовательностей весьма широк.

Замечание 11.16.

(i) Монотонно убывающая последовательность регулярно распределена.

(ii) Если $\vec{u}$ и $\vec{y}$ – последовательности, последовательность $\vec{y}$ регулярно распределена, и $u_n \asymp y_n$, то последовательность $\vec{u}$ тоже регулярно распределена.

Лемма 11.17. *Пусть $\vec{y} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная регулярно распределенная последовательность положительных чисел, и пусть $\alpha \geq 0$. Тогда*

$$\Delta^*(\vec{y}) = \Delta(\vec{y}) = \delta(\vec{y}, \alpha).$$

Доказательство. Ввиду леммы 11.2, достаточно показать, что $\delta(\vec{y}, \alpha) \leq \Delta^*(\vec{y})$. Неравенство очевидно выполнено, если $\delta(\vec{y}, \alpha) = 0$. Предположим, что $\delta(\vec{y}, \alpha)$ – положительное число, и рассмотрим произвольное $\tau \in [0, \delta(\vec{y}, \alpha))$. При достаточно большом m будем иметь:

$$\tau \leq G(m; \vec{y}, \alpha)) = \frac{-1}{m \ln m} \ln \Big(y_m^{\alpha} \prod_{k=1}^{m-1} y_k \Big).$$

Отсюда вытекает, что

$$m^{-\tau} \geq \Big(y_m^{\alpha} \prod_{k=1}^{m-1} y_k \Big)^{\frac{1}{m}} = y_m^{\frac{\alpha-1}{m}} \Big(\prod_{k=1}^{m} y_k \Big)^{\frac{1}{m}} \gtrsim b^{\frac{\alpha-1}{m}} y_m,$$

и, стало быть, $y_n \lesssim n^{-\tau}$. ❑

В формулировке следующего результата используется величина Λ из теоремы 11.4.

Теорема 11.18. *Пусть $\mathcal{H}$ – гамильтониан вида* (6.6) *с длинами $\vec{l}$ и углами $\vec{\phi}$. Предположим, что последовательность $\vec{l}$ регулярно распределена, что по крайней мере одна из величин $\delta_l(\mathcal{H})$ and $\delta_\phi(\mathcal{H})$ существует как предел, и что либо*

(A) *Последовательность $(|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}$ регулярно распределена, и $\delta_l + \delta_\phi \geq 2$, причем $(\delta_l, \delta_\phi, \Lambda) \neq (1, 1, 0)$,*

либо

(B) $\delta_\phi = 0$.

Тогда

$$\rho(\mathcal{H}) = \frac{1}{\delta_l + \delta_\phi}.$$

Доказательство. Поскольку последовательность $\vec{l}$ суммируема, величина $\Delta(\vec{l}) \geq 1$. Из леммы 11.17 следует, что

$$\delta_l = \delta\Big(\vec{l}, \frac{1}{2}\Big) = \Delta(\vec{l}) = \Delta_l^+.$$

Кроме того, предположение о наличии предела означает, что $\delta_{l,\phi} = \delta_l + \delta_\phi$. Пусть выполнено условие (A). Тогда

$$\delta_\phi = \delta\big((|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}, 0\big) = \Delta((|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}) = \Delta_\phi,$$

и выполнены условия случая области регулярного поведения в теореме 11. Применяя теорему 11, получим:

$$\frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi} = \frac{1}{\delta_l + \delta_\phi} = \frac{1}{\delta_{l,\phi}} \leq \rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1}{\Delta_l^+ + \Delta_\phi},$$

что и требовалось. Если же выполнено условие (B), достаточно вспомнить предложения 11.3 и 11.11, из которых следует, что

$$\frac{1}{\Delta_l^+} = \frac{1}{\delta_l} = \frac{1}{\delta_{l,\phi}} \leq \rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1}{\Delta_l^+}.$$

❑

Приведем пару примеров использования полученных оценок.

Пример 11.19 (степенное поведение). Пусть $\mathcal{H}$ – гамильтониан вида (6.6) с длинами $\vec{l}$ и углами $\vec{\phi}$, такими что

$$l_n \asymp n^{-\alpha}, \quad |\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)| \asymp n^{-\beta},$$

для некоторых $\alpha > 1$ и $\beta \geq 0$. Тогда обе последовательности $\vec{l}$ и $(|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)|)_{n=1}^{\infty}$ регулярно распределены, см., например, замечание 11.16, величины δ_l и δ_ϕ существуют как пределы, причем

$$\delta_l = \Delta_l^+ = \alpha, \quad \delta_\phi = \Delta_\phi = \Delta_\phi^* = \beta.$$

Если $\alpha + \beta \geq 2$, то, применяя теорему 11.18, получим:

$$\rho(\mathcal{H}) = \frac{1}{\alpha + \beta},$$

При $\alpha + \beta < 2$ будем иметь:

$$\frac{1}{\alpha + \beta} \leq \rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1 - \beta}{\alpha - \beta}.$$

Пример 11.20 (прыгающие углы). Пусть $\mathcal{H}$ – гамильтониан вида (6.6), углы $\vec{\phi}$ которого удовлетворяют условию: $|\sin(\phi_{n+1} - \phi_n)| \asymp 1$. В этом случае $\delta_\phi = \Delta_\phi = \Delta_\phi^* = 0$, причем предел в δ_ϕ существует. Из предложений 11.3 и 11.11 следует, что

$$\frac{1}{\delta_l} \leq \rho(\mathcal{H}) \leq \frac{1}{\Delta_l^+}.$$

Заметим, что использование более точной теоремы 11 в случае критического треугольника не улучшает полученную оценку, поскольку максимум в теореме 11, (ii), равен в рассматриваемой ситуации $1/\Delta_l^+$ независимо от значения величины Λ.

Итак, для гамильтонианов вида (6.6) порядок $\rho(\mathcal{H})$ допускает оценку снизу вида $\rho(\mathcal{H}) \geq \frac{1}{\delta_{l,\phi}(\mathcal{H})}$ (предложение 11.11) и две различные оценки сверху: $\rho(\mathcal{H}) \leq p(\vec{l}) := \inf\left\{p > 0 : \vec{l} \in \ell^p\right\}$ (предложение 11.3), и оценку, даваемую теоремой 11. Только что приведенные примеры показывают, что ни одна из этих верхних оценок не усиливает другую и не совпадает, вообще говоря, с истинным значением $\rho(\mathcal{H})$. В самом деле, для гамильтонианов из примера 11.19 при $\alpha + \beta \geq 2$, $\beta \neq 0$ порядок строго меньше показателя сходимости $p(\vec{l})$ $(= 1/\alpha)$, а для гамильтонианов из примера 11.20 с произвольной последовательностью длин, такой что $p(\vec{l}) < \Delta_l^{-1} < 1$, порядок строго меньше своей оценки из теоремы 11. Более содержателен вопрос о том, может ли порядок отличаться от своей нижней оценки (11.10). В разделе 14 мы построим пример гамильтониана $\mathcal{H}$, для которого

$$\frac{1}{\delta_{l,\phi}(\mathcal{H})} < \rho(\mathcal{H}) < \frac{1}{\Delta_l^+(\mathcal{H})}.$$

Гамильтониан в этом примере будет диагональным, а для вычисления его порядка мы воспользуемся теоремой 1. Перейдем к доказательству этой теоремы.

12 Доказательство теоремы 1

Опишем структуру рассуждения. Сначала мы покажем, что порядок не превосходит нижней грани, указанной в условии. Для этого мы применим теорему 10, построив некое естественное приближение $\mathcal{H}_R$ гамильтониана. Далее подходящим выбором покрытия будет установлено, что порядок не меньше нижней грани.

Порядок $\leq$ нижней грани. Пусть число d таково, что для некоторого $C > 0$ при всех достаточно больших R существует такое покрытие промежутка $(0, L)$ интервалами ω_j общим числом $n(R) \leq CR^d/\log R$, что условие (A) выполнено. Требуемое неравенство будет установлено, если мы покажем, что порядок не превосходит d. Без потери общности можно считать, что интервалы ω_j попарно не пересекаются. Положим:

$$\mathcal{H}_R(x) = \begin{cases} \mathfrak{H}_1, & x \in \omega_j, |\omega_j \cap X_1| \geq \frac{|\omega_j|}{2}, \\ \mathfrak{H}_2 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

При таком выборе гамильтониана $\mathcal{H}_R$

$$\int_{\omega_j} \|\mathcal{H}(t) - \mathcal{H}_R(t)\|\, dt \leq 2\min\{|\omega_j \cap X_1|, |\omega_j \cap X_2|\},$$

и таким образом условие (i) теоремы 10 будет выполнено, если

$$\sum \frac{1}{a_j^2} \min\{|\omega_j \cap X_1|, |\omega_j \cap X_2|\} \leq CR^{d-1}. \tag{12.1}$$

Заметим, что

$$\min\{|\omega_j \cap X_1|, |\omega_j \cap X_2|\} \asymp |\omega_j \cap X_1|\, |\omega_j \cap X_2|/|\omega_j|,$$

и поэтому условие (12.1) эквивалентно такому:

$$\sum \frac{1}{a_j^2|\omega_j|}|\omega_j \cap X_1|\, |\omega_j \cap X_2| \leq CR^{d-1}. \tag{12.2}$$

Условия (iii) и (iv) теоремы 10 в рассматриваемой ситуации будут выполнены, если

$$\sum \log\left(1 + a_j^{-1}\right) \leq CR^d, \tag{12.3}$$

а условие (ii) – если

$$\sum a_j^2 |\omega_j| \leq CR^{d-1}. \tag{12.4}$$

Положим $a_j = 1$, если $|\omega_j| \leq 2/R$, и введем обозначение:

$$\mathfrak{N} = \{j \colon |\omega_j| \leq 2/R\}.$$

Суммы по $j \in \mathfrak{N}$ в условиях (12.2), (12.3) и (12.4), сверху оцениваются соответственно величинами $n(R)R^{-1}$, $n(R)R^{-1}$ и $n(R)$, и таким образом все они суть $O\left(R^{d-1}\right)$, согласно условию (B). Если $|\omega_j| > 2/R$, мы оптимизируем выбор a_j по общим членам сумм в (12.2), (12.3) и (12.4), полагая:

$$a_j^2 = \max\left\{\frac{1}{R|\omega_j|}, \frac{\sqrt{|\omega_j \cap X_1||\omega_j \cap X_2|}}{|\omega_j|}\right\}.$$

При таком выборе сумма по $j \notin \mathfrak{N}$ в (12.2) оценивается сверху величиной

$$\sum \sqrt{|\omega_j \cap X_1|\, |\omega_j \cap X_2|},$$

в (12.4) –

$$R^{-1}n(R) + \sum \sqrt{|\omega_j \cap X_1|\, |\omega_j \cap X_2|},$$

в (12.3) –

$$\sum \log(R|\omega_j|) \leq n(R)\log R.$$

Подставляя сюда условия (A) и (B) из формулировки теоремы 1 и применяя теорему 10, получаем, что порядок системы не превосходит d.

Нижняя грань $\leq$ порядку. Задаваясь числами $\tau > 0$ и $x \in (0, L)$, определим $s(\tau, x) \in [0, x]$ как решение уравнения

$$\tau^2 |(s, x) \cap X_1|\, |(s, x) \cap X_2| = 1.$$

Если такое решение существует, то оно единственно. Без потери общности можно предполагать, что, скажем, для некоторого $a > 0$ функция $\mathcal{H}(x) = \mathfrak{H}_1$ при $x \in (0, a/2)$, $\mathcal{H}(x) = \mathfrak{H}_2$ при $x \in (a/2, a)$ (добавление двух таких интервалов к левому концу не изменяет порядок системы). Тогда число $s(\tau, x)$ при достаточно больших τ определено при всех $x \geq a$.

Лемма 12.1 ([32], леммы 1–3). *Порядок канонической системы $(\mathcal{H}, L)$ равен*

$$\limsup_{\tau\to+\infty} \frac{\log \displaystyle\int_a^L \frac{\chi_2(x)}{|(s(\tau,x),x)\cap X_2|}\mathrm{d}x}{\log\tau}, \tag{12.5}$$

где χ_2 – характеристическая функция множества X_2.

Это утверждение представляет собой ключевой шаг в доказательстве формулы Каца (0.10). В исходной работе [32] оно сформулировано в терминах соответствующей струны. Приведенное ниже доказательство леммы представляет собой перевод рассуждений Каца на язык канонических систем. Для краткости мы докажем лишь ту часть леммы, которая будет использоваться в дальнейшем – утверждение, что порядок не меньше величины (12.5).

Доказательство. Поскольку порядок системы совпадает с порядком любого из матричных элементов фундаментального решения, достаточно доказать, что матричный элемент $M_{11}(z)$ оценивается по модулю снизу правой частью равенства (12.5). Порядок целой функции M_{11} равен

$$\limsup_{\tau\to+\infty} \frac{\log\log|M_{11}(i\tau)|}{\log\tau},$$

так как функция M_{11} вещественна и имеет только вещественные нули.

Пусть

$$\chi_1 = 1-\chi_2, \rho(s,t) = |(s,t)\cap X_2|.$$

Переписывая первый столбец системы (6.1) в виде интегрального уравнения, получим:

$$M_{11}(z,x) = 1 + z\int_0^x \chi_2(t)M_{21}(z,t)\mathrm{d}t = 1 - z^2\int_0^x \chi_1(t)\rho(t,x)M_{11}(z,t)\mathrm{d}t.$$

При $z = i\tau$, $\tau > 0$, это равенство принимает вид:

$$\xi_\tau(x) = 1 + \tau^2\int_0^x \chi_1(t)\rho(t,x)\xi_\tau(t)\mathrm{d}t,$$

$$\xi_\tau(x) \colon = M_{11}(i\tau,x).$$

Видно, что $\xi_\tau(\cdot)$ – положительная монотонно неубывающая функция. Оценим снизу величину $\xi_\tau'(x)/\xi_\tau(x)$. При п. в. $x\in X_2$ и всех $s\le x$ будем иметь:

$$\xi_\tau(s) = \xi_\tau(x) - \tau^2\rho(s,x)\int_0^s \chi_1(t)\xi_\tau\mathrm{d}t - \tau^2\int_s^x \rho(t,x)\chi_1(t)\xi_\tau(t)\mathrm{d}t$$

$$\ge \xi_\tau(x) - \tau^2\rho(s,x)\int_0^s \chi_1\xi_\tau\mathrm{d}t - \tau^2\rho(s,x)\int_s^x \chi_1\xi_\tau\mathrm{d}t = \xi_\tau(x) - \rho(s,x)\xi_\tau'(x),$$

и таким образом

$$\xi'_\tau(x) = \tau^2 \left(\int_s^x + \int_0^s \right) \chi_1 \xi_\tau \mathrm{d}t \ge \tau^2 \int_s^x \chi_1 \xi_\tau \mathrm{d}t \ge \tau^2 \left|(s,x) \cap X_1\right| \xi_\tau(s)$$
$$\ge \tau^2 \left|(s,x) \cap X_1\right| \left(\xi_\tau(s) - \rho(s,x)\xi'_\tau(x)\right).$$

Полагая $s = s(\tau, x)$, при п. в. $x \in X_2 \cap (a, L)$ будем иметь:

$$\frac{\xi'_\tau(x)}{\xi_\tau(x)} \ge \frac{1}{2\rho(s(\tau,x),x)},$$

откуда требуемое утверждение получается интегрированием по x по промежутку $[a, L]$. ❑

Для доказательства теоремы 1 теперь достаточно проверить, что при любом d, таком что

$$\int_a^L \frac{\chi_2(x)}{\rho(s(\tau,x),x)} \mathrm{d}x = O\left(\tau^d\right), \ \tau \to +\infty, \tag{12.6}$$

промежуток $(0, L)$ можно покрыть $O\left(R^d \log R\right)$ интервалами ω_j таким образом, что

$$\sum \sqrt{|\omega_j \cap X_1|\,|\omega_j \cap X_2|} = O\left(R^{d-1} \log R\right). \tag{12.7}$$

При всех достаточно больших R определим монотонно убывающую последовательность $\{x_j\}$, $j \ge 1$, следующим образом: $x_1 = L$, $x_{j+1} = s(R, x_j)$, если $j \ge 1$ и $x_j \ge a$; если $x_{j-1} \ge a$, $x_j < a$, то полагаем $x_{j+1} = 0$, и обрываем процесс. Заметим, что заданная таким образом последовательность x_j имеет конечное число членов. Действительно, из определения функции $s(R, x)$ будем иметь:

$$1 = R^2 |(s(R,x),x) \cap X_1|\,|(s(R,x),x) \cap X_2| \le R^2 \left|x - s(R,x)\right|^2.$$

Следовательно,

$$x_j - x_{j+1} \ge R^{-1},$$

и поэтому процесс оборвется через $O(R)$ шагов. Пусть $\omega_j = [x_{j+1}, x_j]$. По построению $[0, L] = \cup_j \omega_j$.

Проверим, что $\{\omega_j\}$ есть искомое покрытие. Покажем сначала, что число $N(R)$ интервалов покрытия есть $O\left(R^d \log R\right)$. Для этого заметим, что

$$\rho(s(\tau,x),x) \le \rho(x_{j+2}, x_j)$$

при $x \in [x_{j+1}, x_j]$, откуда следует, что

$$\text{lhs in (12.6)} \ge \sum_{j=1}^{N(R)-1} \frac{s_j}{s_j + s_{j+1}}, \ s_j := \rho(x_{j+1}, x_j). \tag{12.8}$$

Пусть

$$\mathfrak{g} = \left\{ j \colon \frac{s_{j+1}}{s_j} \le 2 \right\}, \ \hat{\mathfrak{g}} = \left\{ j \colon \frac{s_{j+1}}{s_j} \ge 2 \right\}.$$

Обозначим через $n_{\mathfrak{g}}$, $\hat{n}_{\mathfrak{g}}$ числа элементов множеств $\mathfrak{g}$ и $\hat{\mathfrak{g}}$ соответственно. При $j \in \mathfrak{g}$ общий член в сумме (12.8) ограничен снизу, и, значит, $n_{\mathfrak{g}} = O(R^d)$ ввиду (12.6). Для того, чтобы оценить $\hat{n}_{\mathfrak{g}}$, заметим, что $s_j \ge 1/(LR^2)$, поскольку

$$1 = R^2 \left| \omega_j \cap X_1 \right| s_j \le R^2 L s_j.$$

Следовательно, если k – длина какого-либо дискретного интервала множества $\hat{\mathfrak{g}}$, а m – правый конец этого интервала, то

$$x_m - x_{m+1} \ge \frac{2^{k-1}}{LR^2}.$$

С другой стороны, тривиальным образом $x_m - x_{m+1} \le L$, поэтому $k \le C + 2\log_2 R$, а значит $\hat{n}_{\mathfrak{g}} = O\left(R^d \log R\right)$. Таким образом,

$$N(R) = n_{\mathfrak{g}} + \hat{n}_{\mathfrak{g}} = O\left(R^d \log R\right),$$

как и требовалось. Для завершения доказательства остается отметить, что общий член в (12.7) равен R^{-1}, поэтому условие (12.7) сводится к только что доказанной оценке $N(R) = O\left(R^d \log R\right)$, и таким образом выполнено. $\square$

13 Комментарии к теореме 1 и приложения

13.1 Канторовская струна

Пусть $\xi \colon [0,1] \to [0,1]$ – стандартная функция Кантора, (u_j, v_j) – интервалы постоянства функции ξ,

$$T(x) := x + \xi(x),$$

$L = 2$. Определим гамильтониан $\mathcal{H}$ на промежутке $[0,2]$ формулой

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} \mathfrak{H}_1, & x \in \bigcup_j T\left([u_j, v_j]\right) \\ \mathfrak{H}_2 & \text{otherwise.} \end{cases}.$$

Каноническая система $(\mathcal{H}, 2)$ называется струной Кантора. Покажем, что условия теоремы 1 выполнены при $d = d_C = 2/\log_2 6$. Обозначим через τ_j объединение 2^{j-1} интервалов, выбрасываемых на j-ом шаге построения канторова множества. Пусть

$$M_R = T\left(\bigcup_{k=1}^{j} \tau_k\right), \ j \sim d \log_2 R.$$

Множество M_R представляет собой объединение $O\left(2^j\right)$ попарно непересекающихся интервалов. Рассмотрим покрытие отрезка $[0, 2]$ интервалами множества M_R и их интервалами смежности. Последние будут обозначаться через ω_j. По построению общее число интервалов этого покрытия есть $O\left(2^j\right) = O\left(R^d\right)$.

Члены, отвечающие интервалам множества M_R в условии (A), очевидным образом исчезают, поэтому соответствующая сумма сводится к

$$\sum \sqrt{|\omega_j \cap X_1|\,|\omega_j \cap X_2|} \leq \sqrt{\sum |\omega_j \cap X_1|} = \sqrt{|((0,2) \setminus M_R) \cap X_1|}. \qquad (13.1)$$

Поскольку функция T линейна на интервалах множеств τ_k, $T^{-1}X_1 = \bigcup_j \tau_j$, откуда получим:

$$|((0,2) \setminus M_R) \cap X_1| = \sum_{k>j} |\tau_k| = \left(\frac{2}{3}\right)^j \sim R^{d(1-\log_2 3)} = R^{2(d-1)}.$$

Таким образом, предположение (A) выполнено. Применяя теорему 1, получим что порядок системы не превосходит d_C.

