Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Лебедева Елена Александровна

Всплеск-преобразование: частотно-временная локализация, разложения по системам всплесков, обратимость

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математическмх наук
профессор М. А. Скопина

Санкт-Петербург – 2017

Оглавление

Обозначения и сокращения

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – множества всех натуральных, целых, неотрицательных целых, действительных и комплексных чисел соответственно.

$\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$.

E_n – единичная матрица порядка n.

M^* – матрица, сопряженная для матрицы M.

$\mathbb{1}_E$ – характеристическая функция множества E.

$[x]$ — целая часть числа x.

$C^k[a,b]$ — пространство всех k раз непрерывно дифференцируемых функций, заданных на отрезке $[a,b]$ с нормой $\|f\|_{C^k} := \sum_{j=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(j)}(x)|$, $C^0[a,b] = C[a,b]$, $C[\mathbb{T}] = C$.

$L_p(A)$ — пространство всех измеримых на A функций f, для которых интеграл $\int_A |f(x)|^p\,dx$ конечен, с нормой $\|f\|_{L_p} := \left(\int_A |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$.

$W_2^1[a,b]$ — пространство всех абсолютно непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}$, имеющих первую производную, суммируемую с квадратом на отрезке $[a,b]$, с нормой $\|f\|_{W_2^1} := \|f\|_{L_2} + \|f'\|_{L_2}$.

$AC_{loc}(\mathbb{R})$ – пространство всех локально абсолютно непрерывных функций на прямой.

$\widehat{g}(\omega) := \int\limits_{\mathbb{R}} g(t)e^{-it\omega}\,dt$ – преобразование Фурье функции из $L(\mathbb{R})$.

$c(f) := \|f\|^{-2}_{L_2(\mathbb{R})} \int\limits_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2\,dx$ – центр функции $f \in L_2(\mathbb{R})$.

$\Delta(f) := \|f\|^{-1}_{L_2(\mathbb{R})} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} (x - c(f))^2|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ – радиус функции $f \in L_2(\mathbb{R})$.

$\alpha_f := k + \sup_{\beta\in\mathbb{R}}\left\{\beta \in \mathbb{R} \middle| |f^{(k)}(x_1) - f^{(k)}(x_2)| \le C_\beta |x_1 - x_2|^\beta,\ x_1, x_2 \in [a,b]\right\}$, где $k := \max_{h\in\mathbb{Z}}\left\{h \middle| f \in C^h[a,b]\right\}$ – показатель Гельдера гладкости функции f на отрезке $[a,\,b]$.

$\theta_f := \sup_{\beta\in\mathbb{R}} \left\{\beta \in \mathbb{R} \,\middle|\, |f(\omega)| \le C(|\omega|+1)^{-\beta}\right\}.$

$G = G_p$, G_2 – группа Виленкина, группа Кантора.

$\chi_t(x)$ – характер на группе G.

$Ff(\xi) := \int\limits_G f(x)\overline{\chi_\xi(x)}\,dx$ – преобразование Фурье-Уолша функции из $L(G)$.

w_k, $k \in \mathbb{N}$ – k-ая обобщенная функция Уолша.

$f^{[n]}$ – производная Гиббса порядка n функции $f : G_2 \to \mathbb{C}$.

$\mathcal{D}^\alpha$ – дробная модифицированная производная Гиббса порядка $\alpha \in \mathbb{R}$.

КН – константа неопределенности.

КМА – кратномасштабный анализ.

НВП – непрерывное всплеск-преобразование.

Введение

Актуальность темы. Всплеском (или всплеск-функцией) называют два близких, но не эквивалентных объекта. Во-первых, всплеском называют функцию ψ, используемую в качестве ядра интегрального преобразования (непрерывное всплеск-преобразование (НВП))

$$W_\psi f(a,\, b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, dx, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

При этом свойства, характеризующие всплеск-функцию в этом контексте (нулевое среднее и быстрое убывание на бесконечности), содержатся в условии допустимости

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\, d\omega < \infty.$$

При выполнении последнего неравенства справедлива формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a,\, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da\, db}{|a|^{5/2}}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Во-вторых, всплеском (или всплеск-функцией) называют функцию ψ, двоичные сжатия и целочисленные сдвиги которой

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

образуют какую-либо систему представления (базис или фрейм) в некотором функциональном пространстве (первоначально, в $L_2(\mathbb{R})$). Тогда говорят, что определено дискретное всплеск-преобразование. Более общее определение приводит к нестационарным системам всплесков, где исходной является не одна функция ψ, а последовательность ψ_j^N, $j \in \mathbb{Z}$, и вся система порождается только сдвигами функций этой последовательности

$$\psi_{j,k}^N(x) := \psi_j^N(x - 2^{-j}k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что функция, порождающая дискретное всплеск-преобразование будет порождать и непрерывное, но не наоборот. Так, если функция ψ порождает фрейм всплесков, то $C_\psi < \infty$. В то же время, при $a = 2^{-j}$, $b = 2^{-j}k$, $j, k \in \mathbb{Z}$ формула непрерывного всплеск-преобразования служит для расчета коэффициентов разложения по системе $\{\psi_{j,k}\}$, $j, k \in \mathbb{Z}$, но без дополнительных требований на функцию ψ нельзя утверждать даже линейную независимость этой системы.

Одно из характерных свойств всплеск-фунции – ее хорошая локализованность по времени (пространству) и частоте. Многие классические семейства этим свойством обладают, то есть и сами всплеск-функции и их преобразования Фурье быстро убывают на бесконечности.

Частотно-временную локализованность функции пространства $L_2(\mathbb{R})$ измеряют с помощью константы неопределенности (КН) Гейзенберга, предложенной в 1927 году В. Гейзенбергом и Э. Шредингером. КН характеризует локализованность функции во временной (множитель $\Delta(\psi)$) и в частотной (множитель $\Delta(\widehat{\psi})$) областях. Чем меньше каждый из данных множителей, тем лучше функция локализована в соответствующей области. Так, для системы Хаара $\Delta(\psi) = \sqrt{5/6}$, $\Delta(\hat{\psi}) = \infty$, поэтому система Хаара лучше локализована по времени, чем по частоте. Для периодических функций КН была предложена Э. Брейтенбергером в 1985 году, исходя из квантово-механических представлений об угловых наблюдаемых (angle observables). Обе КН ограничены снизу положительной постоянной, этот факт лежит в основе принципа неопределенности. Известен общий операторный подход, в котором принцип неопределенности является следствием некоммутативности некоторых пар самосопряженных операторов гильбертова пространства. КН определены также для многих локально компактных групп. Этим темам посвящены работы В. П. Хавина, Б. Ёрикке, Г. Б. Фолланда, А. Ситарама, Дж. Ф. Прайса, а также написаные ими монографии и обзоры, содержащие обширную библиографию. В работах Г. Баттла, Р. Балана, С. Дальке, П. Мааса, Д. Л. Донохо, Т. Гудмана, Ч. Мичелли, К. Зайлих получены уточнения границ КН для различных простанств.

Еще одним преимуществом базисов всплесков является их безусловность. Так, базисы всплесков дали первые примеры безусловных базисов для некоторых функциональных пространств. Для широкого класса всплеск-функций базисы всплесков в $L_2(\mathbb{R})$ являются и безусловными базисами в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Этой тематике посвящены работы И. Мейера, Г. Грипенберга, П. Войташчика, И. Я. Новикова. Для приложений безусловная сходимость разложений важна потому, что пренебрегая малыми слагаемыми, можно не заботиться об их номерах, оставшаяся сумма будет хорошо приближать исходную функцию.

НВП является одним из мощных современных инструментов анализа в различных областях науки, связанных с изучением нестационарных сигналов, так как оно позволяет получить детализированное частотно-временное разложение нестационарного сигнала (С. Малла, П. Эддисон, В. Келлер, М. Унзер). В частности, НВП используется в задачах квантовой механики, поскольку всплески дают удобный метод для представления когерентных состояний (А. Мужикян, М. Тотонж), а также в задачах нейродинамики (А. Павлов, А. Храмов, А. Короновский), где импульсы (спайки), форму которых можно интерпретировать как всплеск-функции, являются типичным видом регистрируемой активности.

Данная работа посвящена изучению некоторых характерных для всплеск-преобразований свойств, таких как частотно-временная локализация, безусловная сходимость и кратномасштабная структура разложений по системам всплесков, обратимость, и построению новых примеров объектов (системы всплесков, КН для функций, определенных на группе Кантора, альтернативная формула обращения НВП), имеющих некоторые дополнительные свойства.

Цели работы. Исследование характерных свойств всплесков, а именно, построение хорошо локализованных базисов и фреймов всплесков на прямой и периодических всплесков; нахождение всплеск-функции Мейера с наименьшей КН Гейзенберга; уточнение нижней границы КН Брейтенбергера на классах периодических последовательностей; введение характеристики для локализованности функций, определенных на группе Кантора; изучение связи между нестационарными и периодическими системами всплесков; разработка методов решения дифференциальных уравнений, содержащих классическую и модифицированную производные Гиббса; решение матричной проблемы продолжения для фреймов всплесков, определенных на группе Виленкина; альтернативная формула для обращения НВП, не требующая выполнения условия допустимости.

Методика исследования. Основными методами исследования являются методы математического анализа, теории всплесков, теории функций и вариационного исчисления, а также методы, разработанные автором работы.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Решена задача Ч. Чуи 1996 года о существовании семейства ортонормированных базисов всплесков, КН которых остаются ограниченными с ростом гладкости всплеск-функций. Построенные всплеск-функции (квазисплайн всплески) экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности, их преобразования Фурье имеют поведение $O(\omega^{-l})$, $\omega \to \infty$, где l – параметр семейства. КН этих функций стремятся к КН всплеск-функций Мейера, использованных при построении. Конструкция основана на линейных методах суммирования тригонометрических рядов Фурье. Широкий класс линейных методов удовлетворяет требованиям, предъявляемым конструкцией. В частности, к этому классу относятся средние Фейера, Валле-Пуссена, Рогозинского, Абеля–Пуассона, монотонные средние Валле-Пуссена.

2. Найдена всплеск-функция Мейера, имеющая наименьшую возможную КН Гейзенберга. Минимизация КН сведена к выпуклой вариационной задаче, решение которой удовлетворяет нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению второго порядка. Поскольку его аналитическое решение неизвестно, то построена последовательность всплеск-функций Мейера, определяемых в явном виде и равномерно приближающих экстремальную всплеск-функцию Мейера.

3. Построено семейство фреймов Парсеваля периодических всплесков, у которых масштабирующая последовательность имеет асимптотически минимальные КН, а всплесковая последовательность имеет наименьшие известные на текущий момент КН. Найден класс последовательностей периодических функций, в котором построенная всплесковая последовательность имеет асимптотически минимальные КН. Таким образом, для случая фреймов Парсеваля и масштабирующих последовательностей положительно решен вопрос, поставленный Ю. Престином, Э. Куаком в 1999 году, о существовании таких систем. Для всплесковых последовательностей вопрос решен положительно внутри класса.

4. Разработан метод построения систем нестационарных всплесков, периодизация которых совпадает с исходной системой периодических всплесков, при этом нестационарные маски могут быть выбраны произвольно гладкими. В терминах масок периодических всплесков получены достаточные условия для согласованности локализаций построенной нестационарной системы $\{\psi_{j,k}^N\}$ и исходной периодической $\{\psi_{j,k}^P\}$. Под согласованностью понимается равенство $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$, в котором UC_H и UC_B – КН Гейзенберга и Брейтенбергера соответственно.

5. Введено понятие КН для функций, заданных на группе Кантора, доказано существование принципа неопределенности для этой КН, вычислены значения КН для некоторых классических масштабирующих и всплеск-функций (всплесков Лэнга), численно найдены хорошо локализованные фреймы всплесков.

6. Разработан метод решения дифференциальных уравнений, в которых пространственная переменная неизвестной функции принадлежит группе Кантора, а временная действительна, в качестве производной выступает классическая и модифицированная производные Гиббса. Метод базируется на представлении распределений на группе Кантора в виде формальных рядов по системам Уолша и Хаара. Решения найдены

в классе распределений, исследованы условия, при которых решения регулярны, непрерывны и суммируемы с квадратом.

7. Дано точное описание всех полиномов Уолша, порождающих жесткие фреймы всплесков в пространстве $L_2(G)$, где G – группа Виленкина. Найдены соответствующие маски всплесков, то есть решена проблема матричного продолжения, и дано точное описание всех решений этой проблемы.

8. Получены достаточные условия для безусловной сходимости в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков.

9. Найдена альтернативная формула обращения НВП, которая применима даже в случае нарушения условия допустимости $C_\psi < \infty$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования систем всплесков и НВП, в частности для изучения свойств локализованности систем, безусловной сходимости разложений, развития теории нестационарных всплесков, а также для применения НВП к различным прикладным задачам.

Аппробация работы. Результаты данной работы докладывались на конференциях: Воронежская зимняя математическая школа (2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017), Саратовская зимняя математическая школа (2008, 2010, 2014, 2016), международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения" (Абрау Дюрсо, 2008, 2012), "Wavelets and Applications" (Санкт-Петербург, Россия, 2012, 2015), "Recent Progress in Wavelet Analysis and Frame Theory" (Бремен, Германия, 2006), "From Abstract to Computational Harmonic Analysis" (Штробль, Австрия, 2011), "International Conference in Modern Analysis" (Донецк, Украина, 2011), "Harmonic Analysis and Approximation" (Цахкадзор, Армения, 2011, 2015), "Constructive Theory of Functions" (Созополь, Болгария, 2013), "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM)" (Родос, Греция, 2013), "Dyadic

Analysis and Related Fields with Applications" (Ньиредьхаза, Венгрия, 2014), International Congress of Mathematicians (Сеул, Южная Корея, 2014), 15th International Conference in Approximation Theory (Сан Антонио, США, 2016), "Approximation Methods and Data Analysis" (Хасенвинкель, Германия, 2016);

на семинарах: по конструктивной теории функций в СПбГУ (рук. проф. М. А. Скопина), по теории операторов и теории функций в ПОМИ (рук. проф. В. П. Хавин, акад. С. В. Кисляков), по теории функций действительного переменного в МГУ (рук. акад. Б. С. Кашин), в Орегонском университете (рук. проф. М. Боуник), в университете г. Любек (рук. проф. Ю. Престин).

Работа поддержана грантом DAAD по программе "Михаил Ломоносов" (2009) и грантами президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук (2010, 2012).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [13]-[17], [50], [73], [78]-[83], [98], [99]. Все работы опубликованы в журналах из списка ВАК (5 статей в российских журналах и 10 статей в ведущих зарубежных журналах). Из совместных работ в диссертацию включены только результаты автора.

Структура и объем работы. Диссертация объемом 215 страниц состоит из списка обозначений и сокращений, введения, девяти глав, разделенных на параграфы, заключения и списка литературы, содержащего 124 источника. Изучению свойств систем всплесков (дискретных всплеск-преобразований) посвящены главы 1-8, причем в главе 4 рассматриваются нестационарные системы. В главе 9 исследуется НВП. Для удобства чтения каждая глава снабжена собственным введением.

Основное содержание работы. В главе 1 решена задача Ч. Чуи 1996 года о существовании семейства ортонормированных базисов всплесков, КН которых остаются ограниченными с ростом гладкости всплеск-функций.

Конструкция основана на линейных методах суммирования тригонометрических рядов Фурье. Широкий класс линейных методов удовлетворяет требованиям, предъявляемым конструкцией. В частности, к этому классу относятся средние Фейера, Валле-Пуссена, Рогозинского, Абеля–Пуассона, монотонные средние Валле-Пуссена.

Пусть для ряда Фурье $f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega$ последовательность $(\lambda_{n,k})$, $k=1,\dots n$, $n\in\mathbb{N}$ определяет линейный метод суммирования

$$u_n(f,\omega) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}(a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) U_n(x,\omega)\, dx,$$

где $U_n(x,\omega) := 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} \cos k(x-\omega)$ и

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos\, n\omega\, d\omega, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \sin\, n\omega\, d\omega \text{ –}$$

коэффициенты Фурье.

Определим неортогональную маску квазисплайн всплеска как 2π-периодический тригонометрический полином

$$m_l(\omega) := \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} \frac{u_{n(l)}(m_l^M,\omega)}{u_{n(l)}(m_l^M,0)},$$

где

$$m_l^M(\omega) := \frac{m^M(\omega)}{\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l}},\ l\in\mathbb{N},$$

m^M – фиксированная маска Мейера и полином $u_{n(l)}(m_l^M,\cdot)$ получен фиксированным линейным методом суммирования, примененным к функции m_l^M.

Так как m_l – тригонометрический полином, и $m_l(0)=1$, то бесконечное произведение $\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$ сходится абсолютно и равномерно на любом замкнутом отрезке. (Мы считаем бесконечное произведение сходящимся и в том случае, когда оно равно нулю.) Функция m_l является маской для неортогональной масштабирующей функции φ_l, где преобразование Фурье φ_l определяется так:

$$\widehat{\varphi}_l(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right).$$

Функции $\varphi_l(\cdot+k)$, $k\in\mathbb{Z}$, образуют систему Рисса, это следует из неравенства $A \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)|^2 \le B$, которое проверяется при доказательстве основной теоремы. Доказывается, что ортогонализующий множитель

$$\Phi_l(\omega) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(\omega + 2\pi k)|^2$$

корректно определен и строго положителен. Далее по общей схеме кратно-масштабного анализа определяется преобразование Фурье ортогональной масштабирующей функции

$$\widehat{\varphi_l^{\perp}}(\omega) := \widehat{\varphi}_l(\omega)\Phi_l^{-0.5}(\omega),$$

ортогональная маска

$$m_l^{\perp}(\omega) := m_l(\omega)\Phi_l^{0.5}(\omega)\Phi_l^{-0.5}(2\omega),$$

и преобразование Фурье всплеск-функции

$$\widehat{\psi_l^{\perp}}(\omega) := e^{\frac{-i\omega}{2}}\overline{m_l^{\perp}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\widehat{\varphi_l^{\perp}}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Итак, для фиксированной маски Мейера и фиксированного линейного метода суммирования мы получаем последовательность $(\psi_l^{\perp})_{l\in\mathbb{N}}$ квазисплайн всплеск-функций, причем с ростом параметра l растет гладкость функции.

В следующей теореме доказываются основные свойства семейства квазисплайн всплесков

Теорема 0.0.1. (теорема 1.2.1) *Пусть существует последовательность $n(l)$, $l \in \mathbb{N}$, такая что*

$$\|u_{n(l)}(m_l^M,\cdot) - m_l^M\|_C =: \alpha(l) = o(l^{-1}) \text{ при } l \to \infty,$$

$$\|u_{n(l)}((m_l^M)',\cdot) - (m_l^M)'\|_C =: \gamma(l) = o(1) \text{ при } l \to \infty,$$

$$u_{n(l)}(m_l^M,\pi) \neq 0.$$

Пусть $\psi_l^{\perp}$ ($\varphi_l^{\perp}$) – квазисплайн всплеск-функции (масштабирующие функции). Тогда

1. *функции $\varphi_l^{\perp}$ и $\psi_l^{\perp}$ экспоненциально убывают на бесконечности;*

2. *показатели Гельдера $\alpha_{\varphi_l^\perp}$ и $\alpha_{\psi_l^\perp}$ этих функций удовлетворяют неравенствам*

$$2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1 + \alpha(l)/\|m_l^M\|_C}\right) \le \alpha_{\varphi_l^\perp} \le 2l,$$

$$2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1 + \alpha(l)/\|m_l^M\|_C}\right) \le \alpha_{\psi_l^\perp} \le 2l;$$

3. *константы неопределенности (1.1) квазисплайн масштабирующих функций $\varphi_l^\perp$ и всплеск-функций $\psi_l^\perp$ стремятся к константам неопределенности масштабирующих функций φ^M и всплеск-функций Мейера ψ^M, точнее*

$$|\Delta^2(\widehat{\varphi_l^\perp}) - \Delta^2(\widehat{\varphi^M})| = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-2l + 4\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$

$$|\Delta^2(\varphi_l^\perp) - \Delta^2(\varphi^M)| = O\left(\max\{\mu(l),\, l(32\pi^2 e^{2\omega_0}/27)^{-l + 2\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$

$$|\Delta^2(\widehat{\psi_l^\perp} - \Delta^2(\widehat{\psi^M})| = O\left(\max\{\mu(l),\, l(32\pi^2 e^{2\omega_0}/27)^{-l + 2\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$

$$|\Delta^2(\psi_l^\perp) - \Delta^2(\psi^M)| = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-l + 2\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right)$$

при $l \to \infty$, где $\mu(l) := l\alpha(l) + \gamma(l)$.

В главе 2 изучается частотно-временная локализованность семейства всплеск-функций Мейера. В параграфе 2.1 найдена система всплесков Мейера, имеющая наименьшую возможную КН Гейзенберга. Минимизация КН сведена к выпуклой вариационной задаче, решение которой удовлетворяет нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению второго порядка. В 2007 году автором получено следующее выражение для квадрата КН Гейзенберга, вычисленного для всплеск-функции Мейера

$$J(x) \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin x(t)\,dt\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x'(t)\right)^2 dt\,,$$

где $x(t) = 2\theta(t)$, и функцию x можно выбрать из множества

$$x \in W_2^1\left[0;\,\frac{\pi}{3}\right], \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Основной результат §2.1 сформулирован в следующей теореме

Теорема 0.0.2. (теорема 2.1.1) *Существует функция $x(t)$, доставляющая абсолютный минимум функционала J при условиях $x \in W_2^1[0;\,\pi/3]$, $x(0) = 0$, $x(\pi/3) = \pi/2$. Она является аналитической возрастающей вогнутой функцией на отрезке $\left[0;\,\frac{\pi}{3}\right]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$x''(t) \;= -q\,t\,\cos x(t)$$

при некотором значении параметра $q \geq 0$.

Доказательство следует из двух лемм. Обозначим

$$G(x) := \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \big(x'(t)\big)^2\,dt,\;\; F(x) := -\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin x(t)\,dt,$$

$$M_a^0 := \left\{x \in W_2^1\left[0;\,\frac{\pi}{3}\right]\Big|\;G(x) = a,\; x(0) = 0,\; x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Лемма 0.0.1. (лемма 2.1.1) *Если при некотором $q \geq 0$ функция $\overline{x}(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$x''(t) \;= -q\,t\,\cos x(t)$$

и граничным условиям $\overline{x}(0) = 0, \overline{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$, то она доставляет абсолютный минимум в вариационной задаче

$$F(x) \to \min \quad x \in M_a^0,$$

где $a = G(\overline{x})$, причем данная точка минимума единственна.

В. Ю. Протасовым доказана следующая

Лемма 0.0.2. (лемма 2.1.2) *При любом $q \geq 0$ уравнение $x''(t) = -q\,t\,\cos x(t)$ имеет единственное решение $x(t)$, такое что $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{3}\right) =$*

$\frac{\pi}{2}$. *Это решение является аналитической возрастающей вогнутой функцией, непрерывно зависящей от параметра* q.

При $q \to +0$ *имеем* $G(x) \to \frac{3\pi}{4}$, *а при* $q \to \infty$ *имеем* $G(x) \to \infty$. *Для любого* $a \geq \frac{3\pi}{4}$ *существует единственное значение параметра* $q \geq 0$, *при котором соответствующее решение уравнения* $x''(t) = -q\,t\cos x(t)$ *удовлетворяет равенству* $G(x) = a$.

Минимальное значение КН для всплеск-функций Мейера с точностью $0,001$ равно $2,622$ и достигается при $q = 0,676$.

Аналитическое решение уравнения $x''(t) = -q\,t\cos x(t)$ не известно. В параграфе 2.2 построено приближенное решение данного уравнения, а именно, последовательность очень простых дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения, равномерно сходящиеся к решению исходного уравнения. Для этого проверено, что любая минимизирующая последовательность вариационной задачи $F(x) \to \min$, $x \in M_a^0$ равномерно сходится к решению этой задачи. Далее построен пример минимизирующей последовательности $\tilde{x}_n$. Он получается как решение вспомогательных дифференциальных уравнений, уравнений Эйлера–Лагранжа для вспомогательных вариационных задач.

Рассмотрим сплайны первой степени f_n, интерполирующие функцию sin на равномерном разбиении отрезка $[0;\,\pi/2]$ с шагом $h = \pi(2n)^{-1}$ и узлами $\tau_k = kh$, $k = \overline{0,n}$:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (d_k(t-\tau_k) + \sin(\tau_k))\mathbb{1}_{[\tau_{k-1};\,\tau_k]}(t),$$

где $d_k = (\sin\tau_k - \sin\tau_{k-1})/h$ и $\mathbb{1}_{[a;\,b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a;\,b]$.

Рассмотрим последовательность задач:

$$H_n(x) = \int_0^{\pi/3} (-t\,f_n(x(t)))\,dt \to \min, \quad x \in M_a^0.$$

Теорема 0.0.3. (теорема 2.2.3) *Выполняется:*

1. *для каждого* n *существует единственная функция* $\tilde{x}_n(t)$, *доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи* $H_n(x) \to \min$,

$x \in M_a^0$; функция $\tilde{x}_n(t)$ является решением дифференциального уравнения $x'' = -p_n\, t\, f_n'(x)$ и имеет вид

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{r=1}^{n} \left(-\frac{p_n d_r t^3}{6} + C_r t + D_r \right) \cdot \mathbb{1}_{[t_{r-1};\, t_r]}(t),$$

где параметры C_r, D_r, t_r определяются из условий $\tilde{x}_n(t_r) = \tau_r$, $t_r < t_{r+1}$, $r = \overline{0,\, n}$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$, $\tilde{x}_n \in C^1[0;\, \pi/3]$;

2. *последовательность $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей для задачи $F(x) \to \min$, $x \in M_a^0$;*

3. *имеет место сходимость $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$, где $\tilde{x}$ решение задачи $F(x) \to \min$, $x \in M_a^0$, доставляющее абсолютный минимум функционала J при условиях $x \in W_2^1[0;\, \pi/3]$, $x(0) = 0$, $x(\pi/3) = \pi/2$;*

4. *имеет место сходимость $\|\widetilde{\psi^M}_n - \widetilde{\psi^M}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$, где $\widetilde{\psi^M}_n$ и $\widetilde{\psi^M}$ – всплеск-функции Мейера, построенные по вспомогательным функциям $\tilde{x}_n = 2\tilde{\theta}_n$ и $\tilde{x} = 2\tilde{\theta}$ соответственно.*

В главе 3 мы изучаем локализованность систем периодических всплесков. В параграфе 3.2 построено семейство фреймов Парсеваля периодических всплесков с наименьшими возможными КН для масштабирующей последовательности и наименьшими известными на сегодняшний день КН для всплесковой последовательности (см. определение КН Брейтенбергера (периодической КН) на стр. 87).

Теорема 0.0.4. (теорема 3.2.1) *Существует семейство всплесковых последовательностей $\Psi_a := \{(\psi_j^a)_{j=0}^{\infty} :\ a > 1\}$, порожденных масштабирующими последовательностями $(\varphi_j^a)_{j=0}^{\infty}$, такое что для любого фиксированного $a > 1$ система $\{\varphi_0^a\} \cup \{\psi_{j,k}^a :\ \ j = 0, 1, \ldots,\ k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$, где $\psi_{j,k}^a(x) := \psi_j^a(x - 2^{-j}k)$, образует фрейм Парсеваля в $L_2(0,\, 1)$ и*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{a>1} UC_B(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} UC_B(\varphi_j^a) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = \frac{3}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = \frac{1}{2}.$$

Семейство Ψ_a строится следующим образом. Положим $\varphi_0^a = 1$. Пусть $\nu_k^{j,a}$ – последовательность, определенная так: $\nu_0^{1,a} = \nu_1^{1,a} = \sqrt{1/2}$ и

$$\nu_k^{j,a} := \begin{cases} \exp\left(-\frac{k^2+a^2}{j(j-1)a}\right), & k = -2^{j-2}+1, \ldots, 2^{j-2}, \\ \sqrt{1-\exp\left(-\frac{2((k-2^{j-1})^2+a^2)}{j(j-1)a}\right)}, & k = 2^{j-2}+1, \ldots, 3\times 2^{j-2}, \end{cases}$$

и продолжена 2^j-периодически по k. Далее определим $\widehat{\xi}_j^a(k) := \prod_{r=j+1}^{\infty} \nu_k^{r,a}$. Тогда маситабирующая последовательность, маски, маски всплесков и всплесковая последовательность определены так:

$$\widehat{\varphi_j^a}(k) := 2^{-j/2}\widehat{\xi}_j^a(k), \qquad \mu_k^{j,a} := \sqrt{2}\nu_k^{j,a},$$
$$\lambda_k^{j,a} := e^{2\pi i 2^{-j}k}\mu_{k+2^{j-1}}^{j,a}, \qquad \widehat{\psi}_j^a(k) := \lambda_k^{j+1,a}\widehat{\varphi}_{j+1}^a(k).$$

Доказательство того, что построенное семейство является фреймом Парсеваля следует из унитарного принципа расширения, асимптотическое поведение КН доказывается конструктивно.

Второй результат этой главы состоит в доказательстве неравенства, уточняющего нижнюю границу КН Брейтенбергера для широкого класса последовательностей периодических функций.

Для функции $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kx} \in L_2(0,\,1)$ определим (см. также стр. 87)

$$A(f) := \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{k-1}-c_k|^2, \qquad B(f) := \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (c_{k-1}-c_k)(\overline{c_{k-1}}+\overline{c_k}).$$

Теорема 0.0.5. (теорема 3.3.1) *Пусть $\psi_j \in L_2(0,\,1)$, $j\in\mathbb{N}$ последовательность периодических функций, такая что*

$$\lim_{j\to\infty} q_j \widehat{\psi}_j(k)/\|\psi_j\| = 0 \text{ для } |k| \le M(C),$$
$$\lim_{j\to\infty} q_j^{-2} A(\psi_j')/\|\psi_j\|^2 = 0,$$
$$|(\psi_j',\,\psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2, \quad q_j^{-2}\|\psi_j'\|^2 \le C\|\psi_j\|^2,$$
$$q_j^2 A(\psi_j) \le C\|\psi_j\|^2, \quad q_j\,|B(\psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2,$$

где $M(C) := 2(2\pi C + C\sqrt{2C}/3 + 1/6)$, $C > 0$ – *абсолютная константа, и* $q_j \to \infty$ *при* $j \to \infty$. *Тогда если* $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j)$ *существует, то*

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j) \geq 3/2.$$

Условиям данной теоремы удовлетворяют следующие классы всплесковых последовательностей.

- Последовательности, порожденные периодизацией всплеск-функции ψ^0 пространства $L_2(\mathbb{R})$, при условии $x(\psi^0(x))' \in L_2(\mathbb{R})$, при этом $q_j = 2^j$. То есть последовательности, определяемые равенством

$$\psi^p_{j,k}(x) := 2^{j/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^0(2^j(x+n)+k).$$

- Последовательности, построенные в теореме 3.2.1 при $q_j = j^{1/2}$.

- В общем случае, среди всех последовательностей, построенных с помощью унитарного принципа расширения, можно выделить такой класс: всплеск-функции являются тригонометрическими полиномами степени $C_1 2^j$, где C_1 – абсолютная константа, имеют ограниченные нормы $c_1 \leq \|\psi_j\| \leq c_2$, где $c_1 > 0$, c_2 – абсолютные константы, для коэффициентов справедливы равенства $\widehat{\psi}(k) = \widehat{\psi}(-k)$ и выполняется неравенство $q_j^2 A(\psi_j) \leq C\|\psi_j\|^2$.

Таким образом, в классе последовательностей, описанных в теореме 3.3.1, построенное в теореме 3.2.1 семейство периодических всплесков действительно имеет наименьшие возможные КН и, тем самым, положительно отвечает на вопрос Ю. Престина, Э. Куака 1999 года о существовании подобных семейств.

Кроме этого, теорема 3.3.1 в некотором смысле является периодическим аналогом следующего результата Г. Баттла: если $xf(x)$, $f'(x) \in L_2(\mathbb{R})$, функция f имеет нулевое среднее $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$ и нулевой частотный центр $c(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} \xi|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi/(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi) = 0$, то $UC_H(f) \geq 3/2$. Для данной последовательности периодических функций ψ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$ условия

$|(\psi'_j, \psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2$ и $\lim_{j\to\infty} q_j\widehat{\psi}_j(k)/\|\psi_j\| = 0$ из теоремы 3.3.1 соответствуют нулевому частотному центру $c(\widehat{\psi^0}) = 0$ и нулевому интегральному среднему $\int_{\mathbb{R}} \psi^0 = 0$ соответственно. Тогда напрашивается обобщение теоремы Баттла вида: если $\int_{\mathbb{R}} f = \varepsilon$ и $c(\widehat{f}) = 0$, то $UC_H(f) \ge \alpha(\varepsilon)$, где $\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon) = 3/2$. К сожалению, обобщить доказательство теоремы Баттла на этот случай невозможно, что ясно из следующей теоремы.

Теорема 0.0.6. (теорема 3.4.1) *Пусть* f *– функция, такая что* $\cdot f,\ if' \in L_2(\mathbb{R})$, $f_0 := a^{1/2}f(a\cdot)$, *где* $a = (\|\cdot f\|/\|if'\|)^{1/2}$, *и* $c(\widehat{f_0}) = 0$. *Фиксируем* $\varepsilon \in \mathbb{C}$ *и положим* $\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\,dx = \varepsilon$. *Тогда если* $\varepsilon \ne 0$, $\varepsilon \ne 2\pi^{3/4}\frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}$, $k \in \mathbb{N}$, *то не существует функции, являющейся решением минимизационной задачи*

$$\begin{cases} UC_H(f_0) \to \min, \\ \int_{\mathbb{R}} f_0 = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad c(\widehat{f_0}) = 0. \end{cases}$$

Если $\varepsilon = 2\pi^{3/4}\frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}$, $k \in \mathbb{N}$, *тогда функция Эрмита*

$$\phi_n(x) = \left(\frac{2^n n!}{2\sqrt{\pi}}\right)^{-1/2}(-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}),$$

$n = 2k$, *минимизирует данную задачу и* $UC_H(\phi_{2k}) = (4k+1)/2$.

Если высказанное обобщение теоремы Баттла верно, то это поможет изучать локализованность нестационарных систем всплесков.

Наконец, насколько нам известно, теорема 3.3.1 является первым результатом, касающимся оценок нижней границы КН Брейтенбергера.

В главе 4 мы сопоставляем системы нестационарных всплесков на $L_2(\mathbb{R})$ и периодических всплесков, распространяя на эту общую постановку идею периодизации, то есть изучаем, как построить одну систему из другой с помощью периодизации. Мы рассматриваем фреймы Парсеваля всплесков, полученные с помощью унитарного принципа расширения. В предложении 4.1.1 доказывается, что периодизация фрейма Парсеваля нестационарных всплесков является фреймом Парсеваля периодических всплесков.

Предложение 0.0.1. (предложение 4.1.1) *Если* $\Psi^N = \{\varphi^N_{0,k},\ \psi^N_{j,k}\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\,k\in\mathbb{Z}}$ *– фрейм Парсеваля всплесков, порожденный унитарным принципом расши-*

рения, $\varphi_0^N, \psi_j^N \in L_1(\mathbb{R})$, *и*

$$\psi_j^P(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_j^N(x-n),$$

тогда $\Psi^P = \{\varphi_0^P,\, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$ *– фрейм Парсеваля всплесков.*

Доказательство сводится к сравнению унитарных принципов расширения. Далее мы решаем задачу о построении нестационарной системы, периодизация которой совпадает с исходной системой. В лемме 4.1.1 мы строим семейство нестационарных масок m_j^K, соответствующее маскам исходной периодической системы. Параметр семейства $K \in \mathbb{N}$ отвечает за гладкость маски и за порядок нуля в точке $\xi = \pi$. Последняя характеристика также важна, потому что, как и в стационарном случае, она является необходимым условием для гладкости масштабирующих и всплеск-функций.

Лемма 0.0.3. (лемма 4.1.1) *Пусть* $\nu_k^j \in \mathbb{R}$, $\nu_k^j \geq 0$, *– числовая последовательность, такая что* $\nu_k^j = \nu_{k+2^j}^j$, $|\nu_k^j|^2 + |\nu_{k+2^{j-1}}^j|^2 = 1$, $\nu_k^j = \nu_{-k}^j$. *По определению положим* $\theta_k^j := \arccos \nu_k^j$. *Пусть* z_j^K *– определенный на интервале* $[0,\, \pi/2]$ *сплайн порядка* K *минимального дефекта, заданный на равномерной сетке отрезка* $[0,\, \pi/2]$ *так:* $z_j^K(2\pi k 2^{-j}) = \theta_k^j$, $k = 0, \dots, 2^{j-2}$, $(z_j^K)^{(l)}(0) = 0$, $l = 1, \dots, K-1$. *Наконец, пусть* m_j^K *– четная* 2π*-периодическая функция*

$$m_j^K(\xi) = \begin{cases} \cos(z_j^K(\xi)), & \xi \in [0,\, \pi/2], \\ \sin(z_j^K(\pi - \xi)), & \xi \in (\pi/2,\, \pi]. \end{cases}$$

Тогда $|m_j^K(\xi)|^2 + |m_j^K(\xi+\pi)|^2 = 1$, $m_j^K \in C^{K-1}(\mathbb{T})$, $(m_j^K)^{(l)}(\pi) = 0$, $l = 1, \dots, K-1$.

В лемме 4.1.2 мы пишем нестационарный аналог достаточного условия равномерной сходимости на компактах и принадлежности $L_2(\mathbb{R})$ бесконечного произведения $\prod_{r=1}^\infty m_{j+r}(\xi 2^{-r})$.

Лемма 0.0.4. (лемма 4.1.2) *Если* $a_j \in L_2(\mathbb{T})$, $a_j(0) = 1$ *и* $\sum_j \|a_j''\|_2/2^j < \infty$, *то* $\widehat{\varphi_j}(\xi) = \prod_{r=1}^\infty a_{j+r}(\xi/2^r)$ *равномерно и абсолютно сходится на любом* $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$. *Если дополнительно* $|a_j(\xi)|^2 + |a_j(\xi+\pi)|^2 = 1$, *то* $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$ *and* $\|\widehat{\varphi_j}\|_2 \leq 1$.

В лемме 4.1.3 это достаточное условие конкретизировано для масок m_j^K, определенных в лемме 4.1.1.

Лемма 0.0.5. (лемма 4.1.3) *Если m_j^K определена в лемме 4.1.1, $\nu_0^j = 1$, и*

$$\sum_j \frac{1}{2^j} \left(\int_0^{\pi/2} ((z_j^K)'(\xi))^4 + ((z_j^K)''(\xi))^2 \, d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

то $\widehat{\varphi_j}(\xi) = \prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}^K(\xi/2^r)$ равномерно и абсолютно сходится на любом $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|\widehat{\varphi_j}\|_2 \le 1$.

Таким образом, предлагается конструкция системы нестационарных всплесков, периодизация которой совпадает с исходной системой периодических всплесков, и нестационарные маски могут быть выбраны произвольно гладкими.

Далее, среди этих нестационарных систем мы ищем фрейм всплесков со следующим свойством: $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$. Для краткости это свойство названо согласованностью локализаций, то есть частотно-временная локализация нестационарной системы должна быть согласована с частотно-угловой локализацией периодической системы. Отчасти, поиск такой нестационарной системы мотивирован результатами двух предыдущих глав. Точнее, появляется возможность строить хорошо локализованные системы нестационарных всплесков, начиная с периодических. В теореме 4.2.1 мы получаем достаточные условия в терминах нестационарных фреймов, обеспечивающие равенство $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$.

Теорема 0.0.7. (теорема 4.2.1) *Пусть $\Psi^P = \{\varphi_0^P,\, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$ и $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in\mathbb{Z}}$ – фреймы Парсеваля периодических и нестационарных всплесков и*

$$\psi_j^P(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_j^N(x-n).$$

Если существуют функции $f,\, f_1 \in L_2(\mathbb{R})$, такие что $|2^{-j/2}\psi_j^N(2^{-j}x)| \le f(x)$, $|(2^{-j/2}\psi_j^N(2^{-j}x))'(x)| \le f_1(x)$ и $f \in AC_{loc}(\mathbb{R})$, $f(x) = O(|x|^{-3/2-\varepsilon})$, $f_1(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ при $x \to \infty$, $\varepsilon > 0$, тогда

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N).$$

Теорему 4.2.1 сложно применять. Отправной точкой является система периодических всплесков, в то время как главное условие (существование мажорант f, f_1) касается построенной нестационарной системы. Следующая теорема избавлена от этого недостатка и дает достаточные условия для согласования локализованностей в терминах периодических масок.

Теорема 0.0.8. (теорема 4.2.2) *Пусть* $\Psi^P = \{\varphi_0^P, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$ – *фрейм Парсеваля периодических всплесков,* $(\mu_k^j)_k = (2^{1/2}\nu_k^j)_k$ – *маситабирующие маски. Пусть* $(\nu_k^j)_k$ *удовлетворяют условиям леммы 4.1.1. Обозначим* $\theta_k^j := \arccos \nu_k^j$, $\overline{\nu}_k^j := \max\{\nu_k^j, \nu_{k+1}^j\}$. *Если*

1. *ряд* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |kb_k^j|$ *равномерно сходится и равномерно ограничен относительно* j *, где* $b_k^j := \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\nu}_k^{j+r}$, *и*
2. $|\theta_{k+1}^j - \theta_k^j| \leq C2^{-j}$, *где* C – *абсолютная константа,*

то система $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N, \psi_{j,k}^N\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in\mathbb{Z}}$ *с маситабирующими масками* $m_j^1(\xi)$, *определенными в лемме 4.1.1 при* $K = 1$, *образует фрейм Парсеваля нестационарных всплесков, и* $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$.

В главах 5-7 используются следующие обозначения. $G = G_p$, $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$ – группа Виленкина, ее элементами являются последовательности

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots),$$

где $x_j \in \{0, \dots, p-1\}$ при $j \in \mathbb{Z}$ и существует только конечное количество ненулевых членов x_j с отрицательными индексами j. Обозначим нулевую последовательность $\mathbf{0}$. Если $x \neq \mathbf{0}$, тогда существует единственное $N = N(x)$, такое что $x_N \neq 0$ и $x_j = 0$ для $j < N$. Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покоординатное сложение по модулю p :

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \,(\mathrm{mod}\, p) \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Элемент $\mathbf{0}$ является нейтральным элементом группы G. Обозначаем $\ominus$ операцию, обратную $\oplus$. Группа G_p при $p = 2$ называется группой Кантора. В этом случае обратная операция $\ominus$ совпадает с групповой операцией $\oplus$. На группе G общеупотребительны две эквивалентные метрики. Метрика d на группе G вводится с помощью отображения $\|\cdot\|_G:\ G\to[0,\infty)$, определенного так: $\|\mathbf{0}\|_G:=0$ и $\|x\|_G:=2^{-N(x)}$ и $x\neq\mathbf{0}$. Тогда $d(x,y):=\|x\ominus y\|_G$ для $x,y\in G$. Другая метрика d_1 определяется так: $d_1(x,y):=\lambda(x\ominus y)$ для $x,y\in G$. Обозначим $I_n(x)$, $n\in\mathbb{Z}$, $x\in G$ шар радиуса p^{-n} с центром в точке x, т.е.

$$I_n(x)=\{y\in G: d(x,y)<p^{-n}\}.$$

Обозначим $I_j:=I_j(\mathbf{0})$ и $I:=I_0$. Определим отображение $\lambda:\ G\to[0,\infty)$

$$\lambda(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_jp^{-j-1},\qquad x=(x_j)\in G,$$

взаимно-однозначно переводящее $G\setminus\mathbb{Q}_0$ на $[0,\,\infty)$, где $\mathbb{Q}_0$ состоит из всех элементов x, для которых $x_j=p-1$ при всех $j>j_0$ для некоторого $j_0\in\mathbb{Z}$. Аналоги сжатий и сдвигов на G определяются так: $D:\ G\to G$, где $(Dx)_k=x_{k+1}$ для $x\in G$. Обозначаем $f_{0,h}:\ G\to\mathbb{C}$ функцию $f_{0,h}(x)=f(x\oplus\lambda^{-1}(h))$, где $x\in G$, $h\geq 0$. Если дополнительно $j\in\mathbb{Z}$, полагаем

$$f_{j,h}(x)=p^{j/2}f_{0,h}(D^jx),\quad x\in G.$$

Функция f, определенная на G, называется 1-периодической, если $f(x)=f_{0,2^n}(x)$ для всех $x\in G$ и всех $n\in\mathbb{Z}_+$. Ff – преобразование Фурье-Уолша, w_k – k-ая обобщенная функция Уолша.

В главе 5 мы предлагаем определение КН для функций, заданных на группе Кантора.

Определение 0.0.1. (определение 5.2.1) *Пусть* $f:G_2\to\mathbb{C}$, $f\in L_2(G_2)$, *тогда функционал*

$$UC_d(f):=V(f)V(Ff),\qquad \textit{где}$$

$$V(f):=\frac{1}{\|f\|^2_{L_2(G_2)}}\min_{\tilde{x}}\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|f(x)|^2\,dx,$$

$$V(Ff):=\frac{1}{\|Ff\|^2_{L_2(G_2)}}\min_{\tilde{t}}\int_{G_2}(\lambda(t\oplus\tilde{t}))^2|Ff(t)|^2\,dt$$

называется диадической КН функции f.

Доказывается, что существует точка $y^* \in G_2$, на которой функционал $\int_{G_2} (\lambda(x \oplus y))^2 |g(x)|^2 \, dx$ достигает наименьшего значения. Обоснованность такого определения поясняется с помощью примеров и сравнения в известными КН. Обсуждается, почему операторный подход не работает при определении КН для функций, заданных на группе Кантора.

В следующей теореме доказывается, что UC_d ограничена снизу положительной константой, то есть для UC_d существует принцип неопределенности.

Теорема 0.0.9. (теорема 5.2.1) *Пусть* $f : G_2 \to \mathbb{C}$, $f \in L_2(G_2)$. *Тогда верно неравенство*

$$UC_d(f) \geq C, \ \textit{где} \ C \simeq 8.5 \times 10^{-5}.$$

Вычисление UC_d для произвольной функции непросто, так как необходимо решать задачу минимизации для функционалов от диадических функций, и нам не удалось найти литературу, содержащую методы решения подобных задач. Следующая теорема дает способ вычисления UC_d для широкого класса функций, сводя минимизационную задачу к перебору конечного количества (2^n) вариантов. В дальнейшем для упрощения записи используем обозначение $k \oplus n = \lambda(\lambda^{-1}(k) \oplus \lambda^{-1}(k))$ для k, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 0.0.10. (теорема 5.2.2) *Пусть*

$$f(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,1)}(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k(x),$$

и ряд равномерно сходится, обозначим

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,1)}(x) \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \mathrm{w}_k(x).$$

Пусть $V(f)$ $V(Ff)$ *конечны. Тогда диадическая КН примет вид*

$$UC_d(f) \ = \ \lim_{n\to\infty} V(f_n) V(Ff_n), \ \textit{где}$$

$$V(f_n) = \frac{\min_{k_0=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |b_{k\oplus k_0}|^2((k+1)^3 - k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

$$V(Ff_n) = \frac{\min_{k_1=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |a_{k\oplus k_1}|^2((k+1)^3-k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

и $a := (a_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$ *– дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона вектора* $b := (b_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$*, то есть* $a_k = 2^{-n} \sum_{s=0}^{p^n-1} b_s \mathrm{w}_k(\lambda^{-1}(s/p^n))$.

Теорему 5.2.2 можно распространить на функции вида

$$g(x) := \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,2^N)}(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k(x/2^N).$$

С помощью теоремы 5.2.2, пользуясь Wolfram Mathematica 8.0, мы минимизируем численно функционал UC_d на полиномах Уолша степени $2^n - 1$ для $n = 2; 3; 4; 5; 6$. Полученные значения принадлежат отрезку $[0,0871,\, 0.0891]$.