Покажем теперь, что порядок $\geq d_C$. Предположим, что условие теоремы 1 выполнено для некоторого числа d, т. е. при всех достаточно больших R существует покрытие $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(R) = \{\Delta_j\}$, образованное $O(R^d)$ интервалов, такое что

$$\limsup_{R\to\infty} R^{1-d} \sum \sqrt{|\Delta_j \cap X_1|\,|\Delta_j \cap X_2|} < \infty.$$

Пусть $j = d\log_2 R$, а покрытие M_R определено как описано выше. Тогда без потери общности можно предполагать, что интервалы Δ_j попарно не пересекаются, а интервалы покрытия M_R содержатся среди них (т. е. любой интервал покрытия M_R совпадает с одним из интервалов Δ_j). В самом деле, добавление интервалов покрытия M_R к $\mathfrak{D}$ с последующим удалением пересечений интервалов $\mathfrak{D}$ с интервалами M_R не увеличивает левую часть в условии (A) и увеличивает константу в правой части условия (B) разве лишь на 1. Для данного интервала смежности ω из покрытия M_R, определим $n_{\omega,R}$ как число интервалов покрытия $\mathfrak{D}$, содержащихся в ω. Тогда $\sum_\omega n_{\omega,R} \leq CR^d = C2^j$. Поскольку число интервалов смежности равно 2^j, отсюда следует, что число номеров k, для которых $n_{k,R} \leq 2C$, не меньше 2^{j-1}. Пусть ω – интервал смежности, для которого $n_{k,R} \leq 2C$, и пусть $j_0 = j + \log_2(2C) + 4$. Тогда найдется интервал $\Delta \in \mathfrak{D}$, содержащий два соседних интервала покрытия $T\left(\tau_{j_0}\right)$, поскольку в ω содержится 2^{j_0-j} интервалов покрытия $T\left(\tau_{j_0}\right)$ (принцип Дирихле). По построению имеем:

$$|\Delta \cap X_1| \geq 2 \cdot 3^{-j_0} = C3^{-j},\ |\Delta \cap X_2| \geq 2^{-j_0} = C2^{-j},$$

так что

$$\sqrt{|\Delta \cap X_1||\Delta \cap X_2|} \geq C2^{-j/2}3^{-j/2}.$$

Так как число таких интервалов Δ не меньше $C2^j$, отсюда заключаем, что левая часть в условии (A) оценивается снизу числом $C\left(2/3\right)^{j/2} = CR^{d(1-\log_2 3)/2}$. По предположению, эта величина есть $O\left(R^{d-1}\right)$, и, стало быть, $d \geq d_C$. Таким образом, мы доказали, что порядок струны Кантора равен d_C. В работах [29], [30] этот факт был установлен иными средствами, с помощью минимаксимального принципа[5].

13.2 Оценки сверху для сингулярного распределения масс

Пусть μ – мера на отрезке $[0,1]$, имеющая замкнутый носитель $G \subset [0,1]$ нулевой меры Лебега, такой что длины его интервалов смежности E_j суммируемы со степенью $p \in (0,1)$: $\sum |E_j|^p < \infty$. Определим каноническую систему $(\mathcal{H}, L)$, $L\colon = 1 + \mu[0,1]$, вида, рассмотренного в теореме 2, полагая

$$X_1 = \bigcup_j (\mu[0, a_j] + E_j),$$

где a_j – левый конец интервала E_j. Оценка снизу для собственных чисел этой системы, найденная в работе [44], показывает, что ее порядок не превосходит $2p/(p+1)$. Это утверждение легко может быть получено и из теоремы 1. Ограничимся наброском рассуждения. Пусть $\{\omega_j\}$ – покрытие промежутка $(0, L)$, состоящее из N самых длинных интервалов множества X_1 и их интервалов смежности. По построению число интервалов этого покрытия $\le 2N+1$, а члены в левой части условия (A), отвечающие интервалам множества X_1 обнуляются. Оставшиеся члены оцениваются так же, как и (13.1). В результате получается, что

$$\text{lhs in (A)} \le |E_N|^{(1-p)/2} = O\left(N^{(p-1)/(2p)}\right).$$

Остается заметить, что правая часть есть $O(N^{1-1/d})$, если $d = 2p/(p+1)$.

13.3 Формула Каца

Как уже было упомянуто, непосредственное сравнение теоремы 1 и формулы (0.10) невозможно, поскольку нет примеров использования формулы Каца в ситуации теоремы 1. Заметим, что формула Каца верна и для некоторых задач с $L = \infty$ (сингулярные струны), и в сингулярном случае имеются примеры [38], когда порядок вычисляется с помощью применения формулы (0.10). Примеры эти носят несколько искусственный характер.

14 Диагональные гамильтонианы с нерегулярным распределением длин и оценка Лившица

В этом разделе мы применим теорему 1 к диагональным гамильтонианам вида (6.6). Поскольку диагональный гамильтониан принимает лишь два значения

[5]Множитель 2 в числителе выражения для d_C появляется за счет того, что спектральный параметр в используемом нами определении струны есть квадратный корень из “естественного” параметра, применявшегося в [29].

(6.10), диагональный гамильтониан вида (6.6) полностью задается последовательностью $\vec{l}$ и своим значением на первом интервале постоянства Δ_1. Из определений непосредственно следует, что для любого диагонального гамильтониана вида (6.6)

$$\delta_\phi(\mathcal{H}) = \Delta_\phi(\mathcal{H}) = \Delta_\phi^*(\mathcal{H}) = 0,\ \delta_{l,\phi} = \delta_l,$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{\delta_l(\mathcal{H})} \le \rho(\mathcal{H}) \le \inf\{p > 0\colon \vec{l} \in \ell^p\} \le \frac{1}{\Delta_l^+(\mathcal{H})}. \tag{14.1}$$

Следующая теорема содержит пример, упомянутый в конце раздела 11.4.

Теорема 14.1. *Зададим произвольные числа* $\alpha \in [1, \infty)$ *и* $\beta \in (\alpha, \infty)$. *Для произвольного натурального* $q \ge 2$ *обозначим через* $\mathcal{H}_q$ *диагональный гамильтониан вида* (6.6), *заданный последовательностью длин*

$$l_n := \begin{cases} 1 & , \quad n = 1, \\ (n \ln^2 n)^{-\alpha} & , \quad n \not\equiv 0 \mod q,\ n \ge 2, \\ (n \ln^2 n)^{-\beta} & , \quad n \equiv 0 \mod q. \end{cases}$$

Тогда

$$\inf\{p > 0\colon \vec{l} \in \ell^p\} = \frac{1}{\alpha}, \quad \delta_l(\mathcal{H}_q) = \frac{q-1}{q}\alpha + \frac{1}{q}\beta, \tag{14.2}$$

а

$$\rho(\mathcal{H}_q) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_l(\mathcal{H}_q)} & , \quad q = 2, \\ \frac{1}{\alpha} & , \quad q \ge 3. \end{cases}$$

Может показаться странным, что порядки $\rho(\mathcal{H}_q)$ при $q = 2$ и при $q \ge 3$ различны. Неформальное объяснение этого факта состоит в том, что доминирующая подпоследовательность длин, отвечающая $n \not\equiv 0 \mod q$, "замечает" скачки углов при $q \ge 3$ и не замечает их при $q = 2$.

Доказательство теоремы 14.1 – неравенства (14.2). Первое неравенство в (14.2) очевидно. Для подсчета величины $\delta_l(\mathcal{H}_q)$ рассмотрим произведение

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n l_k &= \prod_{k=1}^n k^{-\alpha} \cdot \Big(\prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} (qj)^\alpha \Big) \cdot \Big(\prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{q} \rfloor} (qj)^{-\beta} \Big) B_n \\ &= (n!)^{-\alpha} \cdot q^{\alpha \lfloor \frac{n}{q} \rfloor} \big(\lfloor \tfrac{n}{q} \rfloor ! \big)^\alpha \cdot q^{-\beta \lfloor \frac{n}{q} \rfloor} \big(\lfloor \tfrac{n}{q} \rfloor ! \big)^{-\beta} B_n, \end{aligned} \tag{14.3}$$

где фактор B_n, представляющий собой произведение степеней логарифмов, оценивается следующим образом:

$$1 \ge B_n \ge \prod_{k=2}^n \ln^{-\beta} k \ge \ln^{-\beta(n-1)} n,$$

откуда следует, что

$$\frac{\ln B_n}{n \ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Применяя формулу Стирлинга к остальным сомножителям в правой части (14.3), получим:

$$\delta_l(\mathcal{H}_q) = \lim_{n\to\infty} G\Big(n; \vec{l}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{q-1}{q}\alpha + \frac{1}{q}\beta.$$

❑

Вычислим порядок гамильтониана $\mathcal{H}_q$ при $q \geq 3$, применяя теорему 1. Заметим сначала, что для гамильтонианов вида (6.6) в теореме 1 можно ограничиться покрытиями интервалами, концы которых находятся в узлах b_n.

Определение 14.2. *Пусть $\mathcal{H}$ – диагональный гамильтониан вида* (6.6)*, и пусть b_n, $n = 0, 1, \ldots, \infty$ – его узлы. Для заданного покрытия Ω промежутка* $[0, L]$ $(= [b_0, b_\infty])$ *будем писать* $\Omega \in \operatorname{Cov}(H)$*, если*

$$\forall \omega \in \Omega\, \exists n_-, n_+ \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} : \ \omega = [b_{n_-}, b_{n_+}).$$

Лемма 14.3. *Пусть $\mathcal{H}$ – диагональный гамильтониан вида* (6.6) *с $L < \infty$. Тогда порядок $\rho(\mathcal{H})$ равен нижней грани чисел $d \in$* $(0, 1]$*, таких что при любом достаточно большом R найдется конечное покрытие* $\Omega(R) \in \operatorname{Cov}(H)$*, такое что условия* (A) *и* (B) *теоремы 1 выполнены.*

Для данного конечного покрытия T всюду в дальнейшем будем обозначать через $\#T$ число его элементов.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого числа $d \in (0, 1]$ и любого набора покрытий $(\Omega(R))_{R>1}$, таких что условия (A) и (B) выполнены, найдется набор покрытий $(\tilde{\Omega}(R))_{R>1}$, $\tilde{\Omega}(R) \in \operatorname{Cov}(H)$, такой что условия (A) и (B) выполнены для этого набора с тем же d.

Покрытия $\tilde{\Omega}(R)$ строятся следующей модификацией покрытий $\Omega(R)$. Рассмотрим произвольный интервал $\omega \in \Omega(R)$.

— *Случай 1:* Существует $n \in \mathbb{N}_0$, такое что $\omega \subseteq [b_n, b_{n+1})$. В этом случае мы включаем интервал $[b_n, b_{n+1})$ в покрытие $\tilde{\Omega}(R)$.

— *Случай 2:* Существует $n \in \mathbb{N}$, такое что узел b_n находится внутри интервала ω. Положим:

$$\begin{aligned} n_- &:= \min\Big\{n \in \mathbb{N} : b_n - \text{ внутренняя точка } \omega\Big\}, \\ n_+ &:= \max\Big\{n \in \mathbb{N} : b_n - \text{ внутренняя точка } \omega\Big\}, \end{aligned}$$

и включим в набор $\tilde{\Omega}(R)$ следующие промежутки (второй промежуток возникает только в случае $n_- < n_+$):

$$[b_{n_- -1}, b_{n_-}), \quad [b_{n_-}, b_{n_+}), \quad [b_{n_+}, b_{n_+ +1}).$$

По построению $\tilde{\Omega}(R) \in \mathrm{Cov}(H)$, причем $\#\tilde{\Omega}(R) \le 4 \cdot \#\Omega(R)$. В частности, условие (B) выполнено для покрытий $(\tilde{\Omega}(R))_{R>1}$.

Рассмотрим теперь сумму в условии (A) для покрытия $\tilde{\Omega}(R)$. Заметим, что только интервалы вида $[b_{n_-}, b_{n_+})$, построенные по некоторому промежутку $\omega \in \Omega(R)$, могут давать ненулевой вклад в сумму. Однако, в этом случае $[b_{n_-}, b_{n_+}) \subseteq \omega$, и поэтому

$$|[b_{n_-}, b_{n_+}) \cap M_i| \le |\omega \cap M_i|, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом,

$$\sum_{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}(R)} \sqrt{|\tilde{\omega} \cap M_1| \cdot |\tilde{\omega} \cap M_2|} \le \sum_{\omega \in \Omega(R)} \sqrt{|\omega \cap M_1| \cdot |\omega \cap M_2|},$$

и, стало быть, условие (A) выполнено для набора покрытий $(\tilde{\Omega}(R))_{R>1}$. ❑

Доказательство теоремы 14.1 – вычисление $\rho(\mathcal{H}_q)$. Резюмируя уже доказанные факты о порядке (см. (14.1), (14.2)), имеем:

$$\Big[\frac{q-1}{q}\alpha + \frac{1}{q}\beta\Big]^{-1} \le \rho(\mathcal{H}_q) \le \frac{1}{\alpha}. \tag{14.4}$$

Рассмотрим сначала случай $q = 2$. Для вычисления порядка воспользуемся [15, теорема 1.2]. Приведем формулировку этой теоремы в терминах гамильтонианов:

Теорема 14.4. *Пусть G – диагональный гамильтониан вида (6.6) с $L < \infty$, P_n и Q_n – ортогональные полиномы соответствующей матрицы Якоби. Предположим, что для некоторых $a, b \in (0, 1]$ существуют константы $C, D > 0$, такие что*

(i) $(P_{2n}(0)^2)_{n=1}^{\infty} \in \ell^b$, $(Q_{2n-1}(0)^2)_{n=1}^{\infty} \in \ell^a$;

(ii) $P_{2n}(0) \le C Q_{2n-1}(0)^{b/a}$ *при всех достаточно больших n;*

(iii) $Q_{2j-1}(0) \le D Q_{2i-1}(0)$ *при $i \le j$.*

Тогда порядок $\rho(\mathsf{G})$ не превосходит среднего гармонического чисел a и b:

$$\rho(\mathsf{G}) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Поскольку гамильтониан $\mathcal{H}_2$ диагонален, соответствующие ортогональные полиномы P_n четны при четном n и нечетны при нечетном n; полиномы Q_n, наоборот, нечетны при четном n, четны при нечетном n. В такой ситуации

$$P_{2n}(0)^2 = l_{2n}, \; Q_{2n-1}(0)^2 = l_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и поэтому $(P_{2n}(0)^2)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{1/\beta}$, $(Q_{2n-1}(0)^2)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{1/\alpha}$. Кроме того, обе последовательности $P_{2n}(0)^2$, $Q_{2n-1}(0)^2$ монотонно убывают, причем

$$\frac{P_{2n}(0)^{2/\alpha}}{Q_{2n-1}(0)^{2/\beta}} = \frac{(2n-1)\ln^2(2n-1)}{2n\ln^2(2n)} \to 1.$$

Таким образом, все условия теоремы 14.4 выполнены с $b = 1/\beta$, $a = 1/\alpha$. Применяя ее, получим: $\rho(\mathcal{H}_2) \le [\frac{1}{2}(\alpha+\beta)]^{-1}$. Сопоставляя эту оценку с (14.4), убеждаемся, что

$$\rho(\mathcal{H}_2) = \frac{2}{\alpha+\beta} = \frac{1}{\delta_l(\mathcal{H}_2)}.$$

Предположим теперь, что $q \ge 3$. Достаточно доказать, что $\rho(\mathcal{H}_q) \ge \frac{1}{\alpha}$ (см. (14.4)). Рассмотрим вспомогательный диагональный гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}}$ вида (6.6), заданный длинами

$$h_n := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ \left(n \ln^2 n\right)^{-\alpha}, & n \ge 2, \end{cases}$$

и совпадающий с $\mathcal{H}_q$ на интервале Δ_1. Последовательность $\vec{h}$ регулярно распределена, поскольку монотонна, и, стало быть, $\rho(\tilde{\mathcal{H}}) = \alpha^{-1}$ в силу (14.1).

Зададим произвольное число $d > \rho(\mathcal{H}_q)$. В силу леммы 14.3 найдется семейство покрытий $(\Omega(R))_{R>1} \subset \mathrm{Cov}(H)$, таких что условия (A) и (B) теоремы 1 выполнены с этим значением d. Модифицируем эти покрытия так, чтобы получить семейство покрытий для гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$, отвечающее тому же значению d. Для этого сначала измельчим покрытия $(\Omega(R))_{R>1}$ так, чтобы получить семейство покрытий $(\Omega'(R))_{R>1} \subset \mathrm{Cov}(H)$, удовлетворяющее условиям (A) и (B) для гамильтониана $\mathcal{H}_q$, такое что

$$\begin{array}{l} \textit{Если для данного } j \in \mathbb{N} \textit{ интервал } \omega \in \Omega'(R) \\ \textit{содержит промежуток } [b_{qj-1}, b_{qj}), \textit{ то либо} \\ \omega = [b_{qj-1}, b_{qj}), \textit{ либо } \omega \supseteq [b_{qj-3}, b_{qj-2}). \end{array} \tag{14.5}$$

В самом деле, поскольку $q \ge 3$, выполнение условия (14.5) достигается расщеплением промежутка $\omega \in \Omega(R)$ на ≤ 3 меньших промежутка. Если левый конец ω есть точка вида b_{qj-1}, то мы включаем в набор $\Omega'(R)$ промежутки $[b_{qj-1}, b_{qj})$ и $\omega \cap [b_{qj}, +\infty)$; если левый конец ω есть точка вида b_{qj-2}, то мы включаем в набор $\Omega'(R)$ промежутки $[b_{qj-1}, b_{qj})$, $[b_{qj-2}, b_{qj-1})$ и $\omega \cap [b_{qj-1}, +\infty)$; в остальных случаях включаем в набор $\Omega'(R)$ сам промежуток ω. По построению, $(\Omega'(R))_{R>1} \subset \mathrm{Cov}(H)$, причем число $\#\Omega'(R) \le 3 \cdot \#\Omega(R)$, а сумма в условии (A) для покрытия $\Omega'(R)$ не превосходит соответствующую сумму для покрытия $\Omega(R)$. Таким образом, условия (A) и (B) теоремы 1 выполнены для покрытия $(\Omega'(R))_{R>1}$ с данным значением d.

Заметим, что в силу свойства (14.5) и монотонности последовательности $(h_j)_{j=1}^{\infty}$ для каждого интервала ω, не совпадающего с одним из интервалов $\Delta_j = (b_{j-1}, b_j)$, будем иметь:

$$\sum_{\substack{n \equiv 0 \bmod q \\ [b_{n-1}, b_n) \subseteq \omega \cap M_i}} h_n \ \le \sum_{\substack{n \not\equiv 0 \bmod q \\ [b_{n-1}, b_n) \subseteq \omega \cap M_i}} h_n \ \le \ |\omega \cap M_i|, \quad \omega \in \Omega'(R),\ i = 1, 2,$$

откуда получим:

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ [b_{n-1}, b_n) \subseteq \omega \cap M_i}} h_n \ \le \ 2|\omega \cap M_i|, \quad \omega \in \Omega'(R),\ i = 1, 2. \tag{14.6}$$

Пусть $\tilde{x}_n$ – узлы гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$. Определим покрытие $\tilde{\Omega}(R) \in \mathrm{Cov}(\tilde{H})$ следующим образом:

$$\tilde{\Omega}(R) := \big\{[\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) : \; n, m \in \mathbb{N}, [b_n, b_m) \in \Omega'(R)\big\}.$$

Тогда, очевидно, $\#\tilde{\Omega}(R) = \#\Omega(R)$, и, согласно (14.6),

$$|[\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \cap \tilde{M}_i| \leq 2|[b_n, b_m) \cap M_i|, \quad [\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) \in \tilde{\Omega}(R), \; i = 1, 2.$$

Итого получаем, что условия (A) и (B) выполнены для гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}$ и семейства покрытий $(\tilde{\Omega}(R))_{R>1}$ с данным значением d. Применяя теорему 1 к гамильтониану $\tilde{\mathcal{H}}$, находим, что $d \geq \rho(\tilde{\mathcal{H}}) = 1/\alpha$, что и требовалось. ❑

Наконец, обсудим оценку Лившица (0.9). Для этого напомним современное доказательство этой оценки, предложенное в работе [14], и переведем пример из теоремы 14.1 на язык проблемы моментов.

Вывод (0.9) *из предложения 11.11.* Пусть μ – мера на оси, все моменты которой конечны, $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ – ее моменты, P_n – соответствующие ортонормированные полиномы. Имеем:

$$1 = (P_n, P_n)_{L^2(\mu)} = b_{n,n}(z^n, P_n)_{L^2(\mu)} \leq b_{n,n}\|z^n\|_{L^2(\mu)} = b_{n,n}\sqrt{s_{2n}}.$$

Таким образом,

$$b_{n,n} \geq \frac{1}{\sqrt{s_{2n}}}.$$

Подставляя это неравенство в определение $\delta_{l,\phi}$ (11.9), в силу предложения 11.11 получим:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2n \ln n}{\ln s_{2n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln b_{n,n}^{-1}} \leq \rho\big((s_n)_{n=0}^{\infty}\big). \tag{14.7}$$

❑

Теорема 14.1 дает примеры проблем моментов, в которых второе неравенство в (14.7) строгое.

Следствие 14.5. *Для любых $\rho \in (0, 1]$ и $r \in (0, \rho)$ найдется неопределенная проблема моментов $\mathfrak{s}$, такая что ее порядок совпадает с ρ, а*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln b_{n,n}^{-1}} = r.$$

Более того, эта проблема моментов может быть выбрана симметричной (*т. е.* $s_n = 0$ *при всех нечетных* n).