В параграфе 5.3 приведен вид КН для семейства масштабирующих функций и всплеск-функций Лэнга, а также найдены значения КН для нескольких частных значений параметра a семейства. Наиболее локализованным оказался всплеск Хаара, являющийся частным случаем всплеска Лэнга при $a = 1$. Также численно найдены всплеск-функции вида $\psi(x) = \mathbb{1}_{[0,\,1)}(x) \sum_{k=0}^{3} a_k \mathrm{w}_k(x)$ и $\psi(x) = \mathbb{1}_{[0,\,1)}(x) \sum_{k=0}^{7} a_k \mathrm{w}_k(x)$, порождающие фрейм всплесков и имеющие наименьшие КН.

В главе 6 мы изучаем уравнения в частных производных. В этих уравнениях пространственная переменная неизвестной функции принадлежит группе Кантора, а временная является действительным числом. Мы рассматриваем два типа уравнений, один тип содержит классическую, а другой дробную модифицированную производную Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (псевдодифференциальный оператор).

В §6.2 мы рассматриваем распределения на группе Кантора G_2, которые являются аналогом распределений в действительном анализе. В качестве пространства пробных функций выбран класс S всех локально постоянных функций с компактным носителем. Распределение $f \in S'$ интерпретируется как формальный ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k \varphi_{0k} + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{jk}, \quad a_k = \langle f, \varphi_{0k}\rangle, \quad a_{jk} = \langle f, \psi_{jk}\rangle,$$

который называется квази-представлением Хаара f, где φ и ψ – масштабирующая и всплеск-функция Хаара.

Пространство S имеет достаточный запас функций, чтобы "отличать одну функцию от другой". Более точно, имеет место следующий аналог леммы Дюбуа–Реймона.

Предложение 0.0.2. (предложение 6.2.3) *Если функция f локально интегрируема на G_2 и ее квази-представление Хаара равно нулю, то $f = 0$ почти везде на G_2.*

Обозначим $\tilde{S}$ множество всех полиномов Хаара, то есть функций, для которых конечное число коэффициентов в разложении по системе Хаара отличны от нуля. Можно отождествить $f \in \tilde{S}'$ с формальным рядом

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}, \quad a_{j,k} = \langle f, \psi_{jk}\rangle,$$

который называется представлением Хаара f. Из следующей теоремы выводится

$$\tilde{S}' = \{f\big|_{\tilde{S}}, f \in S'\}.$$

Теорема 0.0.11. (теорема 6.2.1) *Если $f \in \tilde{S}'$, то существует однопараметрическое семейство $\{f_c\}_{c\in\mathbb{C}} \subset S'$, такое что $f_c|_{\tilde{S}} = f$ для любого $c \in \mathbb{C}$ и $g|_{\tilde{S}} \neq f$ для любой $g \in S' \setminus \{f_c : c \in \mathbb{C}\}$. Кроме того, если*

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}, \quad a_{j,k} = \langle f, \psi_{jk}\rangle, \ –$$

представление Хаара f, то квази-представление Хаара f_c дается

$$f_c = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c)\varphi_{0,k} + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k},$$

где $a_k = a_k(c) = a_k(0) + c$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $c \in \mathbb{C}$, – общее решение системы

$$\sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} a_{2^j k+m} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} a_{2^j k+m} = 2^{j/2}a_{-j,k}, \quad j \in \mathbb{N}, \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Далее вводится класс периодических распределений. В качестве пространства пробных функций используется P, класс 1-периодических локально постоянных функций. Распределение $f \in P'$ интерпретируется как формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k, \quad a_k = \langle f, \mathrm{w}_k \rangle,$$

который называется представлением Уолша распределения f.

В §6.3 рассматривается задача Коши для одномерного однородного волнового уравнения, в котором неизвестная функция зависит от переменных (x, t), где $x \in G_2$ и t (время) – действительно. Пусть $U = [0, \infty)$ или $U = [0, T]$. Задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = f_{x^2}^{[2]} f(x, t), \\ f(x, 0) = f^0(x), \quad f_t'(x, 0) = f^1(x), \end{cases} \qquad x \in G_2, \quad t \in U.$$

Теорема 0.0.12. (теорема 6.3.1) *Пусть $f^0, f^1 \in P'$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathrm{w}_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \mathrm{w}_n$ – представления Уолша f^0 и f^1 соответственно. Тогда*

1. *задача Коши имеет единственное решение $f(x, t)$, принадлежащее P' для каждого $t \in U$;*

2. *это решение принадлежит C^P, как только*

$$p_n = O(e^{-n\theta(n)}), \quad q_n = O(e^{-n\theta(n)}), \quad n \to \infty,$$

   где $\theta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$;

3. *это решение принадлежит L_2^P, как только выполняются условия пункта 2.*

Доказательство основано на том, что функции Уолша являются собственными функциями дифференциального оператора Гиббса.

В §6.4 мы изучаем свойства дробной модифицированной производной Гиббса. Необходимость в ее использовании вместо классической производной Гиббса возникает при поиске непериодических решений дифференциальных уравнений. Рассмотрим простое уравнение, например, $f^{[1]} = g$, где g

– 1-периодическая функция. Для решения уравнения находим коэффициенты Фурье–Уолша функции $f^{[1]}$, они и позволяют восстановить f. Пусть теперь функция g сужена на множество I (диадический аналог отрезка $[0, 1]$), тогда можно попытаться применить тот же метод, используя преобразование Фурье–Уолша вместо коэффициентов Фурье–Уолша (что и делается в классическом случае), и таким образом восстановить f. Оказывается, что такое решение не имеет компактный носитель и не совпадает на множестве I с периодическим решением. Этого недостатка лишена модифицированная производная Гиббса $\mathcal{D}$. А именно, если g – 1-периодическая функция, f – неизвестная функция, тогда периодическое решение уравнения $\mathcal{D}f = g$ совпадает на I с решением уравнения $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$, где $\mathbb{1}_I$ – характеристическая функция множества I. Кроме того, решение уравнения $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$ также имеет носитель I.

Рассмотрим дробную модифицированную производную Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$, определенную на $\tilde{S}'$. Этот оператор был введен на $L_1(G_2)$ Б. И. Голубовым. Такого типа операторы часто называют псевдодифференциальными.

Лемма 0.0.6. (лемма 6.4.1) *Пусть $\phi \in S$. Для того чтобы ϕ принадлежала $\tilde{S}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\mathit{supp}\, F\phi \cap I_n = \emptyset \quad \textit{для некоторого } n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}^\alpha(x) := \|x\|_{G_2}^\alpha$ для $x \in G_2$, $x \neq \mathbf{0}$, и $\mathbb{D}^\alpha(\mathbf{0}) := 1$. Дробная модифицированная производная Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$ определяется на $\tilde{S}$ по правилу

$$F(\mathcal{D}^\alpha \phi) = \mathbb{D}^\alpha F\phi, \quad \phi \in \tilde{S}.$$

Из леммы 6.4.1 следует, что $\mathcal{D}^\alpha$ корректно определен и $\mathcal{D}^\alpha : \tilde{S} \to \tilde{S}$. Кроме того, оператор $\mathcal{D}^{-\alpha}$ является обратным для $\mathcal{D}^\alpha$, это означает, что $\mathcal{D}^\alpha$ взаимно однозначно отображает $\tilde{S}$ на $\tilde{S}$. Это позволяет распространить дробную модифицированную производную Гиббса на $\tilde{S}'$. Для $f \in \tilde{S}'$ распределение $\mathcal{D}^\alpha f \in \tilde{S}'$ определяется так

$$\langle \mathcal{D}^\alpha f, \phi \rangle = \langle f, \mathcal{D}^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \tilde{S}.$$

Предложение 0.0.3. (предложение 6.4.1) *Пусть g, Fg, $\mathbb{D}^\alpha Fg$ локально интегрируемы на G_2, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда условие* $\operatorname{supp} Fg \subset I_{-j-1} \backslash I_{-j}$ *необходимо и достаточно для того, чтобы функция g была собственной функцией оператора $\mathcal{D}^\alpha$, соответствующей собственному значению $2^{j\alpha}$.*

Следствие 0.0.1. (следствие 6.4.1) *Любая функция Хаара $\psi_{j,k}$ является собственной функцией $\mathcal{D}^\alpha$, соответствующей собственному значению $2^{j\alpha}$.*

В §(6.5) мы рассматриваем задачу Коши для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности относительно функции, зависящей от переменных (x,t), где $x \in G_2$ и t (время) – действительное число. Пусть $U = [0,\, \infty)$ или $U = [0,\, T]$. Задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \mathcal{D}^\alpha_x f(x,\, t) + g(x,\, t), \\ f(x,\, 0) = f^0(x), \end{cases} \qquad x \in G_2, \quad t \in U.$$

Теорема 0.0.13. (теорема 6.5.1) *Пусть $f^0 \in \tilde{S}'$, $g_t := g(\cdot,\, t) \in \tilde{S}'$ для каждого $t \in U$, и $g(x,\, \cdot)$ непрерывна на U. Тогда*

1. *задача Коши имеет единственное решение $f(x,\, t)$, оно принадлежит $\tilde{S}'$ для каждого $t \in U$;*

2. *это решение принадлежит $L_2(G_2)$ для каждого $t \in U$ как только $f^0 \in L_2(G_2)$,*

$$Ff^0(\xi) = O(e^{-\|\xi\|^\alpha_{G_2}\theta(\log_2\|\xi\|_{G_2})}), \quad \|\xi\|_{G_2} \to \infty,$$

для каждого $t \in U$ распределение $g_t \in L_2(G_2)$ и

$$Fg_t(\xi) = O(e^{-\|\xi\|^\alpha_{G_2}\theta(\log_2\|\xi\|_{G_2})}), \quad \|\xi\|_{G_2} \to \infty,$$

где $\theta(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$;

3. *если либо $\alpha > 0$ и условия пункта 2 выполнены, либо $\alpha < 0$ и для каждого $t \in U$*

$$Ff^0(\xi) = O(\|\xi\|^{-(\varepsilon+1/2)}_{G_2}), \quad F(g_t)(\xi) = O(\|\xi\|^{-(\varepsilon+1/2)}_{G_2}), \quad \|\xi\|_{G_2} \to \infty,$$

где $\varepsilon > 0$, *тогда решение непрерывно на* G_2 *для каждого* $t \in U$, *все непрерывные решения даются* $f_c(x, t) = f_0(x, t) + c, c \in \mathbb{C}$.

Доказательство основано на том, что все функции системы Хаара являются собственными функциями дробной модифицированной производной Гиббса.

В главе 7 мы рассматриваем жесткие фреймы всплесков на группе Виленкина, построенные по общей схеме унитарного принципа расширения. Следуя этой схеме, начинают с масштабирующей функции или ее маски (масштабирующая маска), находят маску всплеска, решая задачу матричного продолжения, и с помощью маски всплеска и масштабирующей функции определяют всплеск-функцию.

Пусть масштабирующая функция $\varphi \in L_2(G)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)), \quad x \in G.$$

Для построения фреймов всплесков с компактным носителем необходима масштабирующая функция с компактным носителем. В отличие от всплесков, определенных на действительной прямой, следующее утверждение выполняется для группы Виленкина.

Предложение 0.0.4. (предложение 7.1.1) *Если* φ *– масштабирующая функция с компактным носителем, то в масштабирующем уравнении только конечное количество коэффициентов* a_k *отличны от нуля.*

Хорошо известно, что в случае действительной прямой маска ортогональной масштабирующей функции с компактным носителем является тригонометрическим полиномом. Аналог предложения 7.1.1 не выполняется без дополнительного требования ортогональности.

Пусть φ – масштабирующая функция с компактным носителем. Тогда по предложению 7.1.1 существует натуральное число n, такое что φ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(0)} \varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)), \quad x \in G.$$

Находя преобразование Фурье от обеих частей, имеем

$$F\varphi(\omega) = m_0(D^{-1}\omega)F\varphi(D^{-1}\omega),$$

при этом

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(0)}\overline{\mathrm{w}_k(\omega)}.$$

Функция m_0 называется маской φ или масштабирующей маской. Эта функция является полиномом Уолша порядка $p^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Предположим, что существует полиномы Уолша $m_1, \ldots, m_r$ $r \geq p-1$, (маски всплеска), такие что матрица

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \ldots & m_r(\omega) \\ m_0(\omega \oplus \delta_1) & m_1(\omega \oplus \delta_1) & \ldots & m_r(\omega \oplus \delta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_0(\omega \oplus \delta_{p-1}) & m_1(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \ldots & m_r(\omega \oplus \delta_{p-1}) \end{pmatrix},$$

где $\delta_l \in G$ и $\lambda(\delta_l) = l/p$, $l \in \{0, \ldots, p-1\}$, удовлетворяет условию

$$M(\omega)M^*(\omega) = E_p,$$

то есть первый столбец продолжается до унитарной матрицы M. Символом M^* обозначаем матрицу, сопряженную к M.

Тогда всплеск-функции $\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(r)}$ определяются с помощью равенства

$$F\psi^{(\nu)}(\omega) = m_\nu(D^{-1}\omega)F\varphi(D^{-1}\omega), \quad \nu = 1, \ldots, r.$$

Преобразование вектора $(c_0, c_1, \ldots, c_r)$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, r$, $c_0 \neq 1$, $\sum_{k=0}^{r} |c_k|^2 = 1$, вида

$$c_{k0} = c_k, \quad c_{0j} = \bar{c}_{j0}\,\frac{1 - c_{00}}{1 - \bar{c}_{00}}, \quad c_{kj} = \delta_{kj} - \frac{c_{k0}\bar{c}_{j0}}{1 - \bar{c}_{00}}, \quad j, k = 1, \ldots, r.$$

называется преобразованием Хаусхолдера.

Следующая теорема описывает множество всех возможных масок всплесков, соответствующих фиксированной масштабирующей маске.

Теорема 0.0.14. (теоремы 7.2.1 и 7.2.2) *Пусть маска* $m_0(\omega) = \sum\limits_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(0)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega)}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{l=0}^{p-1} \left| m_0 \left(\omega \oplus \delta_l \right) \right|^2 \leq 1, \qquad \omega \in G.$$

Обозначим $b_{n,l}^{*(0,s)} = \mu_{0,s}(D^{1-n}\lambda^{-1}(l))$, $s = 0, \dots, p-1$, $l = 0, \dots, p^n - 1$, *где* $\mu_{0,s}(\omega) := \sqrt{p} \sum_{k=0}^{p^{n-1}-1} a_{pk+s}^{(0)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega)}$. *Выберем числа* $b_{n,l}^{*(0,p)}, \dots, b_{n,l}^{*(0,r)} \in \mathbb{C}$ *произвольно, но так, чтобы выполнялось условие* $\sum_{k=0}^{r} |b_{n,l}^{*(0,k)}|^2 = 1$. *Для каждого* l *обозначим* $c_k = b_{n,l}^{*(0,k)}$, $k = 0, \dots, r$; *для каждого* $s \in \{0, \dots, p-1\}$ *и* $\nu \in \{1, \dots, r\}$ *вычислим* $c_{s,\nu}$ *с помощью преобразования Хаусхолдера, примененного к* c_k, *при* $c_0 \neq 1$ *или положим* $c_{s,\nu} = \delta_{s\nu}$ *при* $c_0 = 1$; *обозначим* $b_{n,l}^{*(\nu,s)} = c_{s,\nu}$. *Пусть* $V_l := (v_{n,l}^{(\nu,k)})_{\nu,k=0,\dots,r}$, $l = 0, \dots, p^n - 1$, – *унитарная матрица с первым столбцом* $(1, 0, \dots, 0)^T$. *Тогда полиномы* m_ν, $\nu = 1, \dots, r$ *являются масками всплеска, соответствующими маске* m_0 *тогда и только тогда, когда*

$$m_\nu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{q=0}^{p^n-1} \left(\sum_{s=0}^{p-1} c_{n,\lambda(\lambda^{-1}(q) \ominus \lambda^{-1}(s))}^{(\nu,s)} \right) \overline{\mathrm{w}_q(\omega)},$$

где

$$c_{n,t}^{(\nu,s)} = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{r} b_{n,l}^{*(k,s)} v_{n,l}^{(\nu,k)} \mathrm{w}_t(D^{1-n}\lambda^{-1}(l)).$$

Следующая теорема дает точное описание всех полиномов Уолша, порождающих жесткие фреймы всплесков.

Теорема 0.0.15. (теорема 7.2.3) *Масштабирующая функция с компактным носителем порождает жесткий фрейм всплесков с компактным носителем тогда и только тогда, когда ее маска* m_0 *является полиномом Уолша, удовлетворяющим условиям* $m_0(\mathbf{0}) = 1$ *и*

$$\sum_{l=0}^{p-1} \left| m_0 \left(\omega \oplus \delta_l \right) \right|^2 \leq 1, \qquad \omega \in G.$$

Глава 8 посвящена изучению безусловной сходимости в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков. Первые достаточные условия на всплеск-функции, обеспечивающие безусловность разложений в $L_p(\mathbb{R})$ в том случае, когда в $L_2(\mathbb{R})$ система образует ортонормированный базис, доказаны И. Мейером и приведены в большинстве классических монографий по теории всплесков. Эти достаточные условия предполагают гладкость всплеск-функций ($\psi \in C^1(\mathbb{R})$), которая используется в методе доказательства, основанном на свойствах оператора Кальдерона–Зигмунда. Достаточные условия, не предполагающие гладкость, а только определенную скорость убывания всплеск-функций, предложены Г. Грипенбергом [62], его результат усилен П. Войташчиком и перенесен на случай биортогональных базисов всплесков.

В следующей теореме получены достаточные условия для безусловной сходимости в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков.

Теорема 0.0.16. (теорема 8.2.1) *Пусть* $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ *пара двойственных фреймов всплесков в* $L_2(\mathbb{R})$, *пусть существует четная ограниченная убывающая на* $[0,\infty)$ *функция* η, *удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^\infty \eta(x)\ln(1+x)\,dx < \infty, \ \textit{и такая, что}\ |\psi(x)|, |\tilde{\psi}(x)| \le \eta(x),$$

тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *ряд* $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(f, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$ *безусловно сходится в* $L_p(\mathbb{R})$.

Требования, предъявляемые к фреймам, совпадают с условиями в теореме П. Войташчика. Так что наш результат является распространением теоремы П. Войташчика на фреймы всплесков.

Из доказательства теоремы 8.2.1 следует достаточное условие для безусловной сходимости в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, разложений по произвольной паре двойственных фреймов из $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 0.0.17. (теорема 8.3.1) *Если* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– пара двойственных фреймов в* $L_2(\mathbb{R})$, f_n, $\tilde{f}_n \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *и существует постоянная* M, *такая что для любого конечного множества индексов* Ω *и любой* *функции* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{n\in\Omega} (f,\, \tilde{f}_n) f_n \right\|_p \le M \|f\|_p,$$

то ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} (f,\, \tilde{f}_n) f_n$ *безусловно сходится в* $L_p(\mathbb{R})$.

В главе 9 мы изучаем непрерывное всплеск-преобразование (НВП). На странице 7 приведены определение НВП, условие допустимости, необходимое для классической формулы обращения, и сама формула обращения. Условие допустимости $C_\psi < \infty$ эквивалентно равенству $\widehat{\psi}(0) = 0$ при слабом дополнительном предположении $(1 + |\cdot|^\alpha)\psi \in L_1(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$. Некоторые популярные и полезные в приложениях всплески, например, стандартный приведенный всплеск Морле $\psi_M(\xi) = \exp(i\omega_0\xi)\exp(-\xi^2/2)$, не удовлетворяют условию допустимости: $\widehat{\psi_M}(0) = C_1 \exp(-\omega_0^2/2) \neq 0$. Приведенный всплеск Морле можно модифицировать, так чтобы условие допустимости выполнялось, и получить точный всплеск Морле (the exact Morlet wavelet) $\psi_{M,ex}(\xi) = C\left(\exp(i\omega_0\xi) - \exp(-\omega_0^2/2)\right)\exp(-\xi^2/2)$, где C – нормирующий множитель. Однако для точного всплеска Морле взаимосвязь между частотами сигнала и максимумом модуля всплеск-преобразования сложнее чем для стандартного приведенного. Поэтому в приложениях чаще используется приведенная версия. В следующей теореме предлагается альтернативная формула обращения НВП, которая применима даже в случае нарушения условия допустимости.

Теорема 0.0.18. (теорема 9.2.1) *Пусть* $W_{n,\psi} f(a,\, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{n,a,b}(x)}\, dx$, *где* $n = 1$ *или* $n = 2$,

$$\psi_{1,a,b}(x) = \frac{1}{|a|}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \psi_{2,a,b}(x) = \frac{1}{|a|^{1/2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. *Для* $n = 1$ *мы предполагаем, что* $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ *и* $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\, dx = 1$. *Для* $n = 2$ *мы полагаем, что* $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx = 1$.

Если $f,\, \psi,\, \omega\widehat{\psi}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\widehat{f},\, \widehat{\psi} \in L_1(\mathbb{R})$, *тогда почти везде на* $\mathbb{R}$

$$\frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{db}{b-x} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial b} W_{1,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(x),$$

$$\frac{1}{\pi}\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{db}{b-x} \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|a|}\frac{\partial}{\partial b} W_{2,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(x).$$

Если дополнительно $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [0,\, \infty)$, *тогда почти везде на* $\mathbb{R}$

$$-i\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial b} W_{1,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(b), \quad -i\int_{\mathbb{R}} \sqrt{|a|}\frac{\partial}{\partial b} W_{2,\psi} f(a,\, b)\, da = \overline{\psi(0)}\, f(b).$$

Глава 1

Базисы всплесков, имеющие равномерно ограниченные константы неопределенности по параметру, определяющему гладкость

В работе Ч. Чуи и Й. Вонга [41] для широкого класса ортонормированных базисов всплесков, включающего всплески Добеши и сплайн-всплески Баттла–Лемарье, доказано, что с ростом гладкости всплеск-функций константы неопределенности Гейзенберга этих функций стремятся к бесконечности. Однако в статьях [18, 91] построено семейство модифицированных всплеск-функций Добеши (всплеск-функции Новикова), которые имеют компактный носитель, причем частотно-временная локализованность автокорреляционной функции, построенной для масштабирующей функции данной всплеск-функции, сохраняется с возрастанием гладкости. В данной главе построен широкий класс семейств ортонормированных базисов всплесков, константы неопределенности которых остаются ограниченными с ростом гладкости всплеск-функции. Точнее, константы неопределенности этих функций стремятся к константам неопределенности всплеск-функций Мейера, использованных в конструкции.

Построенные всплеск-функции экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности, их преобразования Фурье имеют поведение $O(\omega^{-l})$, $\omega \to \infty$, где l – параметр семейства. Среди классических базисов всплесков такое поведение на бесконечности имеют сплайн-всплески, поэтому построенные функции названы квазисплайн всплесками [80]. Хорошо известно [9], что любая всплеск-функция Мейера является целой функцией экспоненциального типа, и для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать всплеск-функцию Мейера, стремящуюся на бесконечности к нулю быстрее чем x^{-n}, но не экспоненциально. Более того, не существует экспоненциально убывающей бесконечно дифференцируемой всплеск-функции [9, Следствие 5.5.3]. Таким образом, всплески с компактным носителем (всплески Добеши, всплески Новикова) и экспоненциально убывающие всплески (сплайн-всплески, квазисплайн всплески), с одной стороны, и всплески с финитным преобразованием Фурье (всплески Мейера), с другой стороны, реализуют две возможности оптимального поведения всплеск-функции и ее преобразования Фурье на бесконечности. Функции первого типа лучше локализованы по времени, а функции второго типа – по частоте. Среди всплесков первого типа квазисплайн всплески являются единственной известной на сегодняшний день системой всплесков с равномерно ограниченными по параметру семейства константами неопределенности, вычисленными для всплеск-функций.

Конструкция основана на линейных методах суммирования тригонометрических рядов Фурье. Широкий класс линейных методов удовлетворяет требованиям, предъявляемым конструкцией. В частности, к этому классу относятся средние Фейера, Валле-Пуссена, Рогозинского, Абеля–Пуассона, монотонные средние Валле-Пуссена. Пример семейства квазисплайн всплесков, соответствующий средним Валле-Пуссена, и доказательство ограниченности констант неопределенности без уточнения их предельного поведения, даны в работе [16].

1.1 Константа неопределенности Гейзенберга и всплеск Мейера

Константой неопределенности Гейзенберга функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ называется функционал, равный $\Delta(f)\Delta(\widehat{f})$, где

$$\Delta^2(f) := \frac{1}{\|f\|^2}\int_{\mathbb{R}}(t-c(f))^2|f(t)|^2\,dt, \quad c(f) := \frac{1}{\|f\|^2}\int_{\mathbb{R}} t|f(t)|^2\,dt. \tag{1.1}$$

Функционалы $\Delta(f)$, $\Delta(\widehat{f})$, $c(f)$, $c(\widehat{f})$ называются соответственно временным радиусом, частотным радиусом, временным центром, частотным центром функции f.

В дальнейшем используем обозначение $UC_H(f) := \Delta(f)\Delta(\widehat{f})$. Временной радиус можно представить в виде

$$\Delta^2(f) = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{\mathbb{R}} x^2\big|f(x)\big|^2\,dx - \frac{1}{\|f\|^4}\left(\int_{\mathbb{R}} x\big|f(x)\big|^2\,dx\right)^2 = \frac{\|\cdot f\|^2}{\|f\|^2} - \frac{(\cdot f,\, f)^2}{\|f\|^4},$$

где $\cdot f : x \mapsto xf(x)$. Пользуясь известными свойствами преобразования Фурье, частотный радиус может быть записан в виде

$$\Delta^2(\widehat{f}) = \frac{1}{\|f\|^2}\int_{\mathbb{R}}\big|\mathrm{i}f'(x)\big|^2\,dx - \frac{1}{\|f\|^4}\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{i}f'(x)\overline{f(x)}\,dx\right)^2 = \frac{\|\mathrm{i}f'\|^2}{\|f\|^2} - \frac{(\mathrm{i}f',\, f)^2}{\|f\|^4}.$$

В этой главе и в главе 3 мы будем пользоваться этими представлениями, при необходимости меняя f на $\hat{f}$. Хорошо известный принцип неопределенности Гейзенберга (в принятой нормировке) гласит, что для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ верно неравенство $UC_H(f) \geq 1/2$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда f является функцией Гаусса. КН была предложена в качестве меры локализованности функции по времени и частоте в 1927 В. Гейзенбергом [66] и Э. Шредингером [108].

Приведем схему построения всплеск-функции Мейера. Пусть $\theta(\omega)$ – нечетная, непрерывно дифференцируемая функция, равная $\frac{\pi}{4}$ при $\omega > \frac{\pi}{3}$. Пусть ω_0 – параметр, изменяющийся в промежутке $\frac{\pi}{3} \leq \omega_0 < \frac{\pi}{2}$, $\omega_1 := \pi - \omega_0$. В данной главе предполагается, что θ – неубывающая, дважды непрерывно дифференцируемая функция, а в главе 2 предполагается только, что $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$.

Масштабирующая функция Мейера φ^M определяется так:

$$\widehat{\varphi^M}(\omega) := \begin{cases} 1, & |\omega| \le 2\omega_0, \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\left(\frac{\pi}{3(\pi-2\omega_0)}(|\omega|-\pi)\right)\right), & 2\omega_0 < |\omega| \le 2\pi - 2\omega_0, \\ 0, & |\omega| > 2\pi - 2\omega_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Маска Мейера является 2π-периодической функцией, определенной на $[-\pi,\ \pi]$ так: $m^M(\omega) := \widehat{\varphi^M}(2\omega)$. Преобразование Фурье всплеск-функции Мейера может быть записано по стандартной формуле с помощью маски и масштабирующей функции

$$\widehat{\psi^M}(\omega) = e^{-i\omega/2}\overline{m^M(\omega/2+\pi)}\widehat{\varphi^M}(\omega/2).$$

Хорошо известно [9], что в при указанных ограничениях на функцию θ константы неопределенности масштабирующих и всплеск-функций Мейера конечны. Система всплесков Мейера является одним из первых примеров базисов всплесков, она построена И. Мейером в 1986 году [87].

1.2 Конструкция квазисплайн всплесков и условия на линейный метод суммирования

Пусть для ряда Фурье $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos n\omega + b_n \sin n\omega$ последовательность $(\lambda_{n,k})$, $k = 1, \dots n$, $n \in \mathbb{N}$ определяет линейный метод суммирования

$$u_n(f,\omega) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k}(a_k \cos k\omega + b_k \sin k\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) U_n(x,\omega)\, dx,$$

где $U_n(x,\omega) := 1/2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} \cos k(x-\omega)$ и

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\cos\, n\omega\, d\omega, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\sin\, n\omega\, d\omega \; –$$

коэффициенты Фурье. Верно следующее свойство

$$u_n(f',\omega) = (u_n(f,\omega))'_\omega. \tag{1.3}$$

Определим неортогональную маску квазисплайн всплеска как 2π-периодический тригонометрический полином

$$m_l(\omega) := \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} \frac{u_{n(l)}(m_l^M,\omega)}{u_{n(l)}(m_l^M,0)}, \tag{1.4}$$

где

$$m_l^M(\omega) := \frac{m^M(\omega)}{\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l}},\ l \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

m^M – фиксированная маска Мейера и полином $u_{n(l)}(m_l^M, \cdot)$ получен фиксированным линейным методом суммирования, примененным к функции m_l^M.

Так как m_l – тригонометрический полином, и $m_l(0) = 1$, то бесконечное произведение $\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$ сходится абсолютно и равномерно на любом замкнутом отрезке [19, предложение 2.4.1]. (Мы считаем бесконечное произведение сходящимся и в том случае, когда оно равно нулю.) Функция m_l является маской для неортогональной масштабирующей функции φ_l, где преобразование Фурье φ_l определяется так:

$$\widehat{\varphi}_l(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right). \tag{1.6}$$

Функции $\varphi_l(\cdot + k)$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют систему Рисса: это прямое следствие из неравенства $A \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(\omega + 2\pi k)|^2 \le B$ (см. [19, Теорема 1.1.7]), проверенного в лемме 1.4.5. Из этой же леммы следует, что ортогонализующий множитель

$$\Phi_l(\omega) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(\omega + 2\pi k)|^2 \tag{1.7}$$

корректно определен и строго положителен. Далее по общей схеме кратномасштабного анализа определяется преобразование Фурье ортогональной масштабирующей функции

$$\widehat{\varphi_l^{\perp}}(\omega) := \widehat{\varphi}_l(\omega)\Phi_l^{-0.5}(\omega), \tag{1.8}$$

ортогональная маска

$$m_l^{\perp}(\omega) := m_l(\omega)\Phi_l^{0.5}(\omega)\Phi_l^{-0.5}(2\omega) \tag{1.9}$$

и преобразование Фурье всплеск-функции

$$\widehat{\psi_l^{\perp}}(\omega) := e^{\frac{-i\omega}{2}}\overline{m_l^{\perp}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}\widehat{\varphi_l^{\perp}}\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{1.10}$$

Определение 1.2.1. *Под квазисплайн всплеск-функцией мы понимаем функцию $\psi_l^{\perp}$, преобразование Фурье которой $\widehat{\psi_l^{\perp}}$ определено в (1.10) и неортогональная маска определена в (1.4).*

Итак, для фиксированной маски Мейера и фиксированного линейного метода суммирования мы получаем последовательность $(\psi_l^\perp)_{l\in\mathbb{N}}$ квазисплайн всплеск-функций, причем с ростом параметра l растет гладкость функции (это доказано в теореме 1.5.1).

В оставшейся части главы будет доказана следующая основная теорема о свойствах квазисплайн всплеск-функций.

Теорема 1.2.1. *Пусть существует последовательность $n(l)$, $l \in \mathbb{N}$, такая что*

$$\|u_{n(l)}(m_l^M, \cdot) - m_l^M\|_C =: \alpha(l) = o(l^{-1}) \text{ при } l \to \infty, \tag{1.11}$$

$$\|u_{n(l)}((m_l^M)', \cdot) - (m_l^M)'\|_C =: \gamma(l) = o(1) \text{ при } l \to \infty, \tag{1.12}$$

$$u_{n(l)}(m_l^M, \pi) \neq 0. \tag{1.13}$$

Пусть $\psi_l^\perp$ ($\varphi_l^\perp$) – квазисплайн всплеск-функции (масштабирующие функции), определенные по формулам (1.4)–(1.10). Тогда

1. *функции $\varphi_l^\perp$ и $\psi_l^\perp$ экспоненциально убывают на бесконечности (теорема 1.5.2);*

2. *показатели Гельдера $\alpha_{\varphi_l^\perp}$ и $\alpha_{\psi_l^\perp}$ этих функций удовлетворяют неравенствам*

$$2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1 + \alpha(l)/\|m_l^M\|_C}\right) \leq \alpha_{\varphi_l^\perp} \leq 2l,$$

$$2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1 + \alpha(l)/\|m_l^M\|_C}\right) \leq \alpha_{\psi_l^\perp} \leq 2l$$

(теорема 1.5.1);

3. *константы неопределенности (1.1) квазисплайн масштабирующих функций $\varphi_l^\perp$ и всплеск-функций $\psi_l^\perp$ стремятся к константам неопределенности масштабирующих функций φ^M и всплеск-функций Мейера ψ^M, точнее*

$$|\Delta^2(\widehat{\varphi_l^\perp}) - \Delta^2(\widehat{\varphi^M})| = O\left(\max\{l\alpha(l) + \gamma(l),\ (4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$

$$|\Delta^2(\varphi_l^\perp) - \Delta^2(\varphi^M)| = O\left(\max\{l\alpha(l)+\gamma(l),\, l(32\pi^2 e^{2\omega_0}/27)^{-l+2\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$

$$|\Delta^2(\widehat{\psi_l^\perp}) - \Delta^2(\widehat{\psi^M})| = O\left(\max\{l\alpha(l)+\gamma(l),\, l(32\pi^2 e^{2\omega_0}/27)^{-l+2\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right),$$

$$|\Delta^2(\psi_l^\perp) - \Delta^2(\psi^M)| = O\left(\max\{l\alpha(l)+\gamma(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2 \frac{1+\alpha(l)/\|m_l^M\|_C}{u_l(0)}}\}\right)$$

при $l\to\infty$ (теоремы 1.4.1, 1.6.1 и 1.7.1).

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \mu(l) &:= l\alpha(l)+\gamma(l), \quad \varepsilon(l) := \alpha(l)/\|m_l^M\|_C, \quad C_0 := 32\pi^2 e^{2\omega_0}/27, \\ u_l &:= u_{n(l)}(m_l^M,\cdot), \quad u_{1,l} := u_{n(l)}((m_l^M)',\cdot), \quad u_{0,l} := u_l/u_l(0), \end{aligned} \tag{1.14}$$

где $\alpha(l)$, $\gamma(l)$ определены в теореме 1.2.1, см. (1.11) и (1.12), число ω_0, $\pi/3 \le \omega_0 < \pi/2$, – это параметр маски Мейера, функция m_l^M определена в (1.5).

Условия (1.11)–(1.13) определяют очень широкий класс линейных методов суммирования. При этом (1.13) необходимо только для более точного определения показателя Гельдера (лемма 1.3.2, теорема 1.5.1), его невыполнение не ухудшает гладкость и не меняет свойств локализованности. Для средних Валле-Пуссена это условие выполнено [16].

Лемма 1.2.1. *Если для любой $f\in C(\mathbb{T})$ верна оценка*

$$\|u_{n(l)}(f,\cdot) - f\|_C \le A\,\omega(f,\,(n(l))^{-\nu}),$$

где $\omega(f,\cdot)$ – модуль непрерывности, $\nu>0$, A – абсолютная константа, то (1.11) и (1.12) выполняются.

Доказательство. Действительно, из определения модуля непрерывности и теоремы Лагранжа получим

$$\omega(f,\,(n(l))^{-\nu}) \le (n(l))^{-\nu}\max_{x\in\mathbb{T}}|f'(x)|.$$

Так как $m^M(\omega)=0$ при $\omega_1\le\omega\le\pi$ и $|m^M|\le 1$, то

$$\left|(m_l^M)'(\omega)\right| = \left|\left(\frac{m^M(\omega)}{(\cos\frac{\omega}{2})^{2l}}\right)'\right| = \left|\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2l}\left((m^M)'(\omega)+l\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}m^M(\omega)\right)\right|$$

$$\le\left(\cos\frac{\omega_1}{2}\right)^{-2l}\left(\max_{[-\pi,\pi]}|(m^M)'|+l\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2}\right)=O\left(l\left(\cos\frac{\omega_1}{2}\right)^{-2l}\right),$$

$$\left|(m_l^M)''(\omega)\right| = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2l}\cdot\left((m^M)''(\omega)+2l\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}(m^M)'(\omega)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{l}{2}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2}+l^2\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}\right)m^M(\omega)\right)\le\left(\cos\frac{\omega_1}{2}\right)^{-2l}\left(\max_{\mathbb{T}}|(m^M)''|\right.$$

$$\left.+2l\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2}\max_{\mathbb{T}}|(m^M)'|+\frac{l}{2}\left(\cos\frac{\omega_1}{2}\right)^{-2}+l^2\operatorname{tg}^2\frac{\omega_1}{2}\right)=O\left(l^2\left(\cos\frac{\omega_1}{2}\right)^{-2l}\right).$$

Поэтому если, например,

$$n(l)=O\left(\left(l^{2+\varepsilon}\left(\cos\frac{\omega_1}{2}\right)^{-2l}\right)^{1/\nu}\right),\quad l\to\infty,$$

то условия (1.11) и (1.12) будут выполнены при $\alpha(l)=l^{-1-\varepsilon}$, $\gamma(l)=l^{-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. $\Diamond$

Условие из леммы 1.2.1 выполнено для многих классических средних, например, средних Фейера, Валле-Пуссена, Рогозинского, Абеля–Пуассона, монотонных средних Валле-Пуссена.

1.3 Гладкость неортогональных масштабирующих функций

Определить гладкость построенных всплеск-функций можно, изучив структуру корней маски. Приведем необходимые сведения из [19, §3.4]. Числа $\tilde\omega$ и $\tilde\omega+\pi$ называются парой симметричных корней маски m, если $m(\tilde\omega)=m(\tilde\omega+\pi)=0$. Множество различных комплексных чисел $B:=\{b_1,\dots,b_n\}$ называется циклическим, если $b_{j+1}=b_j^2$, $j=1,\dots,n$, $b_{n+1}=b_1$. Циклическое множество B называется циклом маски m, если $m(\omega+\pi)=0$, для всех ω, таких что $\exp(i\omega)=b_j$ для некоторого $j=1,\dots,n$. Тривиальным циклом называется множество $\{1\}$. Маска называется чистой, если она не имеет ни пары симметричных корней, ни циклов. Показатель Гельдера α_f функции f на отрезке $[a,b]$ определяется так

$$\alpha_f := k + \sup_{\beta\in\mathbb{R}}\bigl\{\beta \in \mathbb{R}\bigl||f^{(k)}(x_1) - f^{(k)}(x_2)| \le C_\beta |x_1 - x_2|^\beta,\ x_1, x_2 \in [a,b]\bigr\},$$

где $k := \max_{h\in\mathbb{Z}}\bigl\{h\bigl|f \in C^h[a,b]\bigr\}$. Другая характеристика гладкости функции f

$$\theta_{\widehat{f}} := \sup_{\beta\in\mathbb{R}}\left\{\beta \in \mathbb{R}\,\middle|\,|\widehat{f}(\omega)| \le C(|\omega|+1)^{-\beta}\right\}. \tag{1.15}$$

Характеристики связаны известным соотношением $\theta_{\widehat{f}} - 1 \le \alpha_f \le \theta_{\widehat{f}}$. Обозначим $\theta(m) = \theta_{\widehat{\varphi}}$, где φ – масштабирующая функция, соответствующая маске m.

Предложение 1.3.1. [19, 7.4.2, 7.4.4] *Пусть маска m представлена в виде $m(\omega) = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^L m_c(\omega)$, где m_c – чистая маска; тогда $\theta(m) = L + \theta(m_c)$ и $\theta(m_c) = \lim_{k\to\infty}\theta_k$, где*

$$\theta_k := -\frac{1}{k}\log_2\|m_c(\omega)\cdots m_c(2^{k-1}\omega)\|_\infty. \tag{1.16}$$

Лемма 1.3.1. *Полином u_l является чистой маской.*

Доказательство. По условию (1.11) $\sup_{[-\pi,\,\pi]}|u_l - m_l^M| \to 0$ при $l \to \infty$. Из определения маски Мейера и (1.5) следует

$$\inf_{|\omega|\le\omega_0}\left|m_l^M(\omega)\right| = \inf_{|\omega|\le\omega_0}(\cos\omega/2)^{-2l} = 1,$$

$$\inf_{\omega_0<|\omega|\le\pi/2}\left|m_l^M(\omega)\right| = \inf_{\omega_0<|\omega|\le\pi/2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\left(\frac{\pi(2|\omega|-\pi)}{3(\pi-2\omega_0)}\right)\right)\right| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2l}.$$

Следовательно, $u_l(\omega) \ne 0$ на $[-\pi/2,\,\pi/2]$ при достаточно больших l, поэтому u_l не имеет пары симметричных нулей.

Если $B := \{b_1,\ldots,b_n\}$ – циклическое множество и $b_1 = re^{i\xi}$, тогда $r = 1$, $\xi = \frac{2\pi k}{2^n-1}$. Если B – нетривиальный цикл маски m_l, то любое число $\pi + \frac{2\pi k}{2^n-1}$ является корнем u_l. Но поскольку $u_l(\omega) \ne 0$ на $\omega \in [-\pi/2,\,\pi/2]$, то маска m_l не имеет нетривиальных циклов. Наконец, условие $u_l(\pi) \ne 0$ постулировано в (1.13). Поэтому u_l не имеет тривиальных циклов. $\Diamond$

Учитывая лемму 1.3.1, мы можем применить предложение 1.3.1 для оценки гладкости неортогональных квазисплайн масштабирующих функций φ_l.

Лемма 1.3.2. *Для показателей Гельдера функций φ_l верны неравенства $2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1+\varepsilon(l)}\right) \le \alpha_{\varphi_l} \le 2l$. Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Вспоминая (1.11), можем записать

$$\sup_\omega |u_{0,l}(\omega)| \le \frac{\sup_\omega |u_l(\omega)|}{c} \le \frac{(1+\varepsilon(l)) \sup_\omega |m_l^M(\omega)|}{c} \le \sup_\omega |f_{0,l}(\omega)|$$

для $\varepsilon(l) := \alpha(l)/\|m_l^M\|_C \to 0$ при $l \to \infty$, где $f_{0,l}$ – четная 2π-периодическая функция и $f_{0,l}(\omega) := (1+\varepsilon(l))(\cos\omega/2)^{-2l}/c$ для $0 \le \omega \le \omega_1$ и $f_{0,l}(\omega) := 0$ при $\omega_1 < \omega \le \pi$. Поэтому $\theta_k(u_{0,l}) \ge \theta_k(f_{0,l})$.

Определение $f_{0,l}$ дает

$$\left\| f_{0,l}(\omega) \cdots f_{0,l}(2^{k-1}\omega) \right\|_\infty = f_{0,l}(\omega_1) \cdots f_{0,l}(2^{-k+1}\omega_1)$$

$$= \left(\cos\frac{\omega_1}{2} \cdots \cos\frac{\omega_1}{2^k}\right)^{-2l} \left(\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}\right)^k.$$

Тогда из предложения 1.3.1 следует

$$\theta_k(f_{0,l}) = -\frac{1}{k}\log_2\left(\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}\right)^k - 2l\log_2\left|\cos\frac{\omega_1}{2}\cdots\cos\frac{\omega_1}{2^k}\right|^{-\frac{1}{k}} \to \log_2\left(\frac{c}{1+\varepsilon(l)}\right)$$

при $k \to \infty$. Мы воспользовались тождеством $\prod_{j=1}^\infty \cos\frac{\omega}{2^j} = \frac{\sin\omega}{\omega}$. Итак, $\theta(u_{0,l}) \ge \log_2\left(\frac{c}{1+\varepsilon(l)}\right)$. Для $u_{0,l}$ кратность тривиального цикла равна $2l$. Поэтому $2l - 1 + \log_2\left(\frac{c}{1+\varepsilon(l)}\right) \le \alpha_{\varphi_l}$. Далее $\|u_{0,l}(\omega)\ldots u_{0,l}(2^{k-1}\omega)\|_\infty \ge u_{0,l}(0)\ldots u_{0,l}(2^{k-1}\cdot 0) = 1$. Поэтому из предложения 1.3.1 следует $\theta_k(u_{0,l}) \le 0$, тогда $\theta(u_{0,l}) \le 0$, так что $\alpha_{\varphi_l} \le 2l$. $\Diamond$

Мы вернемся в оценке гладкости ортогонализованных масштабирующих и всплеск-функций, а также докажем их экспоненциальное убывание в параграфе 1.5, так как предварительно нам нужно получить оценки для ортогонализующего множителя (1.6). Это будет сделано в лемме 1.4.5.

1.4 Поведение частотных радиусов масштабирующих функций

Лемма 1.4.1. $\|m_l - m^M\|_C \le \alpha(l)/u_l(0) = o(l^{-1})$ *при* $l \to \infty$.

Доказательство. Используя (1.4), получим

$$|m_l(\omega) - m^M(\omega)| = \left|(\cos(\omega/2))^{2l}\,\frac{u_l(\omega)}{u_l(0)} - m^M(\omega)\right|$$

$$\le \left|(\cos(\omega/2))^{2l}\,\frac{u_l(\omega)}{u_l(0)} - \frac{m^M(\omega)}{u_l(0)}\right| + \left|\frac{m^M(\omega)}{u_l(0)} - m^M(\omega)\right|.$$

На основании (1.11) и $0 \le m^M \le 1$ оцениваем выражение так:

$$\frac{1}{|u_l(0)|}\left|u_l(\omega) - m_l^M(\omega)\right| + \frac{m^M(\omega)}{|u_l(0)|}\,|u_l(0) - 1| \le \frac{\alpha(l)}{|u_l(0)|}.$$

$\lozenge$

Лемма 1.4.2. $\|m_l' - (m^M)'\|_C = O(\mu(l))$ *при* $l \to \infty$. *Параметр* $\mu(l)$ *определен в (1.14).*

Доказательство. Используя лемму 1.4.1, (1.3) и (1.12), получим

$$\left|\left(\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} u_l(\omega)\right)' - (m^M)'(\omega)\right|$$

$$= \left|-l\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l-1}\sin\frac{\omega}{2}\,u_l(\omega) + \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} u_l'(\omega) - (m^M)'(\omega)\right|$$

$$= \left|-l\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l-1}\sin\frac{\omega}{2}\left(m_l^M(\omega) + u_l(\omega) - m_l^M(\omega)\right)\right.$$

$$\left. + \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l}\left((m_l^M)'(\omega) + u_{1,l}(\omega) - (m_l^M)'(\omega)\right) - (m^M)'(\omega)\right|$$

$$= \left|-l\tan\frac{\omega}{2}\,m^M(\omega) - l\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l-1}\sin\frac{\omega}{2}\left(u_l(\omega) - m_l^M(\omega)\right)\right.$$

$$+ \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l}\cdot\frac{(m^M)'(\omega)\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} + l\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l-1}\sin\frac{\omega}{2}\,m^M(\omega)}{\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{4l}}$$

$$\left. + \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l}\left(u_{1,l}(\omega) - (m_l^M)'(\omega)\right) - (m^M)'(\omega)\right|$$

$$= \left| -l \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l-1} \sin\frac{\omega}{2} \left(u_l(\omega) - m_l^M(\omega)\right) + \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} \left(u_{1,l}(\omega) - (m_l^M)'(\omega)\right) \right|$$
$$= O(l\alpha(l) + \gamma(l)).$$

Поэтому для функции m_l имеем

$$\left| m_l'(\omega) - (m^M)'(\omega) \right| = \left| \frac{\left(\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} u_l(\omega)\right)'}{u_l(0)} - (m^M)'(\omega) \right|$$

$$\leq \left| \left(\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} u_l(\omega)\right)' \right| \left| u_l^{-1}(0) - 1 \right| + \left| \left(\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} u_l(\omega)\right)' - (m^M)'(\omega) \right|$$
$$= \left(\|(m^M)'(\omega)\|_C + O(l\alpha(l) + \gamma(l)) \right) \frac{O(\alpha(l))}{u_l(0)} + O(l\alpha(l) + \gamma(l))$$
$$= O(l\alpha(l) + \gamma(l)).$$

$\Diamond$

Лемма 1.4.3. *$\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\|_{C[a,\,b]} = O(\mu(l))$ при $l \to \infty$ для любых $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Параметр $\mu(l)$ определен в (1.14).*

Доказательство. Фиксируем $\omega \in \mathbb{R}$, и пусть D удовлетворяет неравенству $|w|/2^D < 2\omega_0$, тогда

$$\left| \widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega) \right| = \left| \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{\infty} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right|$$

$$= \left| \prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^D 2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \prod_{j=1}^{\infty} m^M\left(\frac{\omega}{2^D 2^j}\right) \right|$$
$$\leq \left| \prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^D 2^j}\right)$$
$$+ \left| \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^D 2^j}\right) - \prod_{j=1}^{\infty} m^M\left(\frac{\omega}{2^D 2^j}\right) \right| \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$
$$= \left| \prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^D}\right) + \left| \widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^D}\right) - 1 \right| \widehat{\varphi^M}(\omega).$$

Используя (1.11) и $m^M \le 1$, получим

$$\left|\prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|$$

$$\le |m_l(\omega) - m^M(\omega)| \prod_{j=2}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right) + |m_l(\omega)| \left|\prod_{j=2}^{D} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=2}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|$$

$$\le \|m_l - m^M\|_C + \big(1 + \|m_l - m^M\|_C\big) \left|\prod_{j=2}^{D} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=2}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|.$$

Повторяя $D-1$ раз, придем к оценке

$$\left|\prod_{j=1}^{D} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=1}^{D} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right| \le (1 + O(\alpha(l)))^D - 1 \le O(\alpha(l)). \qquad (1.17)$$

По свойству масштабирующей функции Мейера $\widehat{\varphi^M}(\omega) \le 1$. Если $\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^D}\right) \to 1$ при $l \to \infty$ доказано, то $\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^D}\right)$ ограничено.