Доказательство. Пусть $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, и пусть $\alpha := 1/\rho$ and $\beta := \frac{q}{r} - (q-1)\alpha$. Тогда последовательность моментов, связанная с матрицей Якоби, отвечающей гамильтониану $\mathcal{H}_q$ в смысле предложения 6.4, обладает требуемыми свойствами. ❑

В заключение сформулируем открытый вопрос. Только что было показано, что второе неравенство в оценке (14.7) может быть строгим. Существуют ли проблемы моментов, для которых строгим будет первое неравенство, т. е.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2n\ln n}{\ln s_{2n}} < \limsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln b_{n,n}^{-1}} \quad ?$$

Мы предполагаем, что существуют.

Глава V. Канонические системы в классах компактных операторов

Изучим теперь задачу о порядке для канонических систем “по другую сторону ядерного класса” (т. е. для $p > 1$). Согласно формуле Крейна–де Бранжа, вопрос этот содержателен лишь для сингулярных канонических систем. Нормировочное условие $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$ в этом разделе не накладывается. Нам будет удобно изменить выбор самосопряженного расширения минимального оператора. Всюду в этой главе $A_{[\mathcal{H}]}$ – оператор, заданный областью определения 6.2, где условие (iii) заменено на $f_+(0) = 0$.

Заметим сначала, что в интересующих нас случаях, т. е. когда резольвента оператора $A_{[\mathcal{H}]}$ компактна, гильбертово пространство H канонической системы всегда содержит постоянный вектор.

Лемма 15.1. *Если $0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{[\mathcal{H}]})$, то существует $\phi \in \mathbb{R}$, такое что*

$$\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \in H. \tag{15.1}$$

Это утверждение непосредственно вытекает из [22, теорема 3.8(b)] (при $t = 0$). Для удобства чтения дадим набросок доказательства.

Доказательство. 0 – точка регулярного типа минимального оператора, индуцированного канонической системой, поскольку $0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{[\mathcal{H}]})$. Следовательно, существует такое самосопряженное расширение $\tilde{A}$ этого минимального оператора, что $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\tilde{A})$, откуда получим, что соответствующий максимальный оператор имеет нетривиальное ядро. Это ядро, очевидно, и состоит из постоянных функций, принадлежащих пространству H. ❑

Нам будет удобно зафиксировать $\phi = 0$ в (15.1), что соответствует условию $h_1 \in L^1(0, L)$. Для этого воспользуемся поворотом гамильтониана.

Определение 15.2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, и пусть*

$$N_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Задаваясь гамильтонианом $\mathcal{H}$ на промежутке $[0, L)$, положим:

$$(\circlearrowleft_\alpha \mathcal{H})(t) := N_\alpha \mathcal{H}(t) N_\alpha^{-1}, \quad t \in [0, L).$$

Замечание 15.3. Справедливы следующие утверждения (см. например [34, p.263]):

▷ $\circlearrowleft_\alpha \mathcal{H}$ – гамильтониан,

▷ Матрица N_α задает изоморфизм $\omega_\alpha\colon f \mapsto N_\alpha f$ гильбертовых пространств канонических систем, заданных гамильтонианами $\mathcal{H}$ и $\circlearrowleft_\alpha \mathcal{H}$, сплетающий соответствующие минимальные операторы:

$$T_{\min}(\circlearrowleft_\alpha \mathcal{H}) \circ \omega_\alpha = \omega_\alpha \circ T_{\min}(\mathcal{H}).$$

Следовательно, гамильтонианы $\mathcal{H}$ и $\circlearrowleft_\alpha \mathcal{H}$ имеют одинаковые операторные свойства.

Теорема 12. *Пусть $(\mathcal{H}, L)$ – сингулярная каноническая система с гамильтонианом $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$, и пусть $h_1 \in L^1(0, L)$. Тогда спектр оператора $A_{[\mathcal{H}]}$ дискретен тогда, и только тогда, когда*

$$\lim_{t \nearrow b} \Big(\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \Big) = 0. \tag{15.2}$$

Замечание 15.4. Предположение об интегрируемости функции h_1 в этой теореме носит нормировочный характер и не снижает общности результата. Из леммы 15.2 и замечания перед теоремой следует, что для произвольной сингулярной канонической системы, если точка $0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(A_{[\mathcal{H}]})$ (и, в частности, если спектр дискретен), то существует вектор $e \in \mathbb{R}^2$, $\|e\| = 1$, такой что $\int_0^L e^T \mathcal{H}(s) e\,\mathrm{d}s < \infty$. Применяя подходящий поворот, можно свести вопрос к случаю $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В случае $h_3 = 0$ теорема 12 совпадает с известным критерием Крейна–Каца дискретности спектра струны [18, теоремы 4,5], переведенным на язык канонических систем. В явном виде теорема при $h_3 = 0$ сформулирована в [20, следствие из теоремы 1]. Заметим, что доказательство теоремы 15.4 ново и в случае $h_3 = 0$, и, таким образом, содержит новое доказательство критерия Крейна–Каца. Кроме того, из теоремы 15.4 немедленно вытекает критерий дискретности спектра для полуограниченных гамильтонианов ранга 1, указанный в [21].

15.1 Асимптотическое поведение собственных значений

Перейдем к изучению деталей поведения спектра оператора $A_{[\mathcal{H}]}$ на бесконечности. Итак, пусть $(\mathcal{H}, L)$, $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$, – сингулярная каноническая система, такая что оператор $A_{[\mathcal{H}]}$ имеет дискретный спектр и выполнено нормировочное условие $h_1 \in L^1(0, L)$. Тогда точка $0 \notin \sigma(A_{[\mathcal{H}]})$, и поэтому $\sigma(A_{[\mathcal{H}]})$ представляет собой последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ вещественных чисел, которую мы упорядочим по возрастанию модуля:

$$0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \dots \tag{15.3}$$

Наш первый основной результат – общая теорема о характеризации резольвенты в идеалах компактных операторов. Введем необходимые обозначения и напомним терминологию теории симметрично нормированных идеалов.

Определим возрастающую последовательность $c_0\colon = a < c_1 < c_2 < \ldots < b$ и последовательность ω_n равенствами

$$\int_{c_n}^{L} h_1(s)\mathrm{d}s = 2^{-n}\int_{0}^{L} h_1(s)\mathrm{d}s,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\omega_n = 2^{-\frac{n}{2}}\Big(\int_{c_{n-1}}^{c_n} h_2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15.4}$$

По определению, симметрично-нормированный идеал $\mathfrak{I}$ – это двусторонний операторный идеал, снабженный нормой $\|.\|_{\mathfrak{I}}$, относительно которой он образует банахово пространство, такой что

$$\|ATB\|_{\mathfrak{I}} \le \|A\| \cdot \|T\|_{\mathfrak{I}} \cdot \|B\|, \quad T \in \mathfrak{I},\ A, B \in \mathcal{B}(H),$$

и $\|T\|_{\mathfrak{I}} = \|T\|$ для операторов T ранга 1.

Пусть Φ – норма на линеале финитных последовательностей. Тогда Φ называется симметрической нормирующей функцией, если

- $\Phi(x) = \Phi(P(|x|))$ для любой финитной последовательности $x = \{x_j\}$ и любой перестановки P последовательности $|x| := \{|x_j|\}$;
- $\Phi(1, 0, 0, \ldots) = 1$.

Напомним, что для любого ограниченного оператора A через $s_n(A)$ обозначается его n-ое сингулярное число.

Говорят, что симметрично нормированный идеал $\mathfrak{I}$ *порожден симметрической нормирующей функцией* Φ, если для любого оператора $A \in \mathfrak{I}$

$$\|A\|_{\mathfrak{I}} = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A), 0, \ldots) \tag{15.5}$$

Для данной симметрической нормирующей функции Φ через $\mathfrak{S}_\Phi$ обозначается идеал всех компактных операторов A, для которых конечен предел в (15.5), с заданной этим равенством нормой.

Так как норма оператора в симметрично нормированном идеале зависит только от его сингулярных чисел, будет удобно использовать следующее обозначение. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел, $\mathfrak{I}$ – операторный идеал. Тогда запись $\{a_n\} \in \mathfrak{I}$ означает, что идеалу $\mathfrak{I}$ принадлежит оператор a, заданный формулой $au = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle u, e_n\rangle e_n$, где $\{e_n\}$ – произвольный ортонормированный базис в H. Такое обозначение корректно, поскольку принадлежность оператора a идеалу $\mathfrak{I}$ очевидным образом не зависит от выбора базиса $\{e_n\}$.

Пусть A – компактный оператор. Определим последовательности

$$\mathcal{T}_n(A) := \big(\underbrace{s_1(A), s_1(A), \ldots, s_1(A)}_{n\ \text{раз}}, \underbrace{s_2(A), \ldots, s_2(A)}_{n\ \text{раз}}, \ldots\big); \tag{15.6}$$

$$\mathcal{T}_{1/n}(A) := \Big(\frac{s_1(A)+\ldots s_n(A)}{n}, \frac{s_{n+1}(A)+\ldots s_{2n}(A)}{n}, \ldots, \frac{s_{kn+1}(A)+\ldots s_{(k+1)n}(A)}{n}, \ldots\Big). \qquad (15.7)$$

Ясно, что если $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{S}^\infty$ – симметрично нормированный идеал, и оператор $A \in \mathfrak{I}$, то последовательности $\mathcal{T}_n(A)$ и $\mathcal{T}_{1/n}(A)$ принадлежат идеалу $\mathfrak{I}$ в описанном выше смысле.

Теорема 13. *Пусть* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ *– гамильтониан на интервале* $[0, L)$*, такой что функция* $h_1 \in L^1(0, L)$*, но имеет некомпактный носитель*[1]*, и пусть оператор* $A_{[\mathcal{H}]}$ *имеет чисто дискретный спектр. Пусть* $\mathfrak{I}$ *– собственный симметрично-нормированный идеал компактных операторов, порожденный симметрической нормирующей функцией, и такой что*

$$\sup_{A\in\mathfrak{I}\colon \|A\|_{\mathfrak{I}}=1} \|\mathcal{T}_n(A)\|_{\mathfrak{I}} = o(n), \quad \sup_{A\in\mathfrak{I}\colon \|A\|_{\mathfrak{I}}=1} \big\|\mathcal{T}_{1/n}(A)\big\|_{\mathfrak{I}} = o(1).$$

Тогда

$$\{\lambda_n^{-1}\} \in \mathfrak{I} \quad \Leftrightarrow \quad \{\omega_n\} \in \mathfrak{I}.$$

Следующие две теоремы представляют собой удобные в применении следствия приведенного общего результата для популярных специальных классов идеалов – типа Орлича и типа Лоренца, соответственно. Асимптотическое поведение последовательности $(\lambda_n^{-1})_{n=1}^\infty$ в этих классах характеризуется с помощью подходящих измеряющих функций.

В качестве измеряющих функций будем использовать непрерывно дифференцируемые функции $\mathrm{g}\colon [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$, такие что

- Существует конечный и отличный от нуля предел $\rho_{\mathrm{g}} := \lim_{r\to\infty} \frac{\log \mathrm{g}(r)}{\log r}$;
- $\mathrm{g}'(r) > 0$ при $r > 0$, и $\frac{r\mathrm{g}'(r)}{\mathrm{g}(r)} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \rho_{\mathrm{g}}$.

Функции, удовлетворяющие этим условиям, естественно называть характеристиками роста. Число ρ_{g} называют порядком функции g. Измерители указанного класса популярны в теории целых функций [35], где функция вида $\frac{\log \mathrm{g}(r)}{\log r}$, где g – характеристика роста, называется уточненным порядком. Характеристики роста образуют шкалу сравнения, более тонкую и общую, нежели степени r^ρ. Впервые шкалы сравнения, отличные от степеней, по-видимому, были использованы в работе Е. Линделёфа [73], где рост целых функций сравнивался с функциями вида

$$\mathrm{g}(r) = r^\rho \cdot \big(\log r\big)^{\beta_1} \cdot \big(\log\log r\big)^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot \big(\underbrace{\log\cdots\log}_{m \text{ раз}} r\big)^{\beta_m} \quad \text{при большом } r.$$

Подчеркнем еще раз, что наши основные результаты новы и в случае шкалы степеней r^ρ. В следующей теореме ω_n задается формулой (15.4).

[1]В точности это означает, что $\{x\colon h_1(x) \neq 0\} \cap (c, L) \neq \varnothing$ для любого $c \in (0, L)$.

Теорема 14. *Пусть* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ *– гамильтониан на интервале* $[0, L)$, *такой что функция* $h_1 \in L^1(0, L)$, *но имеет некомпактный носитель, и пусть оператор* $A_{[\mathcal{H}]}$ *имеет чисто дискретный спектр. Пусть* g *– характеристика роста порядка* $\rho_{\mathrm{g}} > 1$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(|\lambda_n|)} < \infty \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(\omega_n^{-1})} < \infty \;\Leftrightarrow$$
$$\int_a^b \left[\mathrm{g}\left(\left(\int_t^b h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_a^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \right]^{-1} \cdot \frac{h_1(t)\,\mathrm{d}t}{\int_t^b h_1(s)\,\mathrm{d}s} < \infty.$$

В частности, эта теорема отвечает на вопрос, когда $(\lambda_n^{-1})_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ при $p > 1$. Ранее теорема 14 в случае $h_3 \neq 0$ была известна лишь при $p = 2$ [74, теорема 2.4].

Замечание 15.5. Так же, как и в теореме 12, предположение $h_1 \in L^1(0, L)$ в этой и следующей теореме 15 имеет нормировочный характер и не снижает общности. Предположение о некомпактности носителя h_1 также не снижает общности, поскольку, согласно формуле Крейна–де Бранжа (6.9), если функция h_1 обнуляется вне интервала (c, L), $c < L$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n^+} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\lambda_n^-} = \frac{1}{\pi} \int_0^c \sqrt{\det H(s)}\,\mathrm{d}s < \infty. \tag{15.8}$$

Здесь $\lambda_n^{\pm}$ – последовательности положительных/отрицательных собственных значений, упорядоченные по возрастанию абсолютной величины. В частности, в этом случае ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(|\lambda_n|)}$ сходятся для любой характеристики роста с показателем $\rho_{\mathrm{g}} > 1$.

Замечание 15.6. Критерий теоремы теоремы 14 изначально устанавливается в дискретной форме, заданной первой эквивалентностью. Непрерывная форма условия, содержащаяся во второй эквивалентности, получается из первой формальной заменой сумм на интегралы, подобной интегральному признаку сходимости рядов в элементарном анализе, и последующей формальной заменой переменной.

Отметим еще, что метод доказательства теоремы 14 совершенно отличен от методов работы [74], которые пригодны лишь для $p = 2$, и дает новые доказательства результатов о роде спектра нагруженной струны из [19, теоремы 1,2].

В теореме 14 поведение спектра $\sigma(A_{[\mathcal{H}]})$ на бесконечности характеризовалось условиями на рост в среднем. В следующей теореме вместо условий на рост в среднем используются "поточечные" условия. Возникающий при этом критерий имеет столь же явный характер, но будет несколько сложнее в применении, так как требует проверки основного условия не для самой последовательности ω_n, а для ее неубывающей перестановки. Поскольку речь идет о необходимом и достаточном условии, это затруднение вызвано существом дела.

Теорема 15. *Пусть* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ *– гамильтониан на интервале* $[0, L)$, *такой что функция* $h_1 \in L^1(0, L)$, *но имеет некомпактный носитель, и пусть оператор*

$A_{[\mathcal{H}]}$ имеет чисто дискретный спектр. Пусть g – характеристика роста порядка $\rho_{\mathrm{g}} > 1$. Пусть $(\omega_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ – неубывающая перестановка последовательности (15.4). *Тогда*

- $\displaystyle \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}(|\lambda_n|)} < \infty \;\Leftrightarrow\; \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}((\omega_n^*)^{-1})} < \infty,$
- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}(|\lambda_n|)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}((\omega_n^*)^{-1})} = 0.$

15.2 Структура доказательств теорем 12, 13, 14, 15

Опишем пошагово доказательства основных теорем.

① Вопрос об асимптотическом распределении собственных значений сводится к операторно–теоретическим свойствам резольвенты. Это делается стандартным образом: дискретность спектра оператора $\sigma(A_{[\mathcal{H}]})$ эквивалентна компактности его резольвенты; суммируемость последовательности $1/\rho_{\mathrm{g}}(\lambda_n)$ эквивалентна принадлежности резольвенты соответствующему идеалу Орлича; поточечные оценки последовательности $n/\mathrm{g}(\lambda_n)$ эквивалентны принадлежности резольвенты соответствующему идеалу Лоренца.

② Простые (и известные в фольклоре) соображения теории возмущений, приведенные в предложении 15.13, показывают, что собственные значения канонической системы с гамильтонианом $\operatorname{diag}\mathcal{H}$ оцениваются сверху собственными значениями исходной системы: $|\lambda_n(A_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]})| \le 2|\lambda_n(A_{[\mathcal{H}]})|$. Это означает, в частности, что если $C_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}$, то $C_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}$ для любого операторного идеала $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{S}^\infty$. Удивительным образом оказывается, что для широких классов идеалов верно и обратное, и, таким образом, принадлежность резольвенты идеалу не зависит от внедиагонального элемента h_3 гамильтониана $\mathcal{H}$. Второй шаг состоит в доказательстве теоремы о независимости (диагональном преобладании). Согласно этой теореме, принадлежность резольвенты $\big(A_{[\mathcal{H}]} - z\big)^{-1}$ симметрично–нормированном идеалу $\mathfrak{S}$ при данных h_1 и h_2 не зависит от функции h_3, если идеал $\mathfrak{S}$ обладает слабым свойством Мацаева, которое абстрагирует теорему Мацаева о вещественных частях вольтерровских операторов. Далее проверяется, что идеалы из доказываемых теорем обладают слабым свойством Мацаева, и таким образом, задача сводится к частному случаю диагональных гамильтонианов. В случае идеала $\mathfrak{S}^\infty$ (т.е. теоремы 12) для проверки слабого свойства Мацаева используется обсуждаемый ниже метод Александрова–Пеллера–Янсона–Рохберга.

③ Для диагональных гамильтонианов свойство Мацаева сводит вопрос к задаче о характеризации в классах $\mathfrak{S}$ вольтерровских интегральных операторов вида

$$f \mapsto \varphi \int_0^x \psi f;\; \varphi \in L^2(0,L).$$

Такая характеризация получается небольшим обобщением метода диадической дискретизации, предложенного в работе [75]. Метод Александрова–Пеллера–Янсона–Рохберга дает характеризацию в дискретной форме (см. утверждение теоремы 15). В случае идеалов Орлича и идеала всех компактных операторов эта характеризация может быть преобразована в непрерывную форму. Для идеала всех компактных операторов соответствующее рассуждение элементарно, а для произвольного идеала Орлича мы отсылаем к нашей работе [VIII]. Здесь заметим лишь, что, поскольку функции h_1 и h_2 не предполагаются гладкими и могут обращаться в нуль (по отдельности) на целых интервалах, упомянутое рассуждение в случае классов Орлича не сводится к стандартной теореме о замене переменной.

15.3 Обсуждение результатов

Основное ограничение в теоремах 14, 15 – условие на порядок роста $\rho_{\mathrm{g}} > 1$. Оно вызвано существом дела в том смысле, что при $\rho_{\mathrm{g}} < 1$ порядок роста спектра оператора $A_{[\mathcal{H}]}$, $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$, вообще говоря, зависит от внедигонального члена h_3. В приводимом ниже примере 15.7 оператор $A_{[\mathcal{H}]}$ имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}$, такой что $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} \in (0,\infty)$ для некоторого $\rho < 1$, причем $\det \mathcal{H}(x) = 0$ п. в., но функция $h_1 h_2$ нигде не обращается в нуль. Если бы теорема, аналогичная 14, была справедлива при $\rho_{\mathrm{g}} < 1$, то последовательность $\{1/\tilde{\lambda}_n \colon \tilde{\lambda}_n \in \sigma(A_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]})\}$ имела бы порядок сходимости ρ, а это противоречит формуле Крейна–де Бранжа (15.8). Действительно, согласно этой формуле, спектр $\{\mu_n\}$ канонической системы $(\operatorname{diag}\mathcal{H}, b)$, $b > 0$, удовлетворяет $\mu_n \sim Cn$ с константой $C \neq 0$, поскольку $\det \operatorname{diag}\mathcal{H}(x)$ не обращается в нуль. Из элементарной теории возмущений ранга 1 теперь следует, что каждый промежуток (μ_j, μ_{j+1}) содержит точку спектра $\sigma(A_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]})$, а это противоречие[2].

Место, в котором используется при доказательстве условие $\rho_{\mathrm{g}} > 1$, – применение слабого свойства Мацаева (шаг 2 в схеме вверху). Классы Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ при $p > 1$ обладают этим свойством, а при $p \le 1$ – нет.

Пограничный характер случая $p = 1$ можно пояснить и более абстрактным образом. Порядки, меньшие 1, зависят от поведения гамильтониана на всем интервале в том смысле, что, например, возможна ситуация, когда порядок сходимости для спектра $\sigma(A_{[\mathcal{H}]})$ равен 1, но при любом $c \in (0, L)$ спектр хвоста $\mathcal{H}|_{[c,L)}$ имеет нулевой показатель сходимости (более того, можно сделать так, чтобы $\mathcal{H}|_{[c,L)}$ был оператором конечного ранга). Порядки, большие 1, зависят только от поведения гамильтониана в точке $x = L$ в том смысле, что для любого $\rho > 1$ оператор $A_{[\mathcal{H}]}$ имеет дискретный спектр с показателем сходимости ρ тогда, и только тогда, когда для любого $c \in (0, L)$ спектр оператора $A_{[\mathcal{H}|_{[c,L)}]}$ также дискретен и имеет показатель сходимости ρ.