Докажем $\widehat{\varphi}_l(\omega) \to 1$ при $l \to \infty$ для $|w| < 2\omega_0$. Имеем

$$\widehat{\varphi}_l(\omega) - 1 = \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - 1 = e^{\ln \prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} - 1 = e^{\sum_{j=1}^{\infty} \ln m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} - 1.$$

Докажем, что $\sum_{j=1}^{\infty} \ln m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \to 0$ при $l \to \infty$. Используя $\ln m_l(0) = 0$, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ln m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\ln m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \ln m_l(0)\right).$$

Теорема Лагранжа дает

$$\ln m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \ln m_l(0) = \frac{\omega}{2^j}\left(\ln m_l(\omega)\right)'_{\omega=\omega_j^*}, \text{ где } 0 < \omega_j^* < \frac{\omega}{2^j}.$$

Оценим производную

$$\left(\ln m_l(\omega)\right)'_{\omega=\omega_j^*} = \frac{m_l'(\omega_j^*)}{m_l(\omega_j^*)} = \frac{\left(\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2l} u_l(\omega)\right)'_{\omega=\omega_j^*} u_l(0)}{u_l(0)\,\left(\cos\frac{\omega_j^*}{2}\right)^{2l} u_l(\omega_j^*)}$$

$$= \frac{-l\left(\cos\frac{\omega_j^*}{2}\right)^{2l-1}\sin\frac{\omega_j^*}{2}u_l(\omega_j^*) + \left(\cos\frac{\omega_j^*}{2}\right)^{2l}u_l'(\omega_j^*)}{\left(\cos\frac{\omega_j^*}{2}\right)^{2l}u_l(\omega_j^*)} = -l\operatorname{tg}\frac{\omega_j^*}{2} + \frac{u_l'(\omega_j^*)}{u_l(\omega_j^*)}.$$

Если $|\omega| \le 2\omega_0$, то $(m_l^M)'(\omega) = l\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}m_l^M(\omega)$, поэтому по (1.3) получим

$$(\ln m_l(\omega))'_{\omega=\omega_j^*} = -l\operatorname{tg}\frac{\omega_j^*}{2} + \frac{(m_l^M)'(\omega_j^*) + \left(u_l'(\omega_j^*) - (m_l^M)'(\omega_j^*)\right)}{m_l^M(\omega_j^*) + \left(u_l(\omega_j^*) - m_l^M(\omega_j^*)\right)}$$

$$= \frac{-l\operatorname{tg}\frac{\omega_j^*}{2}\left(u_l(\omega_j^*) - m_l^M(\omega_j^*)\right) + \left(u_l'(\omega_j^*) - (m_l^M)'(\omega_j^*)\right)}{m_l^M(\omega_j^*) + \left(u_l(\omega_j^*) - m_l^M(\omega_j^*)\right)}.$$

Следовательно, условия (1.11), (1.12) и неравенство $|\omega| < 2\omega_0$ дают

$$\left|(\ln m_l(\omega))'_{\omega=w_j^*}\right| \le \frac{l\left|\operatorname{tg}\frac{\omega_j^*}{2}\right|\alpha(l) + \gamma(l)}{\left|m_l^M(\omega_j^*)\right| - \alpha(l)} = O(\mu(l)).$$

Итак, $\sum_{j=1}^{\infty}\ln m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = O(\mu(l))$. Поэтому $|\widehat{\varphi}_l(\omega) - 1| = e^{O(\mu(l))} - 1 = O(\mu(l))$. Окончательно получим

$$\sup_{\omega<2^{D+1}\omega_0}\left|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)\right| = O(\alpha(l))(1 + O(\mu(l))) + O(\mu(l)) = O(\mu(l)).$$

$\Diamond$

Лемма 1.4.4. $\left\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\right\|_{L_2(\mathbb{R})} = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$ *при* $l \to \infty$. *Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Найдем мажоранты $\xi_l \in L_2(\mathbb{R})$ для функций $|\widehat{\varphi}_l(\omega)| \le \xi(\omega)$. Действительно,

$$\widehat{\varphi}_l(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(\cos^2\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)^l\frac{u_l\left(\omega 2^{-j}\right)}{u_l(0)} = \left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^{2l}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{u_l\left(\omega 2^{-j}\right)}{u_l(0)}.$$

Обозначим

$$\widehat{\varphi_{0,l}}(\omega) := \prod_{j=1}^{\infty}\frac{u_l\left(\omega 2^{-j}\right)}{u_l(0)}. \tag{1.18}$$

Основываясь на доказательстве предложения 7.4.4 из [19], получим

$$|\widehat{\varphi_{0,l}}(\omega)| \le \omega^{-2\theta(u_{0,l})}\sup_{|\omega|<2\omega_0}\widehat{\varphi_{0,l}}(\omega),$$

где $\theta(u_{0,l}) := \theta_{\widehat{\varphi_{0,l}}}$, и $\theta_{\widehat{\varphi_{0,l}}}$ определена в (1.15).

Используя вычисления из леммы 1.4.3, при условии $|\omega| < 2\omega_0$ получим

$$|\widehat{\varphi_{0,l}}(\omega)| = \left|\prod_{j=1}^{\infty} \frac{u_l\left(\omega 2^{-j}\right)}{u_l(0)}\right| = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\ln u_l\left(\omega 2^{-j}\right) - \ln(u_l(0))|\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\omega|}{2^j}\left|\frac{u_l'\left(\omega_j^*\right)}{u_l\left(\omega_j^*\right)}\right|\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\omega|}{2^j}\left|l \operatorname{tg}\frac{\omega_j^*}{2} + (\ln m_l(\omega))'_{\omega=\omega_j^*}\right|\right)$$

$$\leq \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\omega|}{2^j}\left(l \operatorname{tg}\frac{|\omega_j^*|}{2} + \left|(\ln m_l(\omega))'\right|_{\omega=\omega_j^*}\right)\right)$$

$$\leq \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\omega|}{2^j}\left(l + O(\mu(l))\right)\right) \leq \exp\left(2\omega_0\left(l + O(\mu(l))\right)\right),$$

где $0 < \omega_j^* < \frac{\omega}{2^j}$.

Принимая во внимание неравенство $\theta(u_{0,l}) \geq \log_2\left(\frac{u_l(0)}{1+\varepsilon(l)}\right)$, где $\varepsilon(l) \to 0$ при $l \to \infty$, доказанное в лемме 1.3.2, придем к оценке при $|\omega| \geq 1$

$$|\widehat{\varphi_{0,l}}(\omega)| \leq |\omega|^{-2\theta(u_{0,l})} e^{2\omega_0(l+O(\mu(l)))} \leq |\omega|^{2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}} e^{2\omega_0(l+O(\mu(l)))}. \qquad (1.19)$$

Так что при $|\omega| > 4e^{2\omega_0}$ верно

$$|\widehat{\varphi}_l(\omega)| \leq |\omega|^{-2l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}} \left(4e^{2\omega_0}\right)^l e^{O(\mu(l))} \leq e^{O(\mu(l))}|\omega|^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}.$$

А при $|\omega| \leq 4e^{2\omega_0}$ лемма 1.4.3 дает $|\widehat{\varphi}_l(\omega)| \leq \left|\widehat{\varphi^M}(\omega)\right| + O(\mu(l))$.

Таким образом, $|\widehat{\varphi}_l(\omega)|$ мажорируются функциями

$$|\widehat{\varphi}_l(\omega)| \leq \xi_l(\omega) := \begin{cases} \left|\widehat{\varphi^M}(\omega)\right| + O(\mu(l)), & |\omega| \leq 4e^{2\omega_0}, \\ e^{O(\mu(l))}|\omega|^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}, & |\omega| > 4e^{2\omega_0}. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Оценим скорость сходимости $\widehat{\varphi}_l$ к $\widehat{\varphi^M}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Так как $\widehat{\varphi^M}(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq 4e^{2\omega_0}$, то

$$\left\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{|\omega|<4e^{2\omega_0}} + \int_{|\omega|\geq 4e^{2\omega_0}}$$

$$\leq 8e^{2\omega_0}\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\|^2_{C[-4e^{2\omega_0},\,4e^{2\omega_0}]} + e^{O(\mu(l))} \int_{|\omega|\geq 4e^{2\omega_0}} |\omega|^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}} d\omega$$

$$= 8e^{2\omega_0}\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\|^2_{C[-4e^{2\omega_0},\, 4e^{2\omega_0}]} + \frac{e^{O(\mu(l))}\left(4e^{2\omega_0}\right)^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}+1}}{2l-4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}-1}.$$

$\Diamond$

Замечание 1.4.1. Из леммы 1.4.3 и леммы 1.4.4 следует оценка $\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\|_{C(\mathbb{R})} = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$. Действительно, $\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\|_{C(\mathbb{R})}$ $=\ \max\left\{\sup_{|\omega|\le 4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)|,\, \sup_{|\omega|>4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)|\right\}$. Применяя для первой компоненты 1.4.3, а для второй определение $\widehat{\varphi^M}$ и (1.20), получим $\sup_{|\omega|\le 4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)| = O(\mu(l))$ и $\sup_{|\omega|>4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)| = \sup_{|\omega|>4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega)| = (4e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}$.

Лемма 1.4.5. $\|\Phi_l - 1\|_C = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$ *при* $l \to \infty$. *Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Пусть $\omega \in [-\pi,\, \pi]$. Поскольку φ^M – ортогональная масштабирующая функция, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)|^2 = 1$. Принимая во внимание (1.20), положим $k_0 := \left[2e^{2\omega_0}/\pi + 1/2\right]$. Тогда

$$|\Phi_l(\omega) - 1| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)|^2\right|$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\left(\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)\right)^2 - \left(\widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)\right)^2\right| = \sum_{|k|\le k_0} + \sum_{|k|>k_0}.$$

Из леммы 1.4.3 получим

$$\sum_{|k|\le k_0} \le (2k_0+1)\Big(\sup_{|\omega|\le 4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)| + 2\sup_{|\omega|\le 4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi^M}(\omega)|\Big)$$

$$\times \sup_{|\omega|\le 4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega) - \widehat{\varphi^M}(\omega)| \le O(\mu(l)).$$

Так как $\widehat{\varphi^M}(\omega) = 0$ при $|\omega| \ge 4e^{2\omega_0}$, оценка (1.20) и выбор k_0 дают

$$\sum_{|k|>k_0} \le \sum_{|k|>k_0} e^{O(\mu(l))}|\omega+2\pi k|^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}} = O\left((4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\right).$$

$\Diamond$

Теперь мы готовы доказать сходимость частотных радиусов для масштабирующих функций.

Теорема 1.4.1. $|\Delta^2(\widehat{\varphi_l^\perp}) - \Delta^2(\widehat{\varphi^M})| = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$ *при* $l \to \infty$. *Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Так как функции $\widehat{\varphi_l^\perp}$ и $\widehat{\varphi^M}$ четные, то $c(\widehat{\varphi_l^\perp}) = c(\widehat{\varphi^M}) = 0$, где $c(\widehat{\varphi_l^\perp})$, $c(\widehat{\varphi^M})$ частотные центры (см. определение (1.1)).

Принимая во внимание лемму 1.4.3, технику доказательства леммы 1.4.5 ($\widehat{\varphi^M}(\omega) = 0$ при $|\omega| \geq 4e^{2\omega_0}$) и оценку (1.20), получим

$$|\Delta^2(\widehat{\varphi_l^\perp}) - \Delta^2(\widehat{\varphi^M})| = \left|\int_{\mathbb{R}} \omega^2 \left(\left(\widehat{\varphi_l^\perp}\right)^2(\omega) - \left(\widehat{\varphi^M}\right)^2(\omega)\right) d\omega\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \omega^2 \left|\frac{(\widehat{\varphi}_l)^2(\omega)}{\Phi_l(\omega)} - \left(\widehat{\varphi^M}\right)^2(\omega)\right| d\omega \leq \int_{|\omega|<4e^{2\omega_0}} + \int_{|\omega|\geq 4e^{2\omega_0}}$$

$$\leq 16e^{4\omega_0} \int_{|\omega|<4e^{2\omega_0}} \left((\widehat{\varphi}_l)^2(\omega)\left|\frac{1}{\Phi_l(\omega)} - 1\right| + \left|(\widehat{\varphi}_l)^2(\omega) - \left(\widehat{\varphi^M}\right)^2(\omega)\right|\right) d\omega$$

$$+\int_{|\omega|\geq 4e^{2\omega_0}} \omega^2 (\widehat{\varphi}_l)^2(\omega)\frac{1}{\Phi_l(\omega)}\, d\omega \leq 16e^{4\omega_0}\left(\|\Phi_l - 1\|_C \int_{|\omega|<4e^{2\omega_0}} \frac{(\widehat{\varphi}_l)^2(\omega)}{\Phi_l(\omega)}\, d\omega\right.$$

$$\left.+\|\widehat{\varphi}_l - \widehat{\varphi^M}\|_{C[-4e^{2\omega_0},\, 4e^{2\omega_0}]} \int_{|\omega|<4e^{2\omega_0}} |\widehat{\varphi}_l(\omega) + \widehat{\varphi^M}(\omega)|\, d\omega\right)$$

$$+\frac{2e^{O(\mu(l))}(4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}+3}}{\inf_{\omega,\, l}\Phi_l(\omega)\left(2l - 4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)} - 3\right)}.$$

Из лемм 1.4.3 и 1.4.5 следует, что интегралы

$$\int_{|\omega|<4e^{2\omega_0}} \frac{(\widehat{\varphi}_l)^2(\omega)}{\Phi_l(\omega)}\, d\omega, \quad \int_{|\omega|<4e^{2\omega_0}} |\widehat{\varphi}_l(\omega) + \widehat{\varphi^M}(\omega)|\, d\omega$$

ограничены. Поэтому

$$|\Delta^2(\widehat{\varphi_l^\perp}) - \Delta^2(\widehat{\varphi^M})| = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right) + O(\mu(l))$$

$$+O((4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}) = O\left(\max\{\mu(l),\, (4e^{2\omega_0})^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

$\Diamond$

1.5 Рост гладкости и экспоненциальное убывание

Лемма 1.4.5 позволяет оценить гладкость ортогональных масштабирующих и всплеск-функций.

Теорема 1.5.1. *Для показателей Гельдера функций $\varphi_l^\perp$ и $\psi_l^\perp$ верны неравенства*

$$2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_0(l)}{1+\varepsilon(l)}\right) \le \alpha_{\varphi_l^\perp} \le 2l, \quad 2l - 1 + \log_2\left(\frac{u_0(l)}{1+\varepsilon(l)}\right) \le \alpha_{\psi_l^\perp} \le 2l.$$

Параметры определены в (1.14).

Доказательство. Достаточно доказать $\theta_{\widehat{\varphi}_l} = \theta_{\widehat{\varphi_l^\perp}} = \theta_{\widehat{\psi_l^\perp}}$. Лемма 1.4.5 дает $0 < c_1 \le \Phi_l(\omega) \le c_2 < \infty$. Следовательно, $c_2^{-0.5}|\widehat{\varphi}_l| \le |\widehat{\varphi_l^\perp}| \le c_1^{-0.5}|\widehat{\varphi}_l|$. Так что из определения $\theta_{\widehat{f}}$ получаем $\theta_{\widehat{\varphi}_l} = \theta_{\widehat{\varphi_l^\perp}}$.

Из (1.10) следует

$$|\widehat{\psi_l^\perp}(\omega)| = \left| m_l\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\Phi_l^{0.5}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\Phi_l^{-0.5}(\omega+2\pi)\,\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2}\right)\Phi_l^{-0.5}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|.$$

Существуют сколь угодно большие ω (например, $\omega \in [-2\omega_0 + 2\pi(2k-1), 2\omega_0 + 2\pi(2k-1)]$, $k \in \mathbb{Z}$), такие что $1 - \alpha(l) \le m_l(\omega/2+\pi) \le 1 + \alpha(l)$. Поэтому для таких ω верно $(1-\alpha(l))c_1^{0.5}c_2^{-1}|\widehat{\varphi}_l(\omega/2)| \le |\widehat{\psi_l^\perp}(\omega)| \le (1+\alpha(l))c_2^{0.5}c_1^{-1}|\widehat{\varphi}_l(\omega/2)|$. Следовательно, $\theta_{\widehat{\varphi}_l} = \theta_{\widehat{\psi_l^\perp}}$. ◊

Лемма 1.4.5 позволяет также доказать экспоненциальное убывание ортогональных масштабирующих функций $\varphi_l^\perp$ и всплеск-функций $\psi_l^\perp$.

Теорема 1.5.2. *Функции $\varphi_l^\perp$ и $\psi_l^\perp$ экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности.*

Доказательство. Фиксируем достаточно большое $l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $\Phi_l^{-0.5}(\omega)$. Обозначим a_k, $k \in \mathbb{Z}$, ее коэффициенты Фурье. Докажем, что $a_k = O\left(e^{-\beta_1|k|}\right)$, $\beta_1 > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, так как m_l – тригонометрический полином, то функция φ_l имеет компактный носитель. Поэтому ее ортогонализующий множитель $\Phi_l(\omega)$ тоже является тригонометрическим полиномом. Из (1.7) и леммы 1.4.5 следует, что $\Phi_l > A > 0$ для некоторой абсолютной константы A, так что $\Phi_l(\omega) \ne 0$ в некоторой полосе $|\mathrm{Im}\,\omega| < \beta$, $\beta > 0$. Поэтому ряд Лорана $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ сходится в кольце

$e^{-\beta} < |z| < e^{\beta}$. Для $0 < \beta_1 < \beta$, применяя неравенство Коши, получим $|h_k| \le M(\beta_1)e^{-\beta_1|k|} \le Me^{-\beta_1|k|}$, где $M(\beta_1) := \max_{|z|=e^{\beta_1}} \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\right|$. Так как $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ – аналитическая функция в кольце $e^{-\beta} < |z| < e^{\beta}$, то $M(\beta_1) \le M$ для некоторой абсолютной константы M. Итак, $a_k = O\left(e^{-\beta_1|k|}\right)$, $\beta_1 > 0$.

Тогда из (1.8) следует $\varphi_l^{\perp}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varphi_l(t-k)$. Так как φ_l с компактным носителем, то $\varphi_l^{\perp}(t) = O\left(e^{-\beta_1|t|}\right)$, $t \to \infty$, $\beta_1 > 0$.

Далее из (1.10) следует $\psi_l^{\perp}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k h_{-k+1}\varphi_l^{\perp}(2t-k)$, где h_k – коэффициенты Фурье функции $m_l^{\perp}$. Аналогично a_k заключаем, что $h_k = O(e^{-\beta_2|k|})$, $\beta_2 > 0$. Следовательно,

$$|\psi_l^{\perp}(t)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k h_{-k+1}\varphi_l^{\perp}(2t-k)\right| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|h_{-k+1}\varphi_l^{\perp}(2t-k)\right|$$

$$\le A\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\beta_1|2t-k|-\beta_1|-k+1|},$$

где A – абсолютная константа. Преобразовывая выражение, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\beta_1|2t-k|-\beta_2|-k+1|}$$

$$= \frac{e^{\pm\beta_1-2\beta_1|t|}}{1-e^{-\beta_2-\beta_1}} + \frac{e^{\pm\beta_1}}{e^{\beta_1-\beta_2}-1}\left(e^{\beta_1|-2t+[2t]|-\beta_2|[2t]|} - e^{-2\beta_1|t|}\right) + \frac{e^{\kappa+\beta_1|2t-[2t]|-\beta_2|[2t]|}}{1-e^{-\beta_2-\beta_1}},$$

где $\kappa = -\beta_1$ при $t \ge 0$ и $\kappa = -\beta_2$ при $t < 0$. Окончательно, $\psi_l^{\perp} = O\left(e^{-\max\{\beta_2,\,\beta_1\}|2t|}\right)$. $\Diamond$

1.6 Поведение временных радиусов масштабирующих функций

Докажем вспомогательный технический результат.

Лемма 1.6.1. *Для любых* a, b, $-\infty < a < b < \infty$,

$$\left\|\left(\prod_{j=1}^{\infty} m_l(\omega 2^{-j})\right)' - \left(\prod_{j=1}^{n} m_l(\omega 2^{-j})\right)'\right\|_{C[a,\,b]} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, *где* $\left(\prod_{j=1}^{\infty} m_l(\omega 2^{-j})\right)'$ *– обозначение для ряда*

$$\sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} m_l'(\omega 2^{-j_0}) \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} m_l(\omega 2^{-j}).$$

Доказательство. Используя введенное обозначение, имеем

$$\left| \left(\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right)' - \left(\prod_{j=1}^{n} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right)' \right|$$

$$= \left| \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right) \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \sum_{j_0=1}^{n} 2^{-j_0} m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right) \prod_{j=1, j\neq j_0}^{n} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right|$$

$$\leq \left| \sum_{j_0=n+1}^{\infty} 2^{-j_0} m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right) \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right|$$

$$+ \left| \sum_{j_0=1}^{n} 2^{-j_0} m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right) \left(\prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) - \prod_{j=1, j\neq j_0}^{n} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right) \right| =: J_{1,n}(\omega) + J_{2,n}(\omega).$$

Теорема Лагранжа и лемма 1.4.2 дают $|m_l(\omega)| \leq 1 + A|\omega|$, где A – постоянная. Поэтому

$$\left| \prod_{j=1}^{j_0-1} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \leq \prod_{j=1}^{j_0-1} \left(1 + A|\omega| 2^{-j}\right) = e^{\sum_{j=1}^{j_0-1} \ln(2^j + A|\omega|) - \ln 2^j} \leq e^{A|\omega| \sum_{j=1}^{j_0-1} \frac{1}{2^j}} \leq e^{A|\omega|}.$$

Так что используя дополнительно леммы 1.4.2 и 1.4.3, получим для первой суммы

$$J_{1,n}(\omega) \leq \sum_{j_0=n+1}^{\infty} 2^{-j_0} \left| m_l'\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \prod_{j=1}^{j_0-1} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right) \right|$$

$$\leq \left(\left\|(m^M)'\right\|_C + \left\|m_l' - (m^M)'\right\|_C \right) e^{A|\omega|} \left(\left\|\widehat{\varphi^M}\right\|_{C(\mathbb{R})} + \left\|\widehat{\varphi^M} - \widehat{\varphi}_l\right\|_{C(\mathbb{R})} \right) 2^{-n},$$

где все множители ограничены при $a \leq \omega \leq b$, $l \in \mathbb{N}$. Так что $J_{1,n}(\omega) \to 0$ при $n \to \infty$.

Оценим вторую сумму $J_{2,n}(\omega)$

$$J_{2,n}(\omega) = \left| \sum_{j_0=1}^{n} 2^{-j_0} m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right) \prod_{j=1, j\neq j_0}^{n} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \left(\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^n}\right) - 1 \right) \right|.$$

Так как функция $\widehat{\varphi}_l$ непрерывна, $\widehat{\varphi}_l(0)=1$, и $a\le|\omega|\le b$, то $\left|\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^n}\right)-1\right|=\varepsilon_1(n)$, $\varepsilon_1(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому

$$J_{2,n}(\omega)\le\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\left(\left\|(m^M)'\right\|_C+\left\|m_l'-(m^M)'\right\|_C\right)e^{A|\omega|}\varepsilon_1(n),$$

где все множители ограничены, $a\le\omega\le b$, $l\in\mathbb{N}$. Так что $J_{1,n}(\omega)\to 0$ при $n\to\infty$. $\Diamond$

Лемма 1.6.2. $\left\|\widehat{\varphi}_l{}'-\widehat{\varphi^M}{}'\right\|_{C[a,b]}=O\left(\mu(l)\right)$ *при* $l\to\infty$, *где* $-\infty<a<b<\infty$. *Параметр* $\mu(l)$ *определен в (1.14).*

Доказательство. Используя определение $\widehat{\varphi}_l$ и лемму 1.6.1, получим

$$\left|\widehat{\varphi}_l{}'(\omega)-\widehat{\varphi^M}{}'(\omega)\right|=\left|\left(\prod_{j=1}^{\infty}m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right)'-\left(\prod_{j=1}^{\infty}m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right)'\right|$$

$$=\left|\sum_{j_0=1}^{\infty}2^{-j_0}\left(m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-(m^M)'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right)\right|$$

$$\le\sum_{j_0=1}^{\infty}2^{-j_0}\left(\left|m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)-(m^M)'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}\left|m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|\right.$$

$$\left.+\left|m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|\left|\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|\right).$$

Из леммы 1.4.2 следует, что $\left|m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)-(m^M)'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|=O(\mu(l))$ и $\left|m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|=\overline{M}+O(\mu(l))$, где $\overline{M}:=\left\|(m^M)'\right\|_C$. Поскольку $|m^M|\le 1$, имеем

$$\left|\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|\le 1.$$

Принимая во внимание лемму 1.4.1 и определение $\widehat{\varphi}_l$ (1.6), получим

$$\left|\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-\prod_{j=1,j\ne j_0}^{\infty}m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|\le\left|\prod_{j=1}^{j_0-1}m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-\prod_{j=1}^{j_0-1}m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|\left|\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|$$

$$+\left|\prod_{j=1}^{j_0-1} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|\left|\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)-\widehat{\varphi^M}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|.$$

Используя (1.11) и свойство маски Мейера $m^M \le 1$, имеем

$$\left|\prod_{j=1}^{j_0-1} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-\prod_{j=1}^{j_0-1} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|$$

$$\le\left|m_l\left(\frac{\omega}{2}\right)-m^M\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|\prod_{j=2}^{j_0-1} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)+\left|m_l\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|\left|\prod_{j=2}^{j_0-1} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-\prod_{j=2}^{j_0-1} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|$$

$$\le\|m_l-m^M\|_C+\left(1+\|m_l-m^M\|_C\right)\left|\prod_{j=2}^{j_0-1} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-\prod_{j=2}^{j_0-1} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|.$$

Повторяя процедуру j_0-2 раз, получим

$$\left|\prod_{j=1}^{j_0-1} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)-\prod_{j=1}^{j_0-1} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|=(1+O(\alpha(l)))^{j_0-1}-1.$$

Из леммы 1.4.3 и определения масштабирующей функции Мейера следует, что $\left|\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|=1+O(\mu(l))$ и $\left|\widehat{\varphi}_l\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)-\widehat{\varphi^M}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right|=O(\mu(l))$. Наконец, так как $|m^M|\le 1$, то $\left|\prod_{j=1}^{j_0-1} m^M\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right|\le 1$.

Собирая все оценки вместе, получаем

$$\left|\widehat{\varphi}_l{}'(\omega)-\widehat{\varphi^M}{}'(\omega)\right|\le O(\mu(l))\sum_{j_0=1}^{\infty}2^{-j_0}+\left(\overline{M}+O(\mu(l))\right)$$

$$\times\left(O(\mu(l))\sum_{j_0=1}^{\infty}2^{-j_0}+(1+O(\mu(l)))\sum_{j_0=1}^{\infty}2^{-j_0}\left((1+O(\alpha(l)))^{j_0-1}-1\right)\right)$$

$$=O(\mu(l))+\frac{O(\alpha(l))}{1-O(\alpha(l))}=O(\mu(l)).$$

$\diamondsuit$

Лемма 1.6.3. $\left\|\widehat{\varphi}_l{}'-\widehat{\varphi^M}{}'\right\|_{L_2(\mathbb{R})}=O\left(\max\{\mu(l),\, l^{0.5}C_0^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$ *при* $l\to\infty$. *Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Найдем мажоранты $\xi_{1,l} \in L_2(\mathbb{R})$ для функций $\widehat{\varphi_l}'$, уточняющие поведение последних на бесконечности. Из определения $\widehat{\varphi_l}$, леммы 1.6.1, (1.18) и тождества $\sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} \operatorname{tg}(\omega 2^{-j_0-1}) = 2/\omega - \operatorname{ctg}(\omega/2)$ следует

$$(\widehat{\varphi_l})'(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\right)' = \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} m_l'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right) \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} m_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

$$= \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} \left(l\left(\cos\frac{\omega}{2^{j_0+1}}\right)^{2l-1} \left(-\sin\frac{\omega}{2^{j_0+1}}\right) \frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)}{u_l(0)} \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} \left(\cos\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)^{2l} \frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{u_l(0)} \right.$$

$$\left. + \left(\cos\frac{\omega}{2^{j_0+1}}\right)^{2l} \frac{u_{1,l}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)}{u_l(0)} \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} \left(\cos\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)^{2l} \frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{u_l(0)} \right)$$

$$= \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} l \left(-\operatorname{tg}\frac{\omega}{2^{j_0+1}}\right) \prod_{j=1}^{\infty} \left(\cos\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)^{2l} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{u_l(0)}$$

$$+ \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} \frac{u_{1,l}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)}{u_l(0)} \prod_{j=1}^{\infty} \left(\cos\frac{\omega}{2^{j+1}}\right)^{2l} \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} \frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{u_l(0)}$$

$$= l\left(\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2} - \frac{2}{\omega}\right) \left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^{2l} \widehat{\varphi_{l,0}}(\omega)$$

$$+ \left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^{2l} \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} \frac{u_{1,l}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)}{u_l(0)} \prod_{j=1, j\neq j_0}^{\infty} \frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{u_l(0)} =: I_{1,l}(\omega) + \left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^{2l} I_{2,l}(\omega).$$

Для $|\omega| > 4e^{2\omega_0}$, применяя (1.19) и (1.20), для первого слагаемого имеем

$$|I_{1,l}(\omega)| = \left| l\left(\cos\frac{\omega}{2} - \frac{2\sin\omega/2}{\omega}\right) \left(\frac{2}{\omega}\right)^{2l} (\sin\omega/2)^{2l-1} \widehat{\varphi_{l,0}}(\omega) \right|$$

$$\leq Cle^{O(\mu(l))} |\omega|^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{2}}.$$

Оценим множитель во втором слагаемом

$$I_{2,l}(\omega) = \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} \frac{u_{1,l}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)}{u_l(0)} \prod_{j=1}^{j_0-1} \frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{u_l(0)} \widehat{\varphi_{l,0}}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right).$$

Используя (1.19) для $|\omega| > 4e^{2\omega_0}$, получим

$$\left|\widehat{\varphi_{l,0}}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right| \le |\omega 2^{-j_0}|^{-2\theta(u_{0,l})} e^{2\omega_0(l+O(\mu(l)))}.$$

Из условия (1.12), определения функции m_l^M (1.5) и неравенства $\pi/2 < \omega_1 \le 2\pi/3$ следует

$$\left|u_{1,l}\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right| \le \left|(m_l^M)'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\right| + O(\gamma(l))$$

$$\le (m^M)'\left(\frac{\omega}{2^{j_0}}\right)\left(\cos\frac{\omega_1}{2^{j_0+1}}\right)^{-2l} + lm^M\left(\frac{\omega}{2^{j_0+1}}\right)\sin\frac{\omega_1}{2^{j_0+1}}\left(\cos\frac{\omega_1}{2^{j_0+1}}\right)^{-2l-1}$$

$$+O(\gamma(l)) \le \left(\cos\frac{\omega_1}{2^{j_0+1}}\right)^{-2l}\left(\overline{M} + l\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2^{j_0+1}}\right) + O(\gamma(l))$$

$$\le (4/3)^l\left(\overline{M} + l\sqrt{3}\right) + O(\gamma(l)).$$

Далее, принимая во внимание условие (1.11), свойства маски Мейера $|m^M| \le 1$, $m^M(\omega) = 0$ при $\omega_1 \le |\omega| \le \pi$, и неравенство $\pi/2 < \omega_1 \le 2\pi/3$, имеем

$$\left|\prod_{j=1}^{j_0-1}\frac{u_l\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}{u_l(0)}\right| \le \prod_{j=1}^{j_0-1}\left(\frac{m^M(\omega 2^{-j})}{(\cos\omega 2^{-j-1})^{2l}} + \alpha(l)\right) \le \prod_{j=1}^{j_0-1}\left(\frac{1}{(\cos\omega_1 2^{-j-1})^{2l}} + \alpha(l)\right)$$

$$\le \prod_{j=1}^{j_0-1}\frac{a}{(\cos\omega_1 2^{-j-1})^{2l}} = a^{j_0-1}\prod_{j=1}^{\infty}\left(\cos\omega_1 2^{-j-1}\right)^{-2l}$$

$$= a^{j_0-1}\left(\frac{\omega_1/2}{\sin\omega_1/2}\right)^{2l} \le a^{j_0-1}\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{2}}\right)^{2l} \le a^{j_0-1}\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}\right)^{2l},$$

где a – мажоранта для выражения $1 + \alpha(l)\left(\cos\omega_1 2^{-j-1}\right)^{2l}$, так что можно выбрать $a < 1,5$.

Собирая все оценки, получим

$$I_{2,l}(\omega) \le \sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^l\left(\overline{M} + l\sqrt{3}\right) + O(\gamma(l))}{1-\alpha(l)}$$

$$\times a^{j_0-1}\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{2}}\right)^{2l}\left|\frac{\omega}{2^{j_0}}\right|^{-2\theta(u_{0,l})} e^{2\omega_0(l+O(\mu(l)))}.$$

Так как $\log_2\left(\frac{c}{1+\varepsilon(l)}\right) \le \theta(u_{0,l}) \le 0$ и $a < 1,5$, имеем

$$|\omega|^{-2\theta(u_{0,l})} \le |\omega|^{2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}} \text{ при } |\omega| \ge 1,$$

$2^{j_0\theta(u_{0,l})} \le 1$ и $\sum_{j_0=1}^{\infty} 2^{-j_0} a^{j_0-1} = (2-a)^{-1}$. Так что

$$I_{2,l}(\omega) \le \frac{e^{O(\mu(l))}\left(\overline{M} + l\sqrt{3} + (3/4)^l O(\gamma(l))\right)}{(1-\alpha(l))(2-a)} \left(\frac{8\pi^2 e^{2\omega_0}}{27}\right)^l |\omega|^{2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}.$$

Таким образом, для $|\omega| > \frac{32\pi^2 e^{2\omega_0}}{27}$

$$\left(\frac{\sin\omega/2}{\omega/2}\right)^{2l} I_{2,l}(\omega) \le (\sin\omega/2)^{2l} \frac{e^{O(\mu(l))}\left(\overline{M} + l\sqrt{3} + (3/4)^l O(\gamma(l))\right)}{(1-\alpha(l))(2-a)}$$

$$\times \left(\frac{32\pi^2 e^{2\omega_0}}{27}\right)^l |\omega|^{-2l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}} \le C(l,\,\omega_0) l |\omega|^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}},$$

где $C(l,\,\omega_0) := e^{O(\mu(l))}\left(\overline{M}/l + \sqrt{3} + l^{-1}(3/4)^l O(\gamma(l))\right)(1-\alpha(l))^{-1}(2-a)^{-1}$ ограничено по l и ω_0. Пусть $C(l,\,\omega_0) \le A$.

Так что если $|\omega| > C_0 := \frac{32\pi^2 e^{2\omega_0}}{27}$, мы получили следующую оценку $\left|(\widehat{\varphi}_l)'(\omega)\right| \le A\, l\, |\omega|^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}$.

Окончательно, используя лемму 1.6.2, можно определить функции $\xi_{1,l}$

$$\left|(\widehat{\varphi}_l)'(\omega)\right| \le \xi_{1,l}(\omega) := \begin{cases} \left(\widehat{\varphi^M}\right)'(\omega) + O(\mu(l)), & |\omega| \le \frac{32\pi^2 e^{2\omega_0}}{27}, \\ A\, l\, |\omega|^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}, & |\omega| \ge \frac{32\pi^2 e^{2\omega_0}}{27}. \end{cases} \tag{1.21}$$

Оценим скорость сходимости $\widehat{\varphi}_l{}'$ к $\widehat{\varphi^M}{}'$ в $L_2(\mathbb{R})$. Так как $|\omega| \ge C_0$ при $\widehat{\varphi^M}(\omega) = 0$, то

$$\left\|\widehat{\varphi}_l{}' - \widehat{\varphi^M}{}'\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi}_l{}'(\omega) - \widehat{\varphi^M}{}'(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{|\omega|<C_0} + \int_{|\omega|\ge C_0}$$

$$\le 2C_0 \|\widehat{\varphi}_l{}' - \widehat{\varphi^M}{}'\|^2_{C[-C_0,\,C_0]} + A^2 l^2 \int_{|\omega|\ge C_0} |\omega|^{-2l+4\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}} d\omega$$

$$= 2C_0 \|\widehat{\varphi}_l{}' - \widehat{\varphi^M}{}'\|^2_{C[-C_0,\,C_0]} + \frac{A^2 l^2 (C_0)^{-2l+4\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}+1}}{2l - 4\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)} - 1}$$

$$= O\left(\max\{\mu^2(l),\, l C_0^{-2l+4\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

$\Diamond$

Замечание 1.6.1. Используя лемму 1.6.2 и оценки (1.21), (так же как в замечании 1.4.1) получим

$$\left\|\widehat{\varphi}_l{}' - \widehat{\varphi^M}'\right\|_{C(\mathbb{R})} = O\left(\max\{\mu(l),\, l^{0.5} C_0^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

Лемма 1.6.4. $\|\Phi_l'\|_C = O\left(\max\{\mu(l),\, l^{0.5}(4C_0 e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$ *при* $l \to \infty$. *Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Принимая во внимание определение Φ_l и оценку (1.20), можно почленно продифференцировать ряд, то есть

$$\Phi_l'(\omega) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)|^2\right)' = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)|^2\right)'.$$

Поскольку преобразование Фурье масштабирующей функции Мейера имеет компактный носитель и удовлетворяет условию $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)\right|^2 \equiv 1$, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left|\widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)\right|^2\right)' = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)\right|^2\right)' = (1)' = 0.$$

Пусть $|\omega| \le \pi$, тогда

$$|\Phi_l'(\omega)| \le 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)\widehat{\varphi}_l{}'(\omega+2\pi k) - \widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)\widehat{\varphi^M}'(\omega+2\pi k)\right|$$

$$\le 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)| \left|\widehat{\varphi}_l{}'(\omega+2\pi k) - \widehat{\varphi^M}'(\omega+2\pi k)\right|$$

$$+2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi^M}'(\omega+2\pi k)\right| \left|\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k) - \widehat{\varphi^M}(\omega+2\pi k)\right| =: 2I_{3,l}(\omega) + 2I_{4,l}(\omega).$$

Используя параметр $k_0 = \left[2e^{2\omega_0}/\pi + 1/2\right]$, определенный в доказательстве леммы 1.4.5, запишем

$$I_{3,l}(\omega) = \sum_{|k|\le k_0} + \sum_{|k|>k_0}.$$

Принимая во внимание лемму 1.6.2, первая сумма оценивается как

$$\sum_{|k|\le k_0} \le \|\widehat{\varphi}_l{}' - \widehat{\varphi^M}'\|_{C[-e^{2\omega_0},\, e^{2\omega_0}]} \sum_{|k|\le k_0} |\widehat{\varphi}_l(\omega+2\pi k)| = O(\mu(l)).$$

Если воспользоваться замечанием 1.6.1 и (1.20), то вторая сумма оценивается так:

$$\sum_{|k|>k_0} \leq O\left(\max\{\mu(l),\, l^{0.5} C_0^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right) \sum_{|k|>k_0} |\omega + 2\pi k|^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}$$

$$= O\left(\max\{\mu(l),\, l^{0.5} C_0^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right) (4e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}.$$

Далее оценим $I_{4,l}(\omega)$. Так как $\operatorname{supp} \widehat{\varphi^M} = [-2\omega_1,\, -2\omega_0] \cup [2\omega_0,\, 2\omega_1]$, то $\widehat{\varphi^M}(\omega + 2\pi k) = 0$ при $k > 1$. Так что для суммы $I_{4,l}(\omega)$ получим

$$I_{4,l}(\omega) = \sum_{|k|\leq 1} \left|\widehat{\varphi^M}'(\omega + 2\pi k)\right| \left|\widehat{\varphi}_l(\omega + 2\pi k) - \widehat{\varphi^M}(\omega + 2\pi k)\right|.$$

Применение леммы 1.4.3 дает $I_{4,l}(\omega) = O(\mu(l))$. Окончательно, для Φ_l' приходим к оценке

$$|\Phi_l'(\omega)| \leq 2(I_{3,l}(\omega) + I_{4,l}(\omega)) = O\left(\max\{\mu(l),\, l^{0.5}(4C_0 e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

$\Diamond$

Теперь докажем сходимость для временных радиусов масштабирующих функций.

Теорема 1.6.1. $|\Delta^2(\varphi_l^\perp) - \Delta^2(\varphi^M)| = O\left(\max\{\mu(l),\, l C_0^{-l+2\log_2 \frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$ *при* $l \to \infty$. *Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Если функция $\widehat{\varphi}$ действительнозначна, то $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-t)$. Поэтому функция $|\varphi|^2$ четна и, следовательно, $c(\varphi) = 0$. Тогда квадрат временного радиуса имеет вид $\Delta^2(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^2 |\varphi(t)|^2\, dt$. Используя свойство преобразования Фурье $\widehat{\varphi'}(\omega) = i\omega\widehat{\varphi}(\omega)$, можно представить квадрат временного радиуса в виде $\Delta^2(\varphi) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} |(\widehat{\varphi})'(\omega)|^2\, d\omega$.

Так что поскольку функции $\widehat{\varphi_l^\perp}$, $\widehat{\varphi^M}$ действительнозначны, мы получаем $c(\varphi_l^\perp) = c(\varphi^M) = 0$ и

$$\Delta^2(\varphi_l^\perp) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(\widehat{\varphi_l^\perp})'(\omega)|^2\, d\omega \text{ и } \Delta^2(\varphi^M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(\widehat{\varphi^M})'(\omega)|^2\, d\omega.$$

Далее

$$\left|\Delta^2(\varphi_l^\perp) - \Delta^2(\varphi^M)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left|\left((\widehat{\varphi_l^\perp})'(\omega)\right)^2 - \left((\widehat{\varphi^M})'(\omega)\right)^2\right| d\omega$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\left|(\widehat{\varphi_l^\perp})'(\omega)+(\widehat{\varphi^M})'(\omega)\right|\int_{\mathbb{R}}\left|(\widehat{\varphi_l^\perp})'(\omega)-(\widehat{\varphi^M})'(\omega)\right|\,d\omega.$$

Применяя определение $\widehat{\varphi_l^\perp}$ (1.8), леммы 1.4.5, 1.6.4, замечания 1.4.1, 1.6.1, доказываем ограниченность супремум-множителя

$$\sup_{\omega\in\mathbb{R}}\left|\widehat{\varphi_l^\perp}'(\omega)+\widehat{\varphi^M}'(\omega)\right|\leq\left\|\frac{\widehat{\varphi}_l'}{\Phi_l}\right\|_{C(\mathbb{R})}+\left\|\frac{\Phi_l'\widehat{\varphi}_l}{\Phi_l^2}\right\|_{C(\mathbb{R})}+\left\|\widehat{\varphi^M}'\right\|_{C(\mathbb{R})}$$

$$\leq\frac{\left\|\widehat{\varphi^M}'\right\|_{C(\mathbb{R})}+\left\|\widehat{\varphi^M}'-\widehat{\varphi}_l'\right\|_{C(\mathbb{R})}}{1-\|\Phi_l-1\|_C}$$

$$+\frac{\|\Phi_l'\|_C\left(\left\|\widehat{\varphi^M}\right\|_{C(\mathbb{R})}+\left\|\widehat{\varphi^M}-\widehat{\varphi}_l\right\|_{C(\mathbb{R})}\right)}{\left(1-\|\Phi_l-1\|_C\right)^2}+\left\|\widehat{\varphi^M}'\right\|_{C(\mathbb{R})}=O\left(\left\|\widehat{\varphi^M}'\right\|_{C(\mathbb{R})}\right).$$

Покажем ограниченность $\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}_l(\omega)|\,d\omega$. Действительно, лемма 1.4.3 и (1.20) дают

$$\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}_l(\omega)|\,d\omega\leq\int_{|\omega|\leq 4e^{2\omega_0}}\left|\widehat{\varphi}_l(\omega)-\widehat{\varphi^M}(\omega)\right|\,d\omega+\int_{|\omega|\leq 4e^{2\omega_0}}\left|\widehat{\varphi^M}(\omega)\right|\,d\omega$$

$$+\int_{|\omega|>4e^{2\omega_0}}|\widehat{\varphi}_l(\omega)|\,d\omega\leq 8e^{2\omega_0}\left\|\widehat{\varphi}_l-\widehat{\varphi^M}\right\|_{C[-4e^{2\omega_0},\,4e^{2\omega_0}]}+8e^{2\omega_0}\left\|\widehat{\varphi^M}\right\|_{C[-4e^{2\omega_0},\,4e^{2\omega_0}]}$$

$$+\frac{2e^{O(\mu)}\left(4e^{2\omega_0}\right)^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}+1}}{l-2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}-1}=O(1).$$

Используя дополнительно леммы 1.4.5, 1.6.4 и замечания 1.4.1, 1.6.1, придем к финальным оценкам

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\varphi_l^\perp}'(\omega)-\widehat{\varphi^M}'(\omega)\right|\,d\omega\leq\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\widehat{\varphi}_l'(\omega)-\widehat{\varphi^M}'(\omega)\Phi_l(\omega)}{\Phi_l(\omega)}\right|\,d\omega+\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\widehat{\varphi}_l(\omega)\Phi_l'(\omega)}{\Phi_l^2(\omega)}\right|\,d\omega$$

$$\leq\frac{1}{1-\|\Phi_l-1\|_C}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\varphi}_l'(\omega)-\widehat{\varphi^M}'(\omega)\right|+\left|\widehat{\varphi^M}'(\omega)\right||1-\Phi_l(\omega)|\,d\omega$$

$$+\frac{\|\Phi_l'\|_C}{\left(1-\|\Phi_l-1\|_C\right)^2}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{\varphi}_l(\omega)|\,d\omega$$

$$\leq\frac{1}{1-\|\Phi_l-1\|_C}\left(\int_{|\omega|\leq C_0}\left|\widehat{\varphi}_l'(\omega)-\widehat{\varphi^M}'(\omega)\right|\,d\omega+\int_{|\omega|>C_0}\left|\widehat{\varphi}_l'(\omega)-\widehat{\varphi^M}'(\omega)\right|\,d\omega\right)$$

$$+\frac{\|1-\Phi_l\|_C}{1-\|\Phi_l-1\|_C}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\varphi^M}'(\omega)\right|\,d\omega+O\left(\|\Phi_l'\|_C\right)$$

$$\leq\frac{\left\|\widehat{\varphi}_l{}'-\widehat{\varphi^M}'\right\|_{C[-C_0,\,C_0]}}{1-\|\Phi_l-1\|_C}+\frac{2AlC_0^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}+1}}{\left(1-\|\Phi_l-1\|_C\right)\left(l-2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}-1\right)}$$

$$+O\left(\|\Phi_l-1\|_C\right)+O\left(\|\Phi_l'\|_C\right)=O\left(\max\{\mu(l),\,lC_0^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

$\Diamond$

1.7 Поведение временных и частотных радиусов всплеск-функций

Теорема 1.7.1. $|\Delta^2(\widehat{\psi_l^{\perp}})-\Delta^2(\widehat{\psi^M})|=O\left(\max\{\mu(l),\,lC_0^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$, $|\Delta^2(\psi_l^{\perp})-\Delta^2(\psi^M)|=O\left(\max\{\mu(l),\,(4e^{2\omega_0})^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right)$ *при* $l\to\infty$. *Параметры определены в (1.14).*

Доказательство. Из равенства (1.10) видно, что $\widehat{\psi_l^{\perp}}$ четная. Функция $\widehat{\psi^M}$ также четная. Следовательно, $c(\widehat{\psi_l^{\perp}})=c(\widehat{\psi^M})=0$ и $c(\psi_l^{\perp})=c(\psi^M)=1/2$. Маска $m_l^{\perp}$ действительнозначная. Следовательно, на основании (1.10), лемм 1.4.1, 1.4.5 и теоремы 1.4.1 приходим к оценке

$$|\Delta^2(\widehat{\psi_l^{\perp}})-\Delta^2(\widehat{\psi^M})|$$

$$=\left|\int_{\mathbb{R}}\omega^2\left((m_l^{\perp})^2\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\left(\widehat{\varphi_l^{\perp}}\right)^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-(m^M)^2\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\left(\widehat{\varphi^M}\right)^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)\,d\omega\right|$$

$$\leq\|(m_l^{\perp})^2\|_C\int_{\mathbb{R}}\omega^2\left|\left(\widehat{\varphi_l^{\perp}}\right)^2\left(\frac{\omega}{2}\right)-\left(\widehat{\varphi^M}\right)^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|\,d\omega$$

$$+\|(m_l^{\perp})^2-(m^M)^2\|_C\int_{\mathbb{R}}\omega^2\left(\widehat{\varphi^M}\right)^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\,d\omega$$

$$=O\left(|\Delta^2(\widehat{\varphi_l^{\perp}})-\Delta^2(\widehat{\varphi^M})|\right)+O\left(\|\Phi_l-1\|_C\right)+O\left(\|m_l-m^M\|_C\right)$$

$$=O\left(\max\{\mu(l),\,lC_0^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

Переходя к временным радиусам, мы пользуемся тождествами $\Delta^2(f) = \int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2\, dt - c^2(f) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2\, dw - c^2(f)$ и определением всплеск-функции (1.10)

$$2\pi|\Delta^2(\psi_l^\perp) - \Delta^2(\psi^M)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \left(\widehat{\psi_l^\perp}'\right)^2 - \left(\widehat{\psi^M}'\right)^2 \right|$$

$$\le \left\| \widehat{\psi_l^\perp}' + \widehat{\psi^M}' \right\|_{C(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi_l^\perp}' - \widehat{\psi^M}' \right| \le \frac{\left\| \widehat{\psi_l^\perp}' + \widehat{\psi^M}' \right\|_{C(\mathbb{R})}}{4}$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} \left| {m_l^\perp}' \widehat{\varphi_l^\perp} + m_l^\perp \widehat{\varphi_l^\perp}' - i m_l^\perp \widehat{\varphi_l^\perp} - {m^M}' \widehat{\varphi^M} - m^M \widehat{\varphi^M}' + i m^M \widehat{\varphi^M} \right|$$

$$\le \frac{\left\| \widehat{\psi_l^\perp}' + \widehat{\psi^M}' \right\|_{C(\mathbb{R})}}{4} \left(\| {m_l^\perp}' - i m_l^\perp \|_C \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi_l^\perp} - \widehat{\varphi^M} \right| + \| {m_l^\perp}' - {m^M}' \|_C \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi^M} \right| \right.$$

$$\left. + \|m_l^\perp\|_C \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi_l^\perp}' - \widehat{\varphi^M}' \right| + \|m_l^\perp - m^M\|_C \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi^M}' - i\widehat{\varphi^M} \right| \right)$$

$$=: \frac{\left\| \widehat{\psi_l^\perp}' + \widehat{\psi^M}' \right\|_{C(\mathbb{R})}}{4} \left(I_{5,l} + I_{6,l} + I_{7,l} + I_{8,l} \right).$$

Множители

$$\left\| \widehat{\psi_l^\perp}' + \widehat{\psi^M}' \right\|_{C(\mathbb{R})},\ \| {m_l^\perp}' - i m_l^\perp \|_C,\ \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi^M} \right|,\ \|m_l^\perp\|_C,\ \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi^M}' - i\widehat{\varphi^M} \right|$$

ограничены, а

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi_l^\perp} - \widehat{\varphi^M} \right|,\ \| {m_l^\perp}' - {m^M}' \|_C,\ \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi_l^\perp}' - \widehat{\varphi^M}' \right|,\ \|m_l^\perp - m^M\|_C$$

стремятся к 0 при $l \to \infty$. Это можно доказать по той же схеме, что и в теоремах 1.4.1 и 1.6.1. Воспользуемся леммами, в которых установлена сходимость новых функций (таких как m_l, m_l', Φ_l, Φ_l', $\widehat{\varphi}_l$, $\widehat{\varphi}_l{}'$) к соответствующим функциям Мейера (m^M, ${m^M}'$, 1, 0, $\widehat{\varphi^M}$, $\widehat{\varphi^M}'$). Например, для оценки $\| {m_l^\perp}' - {m^M}' \|_C$ достаточно использовать леммы 1.4.2, 1.4.5 и 1.6.4.

В случае оценок для $\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi_l^\perp} - \widehat{\varphi^M} \right|$ и $\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi_l^\perp}' - \widehat{\varphi^M}' \right|$, мы дополнительно применяем (1.20) и (1.21) соответственно. По свойствам функции Мейера интегралы $\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi^M} \right|$, $\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi^M}' - i\widehat{\varphi^M} \right|$ конечны.

Итак, из лемм 1.4.3, 1.4.5, оценки (1.20) и теоремы 1.4.1 следует

$$I_{5,l} = O\left(\|\Phi_l - 1\|_C\right) + O\left(\left(4e^{2\omega_0}\right)^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\right)$$

$$= O\left(\max\{\mu(l),\, \left(4e^{2\omega_0}\right)^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

Определение $m_l^{\perp}$, леммы 1.6.4, 1.4.5 и 1.4.2 дают

$$I_{6,l} = O\left(\|\Phi_l'\|_C\right) + O\left(\|\Phi_l - 1\|_C\right) + O\left(\|m_l' - {m^M}'\|_C\right)$$

$$= O\left(\max\{\mu(l),\, \left(4e^{2\omega_0}\right)^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

Из доказательства теоремы 1.6.1 следует

$$I_{7,l} = O\left(\max\{\mu(l),\, lC_0^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

Наконец, из лемм 1.4.5 и 1.4.1 следует

$$I_{8,l} = O\left(\|\Phi_l - 1\|_C\right) + O\left(\|m_l - m^M\|_C\right) = O\left(\max\{\mu(l),\, \left(4e^{2\omega_0}\right)^{-2l+4\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

Собирая вместе все оценки, получим

$$|\Delta^2(\psi_l^{\perp}) - \Delta^2(\psi^M)| = O\left(\max\{\mu(l),\, \left(4e^{2\omega_0}\right)^{-l+2\log_2\frac{1+\varepsilon(l)}{u_l(0)}}\}\right).$$

$\diamondsuit$

Глава 2

Всплеск Мейера с минимальной константой неопределенности

Система всплесков Мейера является одним из первых примеров базисов всплесков, она построена И. Мейером в 1986 году [87]. Это семейство всплесков и его модификации находят многочисленные применения в теории функций, функциональном анализе, численных методах решений дифференциальных уравнений, обработке сигналов (см., например, обширную библиографию в [69]), а также служат основой для построения новых базисов всплесков (гармонические всплески [22], интерполяционно-ортогональные системы [23]). В главе 1 мы обсуждали уникальные свойства системы Мейера, касающиеся частотно-временной локализованности. Хорошо известно [9], что для гладкой вспомогательной функции θ КН масштабирующих и всплеск-функций Мейера конечны.

В данной главе изучается частотно-временная локализованность семейства всплеск-функций Мейера. В параграфе 2.1 найдена система всплесков Мейера, имеющая наименьшую возможную КН Гейзенберга. Минимизация КН сведена к выпуклой вариационной задаче, решение которой удовлетворяет нелинейному неавтономному дифференциальному уравнению второго порядка. Его аналитическое решение неизвестно. Поэтому в параграфе 2.2 построено приближенное решение этого уравнения, а именно, построена последовательность очень простых дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения, равномерно сходящиеся к решению исходного уравнения. С помощью этих решений строится последовательность всплеск-функций Мейера, равномерно приближающих всплеск-функцию Мейера, имеющую наименьшую возможную КН.

2.1 Уравнение Эйлера–Лагранжа для всплеск-функции Мейера

В работе [14] получено следующее выражение для квадрата КН Гейзенберга, вычисленного для всплеск-функции Мейера (см. §1.1, напомним, что мы рассматриваем вспомогательную функцию θ, параметр ω_0 которой равен $\pi/3$)

$$I(\theta) := UC_H^2(\psi^M) = \left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \omega \sin(2\theta(\omega))\, d\omega\right) \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} (\theta'(\omega))^2\, d\omega, \quad (2.1)$$

при этом функция θ выбирается из множества

$$\left\{\theta \in C^1[0,\, \pi/3],\, \theta(0) = \theta'(\pi/3) = 0,\, \theta(\pi/3) = \pi/4\right\}.$$

Представление функционала в виде (2.1) остается справедливым, если выбирать функции θ не из пространства $C^1\left[0,\, \pi/3\right]$, а из пространства Соболева $W_2^1\left[0,\, \pi/3\right]$. Действительно, условие $\theta \in C^1\left[0,\, \pi/3\right]$ было использовано при получении формулы (2.1) для применения свойства преобразования Фурье производной $\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega)$, которое справедливо и в пространстве W_2^1.

Используя обозначение $x(t) = 2\theta(t)$, приведем функционал (2.1) к виду

$$J(x) \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t \sin x(t)\, dt\right) \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \left(x'(t)\right)^2 dt\,, \quad (2.2)$$

где

$$x \in W_2^1\left[0;\, \frac{\pi}{3}\right], \quad x(0) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (2.3)$$

Теорема 2.1.1. *Существует функция $x(t)$, доставляющая абсолютный минимум функционала (2.2) при условиях (2.3). Она является аналити-*

ческой возрастающей вогнутой функцией на отрезке $\big[0;\,\pi/3\big]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x''(t) \;= -q\,t\,\cos x(t) \tag{2.4}$$

при некотором значении параметра $q \geq 0$.

Отметим, что при таком подходе требование $x'(\pi/3) = 0$ не учитывается. Обозначим

$$G(x) := \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \big(x'(t)\big)^2\,dt,\;\; F(x) := -\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin x(t)\,dt,$$

$$M_a^0 := \left\{ x \in W_2^1\left[0;\,\frac{\pi}{3}\right] \Big|\; G(x) = a,\; x(0) = 0,\; x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Лемма 2.1.1. *Если при некотором $q \geq 0$ функция $\overline{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.4) и граничным условиям $\overline{x}(0) = 0$, $\overline{x}\big(\pi/3\big) = \pi/2$, то она доставляет абсолютный минимум в вариационной задаче*

$$F(x) \to \min \quad x \in M_a^0, \tag{2.5}$$

где $a = G(\overline{x})$, причем данная точка минимума единственна.

Доказательство. В работе [14] установлено, что $G(x) \geq 3\pi/4$, причем равенство достигается только на линейной функции; если $q = 0$, то $\overline{x}(t) = 3t/2$, $a = 3\pi/4$, следовательно, множество M_a^0 состоит из одной точки $\overline{x}$. Поэтому в данном случае утверждение леммы тривиально, и далее считаем, что $q > 0$.

Заменив равенство $G(x) = a$ в задаче (2.5) неравенством $G(x) \leq a$, получаем новую вариационную задачу (2.5’). Покажем, что $\overline{x}$ является единственной точкой абсолютного минимума в задаче (2.5’). Заметим, что достаточно ограничиться функциями x, такими что $x(t) \in \big[0, \pi/2\big]$ при всех $t \in \big[0, \pi/3\big]$. В самом деле, если $x(t_0) \notin \big[0, \pi/2\big]$ при некотором t_0, то существует функция x_0, удовлетворяющая всем условиям задачи (2.5’) и условию

$0 \le x_0(t) \le \pi/2, \quad t \in \big[0, \pi/3\big]$, для которой $F(x_0) < F(x)$:

$$x_0(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x(t) \le \frac{-3\pi}{2} \quad \text{или} \quad x(t) \ge \frac{\pi}{2}, \\ x(t), & 0 \le x(t) \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & -\pi \le x(t) \le 0, \\ -x(t) - \pi, & \frac{-3\pi}{2} \le x(t) \le -\pi. \end{cases}$$

На каждом выделенном множестве $G(x_0) \le G(x)$ и $\sin x_0(t) \ge \sin x(t)$. Поэтому $F(x_0) \le F(x)$, причем равенство возможно только в случае $x_0 = x$. Таким образом, достаточно минимизировать функционал F на выпуклом множестве

$$M_a := \left\{ x \in W_2^1 \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \middle| \; G(x) \le a,\; x(0) = 0,\; x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2},\; 0 \le x(t) \le \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{2.6}$$

На этом множестве F является строго выпуклым (т.е. $F\big((x+y)/2\big) < (1/2)\big(F(x)+F(y)\big)$ при $x \ne y$), поскольку функция $f(x) = -\sin x$ строго выпукла на отрезке $\big[0, \pi/2\big]$. Поэтому точка минимума F на множестве M_a (если существует) единственна. Необходимые условия для того, чтобы функция $\overline{x}$ доставляла локальный минимум в задаче (2.5') следующие: существуют множители λ_0, $\lambda_1 \ge 0$ не обращающиеся в ноль одновременно, для которых лагранжиан $L\big(x', x, t\big) = -\lambda_0 t \sin x + \lambda_1 (x')^2$ удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа $\frac{d}{dt} L_{x'} = L_x$ на экстремали $x(t) = \overline{x}(t)$ и условию дополняющей нежесткости $\lambda_1\big(G(\overline{x}) - a\big) = 0$. Если при этом $\lambda_0 > 0$, то эти условия также достаточны для того, чтобы $\overline{x}$ доставляла абсолютный минимум. Эти условия выполняются в силу выпуклости функционала F и множества M_a и составляют содержание теоремы Куна–Таккера (см., например, [2, стр. 51-52]). В нашем случае условие дополняющей нежесткости выполнено автоматически, а уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид $2\lambda_1 x'' = -\lambda_0 t \cos x$. Положив $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = q > 0$, приходим к уравнению (2.4). Таким образом, функция $\overline{x}$ доставляет абсолютный минимум в задаче (2.5'), а значит и в задаче (2.5). $\Diamond$

В. Ю. Протасовым доказана следующая

Лемма 2.1.2. *При любом $q \ge 0$ уравнение (2.4) имеет единственное решение $x(t)$, такое что $x(0) = 0$, $x\big(\pi/3\big) = \frac{\pi}{2}$. Это решение является* *аналитической возрастающей вогнутой функцией, непрерывно зависящей от параметра q.*

При $q \to +0$ имеем $G(x) \to 3\pi/4$, а при $q \to \infty$ имеем $G(x) \to \infty$. Для любого $a \geq 3\pi/4$ существует единственное значение параметра $q \geq 0$, при котором соответствующее решение (2.4) удовлетворяет равенству $G(x) = a$.

Из лемм 2.1.1 и 2.1.2 следует теорема 2.1.1.

Доказательство теоремы 2.1.1. При фиксированном значении $a = G(x)$ минимум функционала $F(x)$ достигается на решении уравнения (2.4) для некоторого значения параметра $q = q(a)$, непрерывно зависящего от a. Следовательно, значение функционала $J(x) = (1/4)(14\pi/3 + (21/\pi)F(x))G(x)$ также непрерывно зависит от a. В силу леммы 2.1.2 имеем $G(x) \to \infty$ и $F(x) \to F(\pi/2) = -\pi^2/18$ при $a \to \infty$. Следовательно, минимальное значение функционала $I(x)$ достигается при некотором a и соответствующих q и $x(t)$. $\Diamond$

Теорема 2.1.1 дает способ численного нахождения параметра q и функции x, для которых функционал J, заданный формулой (2.2), принимает наименьшее значение. Для каждого $q \geq 0$ решение x соответствующего уравнения (2.4) с граничными условиями $x(0) = 0$, $x\big(\pi/3\big) = \pi/2$ подставляется в функционал J, а затем ищется минимальное значение функционала по всем $q \in [0, \infty)$. Численное решение с помощью пакета MathCAD 14, проверенное с помощью пакета Mathematica 5.0, проведено по следующей схеме. В начале для уравнения (2.4) получено решение при $q = 20$. Далее уравнение (2.4) численно решено как уравнение с частными производными, считая параметр q аргументом неизвестной функции $y(t, q)$. Затем на полученном семействе решений $y_q(t) = y(t, q)$ найдены значения функционала $J(y_q)$. Минимальное значение функционала $J(\overline{x})$ с точностью $0,001$ равно $6,874$ и достигается при $q = 0,676$. Таким образом, минимальное значение КН для всплеск-функций Мейера с точностью $0,001$ равно $2,622$. Интересно отметить, что значение функционала J на линейной функции $x(t) = 3t/2$ достаточно близко к минимальному и равно $6,886$.

В качестве приближения к искомой функции можно предложить полином $\tilde{y}(t) = 1,580t - 0,113t^3 + 0,042t^5 - 7,037 \cdot 10^{-3}t^7 + 1,582 \cdot 10^{-3}t^9$. Значение квадрата КН для $\tilde{y}$ равно $6,875$, а максимальное отклонение от искомой функции $\max_{t \in [0;\, \pi/3]} |\tilde{y}(t) - \overline{x}(t)|$ равно $1,091 \cdot 10^{-3}$.

2.2 Приближенные решения

Уравнение (2.4) является нелинейным неавтономным дифференциальным уравнением, его аналитическое решение не известно. В этом параграфе мы строим приближенное решение уравнения (2.4), а именно, последовательность очень простых дифференциальных уравнений, имеющих аналитические решения, равномерно сходящиеся к решению исходного уравнения (2.4). Для этого доказано, что любая минимизирующая последовательность для задачи (2.5) равномерно сходится к решению этой задачи. Далее построен пример минимизирующей последовательности $\tilde{x}_n$. Он получается как решение вспомогательных дифференциальных уравнений (2.11) – уравнений Эйлера–Лагранжа для вспомогательных вариационных задач (2.10). Таким образом, вспомогательные для системы Мейера функции $\tilde{x}_n = 2\tilde{\theta}_n$ задают последовательность всплеск-функций Мейера, равномерно приближающих всплеск-функцию Мейера, имеющую наименьшую возможную КН.

Рассмотрим вариационную задачу

$$K(u) \to \inf,\ u \in U. \tag{2.7}$$

В дальнейшем наименьшее значение функционала K будем обозначать тем же символом, снабженным нижней звездочкой: $K_* = \inf_{u \in U} K(u)$, множество всех решений задачи (2.7) обозначим $U_* = \{u \in U : K(u) = K_*\}$.

Последовательность $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ называется минимизирующей для задачи (2.7), если $\lim_{n \to \infty} K(\tau_n) = K_*$.

В дальнейшем будет использован следующий вариант теоремы Вейерштрасса.

Теорема 2.2.1. [5, гл.1, §3, теорема 6] *Пусть U – выпуклое, замкнутое, ограниченное множество из рефлексивного банахова пространства B,* *функционал K – выпуклый и полунепрерывен снизу на U. Тогда $K_* > -\infty$, U_* – непусто, выпукло, замкнуто, ограничено, и любая минимизирующая последовательность слабо сходится к какому-либо элементу из U_*.*

Теорема 2.2.2. *Решение задачи (2.5) существует, единственно, любая минимизирующая последовательность слабо сходится к решению в пространстве $W_2^1[0;\,\pi/3]$, а также сходится к решению равномерно.*

Доказательство. В работе [17] доказано, что решения задачи (2.5) и задачи

$$F(x) \to \min, \quad x \in M_a, \tag{2.8}$$

совпадают, где M_a определено в (2.6) поэтому будем доказывать теорему 2.2.2 для задачи (2.8).

Проверим, что задача (2.8) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2.1, если в качестве пространства B взять $W_2^1[0;\,\pi/3]$. Пусть $x \in M_a$, тогда $\|x\|^2_{W_2^1} \leq (\pi/3)\,(\pi/2)^2 + a$. Следовательно, M_a – ограниченное множество. По построению M_a получено как пересечение выпуклых множеств, поэтому M_a является выпуклым множеством.

Докажем, что M_a – замкнутое множество. Пусть $x_k \in M_a$ и $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_{W_2^1} = 0$. Тогда $x_0 \in W_2^1[0;\,\pi/3]$. Далее, из неравенства Минковского имеем $\left(\int_0^{\pi/3} x_0'^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^{\pi/3} (x_n' - x_0')^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^{\pi/3} x_n'^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leq \varepsilon + \sqrt{a}$, так что в силу произвольности $\varepsilon > 0$ $\int_0^{\pi/3} x_0'^2(t)\,dt \leq a$. Докажем, что $0 \leq x_0 \leq \pi/2$. Предположим противное: найдется точка $t_0 \in [0;\,\pi/3]$, для которой $x_0(t_0) > \pi/2 + A$ или $x_0(t_0) < -A$, где $A > 0$. Тогда, поскольку $x_0 \in W_2^1[0;\,\pi/3]$, то x_0 – абсолютно непрерывная функция. Поэтому существует окрестность $\delta(t_0)$ точки t_0, для которой неравенства $x_0(t_0) > \pi/2 + A$, $x_0(t_0) < -A$ сохраняются, и при $t \in \delta(t_0)$ в обоих случаях выполняется неравенство $|x_n(t) - x_0(t)| > A$. Тогда, с одной стороны, для n, начиная с некоторого номера n_0, выполняется неравенство $\int_0^{\pi/3} (x_n - x_0)^2(t)\,dt \leq A^2 m\delta(t_0)/2$, где $m\delta(t_0)$ – мера множества $\delta(t_0)$. С другой стороны, $\int_0^{\pi/3} (x_n - x_0)^2(t)\,dt = \int_{\delta(t_0)} (x_n - x_0)^2(t)\,dt + \int_{[0;\,\pi/3]\setminus\delta(t_0)} (x_n - x_0)^2(t)\,dt > A^2 m\delta(t_0)$. Полученное противоречие доказывает неравенство $0 \leq x_0 \leq \pi/2$. Аналогично, предполагая противное и пользуясь непрерывностью функции x_0, устанавливаются равенства $x_0(0) = 0$ и $x_0(\pi/3) = \pi/2$. Замкнутость множества M_a проверена. Строгая выпуклость F обоснована в лемме (2.1.1). Если $x_1,\ x_2 \in W_2^1[0;\,\pi/3]$, то

$$|F(x_1) - F(x_2)| \le \frac{\pi}{3}\int_0^{\pi/3} |x_1(t) - x_2(t)|\,dt \le= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}}\|x_1 - x_2\|_{W_2^1[0;\,\pi/3]}.$$

Поэтому F непрерывен на множестве M_a.

Итак, все условия теоремы 2.2.1 выполнены применительно к задаче (2.8). Так как F строго выпуклый, то множество решений вариационной задачи (2.5) состоит из единственной точки. Из слабой сходимости последовательности в пространстве $W_2^1[0;\,\pi/3]$ следует ее сходимость к тому же пределу по равномерной норме (см. [5, с. 169]). $\Diamond$

В качестве примера минимизирующей последовательности рассмотрим сплайны первой степени f_n, интерполирующие функцию sin на равномерном разбиении отрезка $[0;\,\pi/2]$ с шагом $h = \pi(2n)^{-1}$ и узлами $\tau_k = kh$, $k = \overline{0, n}$:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(d_k(t - \tau_k) + \sin(\tau_k))\mathbb{1}_{[\tau_{k-1};\,\tau_k]}(t), \tag{2.9}$$

где $d_k = (\sin\tau_k - \sin\tau_{k-1})/h$ и $\mathbb{1}_{[a;\,b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a;\,b]$.

Рассмотрим последовательность задач:

$$H_n(x) = \int_0^{\pi/3} \left(-t\, f_n(x(t))\right)\, dt \to \min, \quad x \in M_a^0. \tag{2.10}$$

Из теоремы 2.2.1 аналогично доказательству теоремы 2.2.2 выводится

Лемма 2.2.1. *Для каждого n существует единственная функция $\tilde{x}_n(t)$, доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи (2.10).*

Лемма 2.2.2. *Функция $\tilde{x}_n(t)$, доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи (2.10), является решением дифференциального уравнения*

$$x'' = -p_n\, t\, f_n'(x) \tag{2.11}$$

для некоторого $p_n \geq 0$ *и имеет вид*

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{r=1}^{n} \left(-\frac{p_n d_r t^3}{6} + C_r t + D_r \right) \cdot \mathbb{1}_{[t_{r-1};\, t_r]}(t), \tag{2.12}$$

где параметры C_r, D_r, t_r *определяются из условий* $\tilde{x}_n(t_r) = \tau_r$, $t_r < t_{r+1}$, $r = \overline{0,\, n}$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$, $\tilde{x}_n \in C^1[0;\, \pi/3]$.

Доказательство. Задача (2.10) может быть решена по той же схеме, что и задача (2.5): доказывается, что задача (2.10) эквивалентна задаче $H_n(x) \to \min$, $x \in M_a$, к которой применима теорема Куна–Таккера. В результате получаем уравнение (2.11).

Из определения f_n (2.9) следует, что $f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \mathbb{1}_{[\tau_{k-1};\, \tau_k]}(x)$. Пусть t_k, $k = \overline{0, n}$ определены условиями $x(t_k) = \tau_k$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$. Тогда на каждом интервале $[t_{k-1};\, t_k]$ решение уравнения (2.11) x_n совпадает с решением простейшего дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$x''_{n,k} = -p_n\, t\, d_k,$$

общее решение которого имеет вид

$$x_{n,k}(t) = -\frac{p_n d_k t^3}{6} + C_k t + D_k,$$

где C_k, D_k, $k = \overline{1, n}$ – постоянные. Таким образом, решение $\tilde{x}_n$ уравнения (2.11) представимо в виде (2.12).

Параметры C_k, D_k, $k = \overline{1, n}$ и t_k, $k = \overline{1, n-1}$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} -p_n d_k t_k^3/6 + C_k t_k + D_k = \tau_k, & k = \overline{1, n}, \\ -p_n d_k t_{k-1}^3/6 + C_k t_{k-1} + D_k = \tau_{k-1}, & k = \overline{1, n}, \\ -p_n d_k t_k^2/2 + C_k = -p_n d_{k+1} t_k^2/2 + C_{k+1}, & k = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Уравнения с первого по n-е следуют из условия $x_{n,k}(t_k) = \tau_k$, уравнения с $n+1$-го по $2n$-е – из равенства $x_{n,k+1}(t_k) = \tau_k$, уравнения с $2n+1$-го по $3n-1$-е – из условия $x'_{n,k}(t_k) = x'_{n,k+1}(t_k)$. Существование и единственность решения системы следует из леммы 2.2.1. $\Diamond$.

Обозначим $\tilde{x}$ – функцию, доставляющую абсолютный минимум функционала (2.2) при условиях (2.3).

Лемма 2.2.3. *Последовательность $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей для задачи (2.5); имеет место сходимость $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Установим, что равномерно по $x \in M_a$ выполняется

$$|F(x) - H_n(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{2.14}$$

Из определения сплайнов f_n следует (см. [11, гл. 2, §2, теорема 2.1]), что оценка интерполяции имеет вид: $\|f_n - \sin\|_{C[0;\,\pi/2]} \le \pi^2(32n^2)^{-1}\|\sin\|_\infty \le \pi^2(32n^2)^{-1}$. Поэтому (2.14) устанавливается с помощью оценки

$$|F(x) - H_n(x)| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} t(\sin(x(t)) - f_n(x(t)))\,dt\right|$$

$$\le \frac{\pi^2}{18}\|f_n - \sin\|_{C[0;\,\pi/2]} \le \frac{\pi^4}{18\cdot 32n^2}.$$

Докажем равенство

$$\lim_{n\to\infty} H_{n*} = F_*. \tag{2.15}$$

На основании сходимости (2.14) и определения inf получим

$$\lim_{n\to\infty}(H_{n*} - F_*)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(H_{n*} - H_n(x) + H_n(x) - F(x) + F(x) - F_*)$$

$$\le \lim_{n\to\infty}(H_n(x) - F(x) + F(x) - F_*) = F(x) - F_*.$$

Так как эта цепочка неравенств верна для любого $x \in M_a$, в том числе и для экстремального, для которого $F(x) - F_* = 0$, то имеет место неравенство $\lim_{n\to\infty}(H_{n*} - F_*) \le 0$.

Применяя повторно утверждение (2.14) и определение inf, имеем

$$\lim_{n\to\infty}(F_* - H_{n*})$$

$$= \lim_{n\to\infty}(F_* - F(x) + F(x) - H_n(x) + H_n(x) - H_{n*})$$

$$\le \lim_{n\to\infty}(F(x) - H_n(x) + H_n(x) - H_{n*}) = \lim_{n\to\infty}(H_n(x) - H_{n*}).$$

Эта цепочка неравенств верна для всех $x \in M_a$. В силу определения inf существуют функции x_n такие, что $0 < H_n(x_n) - H_{n*} < \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (F_* - H_{n*}) \le \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

и (2.15) доказано.

Далее из утверждений (2.14) и (2.15) получаем

$$|F(\tilde{x}_n) - F_*| = |F(\tilde{x}_n) - F(\tilde{x})| \le |F(\tilde{x}_n) - H_n(\tilde{x}_n)| + |H_n(\tilde{x}_n) - F(\tilde{x})|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю с ростом n в силу (2.14), второе слагаемое стремится к нулю с ростом n вследствие (2.15). Таким образом, $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей последовательностью для задачи (2.5), и поэтому по теореме 2.2.2 получаем $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$. $\diamondsuit$

Из леммы 2.2.3 и (1.2) следует, что последовательность масштабирующих функции Мейера, соответствующих вспомогательным функциям $\tilde{x}_n = 2\tilde{\theta}_n$, равномерно сходится к масштабирующей функции Мейера, соответствующей вспомогательной функции $\tilde{x} = 2\tilde{\theta}$. Так как $m^M(\omega) = \widehat{\varphi^M}(2\omega)$, то тот же вывод справедлив для масок, а значит, и для преобразований Фурье всплеск-функций. Для самих всплеск-функций вывод получается на основе формулы обратного преобразования Фурье, учитывая компактность носителей преобразований Фурье всплеск-функций.

Для численного нахождения параметров функций $\tilde{x}_n$ предложим следующую схему. Система (2.13) линейна относительно переменных C_k, D_k, $k = \overline{1,n}$, и может быть переписана в виде

$$\begin{cases} C_k = (\tau_k - \tau_{k-1})(t_k - t_{k-1})^{-1} + p_n d_k (t_k^2 + t_k t_{k-1} + t_{k-1}^2)/6, & k = \overline{1,n}, \\ D_k = \tau_k + p_n d_k t_k^3/6 - C_k t_k, & k = \overline{1,n}, \\ -p_n(d_k - d_{k+1}) t_k^2/2 = C_{k+1} - C_k, & k = \overline{1,n-1}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Подставляя коэффициенты C_k, D_k, $k = \overline{1,n}$, выраженные из (2.16) с помощью переменных $p_n, t_1, \ldots, t_{n-1}$, в сплайн (2.12), а сам сплайн в функ-

ционал
$$I_n(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{14\pi}{3} + \frac{21}{\pi}H_n(x)\right)G(x),$$
получаем рациональную функцию от n переменных $I_n(x) = J_n(p_n, t_1, \ldots, t_{n-1})$. Минимизируя данную функцию численно (используя какой-либо математический пакет) с $n-1$ ограничением (последняя группа уравнений системы (2.16)):

$$-p_n(d_k - d_{k+1})t_k^2/2 = C_{k+1}(p_n, t_1, \ldots, t_{n-1}) - C_k(p_n, t_1, \ldots, t_{n-1}), \quad k = \overline{1, n-1},$$

находим параметры p_n, t_k, $k = \overline{1, n-1}$, C_r, D_r, $r = \overline{1, n}$, определяющие искомую функцию $\tilde{x}_n$. Например, с помощью пакета MathCAD 14 при $n = 4$ получено: $p_4 = 0,674$, $t_1 = 0,250$, $t_2 = 0,506$, $t_3 = 0,772$, $C_1 = 1,578$, $C_2 = 1,575$, $C_3 = 1,553$, $C_4 = 1,481$, $D_1 = 0$, $D_2 = 3,288 \times 10^{-4}$, $D_3 = 7,428 \times 10^{-3}$, $D_4 = 0,044$. Значение квадрата КН $I_n(\tilde{x}_4) = 6,898$. Расстояние между $\tilde{x}_4$ и $\tilde{x}$ равно $\|\tilde{x}_4 - \tilde{x}\|_C = 8.852 \times 10^{-4}$.

Таким образом, доказана

Теорема 2.2.3. *Выполняется:*

1. *для каждого n существует единственная функция $\tilde{x}_n(t)$, доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи (2.10); функция $\tilde{x}_n(t)$ является решением дифференциального уравнения (2.11) и имеет вид*
$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{r=1}^{n}\left(-\frac{p_n d_r t^3}{6} + C_r t + D_r\right) \cdot \mathbb{1}_{[t_{r-1};\, t_r]}(t),$$
где параметры C_r, D_r, t_r определяются из условий $\tilde{x}_n(t_r) = \tau_r$, $t_r < t_{r+1}$, $r = \overline{0,\ n}$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$, $\tilde{x}_n \in C^1[0;\ \pi/3]$;

2. *последовательность $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей для задачи (2.5);*

3. *имеет место сходимость $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$, где $\tilde{x}$ – решение задачи (2.5), доставляющее абсолютный минимум функционала (2.2) при условиях (2.3);*

4. *имеет место сходимость* $\|\widetilde{\psi^M}_n - \widetilde{\psi^M}\|_C \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* $\widetilde{\psi^M}_n$ *и* $\widetilde{\psi^M}$ *– всплеск-функции Мейера, построенные по вспомогательным функциям* $\tilde{x}_n = 2\tilde{\theta}_n$ *и* $\tilde{x} = 2\tilde{\theta}$ *соответственно.*

Замечание 2.2.1. Отметим, что также получена последовательность $\tilde{x}_n$ простых по структуре функций (кубических сплайнов), равномерно сходящихся к решению нелинейного неавтономного дифференциального уравнения (2.4).

Глава 3

Частотно-угловая локализация систем периодических всплесков

Первоначально системы периодических всплесков определялись как периодизация систем всплесков, определенных на $L_2(\mathbb{R})$ (см. например, [9]). Более естественный и широкий подход состоит в изучении систем периодических всплесков напрямую, с использованием периодического аналога кратномасштабного анализа (КМА). Это понятие было введено и изучалось в работах [58, 57, 71, 86, 20, 95, 113, 114, 124].

В этой главе мы изучаем локализованность систем периодических всплесков. Количественной характеристикой локализованности служит константа неопределенности (КН) Брейтербергера UC_B (по-другому, периодическая КН). Она была предложена Э. Брейтенбергером в 1985 году в [35] (см. определение 3.1.1). Чем меньше КН, тем лучше локализованной считается функция. Для периодической КН, так же как и для КН Гейзенберга, существует универсальная нижняя граница (принцип неопределенности), однако в отличие от непериодического случай она не достигается. Поэтому естественно говорить об асимптотически оптимальных последовательностях периодических функций, для которых предел КН равен нижней границе.

Существует связь между константами Гейзенберга и Брейтенбергера для всплеск-функций. Пусть $\psi^0 \in L_2(\mathbb{R})$ – всплеск-функция на прямой. Положим $\psi^p_{j,k}(x) := 2^{j/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi^0(2^j(x+n)+k)$. Говорят, что всплесковая последовательность $\psi^p_{j,0}$, $j = 0, 1, \ldots$ получена периодизацией всплеск-функции

ψ^0. В [101] доказано, что для таких систем периодических всплесков КН стремится к КН Гейзенберга исходной функции, когда параметр периодизации стремится к бесконечности, то есть $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi^p_{j,0}) = UC_H(\psi^0)$. Таким образом, хорошо локализованную (то есть с конечной/маленькой КН) систему периодических всплесков можно получить из хорошо локализованной системы всплесков пространства $L_2(\mathbb{R})$ с помощью процедуры периодизации. Однако в работе [32] доказан следующий результат.

Теорема 3.0.1. [32, стр.137] *Если* $xf(x)$, $f'(x) \in L_2(\mathbb{R})$, *функция* f *имеет нулевое среднее* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$ *и нулевой частотный центр* $c(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}} \xi|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi/(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi) = 0$, *то* $UC_H(f) \geq 3/2$.

Условиям этой теоремы удовлетворяет любая действительнозначная функция ψ^0, КН которой конечна и система сжатий и сдвигов которой $\{\psi^0_{j,k}\}_{j,k\mathbb{Z}}$ является бесселевой. Действительно, если $x\psi^0(x)$, $(\psi^0)'(x) \in L_2(\mathbb{R})$ нарушено, то КН Гейзнеберга бесконечна. В работе [31] показано, что если $\{\psi^0_{j,k}\}_{j,k\mathbb{Z}}$ – бесселева система, то $\int_{\mathbb{R}} \psi^0(x)\,dx = 0$. Любая действительнозначная функция имеет нулевой частотный центр. Еще один результат в этом направлении: если $\{\psi^0_{j,k}\}_{j,k\mathbb{Z}}$ – ортогональная система, и функция ψ^0 имеет нулевой частотный центр, то $UC_H(\psi^0) \geq (2-\sqrt{2})^{-1} \approx 1,7$ [32, теорема 1.1]. И на настоящий момент неизвестно, существует ли ортонормированный базис или фрейм всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, КН которого равны $3/2$ или $(2-\sqrt{2})^{-1}$ или асимптотически к ним приближаются. Наименьшее известное значение равно $2,134$ и достигается на всплеске Добеши [55]. Это численный результат, аналитически не обоснованный. Наименьшее возможное значение КН для семейства всплесков Мейера равно $2,622$ [17] (Глава 2). КН семейств сплайн-всплесков Баттла–Лемарье и всплесков Добеши стремятся к бесконечности с ростом гладкости всплеск-функций [41]. Семейства квазисплайн всплесков асимптотически имеют КН всплесков Мейера [16, 80] (Глава 1). В работах [60, 119] показано, что B-сплайны и их обобщения имеют асимптотически оптимальные КН, однако ни ортонормированного базиса, ни фрейма всплесков эти конструкции не образуют. Таким образом, системы периодических всплесков с КН близкими к оптимальным нельзя на настоящий момент получить с помощью периодизации.

В работах [59, 100, 103, 111] напрямую изучаются периодические КН. В частности, в [111] построены всплески, названные тригонометрическими, имеющие равномерно ограниченные КН по параметру КМА. В [59] показано, что КН семейства равномерно локальных, равномерно регулярных и равномерно стабильных периодических масштабирующих функций и всплесков равномерно ограничены. В [100] построен пример асимптотически оптимального множества периодических функций $\{\varphi_h\}_{h>0}$, а именно $UC_B(\varphi_h) < 1/2 + \sqrt{h}/2$. Эти функции используются далее в качестве неортогональных масштабирующих, порождающих КМА (V_{2^j}). КН для соответствующих всплеск-функций (неортогональных) $\psi_{j,h}$ оптимальна для фиксированного пространства V_{2^j}, однако оценка не равномерна по j, а именно $UC_B(\psi_{j,h}) < 1/2 + 1.1 \times 2^{2j}\sqrt{h}$. После ортогонализации системы и перехода к ортонормированным базисам оценки сохраняются $UC_B(\psi_{j,h}^{\perp}) < 1/2 + 1.1 \times 2^{2j}\sqrt{h}$, $UC(\varphi_{j,h}^{\perp}) < 1/2 + 2^{2j}\sqrt{h}$. В этой же работе был поставлен вопрос о существовании инвариантных относительно сдвига базисов всплеск-пространств $W_{n(j)}$, КН которых оптимальны равномерно по параметру КМА j. Один из двух результатов этой главы (теорема 3.2.1) состоит в частичном положительном ответе на поставленный вопрос. А именно, желательные оценки получены для масштабирующих функций, порождающих фреймы Парсеваля периодических всплесков. Точнее, в теореме 3.2.1 мы строим семейство масштабирующих всплесковых последовательностей $\Phi^0 = \left\{(\varphi_j^a)_j \ : \ a > 1\right\}$, порождающее семейство всплесковых последовательностей $\Psi^0 = \left\{(\psi_j^a)_j \ : \ a > 1\right\}$. Для фиксированного подпространства КМА V_j повторяется поведение семейства из работы [100]: КН φ_j^a и ψ_j^a асимптотически оптимальны

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} UC_B(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = \frac{1}{2}.$$

Но теперь для фиксированного значения параметра $a > 1$, масштабирующая последовательность имеет асимптотически оптимальную КН, а всплесковая последовательность имеет наименьшую известную на текущий момент КН (тем самым, она меньше чем КН для тригонометрических всплесков, построенных в [111])

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1} UC_B(\varphi_j^a)=\frac{1}{2},\quad \lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^a)=\frac{3}{2}.$$

Второй результат этой главы (теорема 3.3.1) состоит в доказательстве неравенства, уточняющего нижнюю границу КН Брейтенбергера для широкого класса последовательностей периодических функций. А именно, при некоторых ограничениях на последовательность $f_n \in L_2(0,\,1)$ доказано неравенство

$$\lim_{n\to\infty} UC_B(f_n)\geq 3/2.$$

Таким образом, в рассматриваемом классе последовательностей построенное в теореме 3.2.1 семейство периодических всплесков действительно имеет наименьшие возможные КН и, тем самым, положительно отвечает на вопрос Ю. Престина, Э. Куака, сформулированный в [100].

Кроме этого, теорема 3.3.1 в некотором смысле является периодическим аналогом результата Баттла (теорема 3.0.1). Для данной последовательности периодических функций ψ_j, $j\in\mathbb{Z}_+$ условия $|(\psi_j',\,\psi_j)|\leq C\|\psi_j\|^2$ и $\lim_{j\to\infty} q_j\widehat{\psi}_j(k)/\|\psi_j\|=0$ (это условия (3.30) и (3.28) из теоремы 3.3.1) соответствуют нулевому частотному центру $c(\widehat{\psi^0})=0$ и нулевому интегральному среднему $\int_{\mathbb{R}}\psi^0=0$. Остальные условия (3.29), (3.31)–(3.33) теоремы 3.3.1 означают своего рода "регулярность" последовательности ψ_j. На шаге 3 доказательства теоремы 3.3.1 формула $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi^p_{j,0})=UC_H(\psi^0)$, связывающая КН Брейтенбергера и Гейзенберга из [101], распространена на рассматриваемый класс функций и получает новое доказательство. В замечаниях (3.3.1)–(3.3.3) мы обсуждаем, какие классы всплесковых последовательностей удовлетворяют условиям теоремы 3.3.1. Также изучается одна частная минимизационная задача, напрямую связанная с результатом Баттла, теоремой 3.0.1 (теорема 3.4.1).

Хотя существует достаточно много результатов, уточняющих нижнюю и верхнюю границы для КН Гейзенберга [14, 15, 16, 31, 32, 42, 52, 55, 60, 80, 91] и верхнюю границу для КН Брейтерберга [82, 90, 100, 103, 111], насколько нам известно, в литературе не было результатов, касающихся оценок нижней границы КН Брейтерберга.

3.1 Константа неопределенности Брейтенбергера и унитарный принцип расширения для систем периодических всплесков

КН для периодических функций была предложена Э. Брейтенбергером [35] в 1985 году.

Определение 3.1.1. ([35]) *Пусть* $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}k\cdot} \in L_2(0, 1)$. *Величина*

$$\tau(f) := \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}x} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-1}\overline{c_k}$$

называется первым тригонометрическим моментом функции f. *Величина*

$$\mathrm{var_A}(f) := \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2\right)^2}{\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-1}\bar{c}_k\right|^2} - 1\right) = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\|f\|^4}{|\tau(f)|^2} - 1\right)$$

называется угловой вариацией функции f. *Величина*

$$\mathrm{var_F}(f) := \frac{4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_k|^2}{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2} - \frac{4\pi^2\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k|c_k|^2\right)^2}{\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2\right)^2} = \frac{\|f'\|^2}{\|f\|^2} - \frac{(if',\, f)^2}{\|f\|^4}$$

называется частотной вариацией функции f. *КН Брейтербергера (по-другому, периодической КН) называется функционал*

$$UC_B(\{c_k\}) := UC_B(f) := \sqrt{\mathrm{var_A}(f)\mathrm{var_F}(f)}.$$

В параграфе 3.3 мы будем также использовать два вспомогательных функционала, характеризующих первый тригонометрический момент. (В другой форме они были введены в [101, лемма 3]). Для функции $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \in L_2(0, 1)$ определим

$$A(f) := \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{k-1} - c_k|^2, \qquad B(f) := \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (c_{k-1} - c_k)(\overline{c_{k-1}} + \overline{c_k}). \tag{3.1}$$

Ясно, что

$$A(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 - \mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-1}\overline{c_k}\right) = \|f\|^2 - \mathrm{Re}(\tau(f)),$$

$$B(f) = i\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{k-1}\overline{c_k}\right) = i\,\mathrm{Im}(\tau(f)). \tag{3.2}$$

Принцип неопределенности Брейтенбергера формулируется следующим образом

Теорема 3.1.1. ([35, 100]) *Пусть* $f \in L_2(0, 1)$, $f(x) \neq C\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$, $C \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. *Тогда* $UC_B(f) > 1/2$, *и не существует функции, такой что* $UC_B(f) = 1/2$.

Напомним определение фрейма. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Если существуют постоянные $A,\ B > 0$, такие что для любого $f \in H$ верно неравенство

$$A\|f\|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |(f,\ f_n)|^2 \le B\|f\|^2,$$

тогда последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется фреймом в H. Числа A и B называются нижней и верхней границами фрейма соответственно. Если можно выбрать A, B так, чтобы $A = B(= 1)$, тогда последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется жестким фреймом (фреймом Парсеваля) в H. Фрейм Парсеваля, для всех элементов которого $\|f_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, образует ортонормированный базис. Любой фрейм является полной системой. Последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется бесселевой, если для любого $f \in H$ выполняется только правое неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} |(f,\ f_n)|^2 \le B\|f\|^2$. Энциклопедически полная информация о фреймах может быть найдена в [39].

Напомним определение системы периодических всплесков. В дальнейшем используем следующее обозначение $f_{j,k}(x) := f_j(x - 2^{-j}k)$ для функции $f_j \in L_2(0, 1)$. Рассмотрим функции φ_0, $\psi_j \in L_2(0, 1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Если множество $\Psi := \left\{\varphi_0, \psi_{j,k} :\ j \in \mathbb{Z}_+,\ k = 0, \dots, 2^j - 1\right\}$ образует фрейм (или базис) пространства $L_2(0, 1)$, тогда Ψ называется фреймом (или базисом) периодических всплесков пространства $L_2(0, 1)$.

Одним из основных способов построить фрейм Парсеваля периодических всплесков является унитарный принцип расширения.