[2]Далее будет показано, что для гамильтониана из примера 15.7 показатель сходимости последовательности $1/\tilde{\lambda}_n$ равен 1, а $\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} > 0$, поэтому противоречие можно получить и не обращаясь к абстрактной теории возмущений ранга 1.

Перейдем к изложению упомянутого примера, иллюстрирующего утверждения теорем 14, 15 и границы их применимости. Гамильтонианы в этом примере происходят из задачи о струнах. Здесь мы приведем лишь формулировки, доказательства отложим до раздела 5.3.

Пример 15.7. Задаваясь числами $\alpha > 1$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, определим гамильтониан на промежутке $[0,1)$ формулами:

$$\mathcal{H}_{\alpha;\alpha_1,\alpha_2}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h_2(t) \end{pmatrix},$$

$$h_2(t) := \Big(\frac{1}{1-t}\Big)^{\alpha}\Big(1+\log\frac{1}{1-t}\Big)^{-\alpha_1}\Big(1+\log^{+}\log\frac{1}{1-t}\Big)^{-\alpha_2}, \quad t \in [0,1). \tag{15.9}$$

Поскольку $\alpha > 1$, функция $h_2 \notin L^1(0,L)$.

Оказывается, что при $\alpha > 2$ точка 0 принадлежит существенному спектру оператора $A_{[\mathcal{H}_{\alpha;\alpha_1,\alpha_2}]}$, при $\alpha \in (1,2)$ спектр оператора дискретен и имеет показатель сходимости 1, но $\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} > 0$, в частности, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|} = \infty$.

При критическом значении $\alpha = 2$ оператор $A_{[\mathcal{H}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]}$ имеет чисто дискретный спектр, если, и только если,

$$(\alpha_1 > 0) \vee (\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0).$$

Для указанных значений параметров показатель сходимости ρ_{α_1,α_2} последовательности $\{1/\lambda\colon \lambda \in \sigma(A_{[\mathcal{H}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]})\}$ задается формулой:

$$\rho_{\alpha_1,\alpha_2} = \begin{cases} \infty\,, & \alpha_1 = 0, \\ \frac{2}{\alpha_1}\,, & \alpha_1 \in (0,2), \\ 1\,, & \alpha_1 \geq 2. \end{cases} \tag{15.10}$$

Наконец, при $\alpha_1 \in (0,2)$ справедлива оценка:

$$0 < \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|^{\frac{2}{\alpha_1}}(\log|\lambda_n|)^{-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}} < \infty.$$

Задаваясь числами $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, определим гамильтониан на промежутке $[0,1)$, диагональная часть которого совпадает с $A_{[\mathcal{H}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]}$, формулой:

$$\mathring{\mathcal{H}}_{\alpha_1,\alpha_2} := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{h_2(t)} \\ -\sqrt{h_2(t)} & h_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1),$$

где функция h_2 определена формулой (15.9) с $\alpha = 2$. Оператор $A_{[\mathring{\mathcal{H}}_{\alpha_1,\alpha_2}]}$ имеет чисто дискретный спектр, причем соответствующий показатель сходимости задается формулой:

$$\mathring{\rho}_{\alpha_1,\alpha_2} = \begin{cases} \frac{2}{\alpha_1}\,, & \alpha_1 \in (0,4), \\ \frac{1}{2}\,, & \alpha_1 \geq 4. \end{cases} \tag{15.11}$$

Сравнивая показатели сходимости(15.10) и (15.11), убеждаемся, что теорема о независимости из ② верна для рассматриваемого гамильтониана, если, и только если, показатель сходимости ≥ 1.

15.4 Теорема о диагональном преобладании

Пусть X – гильбертово пространство. Напомним, что под операторными идеалами мы понимаем двусторонние идеалы алгебры ограниченных операторов в пространстве X. Любой собственный операторный идеал $\mathfrak{I}$ содержит идеал операторов конечного ранга и, если пространство X сепарабельно, содержится в идеале $\mathfrak{S}_\infty$ всех компактных операторов. Операторные идеалы инвариантны относительно сопряжения операторов.

Резольвенты дифференциальных операторов, по крайней мере, формально могут быть представлены как вещественные части операторов вольтерровского типа с ядром специального вида. Опишем эти операторы. Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$. Для произвольных комплекснозначных функций κ и φ на промежутке (a,b), таких что $\kappa \in L^2(a,b)$, а $\varphi \in L^2(a,c)$ при каждом $c \in (a,b)$, определим (замкнутый, и, возможно, неограниченный) интегральный оператор T в пространстве $L^2(a,b)$ формулой:

$$(Tf)(t) := \varphi(t)\int_t^b f(s)\overline{\kappa(s)}\,\mathrm{d}s, \quad t \in (a,b) \tag{15.12}$$

на естественной области определения

$$\operatorname{dom} T := \Big\{ f \in L^2(a,b) \colon \Big(t \mapsto \varphi(t)\int_t^b f(s)\overline{\kappa(s)}\,\mathrm{d}s\Big) \in L^2(a,b)\Big\}.$$

Ясно, что $\operatorname{dom} T$ и $\operatorname{dom} T^*$ содержат плотный линеал векторов с компактным носителем. Таким образом, оператор $\frac{1}{2}(T + T^*)$ определен на плотном линеале и симметричен на нем. Будем обозначать его замыкание через $\operatorname{Re} T$.

Опишем ключевое для дальнейшего свойство операторных идеалов.

Определение 15.8. *Пусть $\mathfrak{I}$ – операторный идеал. Будем говорить, что $\mathfrak{I}$ обладает слабым свойством Мацаева, если справедливо следующее утверждение.*

- *Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$, и пусть $\kappa \in L^2(a,b)$, $\varphi \in L^2(a,c)$ при каждом $c \in (a,b)$, и пусть T – интегральный оператор вида* (15.12). *Тогда $T \in \mathfrak{I}$, если $\operatorname{Re} T \in \mathfrak{I}$.*

Идеал $\mathfrak{S}^p$ обладает этим свойством при $1 < p \le \infty$(это будет показано ниже в следствии 15.20) и не обладает им при $p = 1$, примером чему служит классический вольтерровский оператор интегрирования ($(a,b) = (0,1)$, $\kappa = \varphi \equiv 1$).

Напомним некоторые известные факты об операторе $A_{[\mathcal{H}]}$. Первая лемма имеет фольклорный характер. В неявном виде она содержится в статье [74].

Лемма 15.9. *Пусть $h_1 \in L^1(0,L)$. Тогда $\ker A_{[\mathcal{H}]} = \{0\}$, причем обратный оператор $B_{[\mathcal{H}]} := A_{[\mathcal{H}]}^{-1}$ действует по формуле:*

$$(B_{[\mathcal{H}]}f)(t) = -\lim_{c \nearrow L}\int_0^c \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{s<t}(t,s) \\ \mathbb{1}_{s>t}(t,s) & 0 \end{pmatrix} H(s)f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{15.13}$$

на своей естественной области определения

$$\operatorname{dom} B_{[\mathcal{H}]} = \left\{ f \in H \colon \begin{array}{l} \textit{существует } \lim_{c \nearrow L} (0,1) \int_a^c J\mathcal{H}(s) f(s)\, \mathrm{d}s, \\ \textit{правая часть } (15.13) \textit{ принадлежит } L^2(H) \end{array} \right\}. \tag{15.14}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{D}$ линеал в правой части (15.14). Для любого вектора $f \in H$, числа $t \in [0, L)$ и $c > t$ будем иметь:

$$-\int_a^c \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{s<t}(t,s) \\ \mathbb{1}_{s>t}(t,s) & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H}(s) f(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^t J\mathcal{H}(s) f(s)\, \mathrm{d}s - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \int_0^c J\mathcal{H}(s) f(s)\, \mathrm{d}s.$$

Таким образом, предел в правой части (15.13) существует и принадлежит пространству H тогда, и только тогда, когда вектор $f \in \mathcal{D}$. Из этой же формулы ясно, что для любого $f \in \mathcal{D}$ функция

$$g(x) := -\lim_{c \nearrow L} \int_0^c \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{s<t}(t,s) \\ \mathbb{1}_{s>t}(t,s) & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H}(s) f(s)\, \mathrm{d}s$$

абсолютно непрерывна, $g_+(0) = 0$, и

$$g'(t) = J\mathcal{H}(t) f(t), \quad \text{п.в. } t \in [0, L).$$

Следовательно, $f \in \operatorname{dom} B_{[\mathcal{H}]}$, и $B_{[\mathcal{H}]} f = g$.

Остается показать, что $\operatorname{dom} B_{[\mathcal{H}]} \subset \mathcal{D}$. Пусть $f \in \operatorname{dom} B_{[\mathcal{H}]}$. Тогда элемент $B_{[\mathcal{H}]} f$ имеет абсолютно непрерывного представителя g, такого что при п. в. $t \in [0, L)$

$$g'(t) = J\mathcal{H}(t) f(t),$$

и, следовательно,

$$g(t) = \int_0^t J\mathcal{H}(s) f(s)\, \mathrm{d}s + \mathrm{const}.$$

Имеем:

$$\int_0^N \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{H}(t)(A_{[\mathcal{H}]} g)(t) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \mathrm{d}t = \int_0^N \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -Jg'(t) \right\rangle_{\mathbb{C}^2} \mathrm{d}t = g_-(N) - g_-(0)$$

Поскольку вектор $\binom{1}{0}$ принадлежит пространству H, левая часть при $N \to L$ сходится к скалярному произведению $\left\langle \binom{1}{0}, A_{[\mathcal{H}]} g \right\rangle_H$. Следовательно, при $N \to L$ сходится и $g_-(N)$, т. е. функция $(0,1) \int_a^c J\mathcal{H}(s) f(s)\, \mathrm{d}s$ имеет предел при $c \nearrow L$. Значит, $f \in \mathcal{D}$, что и требовалось. ❑

Заметим, что для доказательства существования предела в приведенном рассуждении можно было бы воспользоваться тем, что вектор $\binom{1}{0}$ принадлежит области определения, а, значит, и ядру, максимального оператора, и применить [66, теорема 3.6].

Теперь можно сформулировать основной результат этого раздела – теорему о сравнении операторов, порожденных данным гамильтонианом $\mathcal{H}$ и его диагональной частью.

Определение 15.10. *Пусть* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ *– гамильтониан. Положим:*

$$\operatorname{diag}\mathcal{H} := \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}.$$

В следующей теореме $\mathfrak{I}$ – произвольный операторный идеал.

Теорема 15.11 (Теорема о диагональном преобладании)**.** *Пусть* $(\mathcal{H}, L)$*,* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$*, – каноническая система, и пусть* $h_1 \in L^1(0, L)$*. Тогда если* $B_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}$*, то* $B_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}$*, а если идеал* $\mathfrak{I}$ *обладает слабым свойством Мацаева, то справедливо и обратное.*

Операторы $B_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]}$ и $B_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}$ действуют в весовых пространствах двухкомпонентных функций. Для доказательства теоремы нам будет удобно избавиться от веса, "пересадив" операторы $B_{[\mathcal{H}]}$ в пространство $L^2((0, L); \mathbb{C}^2)$. Введем отображение

$$\Phi\colon f(t) \mapsto \mathcal{H}(t)^{\frac{1}{2}} f(t),$$

которое определяет изоморфизм гильбертова пространства H канонической системы $(\mathcal{H}, L)$ на некоторое замкнутое подпространство в $L^2((0, L); \mathbb{C}^2)$.

Пусть $C_{[\mathcal{H}]}$ – замкнутый (возможно, неограниченный) интегральный оператор в пространстве $L^2((0, L); \mathbb{C}^2)$, заданный ядром

$$C_{[\mathcal{H}]}: \quad -\mathcal{H}(t)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{s<t}(t, s) \\ \mathbb{1}_{s>t}(t, s) & 0 \end{pmatrix} \mathcal{H}(s)^{\frac{1}{2}} \tag{15.15}$$

на своей естественной максимальной области.

Согласно следующей лемме, оператор $B_{[\mathcal{H}]}$ унитарно эквивалентен части оператора $C_{[\mathcal{H}]}$, см. [74, доказательство леммы 2.2].

Лемма 15.12. *Пусть* $h_1 \in L^1(0, L)$*. Обозначим через* P *ортогональный проектор на подпространство* $\operatorname{ran}\Phi$ *в пространстве* $L^2((0, L); \mathbb{C}^2)$*. Тогда*

$$B_{[\mathcal{H}]} = \Phi^{-1} P C_{[\mathcal{H}]} \Phi \quad \textit{и} \quad C_{[\mathcal{H}]} = \Phi B_{[\mathcal{H}]} \Phi^{-1} P.$$

❑

Из этой леммы вытекает, что операторы $B_{[\mathcal{H}]}$ и $C_{[\mathcal{H}]}$ ограничены или неограничены одновременно, причем, если они ограничены, их сингулярные числа совпадают. Таким образом, для любого операторного идеала $\mathfrak{I}$ будем иметь:

$$B_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I} \;\Leftrightarrow\; C_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}.$$

Простая часть сравнения операторов $B_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]}$ и $B_{[\mathcal{H}]}$ содержится в следующем предложении.

Предложение 15.13. *Пусть оператор $C_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]}$ ограничен. Тогда оператор $C_{[\mathcal{H}]}$ тоже ограничен, и существует ограниченный оператор U, $\|U\| \le \sqrt{2}$, в пространстве $L^2((0,L);\mathbb{C}^2)$, такой что*

$$C_{[\mathcal{H}]} = UC_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]}U^*.$$

Доказательство. Заметим сначала, что для любой неотрицательной 2×2 матрицы G справедливо неравенство $G \le 2\operatorname{diag} G$, поскольку матрица $2\operatorname{diag} G - G$ отличается от G лишь знаком внедиагональных членов и поэтому имеет те же определитель и след, что и G. Следовательно, существует матрица T, $\|T\| \le \sqrt{2}$, такая что

$$\sqrt{G} = T\operatorname{diag}\sqrt{G} = (\operatorname{diag}\sqrt{G})T.$$

Применяя это к матрице $G = \mathcal{H}(x)$, получим, что при п. в. $x \in \mathbb{R}$ существует матрица $U(x)$, $\|U(x)\| \le \sqrt{2}$, такая что

$$\sqrt{\mathcal{H}}(x) = U(x)\sqrt{\operatorname{diag}\mathcal{H}(x)} = \sqrt{\operatorname{diag}\mathcal{H}(x)}U^*(x).$$

Отсюда немедленно вытекает (см. (15.15)), требуемое утверждение, где через U обозначен соответствующий оператор умножения в пространстве $L^2((0,L);\mathbb{C}^2)$: $(Uf)(x) = U(x)f(x)$. ❑

Замечание 15.14. Заметим, что утверждение предложения существенно сильнее, чем просто импликация $C_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I} \Rightarrow C_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}$, поскольку влечет за собой оценку на собственные значения вида

$$|\lambda_n(A_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]})| \le 2|\lambda_n(A_{[\mathcal{H}]})|.$$

Сосчитаем оператор $C_{[\mathcal{H}]}$, используя отображение Φ.

Лемма 15.15. *Пусть $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2\end{pmatrix}$ – гамильтониан на промежутке $(0,L)$, причем $h_1 \in L^1(0,L)$. Положим:*

$$\mathcal{H}(t)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} v_1(t) & v_3(t) \\ v_3(t) & v_2(t)\end{pmatrix}, \quad t \in [a,b),$$

и обозначим через T_{ij}, $(i,j) \in \{2,3\}\times\{1,3\}$, интегральные операторы в пространстве $L^2(0,L)$, заданные интегральными ядрами

$$T_{ij}: \quad \mathbb{1}_{t<s}(t,s)v_i(t)v_j(s).$$

Тогда

$$C_{[H]}f = -\begin{pmatrix} T_{31}+T_{31}^* & T_{21}^*+T_{33} \\ T_{21}+T_{33}^* & T_{23}+T_{23}^*\end{pmatrix} f, \quad f \in \operatorname{dom} C_{[H]}.$$

Доказательство. Выполняя матричные умножения в интегральном ядре (15.15) оператора $C_{[\mathcal{H}]}$, получим:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_{t<s}(t,s)v_3(t)v_1(s) & \mathbb{1}_{t<s}(t,s)v_3(t)v_3(s) \\ \qquad +\mathbb{1}_{t>s}(t,s)v_1(t)v_3(s) & \qquad +\mathbb{1}_{t>s}(t,s)v_1(t)v_2(s) \\ \mathbb{1}_{t<s}(t,s)v_2(t)v_1(s) & \mathbb{1}_{t<s}(t,s)v_2(t)v_3(s) \\ \qquad +\mathbb{1}_{t>s}(t,s)v_3(t)v_3(s) & \qquad +\mathbb{1}_{t>s}(t,s)v_3(t)v_2(s) \end{pmatrix}.$$

Поскольку сопряженные операторы T_{ij}^* суть интегральные операторы, заданные ядрами

$$T_{ij}^*: \quad \mathbb{1}_{t>s}(t,s)v_j(t)v_i(s),$$

требуемая формула доказана. ❑

Следствие 15.16. *Пусть* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix}$ *– гамильтониан на промежутке* $[0, L)$, *и пусть* S_{21} *– интегральный оператор в* $L^2(0, L)$ *с ядром*

$$S_{21}: \quad \mathbb{1}_{t<s}(t,s)\sqrt{h_2(t)}\sqrt{h_1(s)}$$

Тогда

$$B_{[H]} \in \mathfrak{I} \ \Leftrightarrow \ S_{21} \in \mathfrak{I}$$

для любого операторного идеала $\mathfrak{I}$.

Это утверждение немедленно вытекает из леммы 15.15, поскольку в условиях следствия

$$C_{[\mathcal{H}]} = -\begin{pmatrix} 0 & S_{21}^* \\ S_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.16}$$

Для данной функции $\psi \in L^\infty(0, L)$ будем обозначать через M_ψ оператор умножения на эту функцию в пространстве $L^2(0, L)$:

$$(M_\psi f)(t) := \psi(t)f(t), \quad \|M_\psi\| = \|\psi\|_\infty.$$

Доказательство теоремы 15.11. Первое утверждение теоремы ($B_{[\operatorname{diag}\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I} \Rightarrow B_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}$) непосредственно очевидно из предложения 15.13, см. замечание 15.14. Установим второе утверждение. Заметим сначала, что

$$h_1 = v_1^2 + v_3^2,$$

$$h_2 = v_2^2 + v_3^2,$$

и поэтому

$$\sqrt{h_1} \le v_1 + |v_3|, \sqrt{h_2} \le v_2 + |v_3|.$$

Из этих неравенств следует, что существуют ограниченные функции $\psi_{1,2}, \vartheta_{1,2} \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\vartheta_{1,2} := \psi_{1,2} \operatorname{sign} v_3$, такие что

$$\sqrt{h_1} = \psi_1 v_1 + \vartheta_1 v_3, \sqrt{h_2} = \psi_2 v_2 + \vartheta_2 v_3.$$

Подставляя эти выражения в определение оператора S_{21}, находим, что

$$S_{21}f = M_{\vartheta_2}T_{33}M_{\vartheta_1}f + M_{\vartheta_2}T_{31}M_{\psi_1}f + M_{\psi_2}T_{23}M_{\vartheta_1}f + M_{\psi_2}T_{21}M_{\psi_1}f$$

для любой функции $f \in L^2(0,L)$ с компактным носителем. Отсюда видно, что оператор $S_{21} \in \mathfrak{I}$, если операторы $T_{21}, T_{23}, T_{31}, T_{33} \in \mathfrak{I}$.

Пусть теперь идеал $\mathfrak{I}$ обладает слабым свойством Мацаева. Если $B_{[H]} \in \mathfrak{I}$, то

$$\operatorname{Re} T_{31}, \operatorname{Re} T_{23}, \operatorname{Re} T_{21} + \operatorname{Re} T_{33} \in \mathfrak{I}.$$

Заметим, что $\operatorname{Re} T_{33}$ – оператор ранга 1, так что он, очевидно, принадлежит идеалу $\mathfrak{I}$. Следовательно, и оператор $\operatorname{Re} T_{21} \in \mathfrak{I}$. Таким образом получаем, что все операторы T_{23}, T_{31}, T_{21}, T_{33} принадлежат идеалу $\mathfrak{I}$. Отсюда следует, что оператор $S_{21} \in \mathfrak{I}$, и, значит, $B_{[\operatorname{diag} H]} \in \mathfrak{I}$. ❑

15.5 Дискретность спектра

Для доказательства теоремы 12 нам понадобится небольшое обобщение теоремы 3.2 из [75]. Введем необходимые для его формулировки обозначения. Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$, и пусть κ, φ – комплекснозначные функций на промежутке (a,b), такие что $\kappa \in L^2(a,b)$, а $\varphi \in L^2(a,c)$ при каждом $c \in (a,b)$. Тогда функция $t \mapsto \|\mathbb{1}_{(t,b)}\kappa\|^2$ – невозрастающее отображение отрезка $[a,b]$ на отрезок $[0, \|\kappa\|^2]$. Определим возрастающую последовательность $c_0 \colon = a < c_1 < c_2 < \ldots < b$ равенством $\|\mathbb{1}_{(c_n,b)}\kappa\|^2 = 2^{-n}\|\kappa\|^2$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что это условие эквивалентно следующему:

$$\|\mathbb{1}_{(c_{n-1},c_n)}\kappa\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\kappa\|^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15.17}$$

Теперь положим:

$$J_n \colon = (c_{n-1}, c_n), \qquad \omega_n \colon = \|\mathbb{1}_{J_n}\kappa\| \cdot \|\mathbb{1}_{J_n}\varphi\|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15.18}$$

Используя (15.17), определение последовательности ω_n можно переписать в виде:

$$\omega_n = \|\kappa\| \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \Big(\int_{c_{n-1}}^{c_n} |\varphi(s)|^2 \, \mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 15.17. *Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$, и пусть κ, φ – комплекснозначные функций на промежутке (a,b), такие что $\kappa \in L^2(a,b)$, а $\varphi \in L^2(a,c)$ при каждом $c \in (a,b)$. Пусть T – интегральный оператор в пространстве $L^2(a,b)$ вида* (15.12).

Следующие утверждения эквивалентны:

(i) T *– компактный оператор;*

(ii) $\operatorname{Re} T$ *– компактный оператор;*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$.

Доказательство этой теоремы почти дословно совпадает с рассуждениями в работе [75], поэтому оно помещено в Приложение А.

Доказательство теоремы 12. Идеал $\mathfrak{S}^\infty$ обладает слабым свойством Мацаева в силу теоремы 15.17. Используя теорему о диагональном преобладании, а затем применяя следствие 15.16 и теорему 15.17 к гамильтониану $\operatorname{diag}\mathcal{H}$, получим:

$$B_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{S}_\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \omega_n = 0, \tag{15.19}$$

где последовательность ω_n построена по функциям $\kappa(t) := \sqrt{h_1(t)}$, $\varphi(t) := \sqrt{h_2(t)}$. Остается проверить, что

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\nearrow b} \Big(\int_t^b h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_a^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \Big) = 0. \tag{15.20}$$

Для этого достаточно заметить, что последовательность неотрицательных чисел $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ стремится к 0, если, и только если, стремится к 0 последовательность $\big(2^{-n}\sum_{k=1}^n 2^k\alpha_k\big)_{n=1}^\infty$. Применяя это утверждение к последовательности

$$\alpha_n \colon = 2^{-n}\int_{c_{n-1}}^{c_n} |\varphi(s)|^2\,\mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N},$$

убеждаемся в справедливости (15.20). ❑

Замечание 15.18. Ввиду соответствия между струнами Крейна и диагональными каноническими системами, см. [12], теорема 12 дает новое доказательство классического критерия Крейна–Каца [18, теоремы 4,5] дискретности спектра струны.

15.6 Доказательства теорем 13, 14, 15.

Напомним, что оператор T называется вольтерровым, если он компактен, и $\sigma(T) = \{0\}$.

Определение 15.19. *Пусть $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{S}_\infty$ – симметрично нормированный идеал. Будем говорить, что идеал $\mathfrak{I}$ обладает (сильным) свойством Мацаева, если справедливо следующее утверждение.*

- *Для любого вольтеррова оператора T, если $\operatorname{Re} T \in \mathfrak{I}$, то $T \in \mathfrak{I}$.*

Заметим, что интегральный оператор вида (15.12) не имеет ненулевых собственных значений. Вследствие этого в силу теоремы 15.17, получим следующее утверждение, которое и мотивирует термин “слабое свойство Мацаева”.

Следствие 15.20. *Если симметрично нормированный идеал $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{S}_\infty$ обладает сильным свойством Мацаева, то он обладает и слабым свойством Мацаева.*

Стало быть, теорема о диагональном преобладании справедлива в любом симметрично нормированном идеале компактных операторов, обладающем свойством Мацаева. Описание всех симметрично нормированных идеалов, порожденных симметрической нормирующей функцией и обладающих свойством Мацаева, было дано в работах [76–78]. Приведем это описание. Пусть A – компактный оператор. Напомним обозначения (15.6),(15.7)

$$\mathcal{T}_n(A) := \big(\underbrace{s_1(A), s_1(A), \dots, s_1(A)}_{n \text{ раз}}, \underbrace{s_2(A), \dots, s_2(A)}_{n \text{ раз}}, \dots\big),$$

$$\mathcal{T}_{1/n}(A) := \Big(\frac{s_1(A) + \dots s_n(A)}{n}, \frac{s_{n+1}(A) + \dots s_{2n}(A)}{n}, \dots\Big).$$

Пусть $\mathfrak{I}$ – симметрично нормированный идеал. Положим:

$$\|\mathcal{T}_n\| = \sup_{A\in\mathfrak{I}\colon \|A\|_{\mathfrak{I}}=1} \|\mathcal{T}_n\|_{\mathfrak{I}}\,, \ \left\|\mathcal{T}_{1/n}\right\| = \sup_{A\in\mathfrak{I}\colon \|A\|_{\mathfrak{I}}=1} \left\|\mathcal{T}_{1/n}\right\|_{\mathfrak{I}}.$$

Ясно, что

$$\|\mathcal{T}_n\| \le n, \ \left\|\mathcal{T}_{1/n}\right\| \le 1$$

для любого симметрично нормированного идеала $\mathfrak{I}$. Для идеалов $\mathfrak{S}^p$, $1 \le p < \infty$, нетрудно видеть, что $\|\mathcal{T}_n\| = n^{1/p}$, $\left\|\mathcal{T}_{1/n}\right\| = n^{-1/p}$.

Теорема Руссу–Митителa. *Пусть $\mathfrak{I}$ – операторный идеал, порожденный симметричной нормирующей функцией. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Идеал $\mathfrak{I}$ обладает свойством Мацаева;*

(ii)
$$\|\mathcal{T}_n\| = o(n), \ \left\|\mathcal{T}_{1/n}\right\| = o(1).$$

Заметим, что симметрично-нормированные идеалы, не порожденные симметрическими нормирующими функциями, существуют, но, по-видимому, не встречаются в приложениях. Неизвестно, могут ли такие идеалы обладать свойством Мацаева, но известно, что импликация (ii)⇒(i) справедлива для любого симметрично нормированного идеала.

При доказательстве теорем 13, 14 и 15 нам понадобится еще одно утверждение, представляющее собой вариант теоремы 3.3 из работы [75]. Будем использовать последовательности c_n и ω_n, определенные равенствами (15.17) и (15.18). Говорят [79], что симметрично нормированный идеал $\mathfrak{I}$ *обладает свойством мажорантности*, если для любых компактных операторов A и B справедлива импликация:

$$\Big(A \in \mathfrak{I} \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N}.\ \sum_{k=1}^{n} s_k(B) \le \sum_{k=1}^{n} s_k(A)\Big) \quad \Longrightarrow \quad B \in \mathfrak{I}$$

В другой терминологии идеалы, обладающие свойством мажорантности, называется вполне симметрическими. Все идеалы $\mathfrak{S}_\Phi$ и их сепарабельные части обладают свойством мажорантности, но существуют с. н. идеалы, порожденные симметрическими нормирующими функциями и не обладающие свойством мажорантности [79].

Теорема 15.21. *Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$, и пусть κ, φ – комплекснозначные функций на промежутке (a,b), такие что $\kappa \in L^2(a,b)$, а $\varphi \in L^2(a,c)$ при каждом $c \in (a,b)$. Пусть T – интегральный оператор в пространстве $L^2(a,b)$ вида* (15.12).

- *Если оператор $\operatorname{Re} T$ компактен, то существует константа $C > 0$, такая что при $k \ge 1$*
$$\sum_{j=1}^{k} \omega_k^* \le C \sum_{j=1}^{k} s_j(\operatorname{Re} T),\ \forall k \ge 1.$$
В частности, для любого симметрично нормированного идеала $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{S}_\infty$, обладающего свойством мажорантности, если оператор $\operatorname{Re} T \in \mathfrak{I}$, то $(\omega_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{I}$.
- *Если $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{S}_\infty$ – симметрично нормированный идеал, обладающий свойством Мацаева, и последовательность $(\omega_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{I}$, то $T \in \mathfrak{I}$.*

Доказательство этой теоремы вынесено в Приложение А.

Доказательство теоремы 13. Заметим, что любой с. н. идеал, порожденный симметрической нормирующей функцией, для которого выполнено условие $\|\mathcal{T}_n\| = o(n)$, обладает свойством мажорантности в силу [79, теорема 1]. Рассмотрим оператор T в пространстве $L^2(0,L)$ вида
$$T\colon f \mapsto \sqrt{h_1} \int_0^x \sqrt{h_2(t)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Из теоремы Руссу–Митителa и только что сделанного замечания следует, что любой идеал $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{S}^\infty$, удовлетворяющий условиям доказываемой теоремы, обладает свойствами Мацаева и мажорантности, и, значит, для него справедливы эквивалентности:
$$\{\omega_n\} \in \mathfrak{I} \xLeftrightarrow{\text{Теорема 15.21}} T \in \mathfrak{I} \xLeftrightarrow{\text{теорема о диагональном преобладании и Следствие 15.16}} A_{[\mathcal{H}]} \in \mathfrak{I}.$$
❑

Введем теперь симметрично нормированные идеалы типа Орлича, которые будут использоваться в доказательстве теоремы 14.

Пусть $M : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – непрерывная возрастающая выпуклая функция, такая что $M(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Предположим, что $\limsup_{t\searrow 0} \frac{M(2t)}{M(t)} < \infty$, и выполнено условие $M(1)=1$, имеющее нормировочный характер. Идеалом Орлича $\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}$ называется симметрично нормированный идеал

$$\mathfrak{S}_{[\![M]\!]} := \Big\{A \in \mathfrak{S}^\infty\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} M(s_n(A)) < \infty\Big\},$$
$$\|A\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}} := \inf\Big\{\beta > 0\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} M\Big(\frac{s_n(A)}{\beta}\Big) \le 1\Big\}.$$

Идеалы Орлича сепарабельны; например, операторы $\langle\cdot, e_j\rangle e_j$, где e_j – произвольный ортогональный базис в исходном гильбертовом пространстве, образуют безусловный базис в пространстве $\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}$. Соответствующие пространства последовательностей систематически изучены в [80] и [81, раздел 4.a].

Замечание 15.22. Задаваясь характеристикой роста g, имеющей порядок $\rho_{\mathrm{g}} > 1$, положим:

$$M(t) := \frac{1}{\mathrm{g}(\frac{1}{t})}.$$

Функция M, вообще говоря, не выпукла, но известно [82, теорема 1.3.3], [83, предложение 1.22], что существует эквивалентная характеристика роста g_1, т. е. такая что $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{g}_1(t)}{\mathrm{g}(t)} = 1$, для которой соответствующая функция M_1 удовлетворяет всем перечисленным при определении идеалов Орлича требованиям. Таким образом,

$$\mathfrak{S}_{[\![M_1]\!]} = \Big\{A \in \mathfrak{S}^\infty\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}\big(\frac{1}{s_n(A)}\big)} < \infty\Big\}, \tag{15.21}$$

и в этом смысле можно сказать, что функция g порождает идеал Орлича.

Преобразование условия на языке последовательностей, возникающего из теоремы 15.21, в непрерывную форму указано в следующей лемме.

Лемма 15.23. *В использованных выше обозначениях:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(\omega_n^{-1})} < \infty \ \Leftrightarrow\ \int_a^b \Big[\mathrm{g}\Big(\big(\|\mathbb{1}_{(a,t)}\varphi\|\|\mathbb{1}_{(t,b)}\kappa\|\big)^{-1}\Big)\Big]^{-1} \cdot \frac{|\kappa(t)|^2\,\mathrm{d}t}{\|\mathbb{1}_{(t,b)}\kappa\|^2} < \infty.$$

Доказательство этого факта в полном объеме, принадлежащее Х. Ворачеку, требует использования техники пространств Орлича и приведено в нашей работе [VIII]. Здесь мы ограничимся элементарным рассуждением для случая $\mathrm{g}(t) = t^p$ и, таким образом установим эквивалентность (0.8) из обзора основных результатов.

Доказательство. Пусть $\mathrm{g}(t) = t^p$, $p > 1$. Требуемая эквивалентность имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^p < \infty \ \Leftrightarrow\ \int_a^b \Big(\int_t^b \kappa(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}-1}\Big(\int_0^t \varphi(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}} \kappa^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{15.22}$$

Заметим, что в силу определения последовательности c_n, при $x \in (c_n, c_{n+1})$

$$\int_x^b \kappa(t)^2\ \mathrm{d}t \asymp \int_{c_n}^{c_{n+1}} \kappa(t)^2\ \mathrm{d}t (\asymp 2^{-n}) \tag{15.23}$$

в том смысле, что подразумеваемые константы не зависят от n и $x \in (c_n, c_{n+1})$. Имеем:

$$\omega_n^p = \Big(\int_{c_{n-1}}^{c_n} \kappa(t)^2\,\mathrm{d}t \int_{c_{n-1}}^{c_n} \varphi(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{p/2} = 2^{p/2}\Big(\int_{c_n}^{c_{n+1}} \kappa(t)^2\ \mathrm{d}t \int_{c_{n-1}}^{c_n} \varphi(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{p/2} =$$
$$2^{p/2}\int_{c_n}^{c_{n+1}} \kappa(\tau)^2 \Big[\Big(\int_{c_n}^{c_{n+1}} \kappa(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{\frac{p}{2}-1}\Big(\int_{c_{n-1}}^{c_n} \varphi(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{p/2}\Big]\mathrm{d}\tau \asymp$$
$$\int_{c_n}^{c_{n+1}} \kappa(\tau)^2 \Big(\int_\tau^b \kappa(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{\frac{p}{2}-1}\Big(\int_{c_{n-1}}^{c_n} \varphi(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{p/2}\mathrm{d}\tau \le$$
$$\int_{c_n}^{c_{n+1}} \kappa(\tau)^2 \Big(\int_\tau^b \kappa(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{\frac{p}{2}-1}\Big(\int_a^\tau \varphi(t)^2\ \mathrm{d}t\Big)^{p/2}\mathrm{d}\tau.$$

Суммируя по n, отсюда получим импликацию $\Leftarrow$ в (15.22). Для доказательства обратной импликации представим интеграл в правой части (15.22) как сумму по n интегралов от c_{n-1} до c_n, каждый из которых оценим следующим образом, учитывая (15.23):

$$\int_{c_{n-1}}^{c_n} \Big(\int_t^b \kappa(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}-1}\Big(\int_0^t \varphi(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}} \kappa^2(t)\,\mathrm{d}t \le$$
$$\Big(\int_0^{c_n} \varphi(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}} \int_{c_{n-1}}^{c_n} \Big(\int_t^b \kappa(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}-1} \kappa^2(t)\,\mathrm{d}t \asymp 2^{-n\frac{p}{2}}\Big(\int_0^{c_n} \varphi(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac{p}{2}} \le$$
$$2^{-n\frac{p}{2}}\Big(\sum_{j=1}^n \|\varphi\|_{L^2(c_{j-1},c_j)}\Big)^p = \Big(\sum_{j=1}^n 2^{\frac{j-n}{2}}\omega_j\Big)^p \le C\sum_{j=1}^n 2^{\frac{j-n}{2}}\omega_j^p.$$

Правая часть этого неравенства очевидным образом суммируема по n, коль скоро суммируема последовательность ω_j^p. Импликация $\Rightarrow$ в (15.22) доказана. ❑

Доказательство теоремы 14. Существование пределов, участвующих в формулировке теоремы 14, сохраняется при замене характеристики роста g на эквивалентную, поэтому без потери общности можно считать, что характеристика роста соответствует пространству Орлича $\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}$ в смысле равенства (15.21). Кроме того, можно считать, что $M(t) \asymp t^{\rho_{\mathrm{g}}}$ при $\mathrm{g} > 1$, поскольку норма элемента в классе $\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}$ зависит только от значений M на промежутке $[0, 1]$.

Покажем, что идеал Орлича $\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}$ удовлетворяет условиям теоремы Руссу-Митела.

Лемма 15.24. *Пусть $G(x) = 1/\mathrm{g}(1/x)$, $x > 0$, причем характеристика роста* g *выбрана так, что $G(x) \asymp x^{\rho_{\mathrm{g}}}$ при $x > 1$. Тогда для любого достаточного малого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C > 0$, такая что*

$$\sup_{t>0} \frac{G(\gamma t)}{G(t)} \le C\gamma^{\rho_{\mathrm{g}}-\varepsilon} \tag{15.24}$$

при всех $\gamma \in (0,1]$, и такая константа $K > 0$, что

$$\sup_{t>0} \frac{G(\gamma t)}{G(t)} \le C\gamma^{K} \tag{15.25}$$

при всех $\gamma > 1$.

Доказательство. Положим $g(s) = s^{\rho(s)}$. Тогда в силу определяющих свойств характеристики роста, $\rho(s) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \rho_{\mathrm{g}}$ и $\varepsilon(s) := \rho(s) s \ln s \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Имеем $(s = t^{-1})$:

$$\frac{G(\gamma t)}{G(t)} = s^{\rho(s)-\rho(\frac{s}{\gamma})}\gamma^{\rho(\frac{s}{\gamma})}.$$

Пусть $\gamma < 1$ и положим: $\varepsilon^*(s) = \max_{s'>s} |\varepsilon(s')|$, $\rho^*(s) = \max_{s'>s} |\rho(s')|$. Тогда

$$\left|\rho(s) - \rho\Big(\frac{s}{\gamma}\Big)\right| \le \int_{s/\gamma}^{s} \frac{\varepsilon(s')}{s' \ln s'}\,\mathrm{d}s' \le \max_{s'>s} |\varepsilon(s')|| \ln\left[1 + \left|\frac{\ln\gamma}{\ln s}\right|\right] \le \varepsilon^*(s)\left|\frac{\ln\gamma}{\ln s}\right|.$$

Следовательно,

$$s^{\rho(s)-\rho\left(\frac{s}{\gamma}\right)}\gamma^{\rho(\frac{s}{\gamma})} \le \gamma^{\rho^*(s)-\varepsilon^*(s)}. \tag{15.26}$$

Поскольку $\rho^*(s) \longrightarrow \rho_{\mathrm{g}}$, $\varepsilon^*(s) \longrightarrow 0$ при $s \to \infty$, существует A, такое что $\varepsilon^*(s) < \varepsilon$, $\rho^*(s) > \rho_{\mathrm{g}} - \varepsilon$ при $t < A$. Отсюда получим, что неравенство (15.24) выполнено при $t < A$. При $t > A$ имеем два случая: $\gamma t > A$ и $\gamma t \le A$. В первом из этих случаев неравенство выполнено тривиальным образом (с $\varepsilon = 0$) в силу условия $G(x) \asymp x^{\rho_{\mathrm{g}}}$ при $x > 1$. В оставшемся случае $t > A$, $\gamma t \le A$ будем иметь:

$$g(s) = e^{\rho(s)\ln(sA)}A^{\rho(s)} \ge C\big(sA\big)^{\rho_{\mathrm{g}}-\varepsilon}.$$

Следовательно

$$\frac{G(\gamma t)}{G(t)} \le C\frac{(\gamma t)^{\rho_{\mathrm{g}}-\varepsilon}}{t^{\rho_{\mathrm{g}}}} = C\gamma^{\rho_{\mathrm{g}}-\varepsilon}.$$

Таким образом, неравенство (15.24) установлено во всех случаях.

Доказательство неравенства (15.25) еще проще. В случае $\gamma t > 1$, $t > 1$ оно выполнено тривиальным образом (с $K = \rho_{\mathrm{g}}$), в случае $\gamma t > 1$, $t < 1$ имеем:

$$G(\gamma t) \asymp (\gamma t)^{\rho_{\mathrm{g}}},\ G(t) \ge Ct^{\rho_{\mathrm{g}}+\varepsilon},$$

откуда следует (15.25) с $K = \rho_{\mathrm{g}} + \varepsilon$. В оставшемся случае $\gamma t < 1$, $t < 1$, действуя так же, как и в (15.26), получим, что для некоторого $K > 0$

$$s^{\rho(s)-\rho\left(\frac{s}{\gamma}\right))}\gamma^{\rho(\frac{s}{\gamma})} \le \gamma^{\varepsilon^*(s/\gamma)}\gamma^{\max_{s'<s}\rho(s')} \le \gamma^{K}$$

просто потому, что функции ρ и ε ограничены. ❑

Имеем:
$$\|\mathcal{T}_n(A)\| = \inf\Big\{\beta > 0\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} nM\Big(\frac{s_n(A)}{\beta}\Big) \le 1\Big\}. \tag{15.27}$$
Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, такое что $\rho_{\mathrm{g}} - \varepsilon > 1$. Применим лемму 15.24 с $G = M$, $\gamma = (Cn)^{-\frac{1}{\rho_{\mathrm{g}}-\varepsilon}}$ и $t = s_j/\beta$, полагая n достаточно большим, чтобы $\gamma < 1$, и просуммируем. Получим:
$$\sum_j M\Big(\frac{s_j}{\beta}\Big) \ge n\sum_j M\Bigg(\frac{s_j}{\beta\,(Cn)^{\frac{1}{\rho_{\mathrm{g}}-\varepsilon}}}\Bigg).$$
Используя определение нормы в классе Орлича и (15.27), отсюда получим:
$$\|A\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}} \ge \frac{1}{(Cn)^{\frac{1}{\rho_{\mathrm{g}}-\varepsilon}}}\|\mathcal{T}_n(A)\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}}.$$
Таким образом,
$$\|\mathcal{T}_n\| = O(n^a)$$
для некоторого $a < 1$, и первое условие теоремы Руссу–Митетела выполнено.