Теорема 3.1.2. ([58]) *Пусть* $\varphi_j \in L_2(0, 1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, – *последовательность* 1-*периодических функций, такая что*

$$\lim_{j\to\infty} 2^{j/2}\widehat{\varphi}_j(k) = 1, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Пусть $\mu_k^j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{Z}$ *– последовательность, такая что* $\mu_{k+2^j}^j = \mu_k^j$, *и*

$$\widehat{\varphi}_j(k) = \mu_k^{j+1}\widehat{\varphi}_{j+1}(k). \tag{3.4}$$

Определим последовательность 1*-периодических функций* ψ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$, *с помощью коэффициентов Фурье*

$$\widehat{\psi}_j(k) = \lambda_k^{j+1}\widehat{\varphi}_{j+1}(k), \tag{3.5}$$

где $\lambda_k^j \in \mathbb{C}$, $\lambda_{k+2^j}^j = \lambda_k^j$, *и*

$$\begin{pmatrix} \mu_k^j & \mu_{k+2^{j-1}}^j \\ \lambda_k^j & \lambda_{k+2^{j-1}}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mu}_k^j & \overline{\lambda}_k^j \\ \overline{\mu}_{k+2^{j-1}}^j & \overline{\lambda}_{k+2^{j-1}}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Тогда семейство $\Psi := \left\{\varphi_0, \psi_{j,k} :\ j \in \mathbb{Z}_+,\ k = 0, \ldots, 2^j - 1\right\}$ *образует фрейм Парсеваля периодических всплесков пространства* $L_2(0,\,1)$.

Последовательности $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$, $(\mu_k^j)_{k\in\mathbb{Z}}$ и $(\lambda_k^j)_{k\in\mathbb{Z}}$ называются масштабирующей последовательностью, всплесковой последовательностью, масштабирующими масками и масками всплесков соответственно.

Система периодических всплесков может быть построена, начиная с масштабирующей маски. А именно, пусть ν_k^j – последовательность, для которой $\nu_k^j = \nu_{k+2^j}^j$. Определяем $\widehat{\xi}_j(k) := \prod_{r=j+1}^{\infty} \nu_k^r$. Если это бесконечное произведение сходится и $(\widehat{\xi}_j(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2$, тогда масштабирующая последовательность, масштабирующая маска, маска всплесков и всплесковая последовательность определяются соответственно как

$$\widehat{\varphi_j}(k) := 2^{-j/2}\widehat{\xi}_j(k), \qquad \mu_k^j := \sqrt{2}\nu_k^j,$$
$$\lambda_k^j := e^{2\pi i 2^{-j}k}\mu_{k+2^{j-1}}^j, \qquad \widehat{\psi}_j(k) := \lambda_k^{j+1}\widehat{\varphi}_{j+1}(k).$$

Первоначально, унитарный принцип расширения как общая схема построения фреймов всплесков на основе КМА был разработан А. Роном, З. Шеном в ([106]).

3.2 Хорошо локализованные фреймы периодических всплесков

В следующей теореме мы строим семейство фреймов Парсеваля периодических всплесков с наименьшими возможными КН для масштабирующей последовательности и наименьшими известными на сегодняшний день КН для всплесковой последовательности.

Теорема 3.2.1. *Существует семейство всплесковых последовательностей* $\Psi_a := \{(\psi_j^a)_{j=0}^\infty : a > 1\}$, *порожденных масштабирующими последовательностями* $(\varphi_j^a)_{j=0}^\infty$, *такое что для любого фиксированного* $a > 1$ *система* $\{\varphi_0^a\} \cup \{\psi_{j,k}^a : \ j = 0, 1, \ldots, \ k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ *образует фрейм Парсеваля в* $L_2(0,\,1)$ *и*

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{a>1} UC_B(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} UC_B(\varphi_j^a) = \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = \frac{3}{2}, \quad \lim_{a\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = \frac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Семейство Ψ_a *строится следующим образом. Положим* $\varphi_0^a = 1$. *Определим последовательность* $\nu_k^{j,a}$ *так:* $\nu_0^{1,a} = \nu_1^{1,a} = \sqrt{1/2}$ *и*

$$\nu_k^{j,a} := \begin{cases} \exp\left(-\frac{k^2+a^2}{j(j-1)a}\right), & k = -2^{j-2}+1, \ldots, 2^{j-2}, \\ \sqrt{1-\exp\left(-\frac{2((k-2^{j-1})^2+a^2)}{j(j-1)a}\right)}, & k = 2^{j-2}+1, \ldots, 3\times 2^{j-2}, \end{cases} \tag{3.9}$$

и продолжена 2^j*-периодически по* k. *Далее определим* $\widehat{\xi_j^a}(k) := \prod_{r=j+1}^\infty \nu_k^{r,a}$. *Тогда масштабирующая последовательность, маски, маски всплесков и всплесковая последовательность определяются так:*

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi_j^a}(k) &:= 2^{-j/2}\widehat{\xi_j^a}(k), & \mu_k^{j,a} &:= \sqrt{2}\nu_k^{j,a}, \\ \lambda_k^{j,a} &:= e^{2\pi i 2^{-j}k}\mu_{k+2^{j-1}}^{j,a}, & \widehat{\psi_j^a}(k) &:= \lambda_k^{j+1,a}\widehat{\varphi_{j+1}^a}(k). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Замечание 3.2.1. Так как UC_B – однородный функционал, то есть

$$UC_B(\alpha f) = UC_B(f) \text{ для } \alpha \in \mathbb{R},$$

то $UC_B(\varphi_j^a) = UC_B(2^{-j/2}\xi_j^a) = UC_B(\xi_j^a)$ и поэтому в дальнейшем будем доказывать равенства

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1} UC_B(\xi_j^a) = 1/2 \text{ и } \lim_{a\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}} UC_B(\xi_j^a) = 1/2$$

вместо (3.7). Аналогично, пусть $\eta_j^a := 2^{j/2}\psi_j^a$, тогда $UC_B(\psi_j^a) = UC_B(\eta_j^a)$.

Чтобы доказать теорему 3.2.1, нам нужно несколько технических лемм.

Лемма 3.2.1. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $m = 0, 1, \ldots$ и $0 < b < M$, где M – абсолютная константа, тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\alpha k^2 + \beta k + \gamma)^m \,\mathrm{e}^{-b(\alpha k^2+\beta k+\gamma)}$$

$$= (-1)^m \left(\exp\left(-b\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right)\sqrt{\frac{\pi}{b\alpha}}\right)^{(m)}_{b^m} + \exp\left(-\frac{\pi^2-\varepsilon}{b\alpha}\right) O(1) \quad (3.11)$$

при $b \to 0$, где $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Меняя местами операции суммирования и дифференцирования, получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\alpha k^2 + \beta k + \gamma)^m \,\mathrm{e}^{-b(\alpha k^2+\beta k+\gamma)} = (-1)^m \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-b(\alpha k^2+\beta k+\gamma)}\right)^{(m)}_{b^m}$$

$$= (-1)^m \left(\exp\left(-b\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-b\alpha\left(k + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\right)\right)^{(m)}_{b^m}.$$

Используем формулу суммирования Пуассона для функции $f(t) = \mathrm{e}^{-b\alpha t^2}$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-b\alpha(k-t)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b\alpha}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos 2\pi k t \, \exp\left(\frac{-\pi^2 k^2}{b\alpha}\right), \quad (3.12)$$

где $t = -\beta/(2\alpha)$, и затем, дифференцируя m раз по b, получим

$$(-1)^m \left(\exp\left(-b\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right)\sqrt{\frac{\pi}{b\alpha}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \cos\left(2\pi k \frac{\beta}{2\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2}{b\alpha}\right)\right)^{(m)}_{b^m}$$

$$= (-1)^m \left(\exp\left(-b\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right)\sqrt{\frac{\pi}{b\alpha}}\right)^{(m)}_{b^m}$$

$$+(-1)^m 2\left(\exp\left(-b\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right)\sqrt{\frac{\pi}{b\alpha}}\right)^{(m)}_{b^m}$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(2\pi k\frac{\beta}{2\alpha}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2k^2}{b\alpha}\right)$$

$$+(-1)^m\sum_{r=1}^{m}\binom{m}{r}\left(\exp\left(-b\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)\right)\sqrt{\frac{\pi}{b\alpha}}\right)^{(m-r)}_{b^{m-r}}$$

$$\times\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(2\pi k\frac{\beta}{2\alpha}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2k^2}{b\alpha}\right)\right)^{(r)}_{b^r}.$$

Для $r=0,\ldots,m$ оцениваем

$$\left|\left(\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(2\pi k\frac{\beta}{2\alpha}\right)\mathrm{e}^{-\pi^2k^2/(b\alpha)}\right)^{(r)}_{b^r}\right|\le\sum_{k=1}^{\infty}Q_r\left(k,\frac{1}{b}\right)\mathrm{e}^{-\pi^2k^2/(b\alpha)}$$

$$\le\mathrm{e}^{-\pi^2/(b\alpha)}\sum_{k=1}^{\infty}Q_r\left(k,\frac{1}{b}\right)\exp\left(-\frac{\pi^2(k^2-1)}{M\alpha}\right)=\mathrm{e}^{-(\pi^2-\varepsilon)/(b\alpha)}O(1),$$

где $Q_r(k,1/b)$ – полином степени $2r$ по переменным k и $1/b$, причем слагаемые вида $\mathrm{e}^{-\pi^2/(b\alpha)}/b^{\xi}$, $0<\xi<2m$ оцениваются так: $\mathrm{e}^{-\pi^2/(b\alpha)}/b^{\xi}<\exp\left(-\frac{\pi^2-\varepsilon}{b\alpha}\right)$. ♢

Лемма 3.2.2. *Пусть* $f_h(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-hk^2}e^{2\pi ikx}$. *Тогда верно равенство*

$$\lim_{h\to 0}UC_B(f_h)=1/2.$$

Доказательство. Достаточно оценки, полученные с помощью леммы 3.2.1,

$$\|f_h\|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-2hk^2}=\sqrt{\frac{\pi}{2h}}+\exp\left(-\frac{\pi^2+\varepsilon}{2h}\right)O(1),\tag{3.13}$$

$$\|f_h'\|^2=4\pi^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^2e^{-2hk^2}=2\pi^2\sqrt{\frac{\pi}{(2h)^3}}+\exp\left(-\frac{\pi^2+\varepsilon}{2h}\right)O(1),\tag{3.14}$$

$$|\tau(f_h)|=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-2h(2k^2+2k+1)}=e^{-\frac{h}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2h}}+\exp\left(-\frac{\pi^2+\varepsilon}{2h}\right)O(1),\tag{3.15}$$

подставить в определение 3.1.1 и перейти к пределу. ♢

Лемма 3.2.3. *Пусть* $\eta_j^{a,0}(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\eta}_j^{a,0}(k) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} kt}$, *где*

$$\widehat{\eta}_j^{a,0}(k) := \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} 2^{-j-1} k} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2(k^2+a^2)}{(j(j+1)a)}\right)} \; \exp\left(-\frac{k^2+a^2}{(j+1)a}\right); \tag{3.16}$$

тогда $\lim_{j\to\infty} UC_B(\eta_j^{a,0}) = 3/2$ *для любого фиксированного* $a > 1$ *и* $\lim_{a\to\infty} UC_B(\eta_j^{a,0}) = 1/2$ *для любого фиксированного* $j \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Мы находим оценки выражений $((\eta_j^{a,0})', \eta_j^{a,0})$, $\|\eta_j^{a,0}\|^2$, $\|(\eta_j^{a,0})'\|^2$ и $|\tau(\eta_j^{a,0})|$ и затем подставляем результат в определение 3.1.1. Поскольку $|\widehat{\eta}_j^{a,0}(k)| = |\widehat{\eta}_j^{a,0}(-k)|$, видим, что $((\eta_j^{a,0})', \eta_j^{a,0}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\, |\widehat{\eta}_j^{a,0}(k)|^2 = 0$.

Для удобства заменяем $j+1$ на $1/h$ и a на $1/q$. Тогда $0 < h \le 1/2$, $0 < q \le 1$, $h \to 0$ и $q \to 0$. Однако, чтобы избежать перегруженности в обозначениях, сохраняем прежние имена для функций $\eta_j^{a,0}$. Из (3.16) следует

$$\|\eta_j^{a,0}\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\eta}_j^{a,0}(k)|^2 = \exp\left(-\frac{2h}{q}\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-2hqk^2\right)$$
$$-\exp\left(-\frac{2h}{(1-h)q}\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{2hq}{1-h}k^2\right).$$

Используя (3.11) дважды для $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $m = 0$, $b = 2hq$ и $b = 2hq/(1-h)$ получим

$$\|\eta_j^{a,0}\|^2 = \exp\left(-\frac{2h}{q}\right) \sqrt{\frac{\pi}{2hq}} - \exp\left(-\frac{2h}{q(1-h)}\right) \sqrt{\frac{\pi(1-h)}{2hq}}$$
$$+ \left(\mathrm{e}^{C(h,\, q)} + \mathrm{e}^{C(h/(1-h),\, q)}\right) O(1), \tag{3.17}$$

при $hq \to +0$, где $C(h,\, q) = -2h/q - (\pi^2 - \varepsilon)/(2hq)$.

Оценивая подобным образом $\|(\eta_j^{a,0})'\|^2$ с помощью (3.16), запишем

$$\frac{1}{4\pi^2}\|(\eta_j^{a,0})'\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |\widehat{\eta}_j^{a,0}(k)|^2 = \exp\left(-\frac{2h}{q}\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \exp\left(-2hqk^2\right)$$
$$-\exp\left(-\frac{2h}{q(1-h)}\right) \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \exp\left(-\frac{2hqk^2}{1-h}\right).$$

Используя (3.11) дважды для $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $m = 1$, $b = 2hq$ и $b = 2hq/(1-h)$, получим

$$\frac{1}{4\pi^2}\|(\eta_j^{a,0})'\|^2 = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2h}{q}\right)\sqrt{\frac{\pi}{(2hq)^3}} - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{2h}{q(1-h)}\right)\sqrt{\frac{\pi(1-h)^3}{(2hq)^3}}$$
$$+\left(\mathrm{e}^{C(h,\,q)} + \mathrm{e}^{C(h/(1-h),\,q)}\right)O(1),$$

при $hq \to +0$ и $C(h,\,q)$ определено после формулы (3.17). Поскольку $((\eta_j^{a,0})',\,\eta_j^{a,0}) = 0$, пользуясь определением 3.1.1 приходим к следующим оценкам для частотной вариации:

$$\frac{\|(\eta_j^{a,0})'\|^2}{4\pi^2\|\eta_j^{a,0}\|^2} \sim \frac{3}{4hq} \quad \text{при } h \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\|(\eta_j^{a,0})'\|^2}{4\pi^2\|\eta_j^{a,0}\|^2} \sim \frac{1}{4hq} \quad \text{при } q \to 0. \tag{3.18}$$

Оценим первый тригонометрический момент $\tau(\eta_j^{a,0})$ (см. определение 3.1.1) для (3.16)

$$|\tau(\eta_j^{a,0})| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\eta}_j^{a,0}(k)\overline{\widehat{\eta}_j^{a,0}(k+1)}\right|$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(1-\exp\left(-\frac{2h^2(k^2q^2+1)}{(1-h)q}\right)\right)^{1/2}$$
$$\times\left(1-\exp\left(-\frac{2h^2(q^2(k+1)^2+1)}{(1-h)q}\right)\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-hq(2k^2+2k+1)}.$$

Наша задача – получить следующие асимптотические формулы для $|\tau(\eta_j^{a,0})|$:

$$|\tau(\eta_j^{a,0})| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}-\frac{hq}{2}}}{1-h}\sqrt{\frac{\pi}{8q}}\left(\sqrt{h} + \frac{(1-h)(16-4q^2)-3q}{4q(1-h)}\sqrt{h^3}\right) + O(h^2|\ln h|) \tag{3.19}$$

для фиксированного $q \le 1$ и $h \to 0$,

$$|\tau(\eta_j^{a,0})| = \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{hq}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2hq}} + O\Big(\frac{1}{\sqrt{q}}\mathrm{e}^{-\frac{2h^2}{q(1-h)}}\Big)\right) \tag{3.20}$$

для фиксированного $h \le 1/2$ и $q \to 0$. Докажем оценку (3.19). Положим

$$d := \frac{2h^2}{1-h},\ \mathrm{v}(k) := qk^2 + \frac{1}{q},\ s(k) := 2k^2 + 2k + 1. \tag{3.21}$$

В новых обозначениях первый тригонометрический момент переписывается так:

$$|\tau(\eta_j^{a,0})| = \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{(1-\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)})(1-\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k+1)})}\mathrm{e}^{-hqs(k)}. \tag{3.22}$$

Используя для функции $f(d) = \sqrt{(1-\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)})(1-\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k+1)})}$ формулу Тейлора в окрестности точки $d = 0$, получаем

$$f(d) = \sqrt{\mathrm{v}(k)\mathrm{v}(k+1)}d - \frac{1}{4}\sqrt{\mathrm{v}(k)\mathrm{v}(k+1)}(\mathrm{v}(k)+\mathrm{v}(k+1))d^2 + \frac{f'''(\bar{d})}{6}d^3,$$

в котором

$$f'''(d) = \frac{1}{8}N^{-\frac{5}{2}}\, M^{-\frac{5}{2}} \left(\nu^3 N^3(1-M)(3+M^2) - \mu\nu MN(1-M)(1-N)\right.$$
$$\left. \times\,(\mu M + \nu M + (\nu+\mu)MN) + \nu^3 M^3(1-N)(3+M^2)\right),$$

где $N := 1-\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)}$, $M := 1-\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k+1)}$, $\nu := \mathrm{v}(k)$, $\mu := \mathrm{v}(k+1)$. Верно равенство $|f'''(\bar{d})|d^3 = O(s^3(k)h^6)$. Группируя подходящим образом слагаемые, можно проверить, что функция f'' вогнута на $0 < d < 1$. Следовательно, функция f''' убывает $0 < d < 1$. Так что, $|f'''(d)| \leq \lim_{d\to 0} f'''(d) = 1/16\sqrt{\mu\nu}(5\mu^2 + 6\mu\nu + 5\nu^2)$. Осталось заметить, что предел $\lim_{k\to\infty}\lim_{d\to 0} f'''(d)/s^3(k) = q^3/8$ конечен.

Применяя (3.11) для $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $m = 3$, $b = hq$, получим оценку для остатка (3.22)

$$\mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} f'''(\bar{d})d^3\mathrm{e}^{-hqs(k)} = O\left(h^6 \sum_{k\in\mathbb{Z}} s^3(k)\mathrm{e}^{-hqs(k)}\right)$$
$$= h^6 O\left(h^{-7/2} + \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2-\varepsilon}{2hq}}O(1)\right) = O(h^{5/2})$$

при $h \to 0$. Следовательно, (3.22) принимает вид

$$|\tau(\eta_j^{a,0})|$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}} \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sqrt{\mathrm{v}(k)\mathrm{v}(k+1)}\left(d - \frac{1}{4}(\mathrm{v}(k)+\mathrm{v}(k+1))d^2\right)\mathrm{e}^{-hqs(k)}\right| + O(h^{5/2}).$$

Обозначим $u := 1/k$ и определим функцию g

$$g(u) := \frac{1}{k^2}\sqrt{\mathrm{v}(k)\mathrm{v}(k+1)} = \frac{1}{k^2}\sqrt{\left(qk^2 + \frac{1}{q}\right)\left(q(k+1)^2 + \frac{1}{q}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(q + \frac{u^2}{q}\right)\left(q(u+1)^2 + \frac{u^2}{q}\right)}\,.$$

Применяя для $g(u)$ формулу Тейлора в окрестности точки $u = 0$, получим $g(u) = q + qu + u^2/q + g'''(\bar{u})u^3/6$, где

$$g'''(u) = \frac{1}{2g(u)}\frac{6u(2/q + 2q) + 6(2u/q + 2(1+u)q)}{q}$$
$$-\frac{3}{4g^3(u)}\left((u^2/q + q)(2/q + 2q) + \frac{4u(2u/q + 2(1+u)q) + 4(u^2/q + (1+u)^2q)}{q}\right)$$
$$\times\left((u^2/q + q)(2u/q + 2(1+u)q) + \frac{2u(u^2/q + (1+u)^2q)}{q}\right)$$
$$+\frac{3}{8g^5(u)}\left((u^2/q + q)(2u/q + 2(1+u)q) + \frac{2u(u^2/q + (1+u)^2q)}{q}\right)^3$$
$$=: \frac{1}{g(u)}P_1(u) + \frac{1}{g^3(u)}P_2(u) + \frac{1}{g^5(u)}P_3(u).$$

Пусть $k \neq 0$, тогда $-1 \le u \le 1$. Для фиксированного $0 < q \le 1$ значение $|g'''(\bar{u})|$ ограничено. Действительно, так как $q + u^2/q \ge q$ и $q(u+1)^2 + u^2/q \ge q/(q^2+1)$, то $0 < 1/g(u) \le \sqrt{q^2+1}/q$, и полиномы $P_1(u)$, $P_2(u)$, $P_3(u)$ ограничены на $[-1, 1]$. Поэтому $g'''(\bar{u})u^3 = u^3O(1)$. Таким образом,

$$|\tau(\eta_j^{a,0})| = \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0}\left(k^2q + kq + \frac{1}{q} + \frac{O(1)}{k}\right)\right.$$
$$\left.\times\left(d - \frac{1}{4}(\mathrm{v}(k) + \mathrm{v}(k+1))d^2\right)\mathrm{e}^{-hqs(k)}\right| + O(h^2).$$

В последней формуле мы включили слагаемое при $k = 0$ в ошибку, так как $\mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}}d\sqrt{1/q(q+1/q)}\,(1 - 1/4\ (2/q + q)d)\,\mathrm{e}^{-hq} = O(h^2)$. Оценим далее коэффициент при $O(1)$

$$
\begin{aligned}
A &:= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(d - \frac{1}{4} (\mathrm{v}(k) + \mathrm{v}(k+1)) d^2 \right) \mathrm{e}^{-hqs(k)} \right| \\
&\leq d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathrm{e}^{-hqs(k)} + \frac{qd^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(k)}{k} \mathrm{e}^{-hqs(k)} + \frac{d^2}{2q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathrm{e}^{-hqs(k)}.
\end{aligned}
$$

Первая сумма является главным членом асимптотики при $h \to 0$. Действительно, поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s(k)}{k} \mathrm{e}^{-hqs(k)} < \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) \mathrm{e}^{-hqs(k)}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathrm{e}^{-hqs(k)} < \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-hqs(k)}$, применяя (3.11) при $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $b = hq$, $m = 0$, и $m = 1$, получим $d^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) \mathrm{e}^{-hqs(k)} \sim h^{5/2}$, $d^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-hqs(k)} \sim h^{7/2}$, при $h \to 0$. Поэтому,

$$
\begin{aligned}
A &\leq C_1 d \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \mathrm{e}^{-hqk^2} = C_1 d \left(\mathrm{e}^{-hq} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \mathrm{e}^{-hqk^2} \right) \\
&\leq C_1 d \left(\mathrm{e}^{-hq} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{e}^{-hqx^2} \, \mathrm{d}x \right) = C_1 d \left(\mathrm{e}^{-hq} + \int_{\sqrt{hq}}^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= C_1 d \left(\mathrm{e}^{-hq} - \mathrm{e}^{-h^2 q^2} \ln(hq) + \int_{\sqrt{hq}}^{\infty} 2x \mathrm{e}^{-x^2} \ln x \, \mathrm{d}x \right) = O(h^2 |\ln h|).
\end{aligned}
$$

Аналогично оценивается сумма для $\sum_{k<0}$. Итак,

$$
\begin{aligned}
|\tau(\eta_j^{a,0})| = \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}} &\left| -\frac{d^2 q^2}{8} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s^2(k) \mathrm{e}^{-hqs(k)} + \frac{d}{8} (4q - 4d + dq^2) \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(k) \mathrm{e}^{-hqs(k)} \right. \\
&\left. + \frac{d(2-q^2)(2q-d)}{4q^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-hqs(k)} \right| + O(h^2 |\ln h|). \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Здесь мы вернули слагаемое при $k = 0$, опять же поскольку оно равно $d/q \, (1 - (q + 1/q) d/4) \mathrm{e}^{-hq} = O(h^2)$. Чтобы прийти к формуле (3.19), осталось подставить (3.11) при $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $b = hq$, $m = 0, 1, 2$ в (3.23).

Используя формулу Тейлора, для квадратов (3.17) и (3.19) получим

$$
\begin{aligned}
|\tau(\eta_j^{a,0})|^2 &= \frac{\pi}{8q} h \left(1 + \frac{8 + q - 6q^2}{2q} h + O(h^{3/2} |\ln h|) \right), \\
\|\eta_j^{a,0}\|^4 &= \frac{\pi}{8q} h \left(1 + \frac{8+q}{2q} h + O(h^2) \right). \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Окончательно, подставляя последние выражения и (3.18) в определение 3.1.1, получим $\lim_{j\to\infty} UC_B(\eta_j^{a,0}) = \frac{3}{2}$.

Перейдем к доказательству (3.20). Начнем с (3.22). По теореме о среднем для $f_0(x) = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 0$ имеем

$$|\tau(\eta_j^{a,0})| = \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(1 - C_0(q,k)\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)}\right)\left(1 - C_0(q,k+1)\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k+1)}\right)\mathrm{e}^{-hqs(k)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{2h}{q}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-hqs(k)} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_0(q,k)\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)}\mathrm{e}^{-hqs(k)} - \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_0(q,k+1)\mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k+1)}\mathrm{e}^{-hqs(k)}\right.$$

$$\left. + \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_0(q,k)C_0(q,k+1)\mathrm{e}^{-d(\mathrm{v}(k)+\mathrm{v}(k+1))}\mathrm{e}^{-hqs(k)}\right),$$

где $C_0(q,k) := 1/(2\sqrt{1-c_0(q,k)})$, $0 < c_0(q,k) < \mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)}$. Первая сумма является главным членом асимптотики при $q \to 0$. Действительно, $C_0(q,k)$ ограничено (например, так как $0 < \mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)} < 1/2$ для $0 < h \le 1/2$, и $0 < q < (1-h)(2h^2)^{-1}\log 2$, то $1/2 < C_0(q,k) < \sqrt{2}/2$). Поэтому вторая, третья и четвертая суммы оцениваются как $S_2 := \sqrt{2}/2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k)}\mathrm{e}^{-hqs(k)}$, $S_3 := \sqrt{2}/2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-d\mathrm{v}(k+1)}\mathrm{e}^{-hqs(k)}$ и $S_4 := \sqrt{2}/2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-d(\mathrm{v}(k)+\mathrm{v}(k+1))}\mathrm{e}^{-hqs(k)}$. Используя (3.11) для подходящих α, β, γ, b и $m = 0$ видим, что $S_n = O(\frac{1}{\sqrt{q}}\mathrm{e}^{-\frac{d}{q}})$ для $n = 2,3,4$. Чтобы получить (3.20) осталось применить (3.11) (при $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $b = hq$, $m = 0$) к первой сумме $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-hqs(k)}$.

Окончательно, подставляя (3.17), (3.18) и (3.20) в определение 3.1.1 и вычисляя предел, получим $\lim_{a\to\infty} UC_B(\eta_j^{a,0}) = \frac{1}{2}$. $\Diamond$

Доказательство теоремы 3.2.1. Шаг 1. По теореме 3.1.2 семейство $\Psi_a := \left\{\mathbf{1}, \psi_{j,k}^a :\ j = 0,1,\ldots,\ k = 0,\ldots,2^j-1\right\}$ образует фрейм Парсеваля периодических всплесков при каждом фиксированном $a > 1$. Действительно, воспользовавшись определением (3.9) и равенством $j^{-1}(j-1)^{-1} = (j-1)^{-1} - j^{-1}$, запишем

$$\widehat{\xi}_j^a(k) = \begin{cases} \prod\limits_{r=j+1}^{J-1} \nu_k^{r,a} \prod\limits_{r=J}^{\infty} \nu_k^{r,a} = \left(\prod\limits_{r=j+1}^{J-1} \nu_k^{r,a}\right) \exp\left(-\dfrac{k^2+a^2}{(J-1)a}\right), & j \le J-2, \\ \prod\limits_{r=j+1}^{\infty} \exp\left(-\dfrac{k^2+a^2}{r(r-1)a}\right) = \exp\left(-\dfrac{k^2+a^2}{ja}\right), & j > J-2, \end{cases} \tag{3.25}$$

где $J = [\log_2(|k-1/2|+1/2)+3]$. Следовательно, коэффициенты $\widehat{\xi}_j^a(k)$ конечны. И непосредственно проверяется, что условия (3.3)–(3.6) выполнены.

Шаг 2. Согласно замечанию 3.2.1 будем доказывать вместо (3.7) равенства $\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1} UC_B(\xi_j^a) = 1/2$ и $\lim_{a\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}} UC_B(\xi_j^a) = 1/2$. Обозначим

$$\xi_j^{a,0}(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{k^2+a^2}{ja}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{-\frac{a}{j}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{ja}} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}. \tag{3.26}$$

Поскольку функционал UC_B однороден, то $UC_B(\xi_j^{a,0}) = UC_B\left(\left\{\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{ja}}\right\}\right)$. Тогда из леммы 3.2.2 следует, что

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1} UC_B(\xi_j^{a,0}) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{a\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}} UC_B(\xi_j^{a,0}) = \frac{1}{2}.$$

Поэтому для доказательства (3.7) осталось только проверить равенства

$$\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1}\Big(UC_B(\xi_j^{a,0}) - UC_B(\xi_j^a)\Big) = 0, \quad \lim_{a\to\infty}\sup_{j\in\mathbb{N}}\Big(UC_B(\xi_j^{a,0}) - UC_B(\xi_j^a)\Big) = 0.$$

Для этого достаточно расписать разность $UC_B(\xi_j^{a,0}) - UC_B(\xi_j^a)$ стандартным образом (подобно кому, как это сделано в шаге 2 доказательства теоремы 3.3.1), воспользоваться оценками (3.13)–(3.15) и оценкой скорости сходимости к нулю нормы $\|\xi_j^a - \xi_j^{a,0}\|_{W_2^1}$ при $j\to\infty$ (оценка равномерна по $a>1$) и при $a\to\infty$ (оценка равномерна по $j\in\mathbb{N}$). Приведем оценки для $\|\xi_j^a - \xi_j^{a,0}\|_{W_2^1}$. Если $\lim_{j\to\infty} c_{j,0} = 0$ и $\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|c_{j,k}|^2 = 0$, то $\lim_{j\to\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_{j,k}|^2 = 0$. Применив это утверждение к $c_{j,k} = \widehat{\xi}_j^a(k) - \widehat{\xi}_j^{a,0}(k)$, видим, что достаточно оценить $\|(\xi_j^a)' - (\xi_j^{a,0})'\|$. Из определения $\nu_k^{r,a}$ следует

$$\widehat{\xi}_j^a(k) = \prod_{r=j+1}^{\infty}\nu_k^{r,a} = \prod_{r=j+1}^{\infty}\exp\left(-\frac{k^2+a^2}{r(r-1)a}\right) = \exp\left(-\frac{k^2+a^2}{ja}\right) = \widehat{\xi}_j^{a,0}(k) \tag{3.27}$$

при $k = -2^{j-1}+1,\dots,2^{j-1}$. Так что $c_{j,0}=0$, поэтому условие $\lim_{j\to\infty} c_{j,0} = 0$ выполняется. Рассмотрим $\widehat{\xi}_j^a(k)$ и $\widehat{\xi}_j^{a,0}(k)$ при $|k-1/2|+1/2 \geq 2^{j-1}$, то есть при $j \leq J-2$. Обозначая $\nu_k^{r,a,0} := \exp\left(-\frac{k^2+a^2}{r(r-1)a}\right)$, вспоминая (3.25) и применяя $|\nu_k^{r,a,0}|\leq 1$, $|\nu_k^{r,a}|\leq 1$, получим

$$\left|\widehat{\xi}_j^a(k) - \widehat{\xi}_j^{a,0}(k)\right| = \left|\prod_{r=j+1}^{J-1}\nu_k^{r,a} - \prod_{r=j+1}^{J-1}\nu_k^{r,a,0}\right|\exp\left(-\frac{k^2+a^2}{(J-1)a}\right)$$

$$\leq 2\mathrm{exp}\left(-\frac{k^2+a^2}{(J-1)a}\right).$$

Применяя последовательно эту оценку, (3.27) и неравенства $[\log_2(k+1)]+2 \leq 4k^{1/2}$ и $k^2+a^2 \geq a^{5/4}k^{3/4}$ $(a,\ k \geq 1)$ получим

$$\frac{1}{4\pi^2}\|(\xi_j^a)' - (\xi_j^{a,0})'\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \left|\widehat{\xi}_j^a(k) - \widehat{\xi}_j^{a,0}(k)\right|^2$$

$$\leq 8 \sum_{k=2^{j-1}}^{\infty} k^2\mathrm{exp}\left(-\frac{2(k^2+a^2)}{(\lfloor\log_2(k+1)\rfloor+2)a}\right)$$

$$\leq 8 \sum_{k=2^{j-1}}^{\infty} k^2\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}a^{1/4}k^{1/2}\right).$$

последняя сумма и дает равномерные оценки для $\|\xi_j^a - \xi_j^{a,0}\|_{W_2^1}$. При $a > 1$

$$\sum_{k=2^{j-1}}^{\infty} k^2\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}a^{1/4}k^{1/2}\right) \leq \sum_{k=2^{j-1}}^{\infty} k^2\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}k^{1/2}\right)$$

$$= O\left(\int_{2^{j-1}}^{\infty} x^2\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}x^{1/2}\right)\,dx\right) = O\left(2^{5j/2}\mathrm{exp}(-2^{j/2})\right).$$

При $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2^{j-1}}^{\infty} k^2\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}a^{1/4}k^{1/2}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}a^{1/4}k^{1/2}\right)$$

$$= \mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}a^{1/4}\right)\sum_{k=1}^{\infty} k^2\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}a^{1/4}(k^{1/2}-1)\right) = O\left(\mathrm{exp}\left(-\frac{1}{2}a^{1/4}\right)\right).$$

Итак, (3.7) доказано.

Шаг 3. Для проверки (3.8) используем ту же схему доказательства, что и в пункте 2. Функции ψ_j^a, η_j^a, $\eta_j^{a,0}$ (их определения даны в (3.10), замечании 3.2.1 и (3.16)) играют ту же роль, что и φ_j^a, ξ_j^a и $\xi_j^{a,0}$ соответственно. Из (3.10) и замечания 3.2.1 следует, что $\widehat{\eta}_j^a(k) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}2^{-j-1}k}\nu_{k+2^j}^{j+1,a}\widehat{\xi}_{j+1}^a(k)$. Поскольку

$$\nu_{k+2^j}^{j+1,a} = \sqrt{1-\mathrm{exp}\left(-2(k^2+a^2)/(j(j+1)a)\right)},$$

$$\widehat{\xi}_{j+1}^a(k) = \widehat{\xi}_{j+1}^{a,0}(k) = \mathrm{exp}(-(k^2+a^2)(j+1)^{-1}a^{-1})$$

для $k = -2^{j-1}+1,\dots,2^{j-1}$, вспоминая (3.16) заключаем (сравните с (3.27)), что $\widehat{\eta}^a_j(k) = \widehat{\eta}^{a,0}_j(k)$ при $k = -2^{j-1}+1,\dots,2^{j-1}$. Из определения (3.16) следует, что равномерные оценки на нормы $\|\eta^a_j - \eta^{a,0}_j\|_{W^1_2}$ совпадают с оценками для $\|\xi^a_j - \xi^{a,0}_j\|_{W^1_2}$. Используя эти оценки, а также оценки для компонентов КН (3.18) и (3.24), непосредственно проверяем, что $\lim_{j\to\infty}\sup_{a>1}|UC_B(\eta^a_j) - UC_B(\eta^{a,0}_j)| = 0$ и $\lim_{a\to\infty}\sup_{j>0}|UC_B(\eta^a_j) - UC_B(\eta^{a,0}_j)| = 0$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 3.2.1 осталось воспользоваться леммой 3.2.3. $\Diamond$

Значения $UC_B(\psi^a_j)$ для некоторых a и j приведены в таблице 3.1

Таблица 3.1: Значения $UC_B(\psi^a_j)$ для некоторых a и j.

a	1.1	1.1	1.01	1.01	100	1000
j	10^6	$2\cdot 10^6$	$5\cdot 10^5$	10^6	10	10
$UC_B(\psi^a_j)$	1.497	1.498	1.496	1.497	0.500124	0.500013

Замечание 3.2.2. Интересно отметить, что функционал UC_B непрерывен относительно нормы $\|f\|_{W^1_2} := \|f\| + \|f'\|$. Действительно, проверим, что $\tau(f)$ и $(f',\, f)$ непрерывны относительно этой нормы. Используя неравенство Коши, получим

$$\begin{gathered}2\pi\,|\tau(f) - \tau(g)| \le \int_{-\pi}^{\pi} \big||f|^2 - |g|^2\big| = \Big(\Big||f| - |g|\Big|,\ |f| + |g|\Big)\\ \le \Big\|\big|f| - |g\big|\Big\|\ \Big\||f| + |g|\Big\| \le \Big(\|f\| + \|g\|\Big)\|f - g\|_{W^1_2};\\ |(f', f) - (g', g)| \le |(f', f - g)| + |(f' - g', g)| \le \|f'\|\ \|f - g\|\\ +\|f' - g'\|\ \|g\| \le \max\Big\{\|f'\|, \|g\|\Big\}\|f - g\|_{W^1_2}.\end{gathered}$$

Осталось заметить, что КН непрерывно зависит от $\|f\|$, $\|f'\|$, $\tau(f)$ и $(f',\, f)$. $\Diamond$

В теореме 3.2.1 мы получили оптимальную КН при $j \to \infty$ для масштабирующих последовательностей, а для всплесковых последовательностей КН при $j \to \infty$ равна только $3/2$, что совпадает в наименьшей нижней границей для КН Гейзенберга в теореме 3.0.1. Это порождает закономерный вопрос: распространяется ли результат теоремы 3.0.1 на периодический случай. Пусть $\psi^0 \in L_2(\mathbb{R})$ – всплеск-функция на прямой. Рассмотрим

$\psi^p_{j,k}(x) := 2^{j/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi^0(2^j(x+n)+k)$ – систему периодических всплесков, полученную периодизацией системы всплесков $\{\psi^0_{j,k}\}$, $j,k\in\mathbb{Z}$ из $L_2(\mathbb{R})$. Тогда незамедлительно получается следующая теорема

Теорема 3.2.2. *Пусть* $\{2^{j/2}\psi^0(2^j\cdot -k)\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ *– бесселева последовательность и* $((\psi^0)', \psi^0)_{L_2(\mathbb{R})}=0$, *тогда* $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi^p_{j,k})\geq 3/2$.

Доказательство. При указанных ограничениях неравенство $UC_H(\psi^0)\geq 3/2$ доказано в [32], [31]. Осталось воспользоваться основным результатом работы [101], а именно $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi^p_{j,k}) = UC_H(\psi^0)$. $\Diamond$

Эти аргументы мотивируют гипотезу: если $(\psi_j', \psi_j)_{L_2(0,1)}=0$, то

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j)\geq 3/2$$

для любой всплесковой последовательности периодических всплесков $(\psi_j)_j$. Если это верно, то фрейм Парсеваля периодических всплесков, построенный в теореме 3.2.1 имеет оптимальную КН. В теореме 3.3.1 мы указываем широкий класс последовательностей периодических функций, для которого гипотеза верна.

Отметим, что периодизация всплеск-функции из $L_2(\mathbb{R})$ не может привести к результату более сильному, чем результат теоремы 3.2.1. А именно, пусть $f^n\in L_2(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$ – последовательность, такая что $\lim_{n\to\infty} UC_H(f^n) = 1/2$. Используя периодизацию, определяем последовательность периодических функций $f^{n,p}_j(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f^n(2^j(x+k))$ и применяя результат из [101] получим только $\lim_{j\to\infty}\lim_{n\to\infty} UC_B(f^{n,p}_j) = 1/2$, что слабее, чем равенства вида (3.7), (3.8).

В заключение отметим, что в случае периодических всплесков, говоря о локализации, мы изучаем КН не отдельной всплеск-функции ψ_j, а поведение всей последовательности (ψ_j), $j=0,1,\ldots,$ рассматривая $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j)$. Это связано, во-первых, с нестационарностью систем периодических всплесков, то есть порождающей здесь является не одна функция, а последовательность всплеск-функций. Во-вторых, как показывает теорема 3.2.1, в каждом фиксированном подпространстве КМА (фиксированном j) существуют всплеск-функции с асимптотически наименьшими возможными КН

$\lim_{a\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = 1/2$ и, таким образом, для отдельной периодической всплеск-функции вопрос о наименьшей КН исчерпан.

3.3 Уточнение периодического принципа неопределенности

В следующей теореме мы доказываем неравенство для КН Брейтенбергера для широкого класса последовательностей периодических функций.

Теорема 3.3.1. *Пусть $\psi_j \in L_2(0,\,1)$, $j \in \mathbb{N}$, – последовательность периодических функций, такая что*

$$\lim_{j\to\infty} q_j \widehat{\psi}_j(k)/\|\psi_j\| = 0 \text{ для } |k| \le M(C), \tag{3.28}$$

$$\lim_{j\to\infty} q_j^{-2} A(\psi_j')/\|\psi_j\|^2 = 0, \tag{3.29}$$

$$|(\psi_j',\, \psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2, \tag{3.30}$$

$$q_j^{-2}\|\psi_j'\|^2 \le C\|\psi_j\|^2, \tag{3.31}$$

$$q_j^2 A(\psi_j) \le C\|\psi_j\|^2, \tag{3.32}$$

$$q_j\,|B(\psi_j)| \le C\|\psi_j\|^2, \tag{3.33}$$

где $M(C) := 2(C(2\pi)^{-1} + C\sqrt{2C}/3 + 1/6)$, $C > 0$ – абсолютная константа, и $q_j \to \infty$ при $j \to \infty$. Тогда если $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j)$ существует, то

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j) \ge 3/2. \tag{3.34}$$

Доказательство. Шаг 1. КН Брейтенбергера – однородный функционал степени ноль, то есть $UC(\alpha f) = UC(f)$ для $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому в дальнейшем работаем с функциями $\psi_j/\|\psi_j\|$ вместо ψ_j. Обозначение для ψ_j оставим прежним. Итак, рассматриваем последовательность $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$, где $\|\psi_j\| = 1$, и условия (3.28)–(3.33) имеют вид

$$\lim_{j\to\infty} q_j \widehat{\psi}_j(k) = 0 \text{ для } |k| \le M(C), \quad \lim_{j\to\infty} q_j^{-2} A(\psi_j') = 0, \quad |(\psi_j',\, \psi_j)| \le C,$$

$$q_j^{-2}\|\psi_j'\| \le C, \quad q_j^2 A(\psi_j) \le C, \quad q_j B(\psi_j) \le C.$$

Шаг 2. Рассмотрим вспомогательные функции $\psi_{*j} \in L_2(0,\, 1)$

$$\widehat{\psi_{*j}}(k) = \begin{cases} \widehat{\psi}_j(k), & |k| > M(C), \\ 0, & |k| \le M(C). \end{cases} \tag{3.35}$$

Из (3.28) следует, что

$$\|\psi_j\|^2 - \|\psi_{*j}\|^2 = \sum_{|k|\le M(C)} |\widehat{\psi}_j(k)|^2 = q_j^{-2} o(1),$$

$$\tau(\psi_j) - \tau(\psi_{*j}) = \sum_{|k|\le M(C)} \widehat{\psi}_j(k-1)\overline{\widehat{\psi}_j(k)} = q_j^{-2} o(1),$$

$$(\psi_j',\, \psi_j) - (\psi_{*j}',\, \psi_{*j}) = 2\pi i \sum_{|k|\le M(C)} k|\widehat{\psi}_j(k)|^2 = q_j^{-2} o(1),$$

$$\|\psi_j'\|^2 - \|\psi_{*j}'\|^2 = 4\pi^2 \sum_{|k|\le M(C)} k^2|\widehat{\psi}_j(k)|^2 = q_j^{-2} o(1)$$

при $j \to \infty$. Покажем, что

$$UC_B(\psi_{*j}) - UC_B(\psi_j) \to 0 \text{ при } j \to \infty. \tag{3.36}$$

Действительно, из (3.2), $\|\psi_j\| = 1$ и (3.32) следует, что

$$1 \ge |\tau(\psi_j)|^2 = (\|\psi_j\|^2 - A(\psi_j))^2 + (iB(\psi_j))^2$$

$$= (1 - A(\psi_j))^2 + (iB(\psi_j))^2 \ge 1 - 2A(\psi_j) \ge 1 - 2Cq_j^{-2}.$$

Поэтому

$$0 \le 4\pi^2 \mathrm{var_A}(\psi_j) = \frac{1}{|\tau(\psi_j)|^2} - 1 \le \frac{2Cq_j^{-2}}{1 - 2Cq_j^{-2}}.$$

Следовательно, $q_j^2 \mathrm{var_A}(\psi_j)$ ограничено при $j \to \infty$.

Из определения $\mathrm{var_F}$ и (3.31) получаем ограниченность $q_j^{-2}\mathrm{var_F}(\psi_{*j})$

$$0 \le q_j^{-2}\mathrm{var_F}(\psi_{*j}) = q_j^{-2}\left(\frac{\|(\psi_{*j})'\|^2}{\|\psi_{*j}\|^2} - \frac{(i(\psi_{*j})',\, \psi_{*j})^2}{\|\psi_{*j}\|^4}\right)$$

$$\le q_j^{-2}\frac{\|(\psi_j)'\|^2 + q_j^{-2}o(1)}{1 - q_j^{-2}o(1)} \le \frac{C + q_j^{-4}o(1)}{1 - q_j^{-2}o(1)}.$$

Перепишем $UC_B(\psi_{*j}) - UC_B(\psi_j)$ в стандартной форме

$$\left(q_j^2\mathrm{var_A}(\psi_{*j}) - q_j^2\mathrm{var_A}(\psi_j)\right) q_j^{-2}\mathrm{var_F}(\psi_{*j})$$

$$+\left(q_j^{-2}\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_{*j})-q_j^{-2}\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_j)\right)q_j^2\mathrm{var}_{\mathrm{A}}(\psi_j)$$

и оценим $q_j^2\left(\mathrm{var}_{\mathrm{A}}(\psi_{*j})-\mathrm{var}_{\mathrm{A}}(\psi_j)\right)$ и $q_j^{-2}\left(\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_{*j})-\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_j)\right)$. Используя написанные выше оценки для $\|\psi_j\|^2-\|\psi_{*j}\|^2$ и $\tau(\psi_j)-\tau(\psi_{*j})$, получим

$$4\pi^2 q_j^2\left|\mathrm{var}_{\mathrm{A}}(\psi_{*j})-\mathrm{var}_{\mathrm{A}}(\psi_j)\right|=q_j^2\left|\frac{\|\psi_{*j}\|^4}{|\tau(\psi_{*j})|^2}-\frac{\|\psi_j\|^4}{|\tau(\psi_j)|^2}\right|$$

$$\le\frac{q_j^2}{|\tau(\psi_{*j})|^2|\tau(\psi_j)|^2}\Big(\left|\|\psi_{*j}\|^2-\|\psi_j\|^2\right|\left(\|\psi_{*j}\|^2+\|\psi_j\|^2\right)|\tau(\psi_{*j})|^2$$
$$+\left||\tau(\psi_{*j})|-|\tau(\psi_j)|\right|\left(|\tau(\psi_{*j})|+|\tau(\psi_j)|\right)\|\psi_j\|^4\Big)$$
$$\le q_j^2\frac{q_j^{-2}o(1)(1+q_j^{-2}o(1))+2q_j^{-2}o(1)}{(1-2q_j^{-2})(1-2(C+o(1))q_j^{-2})}.$$

Поэтому $q_j^2\left|\mathrm{var}_{\mathrm{A}}(\psi_{*j})-\mathrm{var}_{\mathrm{A}}(\psi_j)\right|\to 0$ при $j\to\infty$. Аналогично, используя полученные выше оценки для $\|\psi_j'\|^2-\|\psi_{*j}'\|^2$ и $(\psi_j',\,\psi_j)-(\psi_{*j}',\,\psi_{*j})$, запишем

$$q_j^{-2}\left|\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_{*j})-\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_j)\right|=q_j^{-2}\left|\frac{\|\psi_{*j}'\|^2}{\|\psi_{*j}\|^2}+\frac{(\psi_{*j}',\psi_{*j})^2}{\|\psi_{*j}\|^4}-\frac{\|\psi_j'\|^2}{\|\psi_j\|^2}-\frac{(\psi_j',\psi_j)^2}{\|\psi_j\|^4}\right|$$

$$\le q_j^{-2}\frac{\left|\|\psi_{*j}'\|^2-\|\psi_j'\|^2\right|\|\psi_{*j}\|^2+\left|\|\psi_{*j}\|^2-\|\psi_j\|^2\right|\|\psi_j'\|^2}{\|\psi_{*j}\|^2\|\psi_j\|^2}$$

$$+\frac{q_j^{-2}}{\|\psi_{*j}\|^4\|\psi_j\|^4}\Big(\left|(\psi_{*j}',\psi_{*j})-(\psi_j',\psi_j)\right|\left|(\psi_{*j}',\psi_{*j})+(\psi_j',\psi_j)\right|\|\psi_{*j}\|^4$$
$$+\left|\|\psi_{*j}\|^2-\|\psi_j\|^2\right|\left(\|\psi_{*j}\|^2+\|\psi_j\|^2\right)\left|(\psi_j',\psi_j)^2\right|\Big)$$
$$\le q_j^{-2}\frac{q_j^{-2}o(1)(1+q_j^{-2}o(1))+q_j^{-2}o(1)Cq_j^2}{1-q_j^{-2}o(1)}$$
$$+q_j^{-2}\frac{q_j^{-2}o(1)(2C+q_j^{-2}o(1))(1-q_j^{-2}o(1))+q_j^{-2}o(1)(1+q_j^{-2}o(1))C}{1-q_j^{-2}o(1)}.$$

Поэтому $q_j^{-2}\left(\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_{*j})-\mathrm{var}_{\mathrm{F}}(\psi_j)\right)\to 0$ при $j\to\infty$, и (3.36) доказано.