Для проверки второго условия воспользуемся выпуклостью функции M на промежутке $[0,1]$. При любых $\beta \ge s_1$ и $j \ge 0$ имеем:
$$M\Big(\frac{s_{nj+1} + s_{nj+2} + \cdots + s_{n(j+1)}}{n\beta}\Big) \ge \frac{1}{n}\Big[M\Big(\frac{s_{nj+1}}{\beta}\Big) + M\Big(\frac{s_{nj+2}}{\beta}\Big) + \cdots + M\Big(\frac{s_{n(j+1)}}{\beta}\Big)\Big].$$
Отсюда получим:
$$\big\|\mathcal{T}_{1/n}(A)\big\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}} \le \inf\Big\{\beta\colon\ \sum_{n=1}^{\infty} M\Big(\frac{s_n(A)}{\beta}\Big) \le n\Big\}. \tag{15.28}$$
Воспользуемся теперь вторым утверждением леммы 15.24 - оценкой (15.25) – при $\gamma = \left(\frac{n}{C}\right)^{1/K}$ и n достаточно большом, чтобы $\gamma > 1$:
$$\frac{1}{n}M\Big(\frac{s_j}{\beta}\Big) \le M\Big(\frac{s_j}{\beta\gamma}\Big),\ j \ge 1.$$
Следовательно, правая часть в (15.28)
$$\le \frac{1}{\gamma}\,\|A\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}}\,.$$
Таким образом,
$$\big\|\mathcal{T}_{1/n}(A)\big\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}} \le Cn^{-1/K}\,\|A\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}}\,,$$
и второе условие теоремы Руссу–Митетела выполнено.

Применяя теорему Руссу–Митетела, получим, что идеал $\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}$ обладает свойством Мацаева. Кроме того, он сепарабелен, и поэтому обладает свойством мажорантности. Применяя теорему о диагональном преобладании, следствие 15.16 и теорему 15.21 получим:

$$B_{[H]} \in \mathfrak{S}_{[\![M]\!]} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(\omega_n^{-1})} < \infty, \tag{15.29}$$

где последовательность ω_n построена по функциям $\kappa := \sqrt{h_1}$, $\varphi := \sqrt{h_2}$. Согласно лемме 15.23, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{g}(\omega_n^{-1})} < \infty \;\Leftrightarrow$$
$$\int_a^b \left[\mathrm{g}\Big(\Big(\int_t^b h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_a^t h_2(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big)\right]^{-1} \cdot \frac{h_1(t)\,\mathrm{d}t}{\int_t^b h_1(s)\,\mathrm{d}s} < \infty,$$

и требуемое утверждение доказано. ❑

Вместо неравенства 15.25 для проверки второго условия теоремы Руссу–Митителa в доказательстве можно было бы воспользоваться сепарабельностью идеалов Орлича и следующим общим утверждением.

Лемма 15.25. *Пусть $\mathfrak{I}$ – сепарабельный симметрично нормированный идеал. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathcal{T}_{\frac{1}{n}}\| = 0.$$

Доказательство. Как известно, любой сепарабельный симметрично нормированный идеал порожден симметрической нормирующей функцией [6, теорема III.6.2]. Пусть Φ – симметрическая нормирующая функция, порождающая идеал $\mathfrak{I}$. Тогда для произвольного оператора $A \in \mathfrak{I}$ будем иметь:

$$\lim_{N\to\infty} \Phi\big((s_{N+n}(A))_{n=1}^{\infty}\big) = 0.$$

Задаваясь $\varepsilon > 0$, выберем число N_0, такое что $\Phi\big((s_{N+n})_{n=1}^{\infty}\big) \le \varepsilon$, $N \ge N_0$. Для данного $n \in \mathbb{N}$ и $j \in \{1, \dots, n\}$ положим:

$$s^{(n,j)} := \big(s_j, s_{j+n}, s_{j+2n}, \dots\big).$$

Тогда

$$\mathcal{T}_{\frac{1}{n}}\big(A\big) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s^{(n,j)}.$$

Будем иметь:

$$\big\|(s_k^{(n,j)})_{k=1}^{\infty}\big\|_{\mathfrak{I}} \le \Phi\big((s_j, s_{j+1}, s_{j+2}, \dots)\big) \le \begin{cases} \|A\|_{\mathfrak{I}}\,, & j \le N_0,\\ \varepsilon \quad\;\;, & j > N_0.\end{cases}$$

Отсюда получим, что при $n \geq N_0$

$$\left\|J_{\frac{1}{n}}(A)\right\|_{\mathfrak{J}} \leq \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{N_0} + \sum_{j=N_0+1}^{n}\Big)\left\|s^{(n,j)}\right\|_{\mathfrak{J}} \leq \frac{N_0\|A\|_{\mathfrak{J}}}{n} + \varepsilon,$$

и требуемый предел доказан ввиду произвольности ε. ❏

Заметим, что в книге [7, стр. 170, подстрочное примечание] со ссылкой на частное сообщение Е. М. Семенова приведена формулировка иного необходимого и достаточного условия обладания свойством Мацаева для несколько более узкого класса идеалов, чем в теореме Руссу–Мититела (идеалы дополнительно предполагаются сепарабельными). Это условие выражено в терминах функции $\|\mathcal{T}_n(1,0,0,\dots)\|_{\mathfrak{S}_{[\![M]\!]}}$, имеет более простой вид и тривиальным образом выполняется для идеалов Орлича. Нам не удалось обнаружить доказательство этого условия в литературе, и его эквивалентность условию Руссу–Мититела непосредственно не очевидна. Статус условия Семенова, таким образом, не ясен, и, во избежание недоразумений, в доказательстве теоремы 14 мы привели непосредственную проверку условия Руссу–Мититела для идеалов Орлича.

Введем теперь класс симметрично нормированных идеалов Лоренца, который используется в доказательстве теоремы 15.

Пример 15.26. Пусть $(\pi_n)_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, такая что $\pi_1 = 1$, $\lim_{n\to\infty}\pi_n = 0$, и $\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = \infty$. Идеалом Лоренца $\mathfrak{S}_{[\pi]}$ называется симметрично нормированный идеал

$$\mathfrak{S}_{[\pi]} := \Big\{A \in \mathfrak{S}^{\infty}\colon\ \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=1}^{n} s_k(A)\Big/\sum_{k=1}^{n}\pi_k\Big) < \infty\Big\},$$

$$\|A\|_{\mathfrak{S}_{[\pi]}} := \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{k=1}^{n} s_k(A)\Big/\sum_{k=1}^{n}\pi_k\Big).$$

Среди пространств Лоренца есть и сепарабельные, и несепарабельные. Через $\mathfrak{S}^{\circ}_{[\pi]}$ будем обозначать сепарабельную часть идеала $\mathfrak{S}_{[\pi]}$, т. е. замыкание в норме идеала $\mathfrak{S}_{[\pi]}$ линеала операторов конечного ранга. Подробнее об идеалах типа Лоренца можно посмотреть в [6, теорема III.14.1] или в [84, пример 1.2.7].

Пусть g – характеристика роста, порядок которой $\rho_{\mathrm{g}} > 1$. Положим: $\pi_n := \frac{1}{\mathrm{g}^{-1}(n)}$, где g^{-1} – функция, обратная g. Последовательность π_n очевидным образом будет бинормирующей, т. е. $\pi_n \to 0$, $\pi_n \notin l^1$. Кроме того, последовательность π_n представима в виде $\pi_n = \pi(x)$, где $\pi(x) = x^{-1/\rho_{\mathrm{g}}}L(x)$ – невозрастающая функция, а $L(x)$ – медленно меняющаяся. В самом деле, функция $\pi(x)$, определенная равенством $x = \mathrm{g}(1/\pi(x))$, очевидно, монотонно убывает к нулю. Дифференцируя, будем иметь:

$$-x\cdot\frac{g'(1/\pi)}{\pi g(1/\pi)}\cdot\frac{\pi'}{\pi} = 1.$$

Средний сомножитель стремится к ρ_{g} в силу одного из определяющих свойств характеристики роста. Следовательно, $x\pi'/\pi \longrightarrow -\rho_{\mathrm{g}}$ при $x \to +\infty$, и, значит, $xL'(x)/L(x) \longrightarrow 0$, т. е. L – медленно меняющаяся функция.

Согласно [6, теорема III.14.2 и замечание III.14.4. 1°], отсюда будем иметь:

$$\mathfrak{S}_{[\pi]} = \bigl\{A \in \mathfrak{S}^{\infty}\colon\ \limsup_{n\to\infty} s_n(A)\mathrm{g}^{-1}(n) < \infty\bigr\},$$
$$\mathfrak{S}^{\circ}_{[\pi]} = \bigl\{A \in \mathfrak{S}^{\infty}\colon\ \lim_{n\to\infty} s_n(A)\mathrm{g}^{-1}(n) = 0\bigr\}.$$

Для данной последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \to 0$, обозначим через $(\alpha_n^*)_{n=1}^{\infty}$ ее неотрицательную неубывающую перестановку, т. е. неубывающую перестановку последовательности $|\alpha_n|$.

Доказательство теоремы 15. Из [7, теорема III.9.2] следует, что идеалы $\mathfrak{S}_{[\pi]}$ и $\mathfrak{S}^{\circ}_{[\pi]}$ обладают свойством Мацаева, и, значит, можно применять теорему о диагональном преобладании. Кроме того, идеалы $\mathfrak{S}_{[\pi]}$ и $\mathfrak{S}^{\circ}_{[\pi]}$ очевидным образом обладают свойством мажорантности. Применяя теорему о диагональном преобладании, следствие 15.16 и теорему 15.21, получим:

$$\begin{aligned} B_{[H]} \in \mathfrak{S}_{[\pi]} \ &\Leftrightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \omega_n^* \mathrm{g}^{-1}(n) < \infty, \\ B_{[H]} \in \mathfrak{S}^{\circ}_{[\pi]} \ &\Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \omega_n^* \mathrm{g}^{-1}(n) = 0, \end{aligned} \tag{15.30}$$

где последовательность ω_n – та же, что и в доказательстве теоремы 14. Используя свойства характеристик роста, получим:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \omega_n^* \mathrm{g}^{-1}(n) < \infty \ &\Leftrightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}\bigl((\omega_n^*)^{-1}\bigr)} < \infty, \\ \lim_{n\to\infty} \omega_n^* \mathrm{g}^{-1}(n) = 0 \ &\Leftrightarrow\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}\bigl((\omega_n^*)^{-1}\bigr)} = 0, \end{aligned}$$

и доказательство закончено. ❑

15.7 Спектр в нуле

Использованные нами методы позволяют также решить вопрос о том, когда $0 \in \sigma(A_{[\mathcal{H}]})$.

Теорема 15.27. *Пусть* $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ *– гамильтониан на промежутке* $(0, L)$, *причем* $h_1 \in L^1(0, L)$. *Тогда* $0 \notin \sigma(A_{[\mathcal{H}]})$, *если, и только если,*

$$\limsup_{t\nearrow L} \Bigl(\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s\Bigr) < \infty.$$

Отметим, что из этого результата немедленно вытекает [21, теорема 1.5].

При доказательстве теоремы нам понадобится еще одно утверждение в духе Александрова–Пеллера–Янсона–Рохберга – вариант [75, теорема 3.1]. Будем использовать последовательности c_n и ω_n, определенные равенствами (15.17) и (15.18).

Теорема 15.28. *Пусть $-\infty \le a < b \le \infty$, и пусть $\varkappa, \varphi$ – комплекснозначные функций на промежутке (a,b), такие что $\varkappa \in L^2(a,b)$, а $\varphi \in L^2(a,c)$ при каждом $c \in (a,b)$. Пусть T – интегральный оператор в пространстве $L^2(a,b)$ вида* (15.12).

Следующие утверждения эквивалентны:

(i) *оператор T ограничен;*

(ii) *оператор $\operatorname{Re} T$ ограничен;*

(iii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n < \infty$*, где ω_n определены равенством* (15.18).

Доказательство этого утверждения вынесено в Приложение A.

Доказательство теоремы 15.27. Из теоремы 15.28 следует, что идеал всех ограниченных операторов обладает слабым свойством Мацаева, и, значит, можно применять теорему о диагональном преобладании. Применяя теорему о диагональном преобладании, следствие 15.16 и теорему 15.28 к гамильтониану $\operatorname{diag}\mathcal{H}$, получим, что

$$B_{[\mathcal{H}]} \in \mathcal{B}(L^2(H)) \ \Leftrightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \omega_n < \infty, \tag{15.31}$$

где последовательность ω_n – та же, что и в доказательстве теоремы 14. Остается проверить, что

$$\sup_{n\to\infty} \omega_n < \infty \ \Leftrightarrow\ \limsup_{t\nearrow L} \Big(\int_t^L h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \Big) < \infty.$$

Для этого достаточно заметить, что последовательность неотрицательных чисел $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ ограничена, если, и только если, ограничена последовательность $\big(2^{-n}\sum_{k=1}^n 2^k\alpha_k\big)_{n=1}^\infty$. Применяя это утверждение к последовательности

$$\alpha_n := 2^{-n}\int_{c_{n-1}}^{c_n} |\varphi(s)|^2\,\mathrm{d}s, \quad n\in\mathbb{N},$$

получаем требуемое. ❑

15.8 Пример 15.7 – доказательства

В рассматриваемой ситуации

$$c_n = 1 - 2^{-n},\ \omega_n \asymp, 2^{n(\frac{\alpha}{2}-1)} n^{-\frac{\alpha_1}{2}} (\log n)^{-\frac{\alpha_2}{2}}.$$

Утверждаемые свойства спектра операторов $\mathcal{H}_{\alpha;\alpha_1,\alpha_2}$следуют теперь из дискретных вариантов основных теорем, см. (15.30), (15.19), (15.29) и (15.31). Разберем возникающие случаи.

▷ Из формулы Крейна–де Бранжа следует, что

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{n}{|\lambda_n|} \geq \int_0^1 \sqrt{h_2(s)}\, ds > 0. \tag{15.32}$$

▷ $\lim_{n\to\infty} \omega_n = \infty$ в случаях $(\alpha > 2)$; $(\alpha = 2, \alpha_1 < 0)$; $(\alpha = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0)$, так что в этих случаях точка 0 принадлежит существенному спектру.

▷ $\omega_n \asymp 1$, если $(\alpha = 2, \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$, так что в этом случае существенный спектр не пуст, но 0 принадлежит резольвентному множеству.

▷ $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$, если $(\alpha < 2)$, либо $(\alpha = 2, \alpha_1 > 0)$, либо $(\alpha = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0)$, так что в этих случаях спектр дискретен.

▷ Если $(\alpha = 2, \alpha_1 > 0)$, то показатель сходимости последовательности $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ равен $\frac{2}{\alpha_1}$; в случае $(\alpha = 2, \alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0)$ показатель сходимости последовательности $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ бесконечен. Отсюда, учитывая (15.32), при $\alpha = 2$ получим:

$$\text{показатель сходимости } (|\lambda_n|)_{n=1}^\infty = \begin{cases} \infty\ , & \alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0, \\ \frac{2}{\alpha_1}\ , & \alpha_1 \in (0,2), \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ 1\ \ , & \alpha_1 \geq 2, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

▷ Если $(\alpha = 2, \alpha_1 \in (0,2), \alpha_2 \in \mathbb{R})$, а $\mathrm{g}(r) := r^{\frac{2}{\alpha_1}} (\log r)^\gamma$, то

$$\begin{aligned} \mathrm{g}\big(\frac{1}{\omega_n}\big) &\asymp \mathrm{g}\big(n^{\frac{\alpha_1}{2}} (\log n)^{\frac{\alpha_2}{2}}\big) \\ &= \big[n^{\frac{\alpha_1}{2}} (\log n)^{\frac{\alpha_2}{2}}\big]^{\frac{2}{\alpha_1}} \big[\log\big(n^{\frac{\alpha_1}{2}} (\log n)^{\frac{\alpha_2}{2}}\big)\big]^\gamma \\ &\asymp n (\log n)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \gamma}. \end{aligned}$$

Видно, что $n \cdot \mathrm{g}(\frac{1}{\omega_n})^{-1} \asymp 1$ при $\gamma = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Поскольку последовательность $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ асимптотически сравнима с монотонной, отсюда получим, что

$$0 < \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{\mathrm{g}((\omega_n^*)^{-1})} < \infty.$$

Рассмотрим теперь оператор $\mathring{\mathcal{H}}_{\alpha_1,\alpha_2}$. Его свойства можно получить из предыдущих рассмотрений без дополнительных вычислений следующим несложным приемом. Рассмотрим гамильтониан $\mathcal{H}_{2;\alpha_1,\alpha_2}$ и положим:

$$\mathring{\mathcal{H}}_{2;\alpha_1,\alpha_2}(t) := \begin{pmatrix} 1 & -m(t) \\ -m(t) & m(t)^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1),$$

где

$$m(t) := \int_0^t h_2(s)\, \mathrm{d}s.$$

Пусть q – функция Вейля гамильтониана $\mathcal{H}_{2;\alpha_1,\alpha_2}$, а $\mathring{q}$ – функция Вейля гамильтониана $\mathring{\mathcal{H}}_{2;\alpha_1,\alpha_2}$. Тогда, согласно [12, теорема 4.2], будем иметь:

$$q(z) = \frac{1}{z}\mathring{q}(z^2).$$

В частности, дискретность спектра оператора $A_{[\mathring{\mathcal{H}}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]}$ равносильна дискретности спектра оператора $A_{[\mathcal{H}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]}$, причем, если эти спектры дискретны, то показатель сходимости спектра $\sigma(A_{[\mathcal{H}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]})$ вдвое больше показателя сходимости спектра $\sigma(A_{[\mathring{\mathcal{H}}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]})$. Таким образом,

$$\text{показатель сходимости } \sigma(A_{[\mathring{\mathcal{H}}_{2;\alpha_1,\alpha_2}]}) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_1}\ , & \alpha_1 \in (0,2), \\ \frac{1}{2}\ , & \alpha_1 \geq 2. \end{cases}$$

Далее, интегрируя по частям, имеем:

$$\lim_{t \nearrow 1} \frac{m(t)}{h_2(t)(1-t)} = 1,$$

т. е. функция $(h_2(t)(1-t))^2$ снова имеет вид (15.9) с $\alpha = 2$, но с параметрами $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$ вместо α_1 и α_2 соответственно. Следовательно, спектр оператора $A_{[\mathring{\mathcal{H}}_{\alpha_1,\alpha_2}]}$ имеет то же асимптотическое поведение, что и спектр оператора $A_{[\mathring{\mathcal{H}}_{2;\frac{\alpha_1}{2},\frac{\alpha_2}{2}}]}$.

16 Приложение A. Теоремы типа Александрова–Пеллера–Рохберга–Янсона

Это приложение содержит подробные доказательства теорем 15.17,15.21,15.28. Напомним используемые в этих теоремах обозначения. Пусть κ, φ – комплекснозначные функции на, возможно, бесконечном промежутке (a,b), такие что $\kappa \in L^2(a,b)$, а $\varphi \in L^2(a,c)$ при каждом $c \in (a,b)$. Интегральный оператор T в пространстве $L^2(a,b)$ задан формулой:

$$(Tf)(t) := \varphi(t)\int_t^b f(s)\overline{\kappa(s)}\,\mathrm{d}s, \quad t \in (a,b)$$

на своей естественной области определения. Возрастающая последовательность $c_0 := a < c_1 < c_2 < \ldots < b$ определена равенством: $\|\mathbb{1}_{(c_n,b)}\kappa\|^2 = 2^{-n}\|\kappa\|^2$, $n \in \mathbb{N}$, или, эквивалентно,

$$\|\mathbb{1}_{(c_{n-1},c_n)}\kappa\|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \|\kappa\|^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

а последовательность ω_n – равенством:

$$J_n := (c_{n-1}, c_n), \qquad \omega_n := \|\mathbb{1}_{J_n}\kappa\| \cdot \|\mathbb{1}_{J_n}\varphi\|, \quad n \in \mathbb{N},$$

или, эквивалентно

$$\omega_n = \|\kappa\| \cdot 2^{-\frac{n}{2}} \Big(\int_{c_{n-1}}^{c_n} |\varphi(s)|^2 \, \mathrm{d}s \Big)^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для операторного идеала $\mathfrak{I}$ требуется доказать импликации:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] T \in \mathfrak{I} \arrow[rr, Rightarrow, "\text{тривиально}"] & & \operatorname{Re} T \in \mathfrak{I} \arrow[dl, Rightarrow, "\mathfrak{I}=\mathbf{B}(H),\mathfrak{S}^\infty"] \\ & (\omega_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{I} \arrow[ul, Rightarrow] & \end{tikzcd} \tag{16.1}$$

в следующих ситуациях:

(i) для теоремы 15.28: $\mathfrak{I} = \mathbf{B}(H)$.

(ii) для теоремы 15.17: $\mathfrak{I} = \mathfrak{S}^\infty$.

(iii) для теоремы 15.21 (второе утверждение): $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{S}_\infty$, причем для импликации снизу вверх предполагается, что идеал $\mathfrak{I}$ – симметрично нормированный и обладает свойством Мацаева.

Кроме этого мы докажем такую импликацию:

$$\operatorname{Re} T \in \mathfrak{S}^\infty \Longrightarrow \Big(\text{Существует константа } C > 0\text{: } \sum_{j=1}^{k} \omega_k^* \le C \sum_{j=1}^{k} s_j(\operatorname{Re} T), \ \forall k \ge 1\Big). \tag{16.2}$$

Из нее, в частности, немедленно, следует, что в схеме (16.1) импликация сверху вниз справедлива для любого симметрично нормированного идеала $\mathfrak{I} \subsetneq \mathfrak{S}_\infty$, обладающего свойством мажорантности. Теорема 15.21 таким образом будет полностью доказана.

Доказательство импликаций $\operatorname{Re} T \in \mathfrak{I} \Rightarrow (\omega_n)_{n=1}^\infty \in \mathfrak{I}$ *в схеме* (16.1) *и* (16.2). Пусть $\mathfrak{I}$ – либо $\mathbf{B}(H)$, либо $\mathfrak{S}^\infty$, и пусть $\operatorname{Re} T \in \mathfrak{I}$. Обозначим через P_n ортопроектор $P_n f \colon = \mathbb{1}_{J_n} f$ в $L^2(a,b)$ на подпространство функций, исчезающих вне промежутка J_n. Тогда, очевидным образом оператор $\sum_{n=1}^\infty P_n(\operatorname{Re} T) P_{n+1} \in \mathfrak{I}$. Найдем его s–числа. Ясно, что

$$P_n T P_{n+1} = (\cdot\,, \mathbb{1}_{J_{n+1}}\kappa) \mathbb{1}_{J_n}\varphi,$$

и что $P_n T^* P_{n+1} = 0$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^\infty P_n(\operatorname{Re} T) P_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \omega_n \Big(\cdot\,, \frac{\mathbb{1}_{J_{n+1}}\kappa}{\|\mathbb{1}_{J_{n+1}}\kappa\|}\Big) \frac{\mathbb{1}_{J_n}\varphi}{\|\mathbb{1}_{J_n}\varphi\|}.$$

Отсюда получим, что последовательность ω_j ограничена, если ограничен оператор $\operatorname{Re} T$, а если оператор $\operatorname{Re} T$ компактен, то она сходится к нулю, причем

$$s_j\big(\sum_{n=1}^\infty P_n(\operatorname{Re} T) P_{n+1}\big) = 2^{-\frac{1}{2}} \omega_j^*. \tag{16.3}$$

Импликация $\operatorname{Re} T \in \mathfrak{I} \Rightarrow (\omega_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{I}$ для рассматриваемых идеалов доказана.

Для доказательства импликации (16.2) воспользуемся следующим предложением.

Предложение ([6], теорема II.5.1)**.** *Пусть R – компактный оператор, P_n, $n \leq \infty$, – последовательность дизъюнктных ортопроекторов ($P_j P_i = 0$ при $i \neq j$). Тогда*

$$\sum_{j=1}^{k} s_j\big(\sum_n P_n R P_n\big) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(R), \ \forall k \geq 1.$$

Выберем произвольные изоморфизмы гильбертовых пространств $U_n \colon L^2(J_n) \to L^2(J_{n+1})$, обозначим через $S \colon L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ матричный оператор сдвига:

$$S \colon = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ U_1 & 0 & & \\ & U_2 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} L^2(J_1) \\ \oplus \\ L^2(J_2) \\ \oplus \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} L^2(J_1) \\ \oplus \\ L^2(J_2) \\ \oplus \\ \vdots \end{pmatrix},$$

и применим процитированное утверждение к оператору $(\operatorname{Re} T)S$. Легко видеть, что

$$s_j\big(\sum_{n=1}^{\infty} P_n (\operatorname{Re} T) S P_n\big) = s_j\big(\sum_{n=1}^{\infty} P_n (\operatorname{Re} T) P_{n+1}\big),$$

поэтому получим ($k \geq 1$):

$$\sum_{j=1}^{k} s_j\big(\sum_n P_n (\operatorname{Re} T) P_{n+1}\big) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(\operatorname{Re} T S) \leq \sum_{j=1}^{k} s_j(\operatorname{Re} T).$$

Подставляя (16.3) в эту оценку, приходим к импликации (16.2). ❑

Несколько сложнее доказательство импликаций снизу вверх в схеме (16.1).

Доказательство импликации $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{I} \Rightarrow T \in \mathfrak{I}$.
Пусть $\mathfrak{I}$ – либо $\mathbf{B}(H)$, либо $\mathfrak{S}^{\infty}$, либо симметрично нормированный идеал, обладающий свойством Мацаева, и пусть $(\omega_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{I}$. Заметим сразу, что во всех случаях последовательность $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена.

① Докажем, что блочно-диагональная сумма $\sum_{n=1}^{\infty} P_n T P_n$ сходится в идеале $\mathfrak{I}$. Это – ключевое место рассуждения.

Общий член суммы $P_n T P_n$ представляет собой интегральный оператор в пространстве $L^2(a,b)$ с ядром

$$P_n T P_n : \quad \mathbb{1}_{t<s}(t,s) \mathbb{1}_{J_n}(t) \mathbb{1}_{J_n}(s) \varphi(t) \overline{\kappa(s)}$$

Поскольку функции $\mathbb{1}_{J_n}\kappa, \mathbb{1}_{J_n}\varphi \in L^2(a,b)$, этот оператор компактен, и справедлива оценка:

$$\|P_nTP_n\| \le \Big(\int_a^b\int_a^b |\mathbb{1}_{t<s}(t,s)\mathbb{1}_{J_n}(t)\mathbb{1}_{J_n}(s)\varphi(t)\overline{\kappa(s)}|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \|\mathbb{1}_{J_n}\kappa\|\|\mathbb{1}_{J_n}\varphi\| = \omega_n.$$

Поскольку последовательность $(\omega_n)_{n=1}^\infty$ ограничена, отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^\infty P_nTP_n$ сходится в сильном смысле к ограниченному оператору, причем

$$\Big\|\sum_{n=1}^\infty P_nTP_n\Big\| \le \|(\omega_n)_{n=1}^\infty\|_\infty,$$

и результат для случая $\mathfrak{I} = \mathbf{B}(H)$ доказан. Если же $\omega_n \longrightarrow 0$, то рассматриваемый ряд сходится в операторной норме, и поэтому его сумма – компактный оператор. Это доказывает результат в случае $\mathfrak{I} = \mathfrak{S}^\infty$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathfrak{I}$ – симметрично нормированный идеал, обладающий свойством Мацаева. Рассмотрим оператор Q_0, заданный рядом Шмидта

$$Q_0 := \sum_{n=1}^\infty \omega_n\Big(\cdot\,, \frac{\mathbb{1}_{J_n}\kappa}{\|\mathbb{1}_{J_n}\kappa\|}\Big)\frac{\mathbb{1}_{J_n}\varphi}{\|\mathbb{1}_{J_n}\varphi\|}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\lim_{n\to\infty}\omega_n = 0$, сингулярные числа этого оператора, очевидно, суть $a_n(Q_0) = \omega_n^*$, и, стало быть, $Q_0 \in \mathfrak{I}$. Так как идеал $\mathfrak{I}$ обладает свойством Мацаева, трансформатор треугольного усечения $\mathcal{C}$, см. [7], задает ограниченное отображение идеала $\mathfrak{I}$ в себя. Значит, оператор $\mathcal{C}Q_0 \in \mathfrak{I}$. Заметим далее, что трансформатор $\mathcal{C}$ определен на операторах ранга 1, и, очевидным образом,

$$\mathcal{C}\big[(\cdot\,, \mathbb{1}_{J_n}\kappa)\mathbb{1}_{J_n}\varphi\big] = P_nTP_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Так как ряд Шмидта для Q_0 и ряд $\sum_{n=1}^\infty P_nTP_n$ сходятся по операторной норме, а трансформатор треугольного усечения $\mathcal{C}$ замкнут [7, теорема III.3.2] относительно операторной нормы, отсюда получим, что $\sum_{n=1}^\infty P_nTP_n$ принадлежит области значений трансформатора $\mathcal{C}$, причем

$$\mathcal{C}Q_0 = \sum_{n=1}^\infty P_nTP_n.$$

Включение $\sum_{n=1}^\infty P_nTP_n \in \mathfrak{I}$ таким образом доказано.

② Осталось использовать полноту. Для любого $l\in\mathbb{N}$ обозначим через Q_l компактный оператор, заданный рядом Шмидта

$$Q_l := \sum_{n=1}^\infty 2^{-\frac{l}{2}}\omega_n\Big(\cdot\,, \frac{\mathbb{1}_{J_{n+l}}\kappa}{\|\mathbb{1}_{J_{n+l}}\kappa\|}\Big)\frac{\mathbb{1}_{J_n}\varphi}{\|\mathbb{1}_{J_n}\varphi\|}.$$

Ясно, что $Q_l \in \mathfrak{I}$ и

$$\|Q_l\|_{\mathfrak{I}} = 2^{-l/2}\|(\omega_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\mathfrak{I}}.$$

Следовательно, ряд $\sum_{l=1}^{\infty} Q_l$ сходится в норме идеала $\mathfrak{I}$, и его сумма таким образом принадлежит этому идеалу.

Короткое вычисление, использующее определение последовательности c_n, см. (15.18), показывает, что для любой функции $f \in L^2(a,b)$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности точки b, будем иметь:

$$Tf = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} P_n T P_n\Big) f + \Big(\sum_{l=1}^{\infty} Q_l\Big) f.$$

Поскольку оператор T замкнут, отсюда вытекает, что

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} P_n T P_n + \sum_{l=1}^{\infty} Q_l,$$

и, значит, $T \in \mathfrak{I}$.

❏

17 Приложение Б. Теорема Каца

Как уже упоминалось, единственное ранее известное в литературе утверждение о дискретности спектра недиагональной канонической системы сформулировано без доказательства в работе [20, теорема 1]. Насколько нам известно, доказательство так и не было опубликовано. В этом приложении мы выведем содержательную часть результата Каца из нашей теоремы. Поясним, что мы имеем в виду под содержательной частью. Теорема Каца состоит из необходимого условия дискретности спектра и достаточного условия, состоящего из двух случаев. Мы выведем из основного критерия - теоремы 12 - необходимость и один из случаев достаточности. Что касается второго случая, то мы покажем, что он либо пуст, т. е. его условиям не удовлетворяет ни один гамильтониан, либо утверждение теоремы Каца для этого случая ложно.

Сформулируем теорему 1 из [20]. Пусть $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix}$ – гамильтониан, заданный на полуоси $[0,\infty)$, такой что $\operatorname{tr}\mathcal{H}(t) = 1$ п. в. Пусть

$$m_j(t) := \int_0^t h_j(t)\,\mathrm{d}t.$$

Для $K \geq 0$ положим:

$$A_K := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon \limsup_{t\to\infty} \left(\int\limits_t^\infty h_1(s) e^{\lambda m_3(s)} \mathrm{d}s \cdot \int\limits_0^t h_2(s) e^{-\lambda m_3(s)} \mathrm{d}s \right) \leq \frac{K}{\lambda^2} \right\},$$

$$B_K := \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon \limsup_{t\to\infty} \left(\int\limits_t^\infty h_2(s) e^{-\lambda m_3(s)} \mathrm{d}s \cdot \int\limits_0^t h_1(s) e^{\lambda m_3(s)} \mathrm{d}s \right) \leq \frac{K}{\lambda^2} \right\}.$$

Теорема 17.1 ([20])**.** *Выполнены импликации:* (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)*, где*

(i) $\sup\Big(\bigcup\limits_{K<1} A_K \cup \bigcup\limits_{K<1} B_K \Big) = +\infty,\ \inf\Big(\bigcup\limits_{K<1} A_K \cup \bigcup\limits_{K<1} B_K \Big) = -\infty.$

(ii) *Оператор $A_{[H]}$ имеет чисто дискретный спектр, и*[3] *либо $h_1 \in L^1(0,+\infty)$, либо $h_2 \in L^1(0,+\infty)$.*

(iii) $A_1 \cup B_1 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Теорема 17.2. *В обозначениях предыдущей теоремы следующие утверждения равносильны:*

(i) *Существует $K > 0$, такое что множество $\bigcup_{K'<K} A_{K'}$ накапливается и к $-\infty$, и к $+\infty$.*

(ii) *Спектр оператора $A_{[H]}$ чисто дискретен, а $h_1 \in L^1(0,+\infty)$.*

(iii)

$$\lim_{t\to\infty} \Big(\int_t^\infty h_1(s) e^{\lambda m_3(s)}\, \mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s) e^{-\lambda m_3(s)}\, \mathrm{d}s \Big) = 0,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \qquad (17.1)$$

Аналогичное утверждение справедливо с заменой A_K на B_K в (i) *и переменой местами h_1 и h_2 в* (ii) *и* (iii)*.*

Доказательство. Утверждение (iii) означает просто, что $A_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, так что импликация (iii)$\Rightarrow$(i) выполнена тривиальным образом.
(i)$\Longrightarrow$(ii). Выберем произвольное число $c \in (0,\infty)$, такое что функция h_2 не исчезает на промежутке $[0,c]$, и рассмотрим функцию $F\colon [c,\infty) \times \mathbb{R} \to [0,\infty]$,

$$F(t,\lambda) := \int_t^\infty h_1(s) e^{\lambda m_3(s)}\, \mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s) e^{-\lambda m_3(s)}\, \mathrm{d}s.$$

[3] Этой нормировки нет в оригинальной статье [20]. Без нее теорема очевидным образом неверна.

Рассмотрим произвольный отрезок $[\mu_1, \mu_2] \subset \mathbb{R}$ и произвольное число из этого отрезка $\lambda = v\mu_1 + (1-v)\mu_2$, $v \in (0,1)$. Пользуясь неравенством Гёльдера, получим:

$$\int\limits_t^\infty h_1(s) e^{2\lambda m_3(s)}\,\mathrm{d}s = \int\limits_t^\infty \Big(h_1(s)e^{\mu_1 m_3(s)}\Big)^v \cdot \Big(h_1(s)e^{\mu_2 m_3(s)}\Big)^{1-v}\,\mathrm{d}s$$

$$\le \Big(\int\limits_t^\infty h_1(s)e^{\mu_1 m_3(s)}\,\mathrm{d}s\Big)^v \cdot \Big(\int\limits_t^\infty h_1(s)e^{\mu_2 m_3(s)}\,\mathrm{d}s\Big)^{1-v},$$

$$\int\limits_0^t h_2(s) e^{-\lambda m_3(s)}\,\mathrm{d}s \le \Big(\int\limits_0^t h_2(s)e^{-\mu_1 m_3(s)}\,\mathrm{d}s\Big)^v \cdot \Big(\int\limits_0^t h_2(s)e^{-\mu_2 m_3(s)}\,\mathrm{d}s\Big)^{1-v}.$$

Перемножая эти оценки, будем иметь:

$$F(t,\lambda) \le (F(t,\mu_1))^v\,(F(t,\mu_2))^{1-v},$$

Пусть $\mu_1 \in A_{K_1} \cap (-\infty, 0)$, $\mu_2 \in A_{K_2} \cap (0,\infty)$ для некоторых $K_1, K_2 < K$. Тогда

$$\limsup_{t\to\infty} F(t,\lambda) \le \Big(\frac{K}{\mu_1^2}\Big)^v \Big(\frac{K}{\mu_2^2}\Big)^{1-v} = \frac{K}{\mu_1^{2v}\mu_2^{2(1-v)}}.$$

Рассмотрим $\lambda = 0$ и устремим μ_2 к $+\infty$ вдоль $\bigcup_{K'<K} A_{K'}$. Тогда $v \to 1$, и, значит,

$$\limsup_{t\to\infty} F(t,0) \le \frac{K}{\mu_1^2}.$$

Поскольку $\inf \bigcup_{K'<K} A_{K'} = -\infty$, отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \Big(\int_t^\infty h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s\Big) = \lim_{t\to\infty} F(t,0) = 0.$$

В частности, $h_1 \in L^1$, и из теоремы 12 следует дискретность спектра оператора $A_{[\mathcal{H}]}$.

(ii)$\Longrightarrow$(iii).

① Пусть спектр оператора $A_{[\mathcal{H}]}$ дискретен, а функция $h_1 \in L^1(0,+\infty)$. Тогда в силу теоремы 12

$$\int_t^\infty h_1(s)\,\mathrm{d}s \cdot \int_0^t h_2(s)\,\mathrm{d}s \xrightarrow[t\to\infty]{} 0. \tag{17.2}$$

Докажем, что справедливо (17.1). В силу нормировки $\operatorname{tr}\mathcal{H}(t) = 1$, будем иметь:

$$(17.2) \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} t\int_t^\infty h_1(s)\,\mathrm{d}s = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{t\to\infty} \underbrace{\sup_{x\ge t}\Big(x\int\limits_x^\infty h_1(s)\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}}_{=:p(t)} = 0$$

Заметим, что функция p не возрастает. Более того, опять-таки в силу нормировки следа,

$$\max\{h_1(t), h_2(t)\} \le 1, \quad h_3(t)^2 \le h_1(t)h_2(t) \le \min\{h_1(t), h_2(t)\}. \tag{17.3}$$

② Покажем, что

$$|m_3(y) - m_3(x)| \le p(x)\Big(1 + \log\frac{y}{x}\Big), \quad 0 < x < y. \tag{17.4}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}|m_3(y) - m_3(x)| &= \Big|\int_x^y h_3(s)\,\mathrm{d}s\Big| = \Big|\int_x^y \frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\sqrt{s}h_3(s)\,\mathrm{d}s\Big| \\ &\le \Big(\int_x^y \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}\Big(\int_x^y sh_3(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac12} = \big(\log\frac{y}{x}\big)^{\frac12}\Big(\int_x^y sh_3(s)^2\,\mathrm{d}s\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Используя второе неравенство в (17.3) и интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned}\int_x^y sh_3(s)^2\,\mathrm{d}s &\le \int_x^y sh_1(s)\,\mathrm{d}s = x\int_x^y h_1(s)\,\mathrm{d}s + \int_x^y\Big(\int_s^y h_1(t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}s \\ &\le p(x)^2 + \int_x^y \frac{1}{s}\cdot p(s)^2\,\mathrm{d}s \le p(x)^2\Big(1 + \log\frac{y}{x}\Big),\end{aligned}$$

откуда и вытекает оценка (17.4). Заметим, что из (17.4) следует, что $e^{|\lambda|p(t)} = O(t^{\varepsilon})$ при любом $\varepsilon > 0$. Интегрируя по частям, из этой оценки получим, что функция $h_1 e^{\lambda m_3} \in L^1(0, +\infty)$ при любом λ.

③ Выберем число $t_0 > 0$ так, что $p(t_0) < \frac{1}{|\lambda|}$, и покажем, что при всех $t \ge t_0$

$$\int_t^\infty h_1(s)e^{\lambda m_3(s)}\,\mathrm{d}s\cdot\int_{t_0}^t h_2(s)e^{-\lambda m_3(s)}\,\mathrm{d}s \le p(t)^2\cdot\frac{e^2}{(1 - |\lambda|p(t_0))^2}. \tag{17.5}$$

Заметим, что произведение в левой части (17.5) равно

$$\int_t^\infty h_1(s)e^{\lambda(m_3(s) - m_3(t))}\,\mathrm{d}s\cdot\int_{t_0}^t h_2(s)e^{-\lambda(m_3(s) - m_3(t))}\,\mathrm{d}s.$$

Оценим эти интегралы по отдельности:

$$\begin{aligned}\int_t^\infty h_1(s)\,e^{\lambda(m_3(s) - m_3(t))}\,\mathrm{d}s &\le \int_t^\infty h_1(s)\exp\Big(|\lambda|p(t)\Big(1 + \log\frac{s}{t}\Big)\Big)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{e}{t^{|\lambda|p(t)}}\int_t^\infty h_1(s)s^{|\lambda|p(t)}\,\mathrm{d}s = \frac{e}{t^{|\lambda|p(t)}}\Big[t^{|\lambda|p(t)}\underbrace{\int_t^\infty h_1(s)\,\mathrm{d}s}_{\le\frac{1}{t}p(t)^2} \\ &\quad + \int_t^\infty |\lambda|p(t)s^{|\lambda|p(t)-1}\cdot\Big(\underbrace{\int_s^\infty h_1(x)\,\mathrm{d}x}_{\le\frac{1}{s}p(s)^2\le\frac{1}{s}p(t)^2}\Big)\,\mathrm{d}s\Big] \\ &\le \frac{e}{t}p(t)^2 + \frac{e}{t^{|\lambda|p(t)}}|\lambda|p(t)^3\frac{t^{|\lambda|p(t)-1}}{1 - |\lambda|p(t)} \le \frac{p(t)^2}{t}\cdot\frac{e}{1 - |\lambda|p(t_0)};\end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t} h_2(s)\, e^{-\lambda(m_3(s)-m_3(t))}\, \mathrm{d}s \le \int_{t_0}^{t} \underbrace{h_2(s)}_{\le 1} \exp\left(|\lambda| \underbrace{p(s)}_{\le p(t_0)} \Big(1+\log\frac{t}{s}\Big)\right) \mathrm{d}s$$
$$\le e\int_{t_0}^{t} \left(\frac{t}{s}\right)^{|\lambda| p(t_0)} \mathrm{d}s \le t\cdot \frac{e}{1-|\lambda| p(t_0)}.$$

Собирая эти оценки вместе, получаем (17.5).

④ В силу условия (17.2) для любого $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ найдется точка t_0, такая что выполнена оценка (17.5), откуда и следует предел (17.1).

❑

Из только что доказанной теоремы 17.2 немедленно вытекает (в усиленной форме) импликация (ii)⇒(iii) в теореме Каца. Рассмотрим импликацию (i)⇒(ii).

Лемма 17.3. *$A_K \cap B_{K'} = \varnothing$ при всех $K, K' > 0$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $\lambda \in A_K \cap B_{K'}$. Тогда $h_1 e^{\lambda m_3}, h_2 e^{-\lambda m_3} \in L^1(0,+\infty)$, откуда получим, что $h_3 \in L^1(0,+\infty)$:

$$\int_{\mathbb{R}} |h_3(x)|\, \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}} \sqrt{h_1(x)h_2(x)}\, \mathrm{d}x \le \left(\int h_1(x) e^{\lambda m_3(x)}\, \mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} h_2(x) e^{-\lambda m_3(x)}\, \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Значит, функция m_3 ограничена, и, таким образом, $h_1, h_2 \in L^1(0,+\infty)$, что, очевидно, противоречит нормировке $\operatorname{tr}\mathcal{H}(x) = 1$. ❑

Заметим далее, что из доказательства импликации (i)⇒(ii) в теореме 17.2 вытекает, что множества $\cup_{K>0} A_K$ и $\cup_{K>0} B_K$ – выпуклые. Из этого факта и утверждения леммы следует, что в условии (i) в теореме Каца логически мыслимы 4 ситуации:

$\sup\Big(\bigcup_{K<1} A_K\Big) = +\infty, \inf\Big(\bigcup_{K<1} A_K\Big) = -\infty,$,

$\sup\Big(\bigcup_{K<1} A_K\Big) = +\infty, \inf\Big(\bigcup_{K<1} B_K\Big) = -\infty,$,

и еще две, получаемые из указанных перестановкой A и B.