Шаг 3. Рассмотрим вспомогательные функции f_{*j}, $j\in\mathbb{N}$

$$q_j^{-1/2}\widehat{f_{*j}}(q_j^{-1}k)=\widehat{\psi_{*j}}(k), \tag{3.37}$$

$$\widehat{f_{*j}}\ \text{линейна на интервале}\ [q_j^{-1}(k-1),\,q_j^{-1}k], \tag{3.38}$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Так как $\psi_{*j} \in L_2(0,\,1)$, то $f_{*j} \in L_2(\mathbb{R})$ при $j \in \mathbb{Z}$. Проверим, что

$$UC_B(\psi_{*j}) - UC_H(f_{*j}) \to 0 \text{ при } j \to \infty. \tag{3.39}$$

Действительно, оценим разности

1. $\|\psi_{*j}\|^2_{L_2(0,\,1)} - 2\pi \|f_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$,
2. $(2\pi q_j)^{-1}(\psi'_{*j},\, \psi_{*j})_{L_2(0,\,1)} - 2\pi (f'_{*j},\, f_{*j})_{L_2(\mathbb{R})}$,
3. $(2\pi q_j)^{-2}\|\psi'_{*j}\|^2_{L_2(0,\,1)} - 2\pi \|f'_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$,
4. $2 \cdot q_j^2 A(\psi_{*j}) - 2\pi \|\cdot f_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$,
5. $q_j B(\psi_{*j}) - 2\pi i(\cdot f_{*j},\, f_{*j})_{L_2(\mathbb{R})}$.

1. Используя последовательно определение f_{*j} (3.38), (3.2) и (3.32), запишем для первой разности

$$\|\psi_{*j}\|^2_{L_2(0,\,1)} - 2\pi \|f_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi_{*j}}(k)\right|^2 - \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f_{*j}}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi_{*j}}(k)\right|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{q_j^{-1}(k-1)}^{q_j^{-1}k} \left|\widehat{f_{*j}}(\xi)\right|^2 d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi_{*j}}(k)\right|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k-1}^{k} \left|\left(\widehat{\psi_{*j}}(k-1) - \widehat{\psi_{*j}}(k)\right)(\xi - k) + \widehat{\psi_{*j}}(k)\right|^2 d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi_{*j}}(k)\right|^2 - \frac{1}{3}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi_{*j}}(k)\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi_{*j}}(k-1)\right|^2\right.$$

$$\left. + \mathrm{Re}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi_{*j}}(k-1)\overline{\widehat{\psi_{*j}}(k)}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\|\psi_{*j}\|^2_{L_2(0,\,1)} - \mathrm{Re}(\tau(\psi_{*j}))\right)$$

$$= \frac{1}{3} A(\psi_{*j}) \le \frac{C}{3} q_j^{-2}.$$

Поэтому,

$$\|\psi_{*j}\|^2_{L_2(0,\,1)} - 2\pi \|f_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \frac{C}{3} q_j^{-2} \to 0 \text{ при } j \to \infty. \tag{3.40}$$

2. Аналогично предыдущим вычислениям, получим

$$\left|(2\pi q_j)^{-1}(\psi'_{*j},\, \psi_{*j})_{L_2(0,\,1)} - 2\pi(f'_{*j},\, f_{*j})_{L_2(\mathbb{R})}\right|$$

$$= \left| q_j^{-1} i \sum_{k\in\mathbb{Z}} k \big|\widehat{\psi_{*j}}(k)\big|^2 - i\int_{\mathbb{R}} \xi \big|\widehat{f_{*j}}(\xi)\big|^2\, d\xi \right|$$

$$= q_j^{-1} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} k \big|\widehat{\psi_{*j}}(k)\big|^2 - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{k-1}^{k} \xi \left| \Big(\widehat{\psi_{*j}}(k-1) - \widehat{\psi_{*j}}(k)\Big)(\xi - k) + \widehat{\psi_{*j}}(k) \right|^2 d\xi \right|$$

$$\le \frac{q_j^{-1}}{3} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} k \left(\big|\widehat{\psi_{*j}}(k)\big|^2 - \mathrm{Re}\big(\widehat{\psi_{*j}}(k-1)\overline{\widehat{\psi_{*j}}(k)}\big) \right) \right|$$

$$+ \frac{q_j^{-1}}{12} \left| \mathrm{Re} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi_{*j}}(k-1)\overline{\widehat{\psi_{*j}}(k)} \right) \right|.$$

Для первой суммы неравенство Коши, (3.31) и (3.32) дает

$$\frac{q_j^{-1}}{3} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} k \left(\big|\widehat{\psi_{*j}}(k)\big|^2 - \mathrm{Re}\big(\widehat{\psi_{*j}}(k-1)\overline{\widehat{\psi_{*j}}(k)}\big) \right) \right| \le \frac{q_j^{-1}}{3} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \big|\widehat{\psi_{*j}}(k)\big|^2 \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{\psi_{*j}}(k) - \widehat{\psi_{*j}}(k-1)\big|^2 \right)^{1/2} \le \frac{q_j^{-1}}{3} \|\psi'_{*j}\|_{L_2(0,\,1)} \left(2A(\psi_{*j})\right)^{1/2} \le \frac{2^{1/2}}{3} C^{3/2} q_j^{-1}.$$

Для второй суммы, использу (3.2) и (3.32), запишем

$$\frac{q_j^{-1}}{12} \left| \mathrm{Re} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi_{*j}}(k-1)\overline{\widehat{\psi_{*j}}(k)} \right) \right| = \frac{q_j^{-1}}{12} \big| \mathrm{Re}\big(\tau(\psi_{*j})\big) \big|$$

$$= \frac{q_j^{-1}}{12} \big| \|\psi_{*j}\|^2 - A(\psi_{*j}) \big| \le \frac{q_j^{-1}}{6}.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\left|(2\pi q_j)^{-1}(\psi'_{*j},\, \psi_{*j})_{L_2(0,\,1)} - 2\pi(f'_{*j},\, f_{*j})_{L_2(\mathbb{R})}\right| \\ \le \left(\frac{C\sqrt{2C}}{3} + \frac{1}{6} \right) q_j^{-1} \to 0 \text{ при } j \to \infty.\end{gathered} \tag{3.41}$$

3. Следующие оценки аналогичны предыдущим, поэтому мы опускаем детали

$$\left| (2\pi q_j)^{-2} \|\psi'_{*j}\|^2_{L_2(0,\,1)} - 2\pi \|f'_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \right| = \left| q_j^{-2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \big|\widehat{\psi_{*j}}(k)\big|^2 - \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \big|\widehat{f_{*j}}(\xi)\big|^2 d\xi \right|$$

$$= q_j^{-2} \left| \frac{1}{6} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| k\widehat{\psi_{*j}}(k) - (k-1)\widehat{\psi_{*j}}(k-1) \right|^2 \right.$$

$$\left. -\frac{1}{30} \left(2\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi_{*j}}(k)\right|^2 + 3\mathrm{Re} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi_{*j}}(k-1)\overline{\widehat{\psi_{*j}}(k)} \right) \right) \right|$$

$$= q_j^{-2} \left| \frac{1}{6} A(\psi'_{*j}) - \frac{1}{30} \left(2\|\psi_{*j}\|^2 + 3\mathrm{Re}\big(\tau(\psi_{*j})\big) \right) \right|$$

$$= q_j^{-2} \left| \frac{1}{6} A(\psi'_{*j}) - \frac{1}{30} \left(5\|\psi_{*j}\|^2 - 3A(\psi_{*j}) \right) \right|.$$

И на основании (3.29), (3.32) делаем вывод

$$(2\pi q_j)^{-2} \|\psi'_{*j}\|^2_{L_2(0,\,1)} - 2\pi \|f'_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to 0 \text{ при } j \to \infty.$$

Благодаря кусочной линейности функций $\widehat{f_{*j}}$, разности в пунктах 4 и 5 равны 0 для всех $j \in \mathbb{N}$.

4. Действительно, используя определения A (3.1) и f_{*j} (3.37), сразу получаем

$$2 \cdot q_j^2 A(\psi_{*j}) - 2\pi \| \cdot f_{*j}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = q_j^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi_{*j}}(k-1) - \widehat{\psi_{*j}}(k) \right|^2 - \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f_{*j}}'(\xi) \right|^2 d\xi$$

$$= q_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k-1)\big) - \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}k\big) \right|^2 - \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f_{*j}}'(\xi) \right|^2 d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{q_j^{-1}(k-1)}^{q_j^{-1}k} \left(\left| \frac{\widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k-1)\big) - \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}k\big)}{q_j^{-1}} \right|^2 - \left| \widehat{f_{*j}}'(\xi) \right|^2 \right) d\xi = 0.$$

5. Определения B (3.1) и f_{*j} (3.37) дают

$$q_j B(\psi_{*j}) - 2\pi i (\cdot f_{*j},\, f_{*j})_{L_2(\mathbb{R})} = q_j B(\psi_{*j}) + 2\pi (\widehat{f_{*j}}',\, \widehat{f_{*j}})_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$= q_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\overline{\widehat{\psi_{*j}}(k-1) + \widehat{\psi_{*j}}(k)}}{2} \big(\widehat{\psi_{*j}}(k-1) - \widehat{\psi_{*j}}(k) \big) + \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_{*j}}'(\xi) \overline{\widehat{f_{*j}}(\xi)}\, d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{q_j^{-1}(k-1)}^{q_j^{-1}k} \left(\frac{\overline{\widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k-1)\big) + \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k)\big)}}{2} \right.$$

$$\times \frac{\widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k-1)\big) - \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k)\big)}{q_j^{-1}} + \widehat{f_{*j}}'(\xi)\overline{\widehat{f_{*j}}(\xi)}\Bigg) \, d\xi.$$

Функция $\widehat{f_{*j}}$ линейна на $[q_j^{-1}(k-1),\, q_j^{-1}k]$, поэтому,

$$\widehat{f_{*j}}'(\xi) \equiv -\left(\widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k-1)\big) - \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k)\big)\right) q_j$$

на $[q_j^{-1}(k-1),\, q_j^{-1}k]$, обозначая $c_{j,k} := -\left(\widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k-1)\big) - \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k)\big)\right) q_j$ и продолжая вычисления, имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k} \int_{q_j^{-1}(k-1)}^{q_j^{-1}k} \left(-\frac{\overline{\widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k-1)\big) + \widehat{f_{*j}}\big(q_j^{-1}(k)\big)}}{2} + \overline{\widehat{f_{*j}}(\xi)} \right) d\xi = 0,$$

где последнее равенство верно благодаря линейности $\widehat{f_{*j}}$ на $[q_j^{-1}(k-1),\, q_j^{-1}k]$. Итак, разности 1.–5. оценены.

Теперь запишем квадрат КН Брейтенбергера в форме

$$UC_B^2(\psi_{*j}) = q_j^2 \mathrm{var_A}(\psi_{*j}) q_j^{-2} \mathrm{var_F}(\psi_{*j}),$$

где

$$q_j^{-2}\mathrm{var_F}(\psi_{*j}) = q_j^{-2} \left(\frac{\|\psi'_{*j}\|^2}{\|\psi_{*j}\|^2} + \frac{(\psi'_{*j},\, \psi_{*j})^2}{\|\psi_{*j}\|^4} \right)$$

и (см. также (3.1), (3.2))

$$(2\pi q_j)^2 \mathrm{var_A}(\psi_{*j}) = q_j^2 \left(\frac{\|\psi_{*j}\|^4}{|\tau(\psi_{*j})|^2} - 1 \right) = q_j^2 \frac{\|\psi_{*j}\|^4 - |\tau(\psi_{*j})|^2}{|\tau(\psi_{*j})|^2}$$

$$= q_j^2 \frac{2A(\psi_{*j})\|\psi_{*j}\|^2 - A^2(\psi_{*j}) + B^2(\psi_{*j})}{\big(\|\psi_{*j}\|^2 - A(\psi_{*j})\big)^2 - B^2(\psi_{*j})}.$$

Используя (3.30), (3.31) и $\|\psi_{*j}\|^2 - \|\psi_j\|^2 = \|\psi_{*j}\|^2 - 1 \to 0$ при $j \to \infty$, видим, что $q_j^{-2}\mathrm{var_F}(\psi_{*j})$ ограничена при $j \to \infty$. И поскольку по (3.36) существует конечный предел $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_{*j})$, то существует абсолютная константа $C_0 > 0$, такая что $q_j^2 \mathrm{var_A}(\psi_{*j}) > C_0$ при $j \to \infty$. Аналогично, (3.32), (3.33) и $\|\psi_{*j}\|^2 - \|\psi_j\|^2 = \|\psi_{*j}\|^2 - 1 \to 0$ при $j \to \infty$ дают ограниченность $q_j^2 \mathrm{var_A}(\psi_{*j})$ при $j \to \infty$. Следовательно, существует абсолютная константа $C_0 > 0$, такая что $q_j^{-2}\mathrm{var_F}(\psi_{*j}) > C_0$ при $j \to \infty$.

Следовательно, неравенство $q_j^2 \mathrm{var_A}(\psi_{*j}) > C_0 > 0$ при $j \to \infty$ и оценки из пунктов 1.,4.,5. позволяют записать

$$\frac{\Delta^2(f_{*j})}{(2\pi q_j)^2 \mathrm{var_A}(\psi_{*j})}$$

$$= \frac{\|f_{*j}\|^2 \| \cdot f_{*j}\|^2 - (\cdot f_{*j},\, f_{*j})^2}{\|f_{*j}\|^4} \frac{(\|\psi_{*j}\|^2 - A(\psi_{*j}))^2 - B^2(\psi_{*j})}{q_j^2 \left(2A(\psi_{*j})\|\psi_{*j}\|^2 - A^2(\psi_{*j}) + B^2(\psi_{*j})\right)}$$

$$= \frac{\left(\|\psi_{*j}\|^2 + o(1)\right) 2 \cdot q_j^2 A(\psi_{*j}) + q_j^2 B^2(\psi_{*j})}{q_j^2 \left(2A(\psi_{*j})\|\psi_{*j}\|^2 - A^2(\psi_{*j}) + B^2(\psi_{*j})\right)} \frac{\left((\|\psi_{*j}\|^2 - A(\psi_{*j}))^2 - B^2(\psi_{*j})\right)}{(\|\psi_{*j}\|^2 + o(1))^2}$$

$$= \left(1 + \frac{o(1)2 \cdot q_j^2 A(\psi_{*j}) + q_j^2 A^2(\psi_{*j})}{q_j^2 \left(2A(\psi_{*j})\|\psi_{*j}\|^2 - A^2(\psi_{*j})\right)}\right) \frac{\left((\|\psi_{*j}\|^2 - A(\psi_{*j}))^2 - B^2(\psi_{*j})\right)}{(\|\psi_{*j}\|^2 + o(1))^2} \to 1$$

при $j \to \infty$. Аналогично, из неравенства $q_j^{-2} \mathrm{var_F}(\psi_{*j}) > C_0 > 0$ при $j \to \infty$ и оценок 1.,2.,3. выводим

$$\frac{\Delta^2(\widehat{f_{*j}})}{(2\pi q_j)^{-2} \mathrm{var_F}(\psi_{*j})} = \frac{\|\psi_{*j}\|^4 \left(\|i f'_{*j}\|^2 \|f_{*j}\|^2 + (f'_{*j},\, f_{*j})^2\right)}{\|f_{*j}\|^4 \ (2\pi q_j)^{-2} \left(\|\psi'_{*j}\|^2 \|\psi_{*j}\|^2 + (\psi'_{*j},\, \psi_{*j})^2\right)}$$

$$= \frac{\|\psi_{*j}\|^4 \left((q_j^{-2}\|\psi'_{*j}\|^2 + o(1))(\|\psi_{*j}\|^2 + o(1)) + (q_j^{-1}(\psi'_{*j},\, \psi_{*j}) + o(1))^2\right)}{(\|\psi_{*j}\|^2 + o(1))^2 \ q_j^{-2} \left(\|\psi'_{*j}\|^2 \|\psi_{*j}\|^2 + (\psi'_{*j},\, \psi_{*j})^2\right)} \to 1$$

при $j \to \infty$. Окончательно (3.39) следует из двух последних соотношений и существования конечного предела $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_{*j})$.

Шаг 4. Рассмотрим вспомогательные функции f_j, $j \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{f_j} := \widehat{f_{*j}}(\cdot + c(\widehat{f_{*j}})),$$

где $c(\widehat{f})$ – частотный центр функции f (см. определение 1.1). Хорошо известно (см. [19, упражнение 1.5.1]), что $c(\widehat{f_j}) = 0$ и

$$UC_H(f_{*j}) = UC_H(f_j), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{3.42}$$

Проверим, что $|c(\widehat{f_{*j}})| \le q_j^{-1} M(C)$ при $j > j_0$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$. Действительно, определение частотного центра и оценки (3.40), (3.41) дают

$$|c(\widehat{f_{*j}})| = \frac{\left(\cdot \widehat{f_{*j}},\, \widehat{f_{*j}}\right)}{\|\widehat{f_{*j}}\|^2} = \frac{\left|\left(f'_{*j},\, f_{*j}\right)\right|}{\|f_{*j}\|^2} \le q_j^{-1} \frac{(2\pi)^{-1}\left|(\psi'_{*j},\, \psi_{*j})\right| + C\sqrt{2C}/3 + 1/6}{\|\psi_{*j}\|^2 - C q_j^{-2}/3}.$$

Поскольку $\|\psi_{*j}\|^2 - Cq_j^{-2}/3 = 1 - Cq_j^{-2}/3 + o(1) \geq 1/2$ при $j > j_0$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, из (3.30) и определения $M(C)$ (3.28) следует, что

$$|c(\widehat{f_{*j}})| \leq 2 \cdot q_j^{-1} \left((2\pi)^{-1} \left| (\psi'_{*j}, \psi_{*j}) \right| + C\sqrt{2C}/3 + 1/6 \right)$$
$$< 2 \cdot q_j^{-1} \left(C(2\pi)^{-1} + C\sqrt{2C}/3 + 1/6 \right) = q_j^{-1} M(C).$$

Окончательно, используя условия (3.35) и (3.37) выводим $\widehat{f_{*j}}(\xi) \equiv 0$ для $\xi \in [-q_j^{-1}M(C),\, q_j^{-1}M(C)]$. Следовательно, неравенство $|c(\widehat{f_{*j}})| \leq q_j^{-1}M(C)$ при $j > j_0$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ обеспечивает $\widehat{f_j}(0) = \widehat{f_{*j}}(c(\widehat{f_{*j}})) = 0$ при $j > j_0$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$.

Шаг 5. Так как $\widehat{f_j}(0) = 0$ при $j > j_0$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$ и $c(\widehat{f_j}) = 0$, то из теоремы 3.0.1 следует, что $UC_H(f_j) \geq 3/2$ при $j > j_0$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{N}$. Осталось заметить, что с помощью (3.36), (3.39) и (3.42) можно записать

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j) = \lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_{*j}) = \lim_{j\to\infty} UC_H(f_{*j}) = \lim_{j\to\infty} UC_H(f_j) \geq 3/2.$$

Теорема 3.3.1 доказана. $\diamondsuit$

При рассмотрении условий теоремы 3.3.1 возникает естественный вопрос о классах периодических последовательностей, которые удовлетворяют этим условиям. Насколько эти условия ограничительны? Приведем несколько поясняющих замечаний.

Замечание 3.3.1. (**Всплесковая последовательность, порожденная периодизацией**) Пусть $\psi^0 \in L_2(\mathbb{R})$ – всплеск-функция. Естественно предполагать, что $x\psi^0(x)$, $i(\psi^0)' \in L_2(\mathbb{R})$. В противном случае $UC_H(\psi^0)$ будет бесконечной. Положим

$$\psi^p_{j,k}(x) := 2^{j/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^0(2^j(x+n)+k).$$

То есть последовательность $(\psi^p_{j,k})_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $k = 0, \ldots, 2^j - 1$ получена периодизацией из последовательности $(\psi^0_{j,k})_{j,k}$. Положим $\psi^p_j := \psi^p_{j,0}$, $j = 0, 1, \ldots$ и $q_j = 2^j$. Тогда для всплесковой последовательности $(\psi^p_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ условия

(3.31)–(3.33) выполнены, и $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^p)$ конечен. Если дополнительно $\widehat{\psi^0}(\xi) = o(\sqrt{\xi})$ при $\xi \to 0$ и $x(\psi^0(x))' \in L_2(\mathbb{R})$, тогда условия (3.28) и (3.29) также выполнены. Действительно, в работе [101] доказано, что величины

$$\|\psi_j^p\|_{L_2(0,1)},\quad 2^{-2j}\|(\psi_j^p)'\|^2_{L_2(0,1)},\quad 2^{-j}((\psi_j^p)',\,\psi_j^p)_{L_2(0,1)},\quad 2\cdot 2^{2j}A(\psi_j^p)\ \text{и}\ \ 2^jB(\psi_j^p)$$

стремятся к

$$\|\psi^0\|_{L_2(\mathbb{R})},\quad \|(\psi^0)'\|^2_{L_2(\mathbb{R})},\quad ((\psi^0)',\,\psi^0)_{L_2(\mathbb{R})},$$
$$4\pi^2\|\cdot\psi^0\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\ \text{и}\ \ 2\pi i(\cdot\psi^0,\,\psi^0)_{L_2(\mathbb{R})}$$

соответственно. Следовательно, условия (3.31)–(3.33) выполняются. Далее, в [101] доказывается, что $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^p) = UC_H(\psi^0)$, поэтому $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^p)$ конечен. Поскольку $\widehat{\psi_j^p}(k) = 2^{-j/2}\widehat{\psi^0}(2^{-j}k)$ и $\widehat{\psi^0}(\xi) = o(\sqrt{\xi})$ при $\xi \to 0$, то условие (3.28) верно для любого $k \in \mathbb{N}$. Условие $\widehat{\psi^0}(\xi) = o(\sqrt{\xi})$ при $\xi \to 0$ неограничительно. Если это условие не выполнено, то $UC_H(\psi_0) = \infty$. Действительно, пусть $UC_H(\psi_0)$ конечна. Тогда $(1+|\cdot|)\psi$, $(1+|\cdot|)\widehat{\psi} \in L_2(\mathbb{R})$, и ψ^0 абсолютно непрерывна (см. [19, теорема 1.5.2]). Следовательно, $\psi^0(x) = O(x^{-3/2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ при $x \to \infty$. Тогда $|\widehat{\psi^0}(\xi+h) - \widehat{\psi^0}(\xi)| = O(h^{1/2+\varepsilon/2})$ при $\xi \in \mathbb{R}$ и условие $\widehat{\psi^0}(\xi) = o(\sqrt{\xi})$ при $\xi \to 0$ следует из факта $\widehat{\psi}(0) = 0$. Окончательно, $\lim_{j\to\infty} 2A((\psi_j^p)') = \|x(\psi^0(x))'\|_{L_2(\mathbb{R})}$ и $x(\psi^0(x))' \in L_2(\mathbb{R})$ дают (3.29).

Ясно, что комбинируя результат $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^p) = UC_H(\psi^0)$ из [101] и теорему 3.0.1 (см. теорему 3.2.2), мы немедленно получаем неравенство $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^p) \geq 3/2$ и для его доказательства условие (3.29) не используется. Однако, искомое неравенство доказано в теореме 3.2.2 при условии $((\psi_j^p)',\,\psi_j^p)_{L_2(0,1)} = 0$, в то время как более мягкое ограничение $((\psi_j^p)',\,\psi_j^p)_{L_2(0,1)} \leq C\|\psi_j^p\|^2_{L_2(0,1)}$ требуется в теореме 3.3.1.

Замечание 3.3.2. Всплесковые последовательности, порожденные унитарным принципом расширения. Пусть $(\psi_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ – всплесковая последовательность, построенная по теореме 3.1.2 и $c_1 \leq \|\psi_j\| \leq c_2$, где $c_1 > 0$, c_2 – абсолютные константы. Положим $q_j = 2^j$. Тогда условие (3.28) выполнено для всех $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, из (3.5) и (3.6) следует, что $\widehat{\psi_j}(k) =$

$e^{2\pi i 2^{-j-1}k}\mu_{k+2^j}^{j+1}\widehat{\varphi_{j+1}}(k)$, из (3.4) и (3.3) получим $|\mu_k^{j+1}| = \widehat{\varphi_{j-1}}(k)/\widehat{\varphi_j}(k) \to \sqrt{2}$ при $j \to \infty$. Тогда из (3.31) имеем $|\mu_{k+2^j}^{j+1}| \to 0$ при $j \to \infty$, что вместе с (3.3) дает (3.28). Если же отказаться от ограничения $c_1 \le \|\psi_j\| \le c_2$, где $c_1 > 0$, c_2 – абсолютные константы, то условие (3.28) автоматически не выполняется, но оказывается равносильным такому

$$\lim_{j\to\infty} \frac{2^j \mu_{k+2^j}^{j+1}}{\|\psi_j\|} = 0.$$

Условие (3.33) не ограничительно. Пусть $f \in L_2(0,\,1)$, обозначим c_k ее коэффициенты Фурье. Введем вспомогательную функцию f_0, коэффициенты которой $|c_k|$. Тогда $\|f\| = \|f_0\|$, $\mathrm{var_F}(f) = \mathrm{var_F}(f_0)$ и $\tau(f) \le \tau(f_0)$. Поэтому $UC_B(f) \ge UC_B(f_0)$. Следовательно, достаточно обеспечить неравенство $UC_B(f_0) \ge 3/2$. При этом для функции f_0 условие (3.33) тривиально выполняется, так как $B(f_0) = 0$.

Если коэффициенты четны или нечетны, то условие (3.30) верно.

Далее считаем, что ψ_j – тригонометрический полином степени $C_1 2^j$, где C_1 – абсолютная константа, тогда условие (3.31) выполняется, так как фактически является неравенством Бернштейна в метрике $L_2(0,\,1)$.

Из условия (3.32) будет следовать (3.29). Действительно,

$$A((\psi_j)') = \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|(k-1)\widehat{\psi}_j(k-1) - k\widehat{\psi}_j(k)\right|^2,$$

неравенство треугольника дает

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|(k-1)\widehat{\psi}_j(k-1) - k\widehat{\psi}_j(k)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 \left|\widehat{\psi}_j(k-1) - \widehat{\psi}_j(k)\right|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi}_j(k-1)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Из неравенства Бернштейна следует

$$\left(\sum_{|k|\le C_1 2^j+1} k^2 \left|\widehat{\psi}_j(k-1) - \widehat{\psi}_j(k)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\leq (C_1 2^j + 1) \left(\sum_{|k| \leq C_1 2^j + 1} \left| \widehat{\psi}_j(k-1) - \widehat{\psi}_j(k) \right|^2 \right)^{1/2}$$

Таким образом,

$$\frac{(A((\psi_j)'))^{1/2}}{\|\psi_j\|} \leq \frac{\pi(C_1 2^j + 1)(2A(\psi_j))^{1/2} + \pi\|\psi_j\|}{\|\psi_j\|}$$

и из условия (3.32) следует, что данное выражение ограничено по j. А тогда (3.29) выполняется.

Таким образом, среди всех последовательностей, построенных с помощью унитарного принципа расширения, можно выделить такой класс: всплеск-функции являются тригонометрическими полиномами степени $C_1 2^j$, где C_1 – абсолютная константа, имеют ограниченные нормы $c_1 \leq \|\psi_j\| \leq c_2$, где $c_1 > 0$, c_2 – абсолютные константы, для коэффициентов справедливы равенства $\widehat{\psi}(k) = \widehat{\psi}(-k)$ и выполняется неравенство $q_j^2 A(\psi_j) \leq C\|\psi_j\|^2$.

Замечание 3.3.3. Всплесковая последовательность, построенная в теореме 3.2.1. Пусть $(\psi_j^a)_{j\in\mathbb{N}}$, $a > 1$, – семейство всплесковых последовательностей, построенное в теореме 3.2.1. Тогда все условия (3.28)–(3.33) выполняются при $q_j = j^{1/2}$. Действительно, из полученных в доказательстве теоремы 3.2.1 оценок следует, что $\widehat{\psi_j^a}(k) \asymp j^{-1}2^{-j/2}$ для фиксированного $k \in \mathbb{Z}$, $\|\psi_j^a\|^2 \asymp j^{-1/2}2^{-j}$, $A((\psi_j^a)') \asymp j^{-1/2}2^{-j}$, $\|(\psi_j^a)'\|^2 \asymp j^{1/2}2^{-j}$, $A(\psi_j^a) \asymp j^{-3/2}2^{-j}$, $|B(\psi_j^a)| \asymp \sin(2\pi 2^{-j-1})j^{-1/2}2^{-j}$ при $j \to \infty$.

3.4 Одна частная задача минимизации для константы неопределенности Гейзенберга

Можно провести аналогию между теоремой 3.0.1 и теоремой 3.3.1. Для $f \in L_2(\mathbb{R})$ условия $c(\widehat{f}) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}} f = \widehat{f}(0) = 0$ теоремы 3.0.1 соответствуют условиям (3.30) и (3.28). Тогда напрашивается обобщение теоремы 3.0.1 вида: если $\int_{\mathbb{R}} f = \varepsilon$ и $c(\widehat{f}) = 0$, то $UC_H(f) \geq \alpha(\varepsilon)$, где $\lim_{\varepsilon\to 0} \alpha(\varepsilon) = 3/2$.

К сожалению, обобщить доказательство теоремы 3.0.1 на этот случай невозможно. В следующей теореме 3.4.1 мы покажем, что не существует функции, являющейся решением следующей минимизационной задачи

$$UC_H(f) \to \min;\ f \in L_2(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} f = \varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ c(\widehat{f}) = 0.$$

Случай теоремы 3.0.1 соответствует $\varepsilon = 0$, и такая функция существует. Если высказанное обобщение теоремы 3.0.1 верно, то это поможет изучать локализованность нестационарных систем всплесков.

Теорема 3.4.1. *Пусть f – функция, такая что $\cdot f,\ if' \in L_2(\mathbb{R})$, $f_0 := a^{1/2} f(a\cdot)$, где $a = (\|\cdot f\| / \|if'\|)^{1/2}$, и $c(\widehat{f_0}) = 0$. Фиксируем $\varepsilon \in \mathbb{C}$ и положим $\int_{\mathbb{R}} f_0(x)\, dx = \varepsilon$. Тогда если $\varepsilon \neq 0$, $\varepsilon \neq 2\pi^{3/4} \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}$, $k \in \mathbb{N}$, то не существует функции, являющейся решением минимизационной задачи*

$$\begin{cases} UC_H(f_0) \to \min, \\ \int_{\mathbb{R}} f_0 = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad c(\widehat{f_0}) = 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Если $\varepsilon = 2\pi^{3/4} \frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}$, $k \in \mathbb{N}$, тогда функция Эрмита

$$\phi_n(x) = \left(\frac{2^n n!}{2\sqrt{\pi}} \right)^{-1/2} (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}), \tag{3.44}$$

$n = 2k$, минимизирует задачу (3.43) и $UC_H(\phi_{2k}) = (4k+1)/2$.

Доказательство. Случай $\varepsilon = 0$ рассмотрен в [32, p.137-138] (теорема 3.0.1). Мы используем вариационную идею из доказательства этой теоремы для произвольного малого параметра ε. Пусть $f_1(x) := f_0(x + c(f))$, тогда временной и частотный центры функции f_1 равны нулю, и $\Delta(f_0) = \Delta(f_1)$, $\Delta(\widehat{f_0}) = \Delta(\widehat{f_1})$, $\int_{\mathbb{R}} f_1 = \int_{\mathbb{R}} f_0$. Так как функционал UC_H однороден, то без потери общности считаем, что функции f_0 и $\widehat{f_0}$ имеют нулевые центры и $\|f_0\| = 1$. Тогда UC_H примет вид $UC_H(f_0) = \|\cdot f_0\| \|if_0'\|$. Минимизируем функционал $\|\cdot f_0\|^2 \|if_0'\|^2$ по функциям $f_0 \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющим ограничениям $\|f_0\| = 1$ и $\int_{\mathbb{R}} f_0 = \varepsilon$. Для функции Лагранжа

$$\|\cdot f_0\|^2 \|if_0'\|^2 + \lambda(\|f_0\|^2 - 1) + \kappa \left(\int_{\mathbb{R}} f_0 - \varepsilon \right)$$

приходим к уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\|if_0'\|^2x^2f_0(x) - \|\cdot f_0\|^2 f_0''(x) + \lambda f_0(x) + \frac{1}{2}\kappa = 0. \tag{3.45}$$

По определению f_0 получим $\|if_0'\| = a\|if'\| = a^{-1}\|\cdot f\| = \|\cdot f_0\| =: \sqrt{\alpha/2}$. Тогда уравнение переписывается так

$$\frac{1}{2}\alpha(x^2f_0(x) - f_0''(x)) + \lambda f_0(x) + \frac{1}{2}\kappa = 0,$$

где $\frac{1}{2}\alpha$ – значение искомого функционала.

Если $\kappa = 0$, то решения являются собственными функциями оператора Гамильтона $Hf = \frac{1}{2}(\cdot^2 f - f'')$, то есть функциями Эрмита (3.44), нормированными условием $\|\phi_n\|^2 = (2\pi)^{-1}\int|\phi_n|^2 = 1$. Прямой счет дает

$$\int_{\mathbb{R}}\phi_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ 2\pi^{3/4}\frac{\sqrt{(2k)!}}{2^k k!}, & n = 2k \end{cases}$$

и $a = (\|\cdot\phi_n\|/\|i\phi_n'\|)^{1/2} = 1$. Если $\varepsilon \neq \int_{\mathbb{R}}\phi_n$, то минимизационная задача не имеет решений. Если $\varepsilon = \int_{\mathbb{R}}\phi_n$, то функции Эрмита (3.44) минимизируют (3.43) и $UC_H(\phi_n) = \|\cdot\phi_n\|\|i\phi_n'\| = (2n+1)/2$.

Если $\kappa \neq 0$, то мы, пользуясь полнотой множества функций Эрмита, разлагаем функцию f_0 в ряд $\sum a_n\phi_n$ и подставляем его в уравнение. В результате получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha(k+1/2)+\lambda)\phi_k(x) + \kappa/2 = 0.$$

Ортонормированность множества $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ позволяет найти коэффициенты

$$a_k = -\frac{1}{2}\kappa\frac{1}{\alpha(k+1/2)+\lambda}\int_{\mathbb{R}}\phi_k.$$

Умножая уравнение (3.45) на f_0 и интегрируя по $\mathbb{R}$, получаем равенство, связывающее параметры $\alpha^2/2 + \lambda + \kappa\varepsilon/2 = 0$. Тогда решение (3.45) принимает вид

$$f_0(x) = -\pi^{3/4}\frac{\kappa}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}\frac{\phi_{2n}(x)}{2n+1/2-(\alpha+\kappa\varepsilon/\alpha)/2}.$$

Ограничения приводят к следующим уравнениям

$$\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f_0 = -2\pi^{3/2}\frac{\kappa}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{1}{2n+1/2-(\alpha+\kappa\varepsilon/\alpha)/2},$$

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |f_0|^2 = \pi^{3/2}\frac{\kappa^2}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{1}{(2n+1/2-(\alpha+\kappa\varepsilon/\alpha)/2)^2}.$$

Используя [121, гл.12, упр.8], переписываем уравнения

$$\varepsilon = -\pi^{3/2}\frac{\kappa}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\alpha+\frac{\kappa\varepsilon}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left(\alpha+\frac{\kappa\varepsilon}{\alpha}\right)\right)}$$

$$1 = \frac{\pi^{1/2}}{2}\frac{\kappa^2}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{d}{d(\alpha+\kappa\varepsilon/\alpha)}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\alpha+\frac{\kappa\varepsilon}{\alpha}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left(\alpha+\frac{\kappa\varepsilon}{\alpha}\right)\right)}.$$

Введем обозначения $\beta := \kappa/\alpha$, $F(x) := \Gamma(1/2)\frac{\Gamma(1/4-x/4)}{\Gamma(3/4-x/4)}$. Тогда уравнения принимают вид

$$\begin{cases} -\beta F(\alpha+\beta\varepsilon) = \pi^{-3/2}\varepsilon, \\ \beta^2 F'(\alpha+\beta\varepsilon) = 2\pi^{-1/2}. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, если $\varepsilon \neq 0$. Действительно, если $\varepsilon = 0$, то $\alpha = 3$, $\beta^2 = 2\pi^{-1/2}(F'(3))^{-1}$. (Это случай теоремы 3.0.1.) Функция F непрерывно-дифференцируема и возрастает в окрестности точки 3 и $F(3) = 0$. Однако из уравнения $-\beta F(\alpha+\beta\varepsilon) = \pi^{-3/2}\varepsilon$ следует, что $F(3+0) < 0$ и $F(3-0) > 0$. Поэтому F не может быть возрастающей функцией. Таким образом, в случае $\kappa \neq 0$ минимизационная задача (3.43) не имеет решения. $\Diamond$

Глава 4

Связь нестационарных и периодических всплесков. Согласование локализованностей

Системы нестационарных всплесков на $L_2(\mathbb{R})$ и периодических всплесков были введены и изучались независимо друг от друга. Нестационарные всплески были введены независимо М. З. Берколайко, И. Я. Новиковым [4] и К. де Буром, Р. ДеВором, А. Роном [34]. В [4] нестационарные системы (в этой работе они названы почти-всплески) используются для построения инвариантного относительно сдвига ортонормированного базиса, состоящего из бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Хорошо известно, что невозможно построить базис всплесков $\{2^{j/2}\psi(2^jx - k)\}_{k,j\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющий этим условиям [9, Следствие 5.5.3]. В контексте нестационарных систем обычный базис всплесков $\{2^{j/2}\psi(2^jx-k)\}_{k,j\in\mathbb{Z}}$ называют стационарным. В дальнейшем, свойства нестационарных всплесков изучались в [46, 47, 64, 19]. О системах периодических всплесков уже написано в главе 3.

В этой главе мы сопоставляем системы нестационарных всплесков на $L_2(\mathbb{R})$ и периодических всплесков, распространяя на эту общую постановку идею периодизации, то есть изучаем, как построить одну систему из другой с помощью периодизации. Мы рассматриваем фреймы Парсеваля всплесков, полученные с помощью унитарного принципа расширения. Мы не нашли в литературе унитарный принцип расширения для нестационарной ситуации, поэтому формулируем его в теореме 4.1.1. Доказательство не приводим, так как оно полностью повторяет доказательство теоремы 1.8.9 [19] при замене стационарных условий нестационарными. Для периодического случая пользуемся унитарным принципом расширения, доказанным С. С. Го, К. М. Тео в 2008 (теорема 3.1.2).

В предложении 4.1.1 доказывается, что периодизация фрейма Парсеваля нестационарных всплесков является фреймом Парсеваля периодических всплесков. Доказательство сводится к сравнению унитарных принципов расширения. Обратная задача, то есть задача о построении нестационарной системы, периодизация которой совпадает с исходной системой, интереснее и сложнее. Она имеет бесконечное множество решений. В лемме 4.1.1 мы строим семейство нестационарных масок m_j^K, соответствующее маскам исходной периодической системы. Параметр семейства $K \in \mathbb{N}$ отвечает за гладкость маски и за порядок нуля в точке $\xi = \pi$. Последняя характеристика также важна, потому что, как и в стационарном случае, она является необходимым условием для гладкости масштабирующих и всплеск-функций. Для широкого класса нестационарных всплесков с компактными носителями этот вопрос изучен в [64], в общем случае этот вопрос, как и многие другие свойства нестационарных систем, еще не изучен. В лемме 4.1.2 мы пишем нестационарный аналог достаточного условия равномерной сходимости на компактах и принадлежности $L_2(\mathbb{R})$ бесконечного произведения $\prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}(\xi 2^{-r})$. В лемме 4.1.3 это достаточное условие конкретизировано для масок m_j^K, определенных в лемме 4.1.1. Таким образом, предлагается конструкция системы нестационарных всплесков, периодизация которой совпадает с исходной системой периодических всплесков, и нестационарные маски могут быть выбраны произвольно гладкими.

Далее, среди этих нестационарных систем мы ищем фрейм всплесков со следующим дополнительным свойством: $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$. Для краткости это свойство названо согласованностью локализаций, то есть частотно-временная локализация нестационарной системы должна быть согласована с частотно-угловой локализацией периодической системы. Отчасти, поиск такой нестационарной системы мотивирован результатами двух предыдущих глав. Точнее, появляется возможность строить хорошо локализованные системы нестационарных всплесков, начиная с периодических. В теореме 4.2.1 мы получаем достаточные условия в терминах нестационарных фреймов, обеспечивающие равенство $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$. В теореме 4.2.2 это достаточное условие сформулировано в терминах масштабирующих масок периодических всплесков.

4.1 Нестационарные всплески, порожденные периодическими всплесками

В этой главе (и только в этой) обозначение $f_{j,k}$ будет иметь другой смысл $f_{j,k}(x) := f_j(x - 2^{-j}k)$ для функции $f_j \in L_2(\mathbb{R})$, где $k \in \mathbb{Z}$. Пусть φ_0^N, $\psi_j^N \in L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}_+$, если множество $\Psi^N := \left\{\varphi_0^N, \psi_{j,k}^N :\ j \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ образует фрейм или базис $L_2(\mathbb{R})$, тогда Ψ^N называется нестационарным фреймом или базисом всплесков в $L_2(\mathbb{R})$. В стационарном случае все всплеск-функции ψ_j^N порождаются одной функцией ψ так: $\psi_j^N(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x)$.

Системы периодических всплесков

$$\Psi^P := \left\{\varphi_0^P, \psi_{j,k}^P :\ j \in \mathbb{Z}_+,\ k = 0, \dots, 2^j - 1\right\},$$

где φ_0^P, $\psi_j^P \in L_2(0,\,1)$, $j \in \mathbb{Z}_+$ определены в главе 3.

Мы изучаем системы нестационарных и периодических всплесков, порожденные унитарным принципом расширения. Для нестационарного случая этот принцип сформулирован в следующей теореме. Доказательство мы не приводим потому, что оно переписывается на основе доказательства теоремы 1.8.9 [19], заменяя стационарные условия на нестационарные.

Теорема 4.1.1. *Пусть $\varphi_j^N \in L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}_+$ – последовательность функций, такая что*

$$\lim_{j\to\infty} 2^{j/2}\widehat{\varphi_j^N}(\xi) = 1, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Пусть $m_{0,j}^N \in L_2(\mathbb{T})$ – последовательность 2π-периодических функций, такая что

$$\left|m_{0,j}^N(\xi)\right|^2 + \left|m_{0,j}^N(\xi+\pi)\right|^2 = 2, \tag{4.2}$$

и
$$\widehat{\varphi_j^N}(\xi) = m_{0,j+1}^N(\xi 2^{-j-1})\widehat{\varphi_{j+1}^N}(\xi). \tag{4.3}$$

Определим последовательность функций $\psi_j^N \in L_2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}_+$,
$$\widehat{\psi_j^N}(\xi) := m_{1,j+1}^N(\xi 2^{-j-1})\widehat{\varphi_{j+1}^N}(\xi), \tag{4.4}$$
где $m_{1,j}^N(\xi) = e^{i\xi}\overline{m_{0,j}^N(\xi+\pi)}$.

Тогда семейство $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N : \ j \in \mathbb{Z}_+,\ k \in \mathbb{Z}\}$ образует фрейм Парсеваля всплесков $L_2(\mathbb{R})$.

Функции φ_j^N, ψ_j^N, $m_{0,j}^N$ $m_{1,j}^N$ называются масштабирующей, всплеск-функцией, масштабирующей маской и маской всплеска соответственно.

Нестационарную систему удобно строить, начиная с масштабирующих масок. Пусть m_j – 2π-периодическая функция, $\widehat{\varphi_j}(\xi) := \prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}(\xi/2^r)$ сходится и принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, тогда масштабирующие функции, масштабирующие маски и всплеск-функции определяются так:
$$\widehat{\varphi_j^N}(\xi) = 2^{-j/2}\widehat{\varphi_j}(\xi/2^j), \qquad m_j(\xi) = 2^{-1/2}m_{0,j}^N(\xi), \tag{4.5}$$
$$\widehat{\psi_j^N}(\xi) = 2^{-j/2}m_{1,j+1}(\xi/2^{j+1})\widehat{\varphi_{j+1}}(\xi/2^{j+1}) = 2^{-j/2}\widehat{\psi}_j(\xi/2^j).$$

Вспомогательные масштабирующая и всплеск-функции φ_j и ψ_j связаны с нестационарными масштабирующей и всплеск-функциями так: $\psi_j^N(x) = 2^{j/2}\psi_j(2^j x)$ и $\varphi_j^N(x) = 2^{j/2}\varphi_j(2^j x)$. В стационарном случае φ_j и ψ_j совпадают с масштабирующей и всплеск-функцией φ и ψ.

Сравнивая два унитарных принципа расширения, получаем

Предложение 4.1.1. *Если $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in\mathbb{Z}}$ – фрейм Парсеваля всплесков, порожденный унитарным принципом расширения, $\varphi_0^N, \psi_j^N \in L_1(\mathbb{R})$, и*
$$\psi_j^P(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_j^N(x-n),$$
тогда $\Psi^P = \{\varphi_0^P,\, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\ldots,2^j-1}$ – фрейм Парсеваля всплесков.

Доказательство. Поскольку $\varphi_0^N, \psi_j^N \in L_1(\mathbb{R})$, функции $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_j^N(x-n)$ почти везде конечны. В образах Фурье последнее равенство переписывается так: $\widehat{\psi_j^N}(2\pi k) = \widehat{\psi_j^P}(k)$. Следовательно, подставляя $2\pi k \in \mathbb{Z}$, где

$k \in \mathbb{Z}$ вместо $\xi \in \mathbb{R}$ в условия (4.1)–(4.4) и обозначая $\mu_k^j = m_{0,j}^N(2\pi k 2^{-j})$, $\lambda_k^j = m_{1,j}^N(2\pi k 2^{-j})$, мы сразу же приходим к (3.3)–(3.6). $\Diamond$

Теперь займемся построением нестационарной системы всплесков по данной периодической.