В первой ситуации утверждение теоремы Каца непосредственно содержится в теореме 17.2. Предположим, что для гамильтониана H реализуется вторая ситуация и что теорема Каца справедлива. Тогда в силу импликации (ii)⇒(iii) теоремы 17.2 на отрицательной полуоси найдется точка $\lambda \in A_K \cap B_{K'}$. Поскольку множества A_K и $B_{K'}$ дизъюнктны согласно лемме, получаем противоречие. Таким образом, либо гамильтонианов для которых реализуется вторая ситуация, не существует, либо утверждение теоремы Каца в этой ситуации неверно.

В заключение отметим, что было бы интересно получить прямое доказательство противоречивости второго случая в последнем перечне.

Заключение

В заключение упомянем о некоторых дальнейших результатах, полученных на основе защищаемых работ другими исследователями, и об открытых вопросах.

Следствием 10.4 мы доказали гипотезу Валента о порядке. С тех пор появилось второе доказательство этой гипотезы [15], которое ведется традиционными средствами теории ортогональных полиномов и не использует связь с каноническими системами. Вместо этого вопрос сводится к вычислению порядка для матрицы Якоби с $\rho_j = j^{\ell/2}$ и нулевой диагональю.

Помимо гипотезы о порядке, в работе [28] была высказана гипотеза о типе по отношению к этому порядку: в обозначениях, использованных в следствии 10.4, тип бесконечного произведения, построенного по спектру, равен

$$\ell \int_0^1 (1 - x^\ell)^{-2/\ell} \mathrm{d}x.$$

Эта гипотеза была доказана в работе моего ученика И. Бочкова [87] путем анализа асимптотик коэффициентов Тейлора матрицы Неванлинны. Указанные коэффициенты выражаются с через кратные усеченные ζ-ряды. Анализ асимптотики этих рядов стал возможен благодаря их комбинаторной структуре.

Сформулируем теперь некоторые вопросы, поставленные проведенными исследованиями.

- В теореме 2.5 основной результат об отсутствии а. н. спектра для дискретных диссипативных операторов Шрёдингера перенесен на случай матриц Якоби с вещественной ограниченной последовательностью ρ_j внедиагональных элементов. Известно, что для самосопряженных матриц Якоби а. н. спектр может быть непустым и при $\rho_j \to \infty$, см. например [86]. Было бы интересно выяснить, обобщается ли теорема 2.5 на растущие последовательности ρ_j. Доказательство теоремы 2.5 может быть немного обобщено в этом направлении, но возникающее условие связывает рост ρ_j и убывание $\operatorname{Im} q_j$. Метод, основанный на оценке вронскиана, по-видимому, не пригоден для полного анализа этого случая.

- Возможно ли построение эффективных спектральных разложений дифференциальных операторов главы II, не имеющих а. н. спектра? С одной стороны, согласно упомянутой во Введении теореме Марченко [1], оператор Шрёдингера с произвольным потенциалом обладает обобщенной спектральной функцией в слабом смысле, определенной как функционал над пространством основных функций, образованным целыми функциями, суммируемыми на $\mathbb{R}$. С другой стороны, из одного результата Мацаева [2, теорема 2] по разделению спектра абстрактных операторов следует, что если несуммируемая мнимая часть потенциала убывает степенным образом, то можно построить инвариантные подпространства оператора, отвечающие промежуткам вещественной оси. Можно ли в каком-либо смысле интерполировать между этими результатами в рассматриваемой ситуации и построить спектральное разложение типа интеграла Фурье по собственным функциям?

- Какие из результатов главы III об асимптотике решений уравнения переноса при больших временах переносятся на эволюцию в физически естественном пространстве $L^1(\mathbb{R} \times [-1, 1])$? В частности, можно ли доказать какие-либо результаты об эволюции в L^1, используя теорему 0.1 и теорему B? Отметим, что в изотропном случае $K(\mu, \mu') \equiv \mathrm{const}$ нетрудно видеть, что все собственные функции, отвечающие собственным значениям оператора T в верхней полуплоскости, на самом деле принадлежат L^1.

- Матрицы Якоби, для которых сформулирована гипотеза Валента, возникли при анализе процессов рождения-гибели. Имеется ли какая-либо вероятностная интерпретация полученных результатов, например, в терминах уравнения Колмогорова, описывающего эти процессы?

- Класс идеалов, обладающих сильным свойством Мацаева, весьма широк, но не покрывает некоторые интересные случаи вблизи класса ядерных операторов, например, такие как идеал $\mathfrak{S}_\pi$, отвечающий оценке сингулярных чисел вида $s_n(A) = O(1/(n \ln n))$. С другой стороны, в доказательстве основной теоремы мы пользуемся лишь слабым свойством Мацаева. Примеры идеалов, обладающих слабым свойством Мацаева и не обладающих сильным, нам неизвестны. Актуальная задача – выяснить, может ли идеал обладать слабым свойством Мацаева, не обладая сильным.

- В работе исследована задача о порядке для регулярных систем при $p < 1$ и для сингулярных систем при $p > 1$. Остался незатронут случай порядков < 1 для сингулярных систем. Можно ли получить оценку для порядка сверху в этом случае?

- Оценка порядка, полученная в теореме 10, может быть обобщена на другие характеристики роста. Особый интерес представляют логарифмические порядки, т. е. анализа роста спектра в ситуации нулевого степенного порядка. Такой перенос может оказаться полезным, поскольку нулевой порядок встречается в приложениях в, по крайней мере, двух не связанных друг с другом местах. Все ортогональные полиномы в неопределенном случае проблемы моментов Гамбургера в q-схеме Аски, упомянутые во введении, соответствуют матрицам Якоби нулевого порядка. Другой пример возникает в (пока нерешенной) задаче об описании канонических систем, отвечающих пространствам де Бранжа–Фока. Описание таких пространств, полученное в работе [85] в терминах спектральной меры, в содержательной ситуации сводится к некоторому классу матриц Якоби в случае предельного круга, имеющих лакунарный спектр.

Работы с изложением результатов диссертации

[I] R. Romanov, On the concept of absolutely continuous subspace for nonselfadjoint operators, *J. Oper. Theory* **63**:2(2010), 375–388.

[II] R. Romanov, A remark on equivalence of weak and strong definitions of the absolutely continuous subspace for nonself-adjoint operators, *Oper. Theory: Adv. Appl.* **154**, Birkhäuser, Basel, 2004, 179–184.

[III] Р. В. Романов, О неустойчивости абсолютно непрерывного спектра диссипативных операторов Шрёдингера и матриц Якоби, *Алгебра и анализ* **17**:2(2005), 145–169.

[IV] M. Marletta and R. Romanov, Absence of the absolutely continuous spectrum of a first-order non-selfadjoint Dirac-like system for slowly decaying perturbations, *Ark. Mat.* **44**:1(2006), 132–148.

[V] R. Romanov, Estimates of solutions of linear neutron transport equation at large time and spectral singularities, *Kinetic and Related Models* **5**:1(2012), 113–128.

[VI] R. Romanov, Order problem for canonical systems and a conjecture of Valent, *Transactions Amer. Math. Soc.* **369**:2(2017), 1061–1078.

[VII] R. Pruckner, R. Romanov and H. Woracek, Bounds on order of indeterminate moment sequences, *Constr. Approx.* **46**(2017), 199–225.

[VIII] R. Romanov and H. Woracek, Canonical systems with discrete spectrum, *J. Functional Analysis* **278**:4(2020), 108318, doi.org/10.1016/j.jfa.2019.108318

[IX] Р. В. Романов, М. А. Тихомиров, О самосопряженном подпространстве односкоростного оператора переноса, *Матем. заметки* **89**:1(2011), 91–103.

[X] A. Bufetov and R. Romanov, Division subspaces and integrable kernels, *Bull. London Math. Soc.* **51**(2019), 267–277.

Список литературы

[1] В. А. Марченко, Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, *Матем. сб.* **52(94)**:2(1960), 739–788.

[2] В. И. Мацаев, Об одном классе вполне непрерывных операторов, *Докл. АН СССР* **139**:3(1961), 548–551.

[3] Н. И. Ахиезер, "Классическая проблема моментов", Гос. изд. физ.-мат. литры, М., 1961.

[4] Louis de Branges, ”Hilbert Spaces of Entire Functions”, Prentice-Hall, NJ, 1968.

[5] L. A. Sakhnovich, "Spectral Theory of Canonical Differential Systems. Method of Operator Identities”, Oper. Theory Adv. Appl. **107**, Birkhäuser, Basel, 1999.

[6] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, “Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве”, Наука, М., 1965.

[7] И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, “Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения”, Наука, М., 1967.

[8] М. С. Бродский, “Треугольные и жордановы представления линейных операторов”, Наука, М., 1969.

[9] A. Baranov and H. Woracek, Subspaces of de Branges spaces with prescribed growth, *St. Petersburg Math. J.* **18**:5(2007), 699–716.

[10] M. Birman and M. Solomyak, Piecewise-polynomial approximations of functions of the classes W_p^α, *Mat. Sb.* **73(115)**:3(1967), 331–355.

[11] M. Birman and M. Solomyak, "Quantitative Analysis in Sobolev Imbedding Theorems and Applications to Spectral Theory”, AMS Transl. Ser. 2 **114**, Providence, RI, 1980.

[12] M. Kaltenbäck, H. Winkler, and H. Woracek, Strings, dual strings, and related canonical systems, *Math. Nachr.* **280**(2007), 1518–1536.

[13] M. S. Livšic, On some questions concerning the determinate case of Hamburger’s moment problem, *Rec. Math. Moscou, n. Ser.* **6**(1939), 293–306.

[14] C. Berg and R. Szwarc, On the order of indeterminate moment problems, *Adv. Math.* **250**(2014), 105–143.

[15] К. Берг, Р. Шварц, Симметричная проблема моментов и гипотеза Валента, *Матем. сб.* **208**:3(2017), 28–53.

[16] Yu. M. Berezanskii, "Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators”, AMS Transl. Math. Monographs **17**, Providence, RI, 1968.

[17] И. С. Кац, Включение степенной проблемы моментов Гамбургера в спектральную теорию канонических систем, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **262**(1999), 147–171.

[18] И. С. Кац, М. Г. Крейн, Критерий дискретности спектра сингулярной струны, *Изв. вузов. Матем.* №2(1958), 136–153.

[19] И. С. Кац, О роде спектра сингулярной струны, *Изв. вузов. Матем.* №1(1962), 57–64.

[20] И. С. Кац, Критерий дискретности спектра сингулярной канонической системы, *Функц. анализ и его прил.* **29**:3(1995), 75–78.

[21] Ch. Remling and K. Scarbrough, *Oscillation theory and semibounded canonical systems*, arXiv:1811.07067.

[22] Ch. Remling, "Spectral Theory of Canonical Systems", De Gruyter Studies in Mathematics Series, 2018.

[23] C. Berg and G. Valent, The Nevanlinna parametrization for some indeterminate Stieltjes moment problems associated with birth and death processes, *Methods and Applications of Analysis* **1**(1994), 169–209.

[24] J. Gilewicz, E. Leopold, and G. Valent, New Nevanlinna matrices for orthogonal polynomials related to cubic birth and death processes, *Journal of Comp. and Appl. Math.* **178**(2005), 235–245.

[25] M. E. H. Ismail, G. Valent, and G. Yoon, Some orthogonal polynomials related to elliptic functions, *J. Approximation Theory* **112**(2001), 251–278.

[26] M. E. H. Ismail, and D. Masson, q-Hermite polynomials, biorthogonal rational functions, and q-beta integrals, *Transactions Amer. Math. Soc.* **346**(1994), 63–116.

[27] J. Christiansen, Indeterminate Moment Problems within the Askey-scheme. Ph.D. thesis, University of Copenhagen (2004).

[28] G. Valent, Indeterminate moment problems and a conjecture on the growth of the entire functions in the Nevanlinna parametrization, in: "Applications and computation of orthogonal polynomials (Oberwolfach, 1998)", 227–237, Internat. Ser. Numer. Math. **131**, Birkhäuser, Basel, 1999.

[29] T. Uno and I. Hong, Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$, *Japanese J. Math.* **29**(1959), 152–164.

[30] M. Solomyak and E. Verbitsky, On a spectral problem related to self-similar measures, *Bull. Lond. Math. Soc.* **27**:3(1995), 242–248.

[31] H. Triebel, "Fractals and Spectra", Birkhäuser, Basel, 2000.

[32] I. S. Kats, Integral estimates for the distribution of the spectrum of a string, *Sibirskii Mat. Zh.* **27**:2(1986), 62–74.

[33] Louis de Branges, Some Hilbert spaces of entire functions. II, *Transactions Amer. Math. Soc.* **99**(1961), 118–152.

[34] M. Kaltenbäck and H. Woracek, Pontryagin spaces of entire functions. V, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **77**:1-2(2011), 223–336.

[35] Б. Я. Левин, "Распределение корней целых функций", ГИТТЛ, М., 1956.

[36] Ch. Remling, Schrödinger operators and de Branges spaces, *J. Funct. Anal.* **196**:2(2002), 323–394.

[37] J. Eckhardt and G. Teschl, Sturm–Liouville operators with measure–valued coefficients, *J. Anal. Math.* **120**(2013), 151–224.

[38] И. С. Кац, Густота спектра сингулярной струны, *Изв. вузов. Матем.* №3(1990), 23–30.

[39] В. С. Буслаев, Л. Д. Фаддеев, О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма–Лиувилля, *Докл. АН СССР* **132**:1(1960), 13–16.

[40] P. Deift and R. Killip, On the absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators with square summable potentials, *Comm. Math. Phys.* **203**(1999), 341–347.

[41] M. Christ and A. Kiselev, Scattering and wave operators for one-dimensional Schrodinger operators with slowly decaying nonsmooth potentials, *GAFA* **12**(2002), 1174–1234.

[42] M. Christ and A. Kiselev, WKB Asymptotic behavior of almost all generalized eigenfunctions for one-dimensional Schrodinger operators with slowly decaying potentials, *J. Funct. Anal.* **179**(2001), 426–447.

[43] С. Н. Набоко, Функциональная модель теории возмущений и её приложения к теории рассеяния, *Труды МИАН* **147**(1980), 86–114.

[44] В. В. Борзов, Качественные характеристики сингулярных мер, сборник "Проблемы математической физики", вып. 4, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1970, 42–47.

[45] Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, "Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака", Наука, М., 1988.

[46] С. Н. Набоко, Об условиях существования волновых операторов в несамосопряженном случае, сборник "Проблемы математической физики", вып. 12 (ред. М. С. Бирман), изд-во ЛГУ, Ленинград, 1987, 132–155.

[47] С. Н. Набоко, Абсолютно непрерывный спектр недиссипативного оператора и функциональная модель, *Зап. научн. сем. ЛОМИ* **65**(1976), 90–102.

[48] V. A. Ryzhov, Absolutely continuous and singular subspaces of nonselfadjoint operator, *Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* **222**(1995), 163–202.

[49] Б. С. Павлов, О разложении по собственным функциям абсолютно непрерывного спектра диссипативного оператора, *Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астр.* №1(1975), 130–137.

[50] N. G. Makarov and V. I. Vasyunin, Model for noncontractions and stability of the continuous spectrum, *Lect. Notes Math.* **864**(1981), 365–412.

[51] Л. А. Сахнович, Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром, *Труды Моск. мат. о-ва* **19**(1968), 211–270.

[52] Б. С. Павлов, Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шрёдингера и разложение по его собственным функциям, *Матем. сб.* **102**:4(1977), 511–536.

[53] М. А. Наймарк, Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, *Труды Моск. мат. о-ва* **3**(1954), 181–270.

[54] B. S. Pavlov, Spectral analysis of a dissipative singular Schrödinger operator in terms of a functional model, in “Partial Differential Equations, VIII"(ed. M. Shubin), Encyclopaedia Math. Sci. **65**, Springer, Berlin, 1996, 87–153.

[55] Б. С. Павлов, Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора, Известия АН СССР. Сер. матем. **39**:1(1975), 123–148.

[56] А. С. Тихонов, “Абсолютно непрерывный спектр линейного оператора и задачи теории рассеяния и факторизации оператор-функций”. Автореф. ... канд. физ. - мат. наук, Симферопольский Гос. Ун-т, Симферополь, 1989.

[57] А. С. Тихонов, Функциональная модель и двойственность спектральных компонент для операторов с непрерывным спектром на кривой, *Алгебра и анализ* **14**:4(2002), 655–682.

[58] A. R. Sims, Secondary conditions for linear differential operators of the second order, *J. Math. Mech.* **6**(1957), No. 2, 247–285.

[59] M. S. P. Eastham, "The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems”, Oxford, 1989.

[60] D. B. Pearson, "Quantum Scattering and Spectral Theory”, Academic Press, London, 1988.

[61] D. Gilbert and D. Pearson, On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrodinger operators, *J. Math. Anal. Appl.* **128**(1987), 30–56.

[62] Y. Last and B. Simon, Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators, *Invent. Math.* **135**:2(1999), 329–367.

[63] B. Simon, Bounded eigenfunctions and absolutely continuous spectra for one-dimensional Schrödinger operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124**(1996), 3361–3369.

[64] B. Szökefalvi-Nagy and C. Foias, "Analyse Harmonique des Operateurs de l′Espase de Hilbert,"Masson et C^{ie}/ Academiai Kiado, 1967.

[65] Н. К. Никольский, "Лекции об операторе сдвига", Наука, М., 1980.

[66] S. Hassi, H. de Snoo and H. Winkler, Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems, *Integral Eq. Oper. Theory* **36**(2000), 445–479.

[67] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Оценки сингулярных чисел интегральных операторов, *Успехи Мат. Наук*, **32**:1(193)(1977), 17–84.

[68] J. Lehner, The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab, *J. Math. Mech.* **11**(1962), 173–181.

[69] J. Lehner and G. Wing, On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons, *Comm. Pure Appl. Math.* **8**(1955), 217–234.

[70] J. Lehner and G. Wing, Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry, *Duke Math. J.* **23**(1956), 125–142.

[71] Yu. Kuperin, S. Naboko and R. Romanov, Spectral analysis of the transport operator: A functional model approach, *Indiana Univ. Math. J.* **51**(2002), 1389–1425.

[72] S. Naboko and R. Romanov, Spectral singularities and asymptotics of contractive semigroups. I, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **70**(2004), 379–403.

[73] E. Lindelöf, Sur les fonctions entières d'ordre entier, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3)* **22**(1905), 369–395.

[74] M. Kaltenbäck and H. Woracek, Canonical differential equations of Hilbert-Schmidt type, *Oper. Theory Adv. Appl.* **175**, Birkhäuser, Basel, 2007, 159–168.

[75] A. B. Aleksandrov, S. Janson, V. V. Peller and R. Rochberg, An interesting class of operators with unusual Schatten-von Neumann behavior, in: "Function spaces, interpolation theory and related topics" (Lund, 2000), de Gruyter, Berlin, 2002, 61–149.

[76] А. А. Митител, Г. И. Руссу, О симметрично-нормированных идеалах, слабо промежуточных между $\mathfrak{S}^1$ и некоторым $\mathfrak{S}^p$, "Линейные операторы" (Математические исследования, вып. 54), Штиница, Кишинев, 1980, стр. 121–140.

[77] А. А. Митител, Об интерполяции трансформаторов слабого типа в симметрично-нормированных идеалах, в сб. "Операторы в банаховых пространствах" (Математические исследования, вып. 47), Штиница, Кишинев, 1978, стр. 120–134.

[78] Г. И. Руссу, Вольтерровы операторы с мнимыми компонентами из заданного симметрично-нормированного идеала, в сб. “Линейные операторы” (Математические исследования, вып. 54), Штиница, Кишинев, 1980, стр. 141–151.

[79] Г. И. Руссу, Свойство Харди–Литтлвуда в симметрично-нормированных идеалах и его связь со свойством мажорантности, в сб. “Спектральные свойства операторов” (Математические исследования, вып. 45), Штиница, Кишинев, 1977, стр. 144–162.

[80] L. Maligranda, “Orlicz Spaces and Interpolation”, Campinas, SP: Univ. Estadual de Campinas, Dep. de Matemática, 1989.

[81] J. Lindenstrauss, and L. Tzafriri, “Classical Banach Spaces. I, Sequence Spaces”, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **92**, Springer-Verlag, Berlin-New York,1977.

[82] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, “Regular Variation”, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **27**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[83] P. Lelong, and L. Gruman, “Entire Functions of Several Complex Variables”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] **282**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[84] S. Lord, F. Sukochev, and D. Zanin, “Singular Traces”, De Gruyter Studies in Mathematics **46**, De Gruyter, Berlin, 2013.

[85] A. Baranov, Yu. Belov, and A. Borichev, Spectral synthesis in de Branges spaces, *GAFA* **25**(2015), 417–452.

[86] J. Janas and S. Naboko, Jacobi matrices with power like weights – grouping in blocks approach, *J. Funct. Anal.* **166**:2(1999), 218–243.

[87] I. Bochkov, Polynomial birth–death processes and the second conjecture of Valent, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I **357**(2019), 247–251.