Лемма 4.1.1. *Пусть* $\nu_k^j \in \mathbb{R}$, $\nu_k^j \geq 0$, *– числовая последовательность, такая что* $\nu_k^j = \nu_{k+2^j}^j$, $|\nu_k^j|^2 + |\nu_{k+2^{j-1}}^j|^2 = 1$, $\nu_k^j = \nu_{-k}^j$. *По определению положим* $\theta_k^j := \arccos \nu_k^j$. *Пусть* z_j^K *– определенный на интервале* $[0, \pi/2]$ *сплайн порядка* K *минимального дефекта, заданный на равномерной сетке отрезка* $[0, \pi/2]$ *так:* $z_j^K(2\pi k 2^{-j}) = \theta_k^j$, $k = 0, \ldots, 2^{j-2}$, $(z_j^K)^{(l)}(0) = 0$, $l = 1, \ldots, K-1$. *Наконец, пусть* m_j^K *– четная* 2π*-периодическая функция*

$$m_j^K(\xi) = \begin{cases} \cos(z_j^K(\xi)), & \xi \in [0, \pi/2], \\ \sin(z_j^K(\pi - \xi)), & \xi \in (\pi/2, \pi]. \end{cases} \tag{4.6}$$

Тогда $|m_j^K(\xi)|^2 + |m_j^K(\xi+\pi)|^2 = 1$, $m_j^K \in C^{K-1}(\mathbb{T})$, $(m_j^K)^{(l)}(\pi) = 0$, $l = 1, \ldots, K-1$.

Доказательство. Равенство $|m_j^K(\xi)|^2 + |m_j^K(\xi+\pi)|^2 = 1$ легко увидеть из более подробной записи функции m_j^K

$$m_j^K(\xi) = \begin{cases} \sin(z_j^K(\pi + \xi - 2\pi k)), & \xi \in [-\pi + 2\pi k, -\pi/2 + 2\pi k), \\ \cos(z_j^K(-\xi + 2\pi k)), & \xi \in [-\pi/2 + 2\pi k, 2\pi k), \\ \cos(z_j^K(\xi - 2\pi k)), & \xi \in [2\pi k, \pi/2 + 2\pi k), \\ \sin(z_j^K(\pi - \xi + 2\pi k)), & \xi \in [\pi/2 + 2\pi k, \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Например, для $\xi \in [-\pi + 2\pi k, -\pi/2 + 2\pi k)$ получим

$$|m_j^K(\xi)|^2 + |m_j^K(\xi+\pi)|^2 = \sin^2(z_j^K(\pi + \xi - 2\pi k)) + \cos^2(z_j^K(\pi + \xi - 2\pi k)) = 1.$$

Так как z_j^K – сплайн порядка K минимального дефекта, то $z_j^K \in C^{K-1}(\mathbb{T})$. Следовательно, функция m_j^K $K-1$ раз непрерывно-дифференцируема во всех точках $\xi \neq \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. Гладкость функции m_j^K в точке 0 следует из гладкости и четности cos. Поскольку m_j^K периодическая и четная, осталось проверить гладкость в точках $\xi = \pi/2$, $\xi = \pi$. В точке $\xi = \pi/2$ для $n = 0, \ldots, K-1$ запишем

$$(m_j^K)^{(n)}(\xi)\Big|_{\xi=\pi/2-0} = \left(\cos\left(z_j^K(\xi)\right)\right)^{(n)}\Big|_{\xi=\pi/2-0}$$

$$(m_j^K)^{(n)}(\xi)\Big|_{\xi=\pi/2+0} = \left(\cos\left(\pi/2 - z_j^K(\pi-\xi)\right)\right)^{(n)}\Big|_{\xi=\pi/2+0}.$$

Так что, используя $z_j^K(\pi/2) = \theta^j_{2^{j-2}} = \pi/4$, получим $(m_j^K)^{(n)}(\pi/2-0) = (m_j^K)^{(n)}(\pi/2+0)$ для $n = 0, \ldots, K-1$. В точке $\xi = \pi$ имеем

$$(m_j^K)^{(n)}(\xi)\Big|_{\xi=\pi-0} = (\sin(z_j^K(\pi-\xi)))^{(n)}\Big|_{\xi=\pi-0}$$

$$(m_j^K)^{(n)}(\xi)\Big|_{\xi=\pi+0} = (\sin(z_j^K(-\pi+\xi)))^{(n)}\Big|_{\xi=\pi+0}$$

Так что условие $(z_j^K)^{(l)}(0) = 0$, $l = 1, \ldots, K-1$ дает

$$(m_j^K)^{(n)}(\pi-0) = (m_j^K)^{(n)}(\pi+0) = 0.$$

$\Diamond$

Лемма 4.1.2. *Если $a_j \in L_2(\mathbb{T})$, $a_j(0) = 1$ и $\sum_j \|a_j''\|_2/2^j < \infty$, то $\widehat{\varphi_j}(\xi) = \prod_{r=1}^{\infty} a_{j+r}(\xi/2^r)$ равномерно и абсолютно сходится на любом $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$. Если дополнительно $|a_j(\xi)|^2 + |a_j(\xi+\pi)|^2 = 1$, то $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|\widehat{\varphi_j}\|_2 \le 1$.*

Доказательство. Эта лемма – модификация известного стационарного результата, в котором скорость убывания коэффициентов Фурье $O(|k|^{-2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$ заменена условием на вторую производную $\sum_j \|a_j''\|_2/2^j < \infty$, более удобным для проверки в случае масок, построенных в лемме 4.1.1 (см. [19, предложение 2.4.1]). Пусть $a_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k} e^{ik\xi}$ и $a_j'' \in L_2(\mathbb{T})$. Так как $a_j(0) = 1$, то

$$|a_j(\xi) - 1| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j,k}\left(e^{ik\xi} - 1\right)\right|$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_{j,k}||k||\xi| \le C|\xi| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^2 c_{j,k}|^2\right)^{1/2} = C_1|\xi|\|a_j''\|_2.$$

Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_{j+r}(\xi/2^r) - 1| \le C_1|\xi| \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\|a_{j+r}''\|_2}{2^r} = C_1 2^j |\xi| \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{\|a_n''\|_2}{2^n}.$$

Итак, бесконечное произведение $\prod_{r=1}^{\infty} a_{j+r}(\xi/2^r)$ равномерно по ξ и абсолютно сходится на любом $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$. Доказательство фактов $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|\widehat{\varphi_j}\|_2 \le 1$ переписывается без изменений из [19, лемма 4.1.3]. $\Diamond$

Лемма 4.1.3. *Если m_j^K определена в (4.6), $\nu_0^j = 1$, и*

$$\sum_j \frac{1}{2^j} \left(\int_0^{\pi/2} ((z_j^K)'(\xi))^4 + ((z_j^K)''(\xi))^2 \, d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

то $\widehat{\varphi_j}(\xi) = \prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}^K(\xi/2^r)$ равномерно и абсолютно сходится на любом $[a,\, b] \subset \mathbb{R}$, $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$ и $\|\widehat{\varphi_j}\|_2 \leq 1$.

Доказательство. Предположения леммы 4.1.3 – это условия леммы 4.1.2, записанные для масок m_j^K. Действительно,

$$\|(m_j^K)''\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |(m_j^K)''(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$= 2 \left(\int_0^{\pi/2} (\cos''(z_j^K(\xi)))^2 \, d\xi + \int_{\pi/2}^{\pi} (\sin''(z_j^K(1/2 - \xi)))^2 \, d\xi \right)$$

$$= 2 \left(\int_0^{\pi/2} ((z_j^K)'(\xi))^4 + ((z_j^K)''(\xi))^2 \, d\xi \right).$$

$\Diamond$

Итак, по данному фрейму Парсеваля периодических всплесков Ψ^P можно построить вспомогательные масштабирующие маски m_j^K (как это указано в лемме 4.1.1) и вспомогательные масштабирующие функции $\widehat{\varphi_j}(\xi) = \prod_{r=1}^{\infty} m_j^K(\xi/2^r)$, далее строятся масштабирующие маски $m_{0,j}^N(\xi) = 2^{1/2} m_j^K(\xi)$, масштабирующие функции $\widehat{\varphi_j^N}(\xi) = 2^{-j/2} \widehat{\varphi_j}(\xi/2^j)$, и – как указано в теореме 4.1.1 – всплеск-функции $\widehat{\psi_j^N}$ по (4.4). Условие $\psi_j \in L_2(\mathbb{R})$ обеспечивается леммой 4.1.3.

4.2 Согласование локализованностей

Следующая теорема описывает связь между UC_H и UC_B в нестационарном случае. Для стационарного случая теорема доказана в [101].

Теорема 4.2.1. *Рассмотрим фреймы Парсеваля периодических и нестационарных всплесков $\Psi^P = \{\varphi_0^P,\, \psi_{j,k}^P\}_{j \in \mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$, $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N\}_{j \in \mathbb{Z}_+,\, k \in \mathbb{Z}}$*

и пусть

$$\psi_j^P(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_j^N(x-n).$$

Если существуют функции f, $f_1 \in L_2(\mathbb{R})$, *такие что* $|2^{-j/2}\psi_j^N(2^{-j}x)| \le f(x)$, $|(2^{-j/2}\psi_j^N(2^{-j}x))'(x)| \le f_1(x)$ *и* $f \in AC_{loc}(\mathbb{R})$, $f(x) = O(|x|^{-3/2-\varepsilon})$, $f_1(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ *при* $x \to \infty$, $\varepsilon > 0$, *тогда*

$$\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N).$$

Мы не приводим доказательство теоремы, так как можно проверить напрямую, что все шаги доказательства теоремы 3 [101] выполняются для нестационарного случай при предположениях теоремы 4.2.1.

Теорему 4.2.1 сложно применять. Отправной точкой является система периодических всплесков, в то время как главное условие (существование мажорант f, f_1) касается построенной нестационарной системы. Следующая терема избавлена от этого недостатка и дает достаточные условия для согласования локализованностей в терминах периодических масок.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $\Psi^P = \{\varphi_0^P,\, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k=0,\dots,2^j-1}$ *– фрейм Парсеваля периодических всплесков,* $(\mu_k^j)_k = (2^{1/2}\nu_k^j)_k$ *– масштабирующие маски. Пусть* $(\nu_k^j)_k$ *удовлетворяют условиям леммы 4.1.1. Обозначим* $\theta_k^j := \arccos \nu_k^j$, $\overline{\nu}_k^j := \max\{\nu_k^j,\, \nu_{k+1}^j\}$. *Если*

1. *ряд* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |kb_k^j|$ *равномерно сходится и равномерно ограничен относительно* j *, где* $b_k^j := \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\nu}_k^{j+r}$, *и*
2. $|\theta_{k+1}^j - \theta_k^j| \le C2^{-j}$, *где* C *– абсолютная константа,*

то система $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\, k\in\mathbb{Z}}$ *с масштабирующими масками* $m_j^1(\xi)$, *определенными в лемме 4.1.1 при* $K = 1$, *образует фрейм Парсеваля нестационарных всплесков, и* $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^P) = \lim_{j\to\infty} UC_H(\psi_j^N)$.

Доказательство. В доказательстве C обозначает различные постоянные, появляющиеся в оценках. Проверим, что все условия теоремы 4.2.1 выполнены.

Прежде всего, бесконечные произведения $a_k^j = \prod_{r=1}^{\infty} \underline{\nu}_k^{j+r}$ и $b_k^j = \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\nu}_k^{j+r}$ сходятся для любого $j \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}$, где $\underline{\nu}_k^j := \min\{\nu_k^j,\, \nu_{k+1}^j\}$. Бесконечные произведения считаются сходящимися, даже когда они равны нулю. Действительно, из (3.4) и определения $\overline{\nu}_k^j$ следует, что $1 \geq \overline{\nu}_k^j \geq \nu_k^j \geq 0$. Поэтому $\left|\log \overline{\nu}_k^j\right| \leq \left|\log \nu_k^j\right|$, и известно, что ряд $\sum_{r=1}^{\infty} \log \nu_k^j$ абсолютно сходится или равен $-\infty$. Так что ряд $\sum_{r=1}^{\infty} \log \overline{\nu}_k^j$ также абсолютно сходится или равен $-\infty$, поэтому произведение $\prod_{r=1}^{\infty} \overline{\nu}_k^{j+r}$ абсолютно сходится. Для бесконечного произведения $a_k^j = \prod_{r=1}^{\infty} \underline{\nu}_k^{j+r}$ заметим, что так как произведение $\prod_{r=1}^{\infty} \nu_k^{j+r}$ абсолютно сходится, то ряд $\sum_{r=1}^{\infty} (\nu_k^{j+r} - 1)$ имеет то же свойство. Следовательно, используя 2., получим

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\underline{\nu}_k^{j+r} - 1| = \sum_{r=1}^{\infty} (1 - \underline{\nu}_k^{j+r}) = \sum_{r=1}^{\infty} (1 - \nu_k^{j+r}) + \sum_{r=1}^{\infty} (\nu_k^{j+r} - \underline{\nu}_k^{j+r})$$

$$\leq \sum_{r=1}^{\infty} (1 - \nu_k^{j+r}) + C \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j+r}},$$

поэтому ряд $\sum_{r=1}^{\infty} (\underline{\nu}_k^{j+r} - 1)$, а, значит, и произведение $\prod_{r=1}^{\infty} \underline{\nu}_k^{j+r}$ абсолютно сходятся.

Следующий шаг состоит в проверке равномерной ограниченности на любом интервале $[a,\, b] \in \mathbb{R}$ бесконечного произведения $\prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}^1(\xi/2^r) = \widehat{\varphi_j}(\xi)$ и факта $\varphi_j \in L_2(\mathbb{R})$, где вспомогательная маска m_j^1 определена в лемме 4.1.1. Лемма 4.1.3 здесь помочь не может, так как она работает при $K \geq 2$, а мы рассматриваем случай $K = 1$. Проверим указанные свойства напрямую. Маска m_j^1 может быть переписана в виде $m_j^1(\xi) = \cos(z_j^1(\xi))$. Функция z_j^1 кусочно-линейная, $z_j^1(\xi) = 2^j(\theta_{k+1}^j - \theta_k^j)(\xi - 2\pi k 2^{-j}) + \theta_k^j$, $\xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]$. поэтому, $z_j^1(\xi)$ лежит между θ_k^j и θ_{k+1}^j при $\xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]$. Поэтому $\underline{\nu}_k^j \leq m_j^1(\xi) \leq \overline{\nu}_k^j$ и

$$a_k^j \leq \widehat{\varphi_j}(\xi) := \prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}^1(\xi/2^r) \leq b_k^j \text{ при } \xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]. \tag{4.7}$$

Так что произведение $\prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}^1(\xi/2^r)$ везде конечно. Используя $0 \leq$

$m_j^1(\xi) \le 1$, получим

$$\left|\prod_{r=1}^{n} m_{j+r}^1(\xi/2^r) - \widehat{\varphi_j}(\xi)\right| \le 1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} m_{j+r}^1(\xi/2^r) \le 1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} \underline{\nu}_k^{j+r} \to 0$$

при $n \to \infty$. Поскольку отрезок $[a,\,b]$ покрывается конечным числом отрезков $[2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]$, то сходимость равномерная на $[a,\,b]$. Неравенство $0 \le \widehat{\varphi_j}(\xi) \le b_k^j$, $\xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]$ и следствие из условия 1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (b_k^j)^2 < \infty$ дают $\widehat{\varphi_j} \in L_2(\mathbb{R})$, таким образом $\varphi_j \in L_2(\mathbb{R})$.

Теперь проверим, что система $\Psi^N = \{\varphi_{0,k}^N,\, \psi_{j,k}^N\}_{j\in\mathbb{Z}_+,\,k\in\mathbb{Z}}$ с масштабирующими масками $m_{0,j}^N(\xi) = 2^{1/2} m_j^1(\xi)$, где вспомогательные маски $m_j^1(\xi)$ определяются в лемме 4.1.1 при $K = 1$, образует фрейм Парсеваля нестационарных всплесков. Это следует из теоремы 4.1.1 и (4.5). Действительно, $\varphi_j \in L_2(\mathbb{R})$ уже проверено, условия (4.2) и (4.3) обеспечены леммой 4.1.1 и заданием $\widehat{\varphi_j}$ с помощью бесконечного произведения. Условие (4.1) эквивалентно $\widehat{\varphi_j}(\xi 2^{-j}) \to 1$ при $j \to \infty$ для фиксированного $\xi \in \mathbb{R}$. Из сходимости бесконечных произведений $a_k^j = \prod_{r=1}^{\infty} \underline{\nu}_k^{j+r}$ и $b_k^j = \prod_{r=1}^{\infty} \overline{\nu}_k^{j+r}$ следует, что $a_k^j \to 1$ и $b_k^j \to 1$ при $j \to \infty$. Тогда (4.1) следует из неравенства (4.7).

Периодизация нестационарного фрейма Ψ^N совпадает с периодическим фреймом Ψ^P. Этот факт сразу следует из конструкции системы Ψ^N. Из леммы 4.1.1 видим, что $m_j^1(2\pi k 2^{-j}) = \nu_k^j$, тогда теоремы 4.1.1 и 3.1.2 дают $\widehat{\psi}_j^N(2\pi k) = \widehat{\psi}_j^P(k)$.

Переходим к доказательству согласованности локализаций. Прежде всего покажем, что для $\xi \ne 2\pi k 2^{-j}$

$$\widehat{\varphi_j}'(\xi) = \sum_{q=1}^{\infty} g_{j,q}(\xi) \left(m_{j+q}^1(\xi/2^q)\right)', \tag{4.8}$$

где $g_{j,q}(\xi) := \prod_{r=1,r\ne q}^{\infty} m_{j+r}^1(\xi/2^r)$ и

$$\widehat{\varphi_j}''(\xi) = \sum_{t=1}^{\infty} g_{j,t}'(\xi) \left(m_{j+t}^1(\xi/2^t)\right)' + g_{j,t}(\xi) \left(m_{j+t}^1(\xi/2^t)\right)''. \tag{4.9}$$

Для доказательства (4.8) достаточно проверить

$$\sum_{q=1}^{n} \prod_{r=1,r\ne q}^{n} m_{j+r}^1(\xi/2^r) \left(m_{j+q}^1(\xi/2^q)\right)' - \sum_{q=1}^{\infty} g_{j,q}(\xi) \left(m_{j+q}^1(\xi/2^q)\right)' \to 0$$

при $n \to \infty$ равномерно на любом интервале $[a,\, b]$. Последняя разность может быть представлена в виде

$$\left[\sum_{q=1}^{n} \prod_{r=1, r\neq q}^{n} m^1_{j+r}(\xi/2^r) \left(m^1_{j+q}(\xi/2^q)\right)'\right] \left(1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} m^1_{j+r}(\xi/2^r)\right)$$

$$- \sum_{q=n+1}^{\infty} g_{j,q}(\xi) \left(m^1_{j+q}(\xi/2^q)\right)' =: s_1(\xi) - s_2(\xi).$$

Для оценки $s_1(\xi)$ заметим

$$0 \le \prod_{r=1, r\neq q}^{n} m^1_{j+r}(\xi/2^r) \le 1,$$

$$\left(m^1_{j+q}(\xi/2^q)\right)' = -2^j(\theta^{j+q}_{k+1} - \theta^{j+q}_k) \sin(z^1_{j+q}(\xi/2^q)), \tag{4.10}$$

$$0 \le 1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} m^1_{j+r}(\xi/2^r) \le 1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} \underline{\nu}^{j+r}_k.$$

Комбинируя эти оценки с условием 2., получим

$$|s_1(\xi)| \le \sum_{q=1}^{n} 2^j \left|\theta^{j+q}_{k+1} - \theta^{j+q}_k\right| \left(1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} \underline{\nu}^{j+r}_k\right)$$

$$\le C \sum_{q=1}^{n} \frac{2^j}{2^{j+q}} \left(1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} \underline{\nu}^{j+r}_k\right) \le C \left(1 - \prod_{r=n+1}^{\infty} \underline{\nu}^{j+r}_k\right) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для оценки $s_2(\xi)$ последовательно используем $g_{j,q} \le 1$, (4.10) и условие 2.

$$|s_2(\xi)| \le \sum_{q=n+1}^{\infty} 2^j \left|\theta^{j+q}_{k+1} - \theta^{j+q}_k\right| \le C \sum_{q=n+1}^{\infty} \frac{2^j}{2^{j+q}} = \frac{C}{2^n}.$$

Итак, (4.8) доказано. Переходя к доказательству (4.9), заметим, что

$$g'_{j,t}(\xi) = \sum_{q=1}^{\infty} \prod_{r=1, r\neq q, r\neq t}^{n} m^1_{j+r}(\xi/2^r) \left(m^1_{j+q}(\xi/2^q)\right)'.$$

(Это проверяется так же как (4.8).) Так что используя $0 \le m_j^1 \le 1$, (4.10) и условие 2., запишем

$$|g'_{j,t}(\xi)| \le \sum_{q=1}^{\infty} \left| \left(m_{j+q}^1(\xi/2^q)\right)' \right| \le C,$$

следовательно, опять по (4.10) и условию 2.

$$\sum_{t=n+1}^{\infty} \left| g'_{j,t}(\xi) \left(m_{j+t}^1(\xi/2^t)\right)' \right| \le C \sum_{t=n+1}^{\infty} \left| \left(m_{j+t}^1(\xi/2^t)\right)' \right| \le \frac{C^2}{2^n}. \tag{4.11}$$

Аналогично,

$$\sum_{t=n+1}^{\infty} \left| g_{j,t}(\xi) \left(m_{j+t}^1(\xi/2^t)\right)'' \right| \le \sum_{t=n+1}^{\infty} \left| \left(m_{j+t}^1(\xi/2^t)\right)'' \right| \le \frac{C^2}{2^{2n}}.$$

Комбинируя последнюю оценку и (4.11), получим (4.9). Из равномерной сходимости (4.8) и (4.9) следует непрерывность $\widehat{\varphi_j}'$ и $\widehat{\varphi_j}''$ на интервалах $(2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j})$.

Теперь мы готовы найти мажоранты f, $f_1 \in L_2(\mathbb{R})$, такие что $|\psi_j(x)| \le f(x)$, $|\psi'_j(x)| \le f_1(x)$, $f(x) = O(|x|^{-2})$, $f_1(x) = O(|x|^{-2})$ при $|x| \to \infty$, где $\psi_j(x) = 2^{-j/2}\psi_j^N(2^{-j}x)$ – вспомогательные всплеск-функции, определенные на стр. 121. Сначала получим мажоранты для масштабирующих функций φ_j. Используя условие 1. и неравенство $|\widehat{\varphi_j}(\xi)| \le b_k^j$ при $\xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]$, получим $\widehat{\varphi_j} \in L_1(\mathbb{R})$, $\xi\widehat{\varphi_j}(\xi) \in L_1(\mathbb{R})$. Произведение $\prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}^1(\xi/2^r)$ равномерно сходится на $[a,\, b]$, следовательно, функция $\widehat{\varphi_j}$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Таким образом,

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_j}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i x}\widehat{\varphi_j}(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{4.12}$$

$$-\frac{1}{2\pi(ix)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi_j}'(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{\xi=\frac{2\pi k}{2^j}+0}^{\xi=\frac{2\pi(k+1)}{2^j}-0} + \frac{1}{2\pi(ix)^2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_j}''(\xi)e^{i\xi x}\, d\xi$$

и

$$\varphi'_j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\widehat{\varphi_j}(\xi)e^{i\xi x}\, d\xi = \frac{1}{2\pi x}\xi\widehat{\varphi_j}(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{4.13}$$

$$- \frac{1}{2\pi i x^2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\xi\widehat{\varphi_j}(\xi))' \, e^{i\xi x} \Bigg|_{\xi=\frac{2\pi k}{2^j}+0}^{\xi=\frac{2\pi(k+1)}{2^j}-0} + \frac{1}{2\pi i x^2} \int_{\mathbb{R}} (\xi\widehat{\varphi_j}(\xi))'' \, e^{i\xi x} \, d\xi.$$

Обозначим

$$A_1 := \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{\varphi_j}' \left(\frac{2\pi k}{2^j} - 0 \right) - \widehat{\varphi_j}' \left(\frac{2\pi k}{2^j} + 0 \right) \right) e^{i\frac{2\pi k}{2^j} x} \right|,$$

$$A_2 := \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi k}{2^j} \left(\widehat{\varphi_j}' \left(\frac{2\pi k}{2^j} - 0 \right) - \widehat{\varphi_j}' \left(\frac{2\pi k}{2^j} + 0 \right) \right) e^{i\frac{2\pi k}{2^j} x} \right|,$$

$$A_3 := \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_j}'(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi \right|, \quad A_4 := \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_j}''(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi \right|,$$

$$A_5 := \left| \int_{\mathbb{R}} \xi\widehat{\varphi_j}''(\xi) e^{i\xi x} \, d\xi \right|.$$

Докажем, что A_n, $n = 1, \ldots, 5$ равномерно ограничены относительно $j \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$. Сначала оценим $\widehat{\varphi_j}'$ и $\widehat{\varphi_j}''$. Пусть $\xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]$. Вспоминая (4.8), нам достаточно оценить $g_{j,q}(\xi)$ и $(m^1_{j+q}(\xi 2^{-q}))'$. Из $0 \le m^1_j(\xi) \le 1$, определения $\widehat{\varphi_j}$ и (4.7) следует, что

$$0 \le g_{j,q}(\xi) \le \prod_{r=q+1}^{\infty} m^1_{j+r}(\xi/2^r) = \widehat{\varphi_{j+q}}(\xi) \le b_k^{j+q}.$$

А из (4.10) и условия 2.

$$\left|(m^1_{j+q}(\xi 2^{-q}))'\right| \le \left|2^j(\theta^{j+q}_{k+1} - \theta^{j+q}_k)\right| \le \frac{C}{2^q}.$$

Подставляя оценки (4.8) запишем

$$|\widehat{\varphi_j}'(\xi)| \le C \sum_{q=1}^{\infty} b_k^{j+q} \frac{1}{2^q} \text{ для } \xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]. \tag{4.14}$$

Теперь оценим $\widehat{\varphi_j}''$. Начинаем с (4.9) и оцениваем $g'_{j,t}(\xi)$ и $(m^1_{j+t}(\xi 2^{-t}))''$. Аналогично (4.14) получаем

$$|g'_{j,t}(\xi)| \le \sum_{q=1}^{\infty} \prod_{r=1, r\ne q, r\ne t}^{n} m^1_{j+r}(\xi/2^r) \left|\left(m^1_{j+q}(\xi/2^q)\right)'\right| \le C \sum_{q=1}^{\infty} b_k^{j+q+t} \frac{1}{2^q}.$$

Из (4.10) и условия 2. следует

$$\left|(m^1_{j+t}(\xi 2^{-q}))''\right| \le \left|2^j(\theta^{j+t}_{k+1} - \theta^{j+t}_k)\right|^2 \le \frac{C^2}{2^{2t}}.$$

Собирая все неравенства и подставляя их в (4.9), получаем

$$\left|\widehat{\varphi_j}''(\xi)\right| \le C^2 \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} b_k^{j+q+t}\frac{1}{2^{q+t}} + C^2\sum_{t=1}^{\infty} b_k^{j+t}\frac{1}{2^{2t}} \tag{4.15}$$

при $\xi \in [2\pi k 2^{-j},\, 2\pi(k+1)2^{-j}]$.

Теперь вернемся к доказательству ограниченности A_n, $n = 1, \ldots, 5$.

Из (4.14) следует, что

$$A_1 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\varphi_j}'\left(\frac{2\pi k}{2^j} - 0\right) - \widehat{\varphi_j}'\left(\frac{2\pi k}{2^j} + 0\right)\right| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{t=1}^{\infty} b_k^{j+t} 2^j \frac{2C}{2^{j+t}}.$$

Поскольку $\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^j \le b_0^j + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| b_k^j \le 1 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| b_k^j$, благодаря условию 1. можно изменить порядок суммирования, таким образом,

$$A_1 \le 2C \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{j+t}\frac{1}{2^t} \le 2C^2 \sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{2^t} \le 2C^2.$$

Аналогично для A_2 получим

$$A_2 \le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{t=1}^{\infty} |k| b_k^{j+t}\frac{2C}{2^{j+t}} \le \frac{2C^2}{2^j}.$$

Пусть $v = 0$ или $v = 1$. Опять используя (4.14), получим

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^v \left|\widehat{\varphi_j}'(\xi)\right| d\xi \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k 2^{-j}}^{2\pi(k+1)2^{-j}} |\xi|^v \left|\widehat{\varphi_j}'(\xi)\right| d\xi$$

$$\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k 2^{-j}}^{2\pi(k+1)2^{-j}} |\xi|^v \sum_{q=1}^{\infty} b_k^{j+q}\frac{1}{2^q}\, d\xi = C\frac{1}{2^j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(|k|+1)^v \sum_{q=1}^{\infty} b_k^{j+q}\frac{1}{2^q} \tag{4.16}$$

$$= C\frac{1}{2^j}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(|k|+1)^v b_k^{j+q}\frac{1}{2^q} \le \frac{C^2}{2^j}.$$

Следовательно,

$$A_3 \le \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi_j}'(\xi)\right| d\xi \le \frac{C^2}{2^j}.$$

По (4.15) и условию 1.

$$A_4 \le \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{\varphi_j}''(\xi)\right| \, d\xi \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k 2^{-j}}^{2\pi(k+1)2^{-j}} \left|\widehat{\varphi_j}''(\xi)\right| \, d\xi$$

$$\le C^2 \frac{1}{2^j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_k^{j+q+t} \frac{1}{2^{q+t}} + \sum_{t=1}^{\infty} b_k^{j+t} \frac{1}{2^{2t}} \right)$$

$$= C^2 \frac{1}{2^j} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{j+q+t} \frac{1}{2^{q+t}} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k^{j+t} \frac{1}{2^{2t}} \right) \le \frac{4C^3}{3} \frac{1}{2^j},$$

$$A_5 \le \int_{\mathbb{R}} \left|\xi\widehat{\varphi_j}''(\xi)\right| \, d\xi \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k 2^{-j}}^{2\pi(k+1)2^{-j}} \left|\xi\widehat{\varphi_j}''(\xi)\right| \, d\xi$$

$$\le \frac{C^2}{2^j} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (|k|+1) \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_k^{j+q+t} \frac{1}{2^{q+t}} + \sum_{t=1}^{\infty} b_k^{j+t} \frac{1}{2^{2t}} \right)$$

$$= C^2 \frac{1}{2^j} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (|k|+1) b_k^{j+q+t} \frac{1}{2^{q+t}} + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (|k|+1) b_k^{j+t} \frac{1}{2^{2t}} \right) \le \frac{8C^3}{3} \frac{1}{2^j}.$$

Во всех приведенных выше оценках изменение порядка суммирования оправдано условием 1. Так что, все выражения A_n, $n = 1, \dots, 5$ ограничены. Кроме того, так как $\widehat{\varphi_j}$, $\widehat{\varphi_j}' \in L_1(\mathbb{R})$, и $\xi\widehat{\varphi_j}(\xi)$ $(\xi\widehat{\varphi_j}(\xi))' \in L_1(\mathbb{R})$ (последнее проверено в (4.16)), то $\widehat{\varphi_j}(\xi) \to 0$ и $\xi\widehat{\varphi_j}(\xi) \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Следовательно,

$$\frac{1}{x}\widehat{\varphi_j}(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \quad \frac{1}{x}\xi\widehat{\varphi_j}(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Таким образом, подставляя последние неравенства в (4.12), (4.13) и принимая во внимание ограниченность выражений A_n, $n = 1, \dots, 5$ получаем

$$\varphi_j(x) \le C|x|^{-2}, \quad \varphi_j'(x) \le C|x|^{-2}.$$

С другой стороны, $\varphi_j(x), \varphi_j'(x)$ ограничены абсолютной константой. Действительно, пусть $v = 0$ или $v = 1$. Из (4.7) и условия 1. следует, что

$$|\varphi_j^{(v)}(x)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\xi^v \widehat{\varphi_j}(\xi)| \, d\xi \le \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi k 2^{-j}}^{2\pi(k+1)2^{-j}} |\xi^v \widehat{\varphi_j}(\xi)| \, d\xi$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\big(2\pi(|k|+1)\big)^v}{2^j} b_k^j \leq C.$$

Итак, для функций φ_j и φ_j' подобраны мажоранты вида

$$\begin{cases} C, & |x| \leq 1; \\ C/|x|^2, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Мажоранты для вспомогательных всплеск-функций ψ_j и их производных ψ_j' находятся аналогично. Для этого начинаем с равенств

$$\psi_j(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_j(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i x}\widehat{\psi}_j(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\frac{1}{2\pi(ix)^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j{}'(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{\xi=\frac{2\pi k}{2^j}+0}^{\xi=\frac{2\pi(k+1)}{2^j}-0} + \frac{1}{2\pi(ix)^2}\int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_j{}''(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

и

$$\psi_j'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} i\xi\widehat{\psi}_j(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi = \frac{1}{2\pi x}\xi\widehat{\psi}_j(\xi)e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\frac{1}{2\pi i x^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\xi\widehat{\psi}_j(\xi)\Big)' e^{i\xi x}\Big|_{\xi=\frac{2\pi k}{2^j}+0}^{\xi=\frac{2\pi(k+1)}{2^j}-0} + \frac{1}{2\pi i x^2}\int_{\mathbb{R}} \Big(\xi\widehat{\psi}_j(\xi)\Big)'' e^{i\xi x}\,d\xi.$$

И используя определение вспомогательной всплесковой последовательности

$$\widehat{\psi}_j(\xi) = e^{i\xi/2}\overline{m_{j+1}^1(\xi/2+\pi)}\,\widehat{\varphi_{j+1}}(\xi/2)$$

и ограниченность функций $m_{j+1}^1(\xi/2+\pi)$, $(m_{j+1}^1(\xi/2+\pi))'$ и $(m_{j+1}^1(\xi/2+\pi))''$ мы сводим вопрос к случаю масштабирующей функции. $\diamondsuit$

Несколько заключительных замечаний. Условие 2. теоремы 4.2.2 означает ограниченность первой разделенной разности $2^j(\theta_{k+1}^j - \theta_k^j)$ для точек $(k2^{-j},\, \theta_k^j)$, $k \in \mathbb{Z}$.

К сожалению, теорема 4.2.2 не применима к системе периодических всплесков, построенной в главе 3: не выполняется условие 2., при $k = 2\pi 2^{j-2}$ получаем $|\theta_{k+1}^j - \theta_k^j| \geq 1/\sqrt{2} - \varepsilon_j$, где $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$. Из последнего неравенства следует, что для любой масштабирующей маски m_j^N, соответствующей фрейму периодических всплесков из главы 3, существует точка $\overline{\xi_j}$, в которой $|(m_j^N)'(\overline{\xi_j})| \geq C2^j$.

Наконец, стоит отметить, что всегда можно построить тривиальный фрейм нестационарных всплесков, начиная с периодического. Возьмем фрейм Парсеваля периодических всплесков $\Psi^P = \{\varphi_0^P, \psi_{j,k}^P\}_{j\in\mathbb{Z}_+, k=0,\ldots,2^j-1}$, и пусть $\mu_k^j = 2^{1/2}\nu_k^j$ – масштабирующая маска этого фрейма. Зададим нестационарную масштабирующую маску как кусочно-постоянную функцию

$$m_j^N(\xi) = 2^{1/2} m_j(\xi) = \mu_k^j, \quad \xi \in [2\pi k/2^k,\, 2\pi(k+1)/2^j).$$

Тогда нестационарная масштабирующая функция будет иметь вид

$$\widehat{\varphi_j^N}(\xi) = 2^{-j/2}\prod_{r=1}^{\infty} m_{j+r}(\xi/2^{j+r}) = \widehat{\varphi_j^P}(k), \quad \xi \in [2\pi k/2^k,\, 2\pi(k+1)/2^j).$$

Так как $\|\widehat{\varphi_j^N}\|_2^2 = 2\pi 2^{-j}\|\varphi_j^P\|_2^2$, то $\varphi_j^N \in L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, φ_j^N порождает нестационарную систему. Однако в силу разрывности функции $\widehat{\varphi_j^N}$ функция φ_j^N имеет плохую временную локализованность.

Глава 5

Принцип неопределенности для функций, заданных на группе Кантора

Хорошая частотно-временная локализованность функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ означает, что как сама функция f, так и ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ имеют достаточно быстрое убывание на бесконечности. В предыдущих главах мы уже изучали КН Гейзенберга, она служит количественной характеристикой этого свойства. Принцип неопределенности утверждает, что функция и ее преобразование Фурье не могут быть одновременно сколь угодно точно локализованы для ненулевой функции. В терминах КН это означает, что существует абсолютная нижняя граница для КН.

Существуют обобщения этого понятия на различные алгебраические и топологические структуры. Например, локализованность периодических функций измеряется с помощью КН Брейтербергера [35]. Мы изучали ее в главах 3 и 4. Для некоторых частных случаев локально компактных групп (а именно, евклидовы группы движения, некомпактные полупростые группы Ли, группы Гейзенберга) определения КН предложены в [42, 102]. Обобщение операторного подхода к КН обсуждается в [112]. Эти и многие другие вопросы, связанные с КН, содержатся в обзоре [52]. Но, насколько нам известно, вопрос о количественной характеристике КН для группы Кантора в литературе не обсуждался. В этой главе мы предлагаем определение КН для функций, заданных на группе Кантора, доказываем существование нижней границы для этой КН, вычисляем КН для некоторых классических масштабирующих и всплеск-функций (всплесков Лэнга), численно находим хорошо локализованные фреймы всплесков.

Мы не рассматриваем качественный принцип неопределенности. Один из его вариантов сформулирован для широкого класса групп в [52, стр.224, (7.2)]: если $0 \neq f \in L_2$, то $\operatorname{supp}(f) \operatorname{supp}(\widehat{f}) \geq 1$. Группа Кантора относится к этому классу. И для функции $f_0 = \mathbb{1}_I = Ff_0$, где Ff – преобразование Фурье-Уолша функции f, выполняется экстремальное равенство $\operatorname{supp}(f) \operatorname{supp}(Ff) = 1$. Результаты в этом направлении можно найти в монографиях [65], [63].

5.1 Анализ Уолша

Приведем необходимые факты о группах Виленкина (в частности, о группе Кантора) и анализе Уолша, которые понадобятся нам в главах 5–7. Изложение следует книгам [1, 8, 107]. Элементами группы Виленкина $G = G_p$, $p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, являются последовательности

$$x = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (\dots, 0, 0, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots),$$

где $x_j \in \{0, \dots, p-1\}$ при $j \in \mathbb{Z}$ и существует только конечное количество ненулевых членов x_j с отрицательными индексами j. Обозначим нулевую последовательность $\mathbf{0}$. Если $x \neq \mathbf{0}$, тогда существует единственное $N = N(x)$, такое что $x_N \neq 0$ и $x_j = 0$ для $j < N$. Групповая операция на G обозначается $\oplus$ и определяется как покоординатное сложение по модулю p :

$$(z_j) = (x_j) \oplus (y_j) \iff z_j = x_j + y_j \,(\operatorname{mod} p) \quad \text{при} \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Элемент $\mathbf{0}$ является нейтральным элементом группы G. Обозначаем $\ominus$ операцию, обратную $\oplus$. Если $x \in G$, тогда $\ominus x$ обозначает обратный элемент для x. Группа G_p при $p = 2$ называется группой Кантора. В этом случае обратная операция $\ominus$ совпадает с групповой операцией $\oplus$.

На группе G общеупотребительны две эквивалентные метрики. Метрика d вводится с помощью отображения $\|\cdot\|_G : \ G \to [0, \infty)$, определенного так: $\|\mathbf{0}\|_G := 0$ и $\|x\|_G := 2^{-N(x)}$ и $x \neq \mathbf{0}$. Тогда $d(x, y) := \|x \ominus y\|_G$ для

$x, y \in G$. Метрика d неархимедова, так как выполняется сильное неравенство треугольника $d(x, y) \leq \max\{d(x, z),\, d(y, z)\}$. Другая метрика (архимедова) d_1 определяется так: $d_1(x, y) := \lambda(x \ominus y)$ для $x, y \in G$. Обозначим $I_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in G$, шар радиуса p^{-n} с центром в точке x, т.е.

$$I_n(x) = \{y \in G : d(x, y) < p^{-n}\}.$$

Обозначим $I_j := I_j(\mathbf{0})$ и $I := I_0$. Заметим, что I – подгруппа группы G. Поскольку метрика d неархимедова, любые два шара из G либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом, любая точка шара является его центром. Топологическая группа G с топологией, порожденной метрикой d является локально компактной и вполне несвязной.

Определим отображение $\lambda :\, G \to [0, \infty)$

$$\lambda(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_j p^{-j-1}, \qquad x = (x_j) \in G,$$

взаимно-однозначно переводящее $G \setminus \mathbb{Q}_0$ на $[0,\, \infty)$, где $\mathbb{Q}_0$ состоит из всех элементов x, для которых $x_j = p - 1$ при всех $j > j_0$ для некоторого $j_0 \in \mathbb{Z}$.

Определим аналоги сдвигов и сжатий на группе G. Пусть $D :\ G \to G$, где $(Dx)_k = x_{k+1}$ для $x \in G$. Далее $D^{-1} :\ G \to G$ – обратное отображение, $(D^{-1}x)_k = x_{k-1}$, $D^k = D \circ \cdots \circ D$ (k раз), если $k > 0$, и $D^k = D^{-1} \circ \cdots \circ D^{-1}$ ($-k$ раз), если $k < 0$; D^0 – тождественное отображение. Мы рассматриваем функции, определенные на G со значениями в $\mathbb{C}$. Символом $\mathbb{1}_E$ обозначаем характеристическую функцию множества $E \subset G$. Заметим, что если E – шар, то $\mathbb{1}_E$ непрерывна. Определим функцию $f_{0,h} :\ G \to \mathbb{C}$ так: $f_{0,h}(x) = f(x \oplus \lambda^{-1}(h))$, где $x \in G$, $h \geq 0$. Если дополнительно $j \in \mathbb{Z}$, полагаем

$$f_{j,h}(x) = p^{j/2} f_{0,h}(D^j x), \quad x \in G.$$

Функция f, определенная на G, называется 1-периодической, если $f(x) = f_{0,2^n}(x)$ для всех $x \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим C^P – пространство всех 1-периодических непрерывных функций. Функции, определенные на группе Кантора G_2 со значениями в $\mathbb{C}$, будем иногда называть диадическими.

Так как G – локально компактная группа, то на G определяется мера Хаара dx (см. [67]), положительная, инвариантная относительно сдвига, то есть, $d(x \oplus a) = dx$, нормированная условием $\int_G \mathbb{1}_I(x)\,dx = 1$. Тем самым, определены пространства $L_q(G)$ и $L_q(E)$, где E – измеримое подмножество G. Обозначим L_q^P пространство 1-периодических функций, сужения которых на I принадлежат $L_q(I)$.

Функция

$$\chi_t(x) := \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\sum_{k\in\mathbb{Z}} t_k x_{-k-1}\right), \quad x \in G,$$

является характером на группе G. Двойственная группа Понтрягина G^* для G топологически изоморфна G, где изоморфизм задается формулой $t \to \chi_t$. В дальнейшем мы отождествляем эти группы и пишем G вместо G^*.

Преобразование Фурье–Уолша $f \in L_1(G)$ определяется так:

$$Ff(\xi) := \int\limits_G f(x)\overline{\mathrm{w}(\xi,\, x)}\,dx,$$

где $\mathrm{w}(t,\, x) := \chi_t(x)$, $t, x \in G$. Преобразование Фурье стандартным образом распространяется на $L_2(G)$, и выполняется равенство Планшереля

$$\langle f, g\rangle := \int\limits_G f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int\limits_G Ff(\xi)\overline{Fg(\xi)}\,d\xi = \langle Ff, Fg\rangle, \quad f, g \in L_2(G).$$

Обратное преобразование

$$F(F(f)) = f \tag{5.1}$$

определено для всех $f \in L_2(G)$.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, положим $\mathrm{w}_n(x) := \mathrm{w}(\lambda^{-1}(n), x)$. Функции w_n называются обобщенными функциями Уолша. При $p = 2$ функции w_n называются функциями Уолша. Это непрерывные на G, 1-периодические функции, образующие ортонормированный базис в L_2^P (см [8, §2.8]). Так, любая $f \in L_2^P$ может быть разложена в ряд Фурье–Уолша

$$f \overset{L_2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{w}_k, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

где c_k – k-ый коэффициент Фурье–Уолша функции f:

$$c_k := \int\limits_I f(x)\overline{\mathrm{w}_k(x)}\,dx.$$

Функция f называется полиномом Уолша, если представима в виде ряда Фурье–Уолша с конечным числом ненулевых коэффициентов. Прямое вычисление дает

$$F(f_{j,n})(\xi) = p^{-j/2}\mathrm{w}_n(D^{-j}\xi)Ff(D^{-j}\xi), \quad n \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{Z}. \tag{5.2}$$

Дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона отображает вектор $x = (x_k)_{k=\overline{0,p^n-1}} \in \mathbb{C}^{p^n}$ в вектор $y = (y_k)_{k=\overline{0,p^n-1}} \in \mathbb{C}^{p^n}$ по правилу

$$y_k = p^{-n}\sum_{s=0}^{p^n-1} x_s \mathrm{w}_k(\lambda^{-1}(s/p^n)), \quad 0 \le k \le p^n - 1. \tag{5.3}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$x_k = \sum_{s=0}^{p^n-1} y_s \overline{\mathrm{w}_k(\lambda^{-1}(s/p^n))}, \quad 0 \le k \le p^n - 1. \tag{5.4}$$

Пусть функция f определена на группе Кантора G_2 со значениями в $\mathbb{C}$. Функция

$$f^{[1]}(x) := \lim_{n\to\infty}\sum_{j=-n}^{n} 2^{j-1}(f(x) - f_{0,2^{-j-1}}(x))$$

называется производной Гиббса функции f (см [107, §1.7], [115, §6.3]). Свойства, аналогичные свойствам классической производной:

$$\begin{gathered}(f+g)^{[1]} = f^{[1]} + g^{[1]}, \quad (cf)^{[1]} = cf^{[1]}, \quad F(f^{[1]}) = \lambda Ff \\ \mathrm{w}_n^{[1]} = n\mathrm{w}_n.\end{gathered} \tag{5.5}$$

Однако некоторые свойства классической производной не выполняются для производной Гиббса, например, правило производной сложной функции и производной произведения. Кроме того, дифференцируемость по Гиббсу не является локальным свойством функции. Производные высших порядков определяются рекурсивно $f^{[n+1]} = (f^{[n]})^{[1]}$.

5.2 Диадическая константа неопределенности

Начнем с двух замечаний, касающихся КН Гейзенберга (1.1). Временной центр $c(f)$ является решением минимизационной задачи

$$\min_{\tilde{x}} \int_{\mathbb{R}} (x-\tilde{x})^2 |f(x)|^2\, dx.$$

Следовательно, UC_H^2 принимает вид

$$\frac{1}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \min_{\tilde{x}} \int_{\mathbb{R}} (x-\tilde{x})^2 |f(x)|^2\, dx \quad \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \min_{\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}} (t-\tilde{t})^2 |\widehat{f}(t)|^2\, dt.$$

Смысл знака минус в определении Δ_f – расстояние между x и $c(f)$. Таким образом, UC_H^2 переписывается

$$\frac{1}{\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \min_{\tilde{x}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{dist}^2(x,\, \tilde{x}) |f(x)|^2\, dx \quad \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}} \min_{\tilde{t}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{dist}^2(t,\, \tilde{t}) |\widehat{f}(t)|^2\, dt.$$

Учитывая эти замечания, и используя для измерения расстояния метрику d_1, можно предложить следующее определение КН для функций, заданных на группе Кантора.

Определение 5.2.1. *Пусть $f : G_2 \to \mathbb{C}$, $f \in L_2(G_2)$, тогда функционал*

$$UC_d(f) := V(f)V(Ff), \qquad \text{где}$$

$$V(f) := \frac{1}{\|f\|^2_{L_2(G_2)}} \min_{\tilde{x}} \int_{G_2} (\lambda(x \oplus \tilde{x}))^2 |f(x)|^2\, dx,$$

$$V(Ff) := \frac{1}{\|Ff\|^2_{L_2(G_2)}} \min_{\tilde{t}} \int_{G_2} (\lambda(t \oplus \tilde{t}))^2 |Ff(t)|^2\, dt$$

называется диадической КН функции f.

Замечание 5.2.1. Пусть функция g ограничена, $g(x)$, $xg(x) \in L_2(G_2)$. Обозначим $\gamma(y) := \int_{G_2} (\lambda(x \oplus y))^2 |g(x)|^2\, dx$. Так как $g(x)$, $xg(x) \in L_2(G_2)$ и $\lambda(x \oplus y) < \lambda(x) + \lambda(y)$, то $\gamma(y)$ конечна при $y \in G_2$. Существует точка $y^* \in G_2$, для которой $\min_y \gamma(y) = \gamma(y^*)$. Действительно, ясно, что y^* не может лежать вне множества $\lambda^{-1}[0,\, 2^n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, зависящего от g. Тогда существование точки y^* следует из теоремы Вейерштрасса, так как множество $\lambda^{-1}[0,\, 2^n)$ компактно, а функция γ непрерывна (в силу непрерывности $x \oplus y$).

Рассмотрим в качестве примера характеристические функции двух множеств. Пусть $f_1(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,1/4)}(x)$ и $g_1(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[3/4,\,1)}(x)$. Их преобразования Фурье–Уолша равны $Ff_1 = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,4)}/4$ и $Fg_1 = \mathrm{w}_3\,(\cdot/4)\,\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,4)}/4$. Естественно характеризовать "дисперсию" этих функций с помощью меры их носителей: $\operatorname{diam}\big(\lambda^{-1}[0,\,1/4)\big) := \sup_{x,\,y\in\lambda^{-1}[0,\,1/4)}\lambda(x\oplus y) = 1/4$, $\operatorname{diam}\big(\lambda^{-1}[3/4,\,1)\big) = 1/4$ и $\operatorname{diam}\big(\lambda^{-1}[0,\,4)\big) = 4$. Так что можно ожидать, что эти функции будут иметь одинаковую локализованность. Рассмотрим другую пару функций $f_2(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,3/8)}(x)$ and $g_2(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[3/4,\,9/8)}(x)$. Их преобразования Фурье–Уолша равны $Ff_2 = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,4)}/4 + \mathrm{w}_1\,(\cdot/4)\,\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,8)}/8$ и $Fg_2 = \mathrm{w}_3\,(\cdot/4)\,\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,4)}/4 + \mathrm{w}_1(\cdot)\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,8)}/8$, и $\operatorname{diam}\big(\lambda^{-1}[0,\,3/8)\big) = 1/2$, $\operatorname{diam}\big(\lambda^{-1}[3/4,\,9/8)\big) = 2$ и $\operatorname{diam}\big(\lambda^{-1}[0,\,8)\big) = 8$. Так что первая функция является более локализованной чем вторая. Таблица 5.1 показывает, что значения диадической КН согласованы с этими интуитивными представлениями. В столбцах, названных $\tilde{x}_0(f)$ и $\tilde{t}_0(f)$, записаны множества значений $\tilde{x}$ и $\tilde{t}$, минимизирующих функционалы $\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|f(x)|^2\,dx$ и $\int_{G_2}(\lambda(t\oplus\tilde{t}))^2|Ff(t)|^2\,dt$ соответственно.

Таблица 5.1: Значения диадической КН.

f	$\|f\|^2(=\|Ff\|^2)$	$\tilde{x}_0(f)$	$\tilde{t}_0(f)$	$V(f)$	$V(Ff)$	$UC_d(f)$
f_1	1/4	[0, 1/4)	[0, 4)	1/48	16/3	1/9
g_1	1/4	[3/4, 1)	[0, 4)	1/48	16/3	1/9
f_2	3/8	[0, 1/8)	[0, 2)	3/64	8	3/8
g_2	3/8	[3/4, 7/8)	[0, 4)	71/64	32/3	71/6

Существует операторная интерпретация для КН Гейзенберга и Брейтенбергера. Пусть P и M самосопряженные, симметричные или нормальные операторы, определенные в гильбертовом пространстве. Оператор $[P,\,M]_- := PM - MP$ называется коммутатором операторов P и M, а оператор $[P,\,M]_+ := PM + MP$ называется их антикоммутатором. Следующее неравенство, называемое принципом неопределенности Шрёдингера [108], является простым следствием неравенства Коши

$$\|Mf-\beta f\|^2\|Pf-\alpha f\|^2 \geq \frac{1}{4}\left(|([P,M]_-f,\,f)|^2 + \left|([P,M]_+f,\,f) - 2\alpha\beta\|f\|^2\right|^2\right),$$

где $\beta := (Mf,\,f)/\|f\|^2$, $\alpha := (Pf,\,f)/\|f\|^2$. Оно дает два функционала, используемых в качестве КН: первый является более традиционным, однако некоторые авторы [112] используют и второй

$$UC_{-}(f) := \frac{\|Mf - \beta f\| \|Pf - \alpha f\|}{|([P, M]_{-} f,\, f)|} \geq 1/2, \tag{5.6}$$

$$UC_{+}(f) := \frac{\|Mf - \beta f\| \|Pf - \alpha f\|}{|([P, M]_{+} f,\, f) - 2\alpha\beta\|f\|^2|} \geq 1/2. \tag{5.7}$$

Выбирая в (5.6) операторы $Pf(x) = i\,f'(x)$ и $Mf(x) = x\,f(x)$, получаем КН Гейзенберга, а операторам $Pf(x) = i\,f'(x)$ и $Mf(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x}\,f(x)$ соответствует КН Брейтенбергера. При распространении этого подхода на функции, определенные на группе Кантора, возникают следующие трудности. Если скалярное произведение $(Pf,\, Mf)$ действительнозначно, то $([P,\, M]_{-} f,\, f) = 2i\,\mathrm{Im}(Pf,\, Mf) = 0$. Для КН Гейзенберга число $(Pf,\, Mf)$ чисто мнимое, равное $i\|f\|^2$. Но для естественного выбора операторов для $L_2(G_2)$, а именно $Pf(x) = f^{[1]}(x)$ и $Mf(x) = xf(x)$, выражение $(Pf,\, Mf)$ действительнозначно. Таким образом, в знаменателе (5.6) получится тождественный ноль. Причина заключена в различии между операторами $i\,f'$ и $f^{[1]}$, а точнее между производными от характеров: $(\mathrm{e}^{it})' = i\,\mathrm{e}^{it}$ и $(\mathrm{w}_n(t))^{[1]} = n\mathrm{w}_n(t)$, мнимая единица появляется только в классическом случае. Диадический аналог (5.7) также не дает адекватной характеристики локализованности, поскольку UC_{+} обращается в бесконечность на функции $f_0 := \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,1)}$, $Ff_0 = f_0$, которую естественно считать очень хорошо локализованной, в то же время $UC_d(f_0) = 1/9$. Таким образом, операторный подход в определению КН не работает для группы Кантора.

В следующей теореме доказывается, что UC_d ограничена снизу положительной константой, то есть для UC_d существует принцип неопределенности.

Теорема 5.2.1. *Пусть* $f : G_2 \to \mathbb{C}$, $f \in L_2(G_2)$. *Тогда верно неравенство*

$$UC_d(f) \geq C, \text{ где } C \approx 8.5 \times 10^{-5}.$$

Доказательство. Пусть $f_1(x) := \mathrm{w}(\tilde{t},\, x) f(x \oplus \tilde{x})$, тогда $Ff_1(t) :=$

$\mathrm{w}(t,\,\tilde{x})Ff(t\oplus\tilde{t})$ и напрямую проверяется, что

$$\int_{G_2}(\lambda(t\oplus\tilde{t}))^2|Ff(t)|^2\,dt=\int_{G_2}(\lambda(t))^2|Ff_1(t)|^2\,dt,$$

$$\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|f(x)|^2\,dx=\int_{G_2}(\lambda(x))^2|f_1(x)|^2\,dx. \tag{5.8}$$

Поэтому достаточно доказать

$$\|\lambda(x)g(x)\|\,\|\lambda(t)Fg(t)\|\geq\sqrt{C}\|g\|^2.$$

Это можно сделать используя технику из [102, теорема 1.1, следствия 1.2, 1.3].

1. Пусть E – измеримое подмножество G_2, $|E|$ – мера Хаара E и $0<\theta<1/2$. Тогда

$$\left(\int_E|Ff|^2\right)^{1/2}\leq K_1(\theta)|E|^\theta\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2,$$

где $K_1(\theta)=(2\theta)^{-2\theta}(1-2\theta)^{\theta-1}$. Действительно, пусть $B=\lambda^{-1}[0,\,b)$, $B'=\lambda^{-1}[b,\,\infty)$. Тогда

$$\left(\int_E|Ff|^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_E|Ff\mathbb{1}_B|^2\right)^{1/2}+\left(\int_E|Ff\mathbb{1}_{B'}|^2\right)^{1/2}.$$

Оценим слагаемые с помощью неравенства Коши

$$\begin{aligned}\left(\int_E|Ff\mathbb{1}_B|^2\right)^{1/2}&\leq|E|^{1/2}\sup_E|Ff\mathbb{1}_B|\leq|E|^{1/2}\|f\mathbb{1}_B\|_1\\&\leq|E|^{1/2}\|(\lambda(x))^{-\theta}\mathbb{1}_B(x)\|_2\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2\\&=|E|^{1/2}(1-2\theta)^{-1/2}b^{-\theta+1/2}\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_E|Ff\mathbb{1}_{B'}|^2\right)^{1/2}&\leq\|f\mathbb{1}_B\|_2\leq\sup_{B'}(\lambda(x))^{-\theta}\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2\\&\leq b^{-\theta}\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2.\end{aligned}$$

Так что

$$\left(\int_E|Ff|^2\right)^{1/2}\leq\left(|E|^{1/2}(1-2\theta)^{-1/2}b^{-\theta+1/2}+b^{-\theta}\right)\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2.$$

Чтобы получить требуемое неравенство, осталось минимизировать правую часть относительно b, при этом $b_{\min}=4\theta^2|E|^{-1}(1-2\theta)^{-1}$.

2. Докажем, что

$$\|f\|_2^2 \le 2K_1(\theta)\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2\|(\lambda(t))^\theta Ff(t)\|_2$$

для $0 < \theta < 1/2$. Обозначим $E = \lambda^{-1}[0, r)$, $E' = \lambda^{-1}[r, \infty)$. Тогда, используя первый пункт, получим

$$\|f\|_2^2 = \|Ff\|_2^2 = \int_E |Ff|^2 + \int_{E'} |Ff|^2$$
$$\le K_1^2(\theta) r^{2\theta}\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2^2 + r^{-2\theta}\|(\lambda(t))^\theta Ff(t)\|_2^2.$$

Минимизируя последнее выражение относительно r, получаем необходимое неравенство, при этом

$$r_{\min} = \|(\lambda(t))^\theta Ff(t)\|_2^{1/(4\theta)}(K_1^2(\theta)\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2)^{-1/(4\theta)}.$$

3. Так как функция $g(\alpha) := \left(\|(\lambda(x))^\alpha f(x)\|_2\|f\|_2^{-1}\right)^{1/\alpha}$ возрастает при $\alpha > 0$ ($g'_\alpha > 0$), то

$$\|(\lambda(x))^\alpha f(x)\|_2 \le \|f\|_2^{1-\alpha/\beta}\|(\lambda(x))^\beta f(x)\|_2^{\alpha/\beta}$$

для $0 < \alpha < \beta$.

4. Применяя последнее неравенство при $\alpha = \theta$ к пункту 2, запишем

$$\|f\|_2^2 \le 2K_1(\theta)\|(\lambda(x))^\theta f(x)\|_2\|(\lambda(t))^\theta Ff(t)\|_2$$
$$\le 2K_1(\theta)\|f\|_2^{2-2\theta/\beta}\|(\lambda(x))^\beta f(x)\|_2^{\theta/\beta}\|(\lambda(t))^\beta Ff(t)\|_2^{\theta/\beta},$$

тогда

$$\|f\|_2^2 \le (2K_1(\theta))^{\beta/\theta}\|(\lambda(x))^\beta f(x)\|_2\|(\lambda(t))^\beta Ff(t)\|_2.$$

Поэтому, выбирая $\beta = 1$, имеем

$$\|(\lambda(x))f(x)\|_2\|(\lambda(t))Ff(t)\|_2 \ge C(\theta)\|f\|_2^2, \text{ где } C(\theta) = (2K_1(\theta))^{-1/\theta}.$$

Чтобы получить искомое неравенство, осталось максимизировать $C^2(\theta)$ относительно θ, $\max_\theta C^2(\theta) \approx C^2(0.382) \approx 8.5 \times 10^{-5}$. $\Diamond$

Вычисление UC_d для произвольной функции непросто, так как необходимо решать задачу минимизации для функционалов от диадических функций, и нам не удалось найти литературу, содержащую методы решения подобных задач. Следующая теорема дает способ вычисления UC_d для широкого класса функций, сводя минимизационную задачу к перебору конечного количества (2^n) вариантов. В дальнейшем для упрощения записи используем обозначение $k \oplus n = \lambda(\lambda^{-1}(k) \oplus \lambda^{-1}(n))$ для k, $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 5.2.2. *Пусть*

$$f(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,1)}(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k(x),$$

и ряд равномерно сходится, обозначим

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,1)}(x) \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \mathrm{w}_k(x).$$

Пусть $V(f)$, $V(Ff)$ конечны. Тогда диадическая КН примет вид

$$UC_d(f) \;=\; \lim_{n\to\infty} V(f_n)V(Ff_n), \text{ где}$$

$$V(f_n) = \frac{\min_{k_0=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |b_{k\oplus k_0}|^2((k+1)^3 - k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

$$V(Ff_n) = \frac{\min_{k_1=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |a_{k\oplus k_1}|^2((k+1)^3 - k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

и $b := (b_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$ – обратное дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона вектора $a := (a_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$.

Разобьем доказательство теоремы на доказательства двух лемм

Лемма 5.2.1. *Пусть $f_n(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,\,1)}(x) \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \mathrm{w}_k(x)$. Тогда $UC_d(f_n) = V(f_n)V(Ff_n)$, где*

$$V(f_n) = \frac{\min_{k_0=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |b_{k\oplus k_0}|^2((k+1)^3 - k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

$$V(Ff_n) = \frac{\min_{k_1=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} |a_{k\oplus k_1}|^2((k+1)^3 - k^3)/3}{\sum_{k=0}^{2^n-1} |a_k|^2},$$

и $b := (b_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$ – *обратное дискретное преобразование Виленкина–Крестенсона вектора* $a := (a_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$.

Доказательство. Обозначим $\Delta_{k,n} := \lambda^{-1}[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$, $k = 0,\dots,2^n-1$, $n = 0,1,\dots$, и $\xi_{k,n} := \mathbb{1}_{\Delta_{k,n}}$. Рассмотрим $f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} b_k \xi_{k,n}(x)$ разложение функции f_n по ортогональной системе $\{\xi_{k,n},\colon\ k = 0,\dots,2^n - 1,\ n = 0,1,\dots\}$. Видим, что вектор $a = (a_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$ является дискретным преобразованием Виленкина–Крестенсона (5.3) вектора $b = (b_k)_{k=\overline{0,2^n-1}}$:

$$a_k = \int_{\lambda^{-1}[0,1)} f_n(x)\mathrm{w}_k(x)\,dx = \int_{\lambda^{-1}[0,1)} \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m \xi_{m,n}(x)\mathrm{w}_k(x)\,dx$$

$$= \sum_{m=0}^{2^n-1} b_m \int_{\Delta_{m,n}} \mathrm{w}_k(x)\,dx = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{2^n-1} b_m \mathrm{w}_k(\lambda^{-1}(m2^{-n})).$$

Если $\tilde{x}_n$ минимизирует функционал $\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|f_n(x)|^2\,dx$, тогда $\tilde{x}_n$ не может лежать вне носителя функции f_n. Поэтому $\tilde{x} \in \lambda^{-1}[0,\,1) = \cup_{k=\overline{0,2^n-1}}\Delta_{k,n}$. Для $\tilde{x}\in\Delta_{k_0,n}$ имеем

$$\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|f_n(x)|^2\,dx = \int_{\lambda^{-1}[0,\,1)}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2\left|\sum_{k=0}^{2^n-1} b_k\xi_{k,n}(x)\right|^2\,dx$$

$$= \int_{\lambda^{-1}[0,\,1)}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2\sum_{k=0}^{2^n-1} b_k^2\xi_{k,n}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} b_k^2\int_{\Delta_{k,n}}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2\,dx$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} b_{k\oplus k_0}^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_{\Delta_{k,n}} = \sum_{k=0}^{2^n-1} b_{k\oplus k_0}^2\frac{3k^2+3k+1}{3}.$$

Поэтому, вспоминая определение 5.2.1, получим

$$V(f_n) := \frac{1}{\|f_n\|^2_{L_2(G_2)}}\min_{\tilde{x}}\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|f(x)|^2\,dx$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^{2^n-1}|a_k|^2}\min_{k_0=\overline{0,2^n-1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} b_{k\oplus k_0}^2\frac{3k^2+3k+1}{3}.$$

Найдем преобразование Фурье–Уолша функции f_n

$$Ff_n(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k\int_{\lambda^{-1}[0,\,1)}\mathrm{w}(x,\,t)\mathrm{w}_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[k,\,k+1)}(t). \qquad (5.9)$$

Повторяя вычисления, получим

$$V(Ff_n) := \frac{1}{\|Ff_n\|^2_{L_2(G_2)}} \min_{\tilde t} \int_{G_2} (\lambda(t\oplus \tilde t))^2 |Ff(t)|^2\, dt$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=0}^{2^n-1}|a_k|^2} \min_{k_1=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} a^2_{k\oplus k_1} \frac{3k^2+3k+1}{3}.$$

$\diamondsuit$

А. В. Кривошеиным в [73] доказана следующая

Лемма 5.2.2. *Пусть* $f(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,1)}(x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k(x)$, *и ряд равномерно сходится, обозначим* $f_n(x) = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,1)}(x)\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \mathrm{w}_k(x)$. *Пусть* $V(f)$, $V(Ff)$ *конечны. Тогда*

$$UC_d(f) = \lim_{n\to\infty} UC_d(f_n).$$

Теорему 5.2.2 можно распространить на функции вида

$$g(x) := \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,2^N)}(x)\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k(x/2^N).$$

Рассмотрим частичные суммы $g_n(x) := \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,2^N)}(x)\sum_{k=0}^{2^n-1} a_k \mathrm{w}_k(x/2^N)$ функции g, обозначим $f_n(x) = g_n(2^N x)$. Прямые вычисления дают

$$\|g_n\|_2^2 = 2^N\|f_n\|_2^2, \quad \|Fg_n\|_2^2 = 2^N\|Ff_n\|_2^2,$$

$$\int_{G_2} (\lambda(x\oplus\tilde x))^2|g_n(x)|^2\,dx = 2^{3N}\int_{G_2}(\lambda(x\oplus(\tilde x 2^{-N})))^2|f_n(x)|^2\,dx,$$

$$\int_{G_2} (\lambda(t\oplus\tilde t))^2|Fg_n(t)|^2\,dt = 2^{-N}\int_{G_2}(\lambda(t\oplus(\tilde t 2^{N})))^2|Ff_n(t)|^2\,dt,$$

откуда следует, что $UC_d(g_n) = UC_d(f_n)$. Этот класс функций достаточно обширен и важен, так как любая масштабирующая и всплеск-функция с компактным носителем, порождающая ортонормированный базис всплесков в $L_2(G_2)$, принадлежит этому классу (см. [21, раздел 5]).

Обозначим $q_k := k^2+k+1/3$ и возьмем вектор $a\in\mathbb{C}^{2^n}$, $\|a\|=1$, тогда $\|b\|=2^n$ и

$$UC_d(f_n) = \min_{k_1=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} a^2_{k\oplus k_1} q_k \min_{k_0=\overline{0,2^n-1}} \sum_{k=0}^{2^n-1} b^2_{k\oplus k_0} q_k.$$

Из (5.8) следует, что задача минимизации

$$\begin{cases} UC_d(f_n) \to \min \\ \|a\| = 1 \end{cases} \tag{5.10}$$

эквивалентна следующей задаче

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k^2 q_k \ \sum_{k=0}^{2^n-1} b_k^2 q_k \to \min \\ \|a\| = 1 \end{cases}$$

С помощью Wolfram Mathematica 8.0 мы численно решили эту задачу для $n = 2; 3; 4; 5; 6$. Результат содержится в таблице 5.2.

Таблица 5.2: $UC_d(f_n)$

n	2	3	4	5	6
$\min_{f_n} UC_d(f_n)$	0.0891	0.0882	0.0873	0.0873	0.0872

5.3 Локализованность диадических всплеск-функций

5.3.1 Масштабирующие и всплеск-функции Лэнга

Чтобы проверить в действии и проиллюстрировать определение диадической КН, мы используем исторически первый пример ортогональной всплеск-функции на группе Кантора [74], всплеск Лэнга. Его масштабирующая функция и ее преобразование Фурье имеют вид

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,1)}\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j \mathrm{w}_{2^{j+1}-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

$$F\varphi_a = \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,1/2)} + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[2^j-1/2,\,2^j)},$$

где $0 < a \leq 1$, $a^2 + b^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Соответствующая всплеск-функция

$$\psi_a(x) = 2a_0\varphi_a(2x \oplus 1) - 2a_1\varphi_a(2x) + 2a_2\varphi_a(2x \oplus 3) - 2a_3\varphi_a(2x \oplus 2),$$

где $a_0 = (1+a+b)/4$, $a_1 = (1+a-b)/4$, $a_2 = (1-a-b)/4$, $a_3 = (1-a+b)/4$. Система $\{\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{R}_+}$ образует ортонормированный базис в $L_2(G_2)$.

Интегралы, входящие в определение UC_d, для масштабирующих и всплеск-функций имеют вид

$$\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|\varphi_a(x)|^2\,dx=\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\mathrm{w}_1\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)(-4a+a\,b\,\mathrm{w}_1(\tilde{x}))$$
$$-\frac{a^2b}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2}{2}\right)^j\mathrm{w}_{2^j}(\tilde{x})+\frac{a^2b^2}{16}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2}{4}\right)^j\mathrm{w}_{2^j+2^{j+1}}(\tilde{x}),$$

$$\int_{G_2}(\lambda(t\oplus\tilde{t}))^2|F\varphi_a(t)|^2\,dt=A(0,\,\tilde{t})+a^2\sum_{j=0}^{\infty}b^{2j}A(2^j-1/2,\,\tilde{t}),$$

$$\int_{G_2}(\lambda(x\oplus\tilde{x}))^2|\psi_a(x)|^2\,dx=\frac{4}{3}-a\mathrm{w}_1\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)-\frac{ab}{4}\mathrm{w}_1\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)\mathrm{w}_1(\tilde{x})$$
$$-\frac{a^2b}{2}\left(-\mathrm{w}_1(\tilde{x})+\frac{b}{8}\mathrm{w}_3(\tilde{x})\right)+a^2\left(\frac{1}{4}+\frac{a^2}{4}\right)\left(-b\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2}{2}\right)^j\mathrm{w}_{2^{j+1}}(\tilde{x})\right.$$
$$\left.+\frac{b^2}{16}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2}{4}\right)^j\mathrm{w}_{2^{j+1}+2^{j+2}}(\tilde{x})\right)+\frac{a^3}{4}\mathrm{w}_1\left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)b\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{b^2}{2}\right)^j\mathrm{w}_{2^{j+1}}(\tilde{x});$$

$$\int_{G_2}(\lambda(t\oplus\tilde{t}))^2|F\psi_a(t)|^2\,dt$$
$$=b^2A(1/2,\,\tilde{t})+a^2\sum_{j=0}^{\infty}b^{2j}A(2^j-1,\,\tilde{t})+a^4\sum_{j=1}^{\infty}b^{2j}A(2^j-1/2,\,\tilde{t}),$$

где

$$A(\xi,\,\eta)=\frac{1}{3}((\inf\{\lambda^{-1}([\xi,\,\xi+1/2)\oplus\eta)\})+1/2)^3-\frac{1}{3}(\inf\{\lambda^{-1}([\xi,\,\xi+1/2)\oplus\eta)\})^3.$$

Оказывается, что

$$UC_d(\varphi_a),\,UC_d(\psi_a)<\infty\Leftrightarrow\sqrt{3}/2<a\le 1.$$

Интересно отметить, что при тех же значениях параметра a (и только при них) всплеск Лэнга является липшецевой функцией [76]. Значения диадической КН для некоторых a приведены в таблицах 5.3 и 5.4. Наилучшей локализацией обладает масштабирующая функция Хаара. Ей соответствует значение $a=1$.

Таблица 5.3: Значения UC_d для φ_a.

a	$V(\varphi_a)$	$\tilde{x}_0(\varphi_a)$	$V(F\varphi_a)$	$\tilde{t}_0(\varphi_a)$	$UC_d(\varphi_a)$
0.9	0.346	0	1.29	$\lambda^{-1}[1/2,\,1)$	0.446
0.95	0.315	0	0.482	$\lambda^{-1}[1/2,\,1)$	0.152
1	1/3	$\lambda^{-1}[0,\,1)$	1/3	$\lambda^{-1}[0,\,1)$	1/9

Таблица 5.4: Значения UC_d для ψ_a.

a	$\Delta^2_d(\psi_a)$	$\tilde{x}_0(\psi_a)$	$\Delta^2_d(F\psi_a)$	$\tilde{t}_0(\varphi_a)$	$UC^2_d(\psi_a)$
0.9	0.280	0.5	7.438	$\lambda^{-1}[3/2,\,2)$	2.083
0.95	0.254	0.5	1.546	$\lambda^{-1}[3/2,\,2)$	0.393
1	1/3	$\lambda^{-1}[0,\,1)$	1/3	$\lambda^{-1}[0,\,1)$	1/9

5.3.2 Хорошо локализованные диадические фреймы всплесков

1. Рассмотрим функции, порождающие фреймы Парсеваля диадических всплесков [48, пример 3.2]

$$g_{l,s}(x) = 2^{-s}\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[0,2^s)}\mathrm{w}_l(2^{-s}x),$$

   где $l \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Преобразование Фурье–Уолша функции $g_{l,s}$ имеет вид $Fg_{l,s} = \mathbb{1}_{U_{l,s}}$, где $U_{l,s} = 2^{-s}(l \oplus [0,1))$. Производя несложные вычисления, получаем $UC_d(g_{l,s}) = \frac{1}{9}$, что совпадает со значением диадической КН для всплеск-функции Хаара.

2. Из таблицы 5.2 видно, что численно $\min UC_d(f_n) \simeq 0.0891$ для $n = 2$. Найдем всплеск-функцию вида $\psi = \mathbb{1}_{[0,1)}(x)\sum_{k=0}^{3} a_k \mathrm{w}_k(x)$, порождающую фрейм всплесков, и имеющую наименьшую возможную КН. Из условия фреймовости следует, что должно выполняться равенство $F\psi(\mathbf{0}) = 0$. Поэтому мы полагаем $a_0 = 0$. С помощью Wolfram Mathematica 8.0 численно решаем минимизационную задачу (5.10) и получаем коэффициенты $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0.094206, 0.551564, 0.828796)$ Используя теорему 3.2 из [48], находим границы фрейма $A = 0.313098$, $B = 0.695777$. Значение КН равно 0.091286, что близко к минимальному возможному значению для $n = 2$.

   Те же вычисления проводим для $n = 3$. Всплеск-функция имеет вид $\psi = \mathbb{1}_{[0,1)}(x)\sum_{k=0}^{7} a_k \mathrm{w}_k(x)$. Минимальное значение $UC_d(\psi) =$

0.0882147 достигается на коэффициентах $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) = (0, 0.00133, -0.00915, -0.02217, -0.06757, -0.13844, -0.60166, -0.78339)$. Границы получившегося фрейма $A = 0.004649$, $B = 0.614194$.

Глава 6

Решение дифференциальных уравнений на группе Кантора методами теории всплесков

Диадическая теория всплесков активно развивается в настоящее время. В 1996 году понятие кратномасштабного анализа (КМА) для группы Кантора было введено В. Лэнгом в [74], он также разработал методы для построения ортогональных базисов диадических всплесков. Позже глубокие исследования основ диадической теории всплесков были проведены Ю. А. Фарковым и В. Ю. Протасовым в [21].

Понятие диадической производной было введено Дж. Гиббсом [53] в 1967. В литературе можно найти многочисленные обобщения этого понятия. Их обзор, снабженный подробной библиографией содержится в [54], [115]. Понятие модифицированной производной Гиббса было введено Б. И. Голубовым в [7].

Диадические аналоги классических дифференциальных уравнений в частных производных рассматривались П. Буцером и Г. Вагнером [36]. Они нашли диадический аналог метода Даламбера решения одномерного однородного волнового уравнения $\Phi^{[2]}_{x^2} = \Phi^{[2]}_{t^2}$, где $f^{[2]}$ обозначает производную Гиббса второго порядка. Отметим, что здесь обе переменные x и t являются элементами группы Кантора G. В этой главе мы рассматривает уравнения, в которых переменная x берется из группы G, а время t – действительное число. Уравнения такого типа в ультраметрических пространствах (группа

Кантора к ним относится) могут быть полезны для приложений, в частности, для моделирования сложных систем, например, ультраметрические модели диффузии в биофизике [92], [33], [72], [70].

Мы изучаем уравнения в частных производных, содержащие как классическую, так и дробную модифицированную производную Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (псевдодифференциальный оператор). Необходимость в ее использовании вместо классической производной Гиббса возникает при поиске непериодических решений дифференциальных уравнений. Рассмотрим простое уравнение, например, $f^{[1]} = g$, где g – 1-периодическая функция. Для решения уравнения находим коэффициенты Фурье–Уолша функции $f^{[1]}$, они и позволяют восстановить f. Пусть теперь функция g сужена на множество I (диадический аналог отрезка $[0, 1]$), тогда можно попытаться применить тот же метод, используя преобразование Фурье-Уолша вместо коэффициентов Фурье–Уолша (что и делается в классическом случае), и таким образом восстановить f. Оказывается, что такое решение не имеет компактный носитель и не совпадает на множестве I с периодическим решением. Этого недостатка лишена модифицированная производная Гиббса. А именно, если g – 1-периодическая функция, f – неизвестная функция, тогда периодическое решение уравнения $\mathcal{D}f = g$ совпадает на I с решением уравнения $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$, где $\mathbb{1}_I$ – характеристическая функция множества I. Кроме того, решение уравнения $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$ также имеет носитель I.

В случае классической и модифицированной производной Гиббса мы рассматриваем задачи Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности соответственно. Благодаря тому, что функции Уолша являются собственными функциями дифференциального оператора Гиббса, мы находим все решения волнового уравнения в классе периодических распределений в виде рядов Фурье–Уолша. Аналогично, все функции системы Хаара оказываются собственными функциями модифицированного дифференциального оператора Гиббса, поэтому все решения уравнения теплопроводности найдены в классе непериодических распределений в виде разложений по базису Хаара. Также мы изучаем, при каких условиях решения обоих уравнений являются регулярными функциями с “хорошими” свойствами (непрерывность, принадлежность пространству L_2).

Кратномасштабная структура базиса Хаара важна для работы метода. Специальный вычислительный метод, развитый в теореме 6.2.1 также играет важную роль. Необходимые сведения о группе Кантора приведены в § 5.1.

6.1 Система Хаара

Напомним определение базиса Хаара пространства $L_2(G_2)$. Масштабирующая функция Хаара определяется так $\varphi = \mathbb{1}_I$. Она является решением следующего масштабирующего уравнения

$$2^{1/2}\varphi(x) = \varphi_{1,0}(x) + \varphi_{1,1}(x), \quad x \in G_2. \tag{6.1}$$

Всплеск-функция Хаара ψ определятся как

$$2^{1/2}\psi(x) := \varphi_{1,0}(x) - \varphi_{1,1}(x), \quad x \in G_2. \tag{6.2}$$

Функции $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, образуют ортонормированный базис (базис Хаара) для пространства $L_2(G_2)$, и любая функция $f \in L_2(G_2)$ может быть представлена в виде

$$f \overset{L_2}{=} \sum_{j,k} a_{j,k}\psi_{j,k}$$

(в дальнейшем, представление Хаара). Функция f называется полиномом Хаара, если конечное число коэффициентов в представлении Хаара отличны от нуля.

Хорошо известно (это следует из определения кратномасштабного анализа), что для функции $f \in L_2(G_2)$ возможно и другое представление:

$$f \overset{L_2}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k\varphi_{0,k} + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}$$

(в дальнейшем, квази-представление Хаара).

Так как $F\varphi = \varphi$, то

$$\operatorname{supp} F(\varphi_{j,k}) \subset I_{-j}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{6.3}$$

$$\operatorname{supp} F(\psi_{j,k}) \subset I_{-j-1} \setminus I_{-j}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.4}$$

Кроме того, из (5.2) следует

$$F(\varphi_{j,k})(\xi) = 2^{-j/2}\mathrm{w}_k(D^{-j}\xi)\mathbb{1}_{I_{-j}}(\xi) \quad F(\psi_{j,k})(\xi) = 2^{-j/2}\mathrm{w}_k(D^{-j}\xi)\mathbb{1}_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}}(\xi). \tag{6.5}$$

Базис Хаара для $L_2(G_2)$ впервые был рассмотрен В. Лэнгом в [74].

6.2 Распределения и функциональные классы на группе Кантора

Мы рассматриваем распределения на группе Кантора G_2, которые являются аналогом распределений в действительном анализе. Этот объект можно определить двумя способами, как это сделано в книгах [7] и [1]. Наше изложение следует второй книге.

Говорят, что функция $\phi: \ G_2 \to \mathbb{C}$ локально постоянна, если для каждого $x \in G_2$ существует шар, содержащий x, такой что ϕ постоянна на этом шаре. Любая локально постоянная функция непрерывна на G_2. Функция ϕ называется равномерно локально постоянной ранга n, если она постоянна на любом шаре радиуса 2^n. Обозначим S класс локально постоянных функций с компактным носителем. Ясно, что любая функция из S равномерно локально постоянна.

Предложение 6.2.1. ([8] §6.2) *Пусть функция $\phi \in L_1(G_2)$ непрерывна. Тогда ϕ локально постоянная ранга n если и только если, носитель $F\phi$ содержится в $I_n(0)$; носитель ϕ содержится в $I_n(0)$ если и только если, $F\phi$ равномерно локально постоянная ранга n.*

Следствие 6.2.1. *Непрерывная функция $\phi \in L_1(G_2)$ принадлежит S если и только если, $F\phi$ принадлежит S.*

Утверждение следствия сразу следует из предложения 6.2.1. Таким образом, S инвариантно относительно преобразования Фурье–Уолша, поэтому естественно считать S аналогом класса Шварца в действительном анализе.

Сходимость в S определяется следующим образом. Говорят, что последовательность $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ сходится к нулю в S, если

1. существует компактное множество $K \subset G_2$, такое что $\operatorname{supp} \phi_k \subset K$ для всех $k \in \mathbb{N}$;
2. существует $n \in \mathbb{Z}$, такой что ϕ_k постоянна на любом шаре радиуса 2^n;
3. ϕ_k равномерно сходится к нулю на K при $k \to \infty$.

Ясно, что пространство S полное.

Пусть S' обозначает двойственное пространство для S, то есть S' состоит из непрерывных линейных функционалов $f: \phi \to \langle f, \phi \rangle$ на S. Элементы S' называются распределениями. Как обычно сходимость в S' определяется как слабая сходимость, то есть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю в S', если

$$\langle f_k, \phi \rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \phi \in S.$$

Полнота S' может быть проверена стандартным способом.

Чтобы интерпретировать распределения как формальные ряды, нам нужно следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 6.2.2. *Если функция ϕ из S, тогда ее квази-представление Хаара конечно, то есть только конечное число ее коэффициентов $\langle \phi, \psi_{jk} \rangle$ и $\langle \phi, \varphi_{0k} \rangle$ отлично от нуля. Обратно, любая функция ϕ с конечным квази-представлением Хаара принадлежит S.*

Доказательство. Если $\phi \in S$, то $\phi \in L_2(G_2)$ и ее преобразование Фурье–Уолша $F\phi$ имеет компактный носитель по следствию 6.2.1. Из теоремы Планшереля и (6.4) следует, что

$$\langle \phi, \psi_{jk} \rangle = \langle F\phi, F(\psi_{jk}) \rangle = 0$$

для достаточно больших j и всех $k \in \mathbb{Z}_+$. С другой стороны, для каждого j существует только конечное число $k \in \mathbb{Z}_+$, таких что $\langle \phi, \psi_{jk} \rangle \neq 0$, так как $\operatorname{supp} \phi$ не пересекается с $\operatorname{supp} \psi_{jk}$ для достаточно больших k. Аналогично, существует только конечное количество $k \in \mathbb{Z}_+$, таких что $\langle \phi, \varphi_{0k} \rangle \neq 0$. Следовательно,

$$\phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle \phi, \varphi_{0k} \rangle \varphi_{0k} + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \langle \phi, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk},$$

где обе суммы конечны, так что первое утверждение доказано. Второе утверждение тривиально, так как каждая функция φ_{0k}, ψ_{jk} принадлежит S по определению. $\Diamond$

Преобразование Фурье–Уолша Ff для $f \in S'$ определяется так:

$$\langle Ff, \phi \rangle = \langle f, F\phi \rangle, \quad \phi \in S.$$

Формула обращения (5.1) верна для любой $\in S'$, потому что она верна для любой функции из S.

Теперь если $f \in S'$, $\phi \in S$, то по предложению 6.2.2,

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle \varphi_{0k}, \phi \rangle \langle f, \varphi_{0k} \rangle + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \langle \psi_{jk}, \phi \rangle \langle f, \psi_{jk} \rangle,$$

где каждая сумма конечна. Следовательно, f можно отождествить с формальным рядом

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k \varphi_{0k} + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} a_{j,k} \psi_{jk}, \quad a_k = \langle f, \varphi_{0k} \rangle, \quad a_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle,$$

который называется квази-представлением Хаара f. Для удобства мы будем писать $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k \varphi_{0k} + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} a_{j,k} \psi_{jk}$ и даже

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k \varphi_{0,k}(x) + \sum_{j,k \in \mathbb{Z}_+} a_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad a_k, a_{j,k} \in \mathbb{C}, \quad x \in G_2. \qquad (6.6)$$

Пространство S имеет достаточный запас функций, чтобы “отличать одну от другой”. Более точно, имеет место следующий аналог леммы Дюбуа–Реймона.

Предложение 6.2.3. *Если функция f локально интегрируема на G_2 и ее квази-представление Хаара равно нулю, то $f = 0$ почти везде на G_2.*

Доказательство. Положим $n \in \mathbb{Z}_+$, $J_n = I_0(\lambda^{-1}(n))$, $g = f\varphi_{0n}$. Поскольку $\operatorname{supp} g \subset J_n$, $f = g$ на J_n, и для каждой функции $\varphi_{0,k}$, $\psi_{j,k}$, $k, j \in \mathbb{Z}_+$, либо ее носитель содержится в J_n, либо она обращается в ноль на J_n, квази-представление Хаара функции g также равно нулю. С другой стороны, (см. [8, раздел 10.3.1]),

$$g \overset{L(J_n)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \langle g, \varphi_{0k}\rangle \varphi_{0,k} + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} \langle g, \psi_{jk}\rangle \psi_{j,k}.$$

Поэтому $f = g = 0$ почти везде на J_n. $\Diamond$

Обозначим $\tilde{S}$ множество всех полиномов Хаара. Любой полином Хаара принадлежит $L_2(G_2)$ и имеет компактный носитель. Поэтому его квази-представление Хаара тоже конечно. Из предложения 6.2.2 следует, что $\tilde{S}$ подпространство S. Обозначим $\tilde{S}'$ пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\tilde{S}$.

Поскольку $\phi \in \tilde{S}$ является конечной линейной комбинацией функций ψ_{jk}, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то для того чтобы определить $f \in \tilde{S}'$ на $\tilde{S}$, достаточно определить $\langle f, \psi_{jk}\rangle$ для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому можно отождествить f с формальным рядом

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}, \quad a_{j,k} = \langle f, \psi_{jk}\rangle,$$

который называется представлением Хаара f. Опять для удобства будем писать

$$f(x) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}(x), \quad a_{j,k} \in \mathbb{C}, \quad x \in G_2. \tag{6.7}$$

Ясно, что если $f \in S'$, то $f\big|_{\tilde{S}}$ принадлежит $\tilde{S}'$. И в следующей теореме доказано, что каждый элемент $\tilde{S}'$ является сужением некоторого $f \in S'$ на $\tilde{S}$, то есть

$$\tilde{S}' = \{f\big|_{\tilde{S}}, f \in S'\}.$$

Теорема 6.2.1. *Если $f \in \tilde{S}'$, то существует однопараметрическое семейство $\{f_c\}_{c\in\mathbb{C}} \subset S'$, такое что $f_c|_{\tilde{S}} = f$ для любого $c \in \mathbb{C}$ и $g|_{\tilde{S}} \neq f$ для любой $g \in S' \setminus \{f_c : c \in \mathbb{C}\}$. Кроме того, если (6.7) – представление Хаара*

f, то квази-представление Хаара f_c дается

$$f_c(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(c)\varphi_{0,k}(x) + \sum_{j,k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}\psi_{j,k}(x),\ \ x\in G_2,$$

где $a_k = a_k(c) = a_k(0) + c$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $c\in\mathbb{C}$, – общее решение системы (6.8).

Доказательство. Для начала нам нужно найти связь между функциями $\psi_{j,k}$, $j<0$, и $\varphi_{0,k}$. Из (6.1) и (6.2) следует, что

$$2^{1/2}\psi_{j-1,k} = \varphi_{j,2k} - \varphi_{j,2k+1}, \quad 2^{1/2}\varphi_{j-1,k} = \varphi_{j,2k} + \varphi_{j,2k+1}.$$

Раскрывая эти рекурсивные формулы, получаем

$$2^{j/2}\psi_{-j,k} = \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} \varphi_{0,2^jk+m} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} \varphi_{0,2^jk+m}, \quad j\in\mathbb{N}, \quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Применяя функцию $f_c\in S'$, имеем

$$2^{j/2}\langle f_c, \psi_{-j,k}\rangle = \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} \langle f_c, \varphi_{0,2^jk+m}\rangle - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} \langle f_c, \varphi_{0,2^jk+m}\rangle, \quad j\in\mathbb{N}, \quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Равенство $f_c|_{\tilde{S}} = f$ эквивалентно $\langle f_c, \psi_{j,k}\rangle = \langle f, \psi_{j,k}\rangle = a_{jk}$, $j\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}_+$. Поэтому чтобы найти f_c, достаточно решить следующую систему уравнений относительно a_l, $l\in\mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} a_{2^jk+m} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} a_{2^jk+m} = 2^{j/2}a_{-j,k}, \quad j\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}_+, \tag{6.8}$$

и положить $\langle f_c, \varphi_{0,l}\rangle = a_l$, $l\in\mathbb{Z}_+$, $\langle f_c, \psi_{j,k}\rangle = a_{jk}$, $j,k\in\mathbb{Z}_+$.

Фиксируем произвольное $c\in\mathbb{C}$ и полагаем $a_0 = c$. Тогда, подставляя $(j,\,k) = (1,\,0)$ в (6.8), получим $2^{1/2}a_{-1,0} = a_0 - a_1$. Так что $a_1 = a_0 - 2^{1/2}a_{-1,0}$. На втором шаге находим коэффициенты a_2, a_3 из (6.8) при $(j,\,k) = (1,\,1)$ и $(j,\,k) = (2,\,0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1/2}a_{-1,1} \\ 2a_{-2,0} - a_0 - a_1 \end{pmatrix}.$$

На J-ом шаге, $J \in \mathbb{N}$, коэффициенты a_k, $k = 0, \dots, 2^{J-1} - 1$, уже известны, и мы находим коэффициенты a_l, $l = 2^{J-1}, \dots, 2^J - 1$, используя (6.8) при $(j,\, k)$, удовлетворяющих

$$2^{J-1} < 2^j(k+1) \le 2^J, \quad j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.9}$$

Количество уравнений, то есть количество всех решений (6.9), равно количеству неизвестных коэффициентов, то есть 2^{J-1}.

Рассмотрим $J+1$-ый шаг, $J \in \mathbb{N}$. Из (6.8) следует, что

$$\sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} a_{2^j k+m+2^{J-1}} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} a_{2^j k+m+2^{J-1}} = 2^{j/2} a_{-j,k+2^{J-1-j}},$$

$$\sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} a_{2^j k+m+2^J} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} a_{2^j k+m+2^J} = 2^{j/2} a_{-j,k+2^{J-j}},$$

где $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $2^{J-1} < 2^j(k+1) \le 2^J$, $1 \le j \le J-1$. Следовательно, на $J+1$-ом шаге, все уравнения, кроме двух, для неизвестных a_{n_1}, $n_1 = 2^J, \dots, 2^J + 2^{J-1} - 1$ и a_{n_2}, $n_2 = 2^J + 2^{J-1}, \dots, 2^{J+1} - 1$ могут быть записаны, используя уравнения предыдущего J-ого шага, написанные для переменных a_r, $r = 2^{J-1}, \dots, 2^J - 1$, где $n_1 = r + 2^{J-1}$ и $n_2 = r + 2^J$. Для этого достаточно заменить правую часть выражения для $2^{j/2} a_{-j,k}$ равенством для $2^{j/2} a_{-j,k+2^{J-1-j}}$ и для $2^{j/2} a_{-j,k+2^{J-j}}$ соответственно. Два оставшихся уравнения $J+1$-ого шага получаются при $(j,\, k) = (J,\, 1)$ и $(j,\, k) = (J+1,\, 0)$ и имеют вид

$$\sum_{m=0}^{2^{J-1}-1} a_{2^J+m} - \sum_{m=2^{J-1}}^{2^J-1} a_{2^J+m} = 2^{J/2} a_{-J,1},$$

$$-\sum_{m=2^J}^{2^{J+1}-1} a_m = 2^{(J+1)/2} a_{-J-1,0} - \sum_{m=0}^{2^J-1} a_m.$$

Обозначим M_J матрицу системы для J-ого шага. Тогда замечание из предыдущего абзаца означает, что матрица M_{J+1} устроена следующим образом. Берем первые $2^{J-1} - 1$ строк матрицы M_J и дополняем их нулями. Следующие $2^{J-1} - 1$ строк начинаются с нулей и продолжаются первыми $2^{J-1} - 1$ строками матрицы M_J. Первые 2^{J-1} элементов следующего ряда равны 1, оставшиеся 2^{J-1} элементов этого ряда равны -1. Наконец, последняя строка состоит из -1. Например,

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы проверить, что определитель $\det M_J$ матрицы M_J не равен нулю, докажем, что $\det M_{J+1} = 2(\det M_J)^2$ для $J > 1$. Действительно, рассмотрим матрицу M_{J+1}. Если мы вычтем предпоследнюю строку из последней, разделим результат на -2 и поместим его между $2^J - 1$-ой и 2^J-ой строкой, то получим матрицу, состоящую из четырех блоков. Блоки, лежащие на главной диагонали, – это матрицы M_J, и один из оставшихся блоков нулевой. Следовательно, определитель этой матрицы равен $(\det M_J)^2$. Поскольку $\det M_1 = -1$, $\det M_2 = -2$, получаем $\det M_J = 2^{2^{J-1}-1}$ для $J > 2$.

Проиллюстрируем вычисления для $J = 2$:

$$\det M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} M_2 & 0 \\ \dots & M_2 \end{vmatrix} = 2(\det M_2)^2.$$

Итак, при каждом фиксированном $c \in \mathbb{C}$ система (6.8) имеет единственное решение a_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, зависящее от c. Обозначим $a_k(0)$ решение, соответствующее $c = 0$, и докажем, что общее решение имеет вид $a_0(c) = c$, $a_k(c) = a_k^0 + c$, $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$. Пусть $b_k := a_k(c) - a_k(0)$. По (6.8) имеем

$$B := \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} b_{2^j k+m} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} b_{2^j k+m} = 0, \quad j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+. \tag{6.10}$$

Докажем по индукции относительно j, что

$$b_{2^j k} = b_{2^j k+1} = \cdots = b_{2^j k+2^j-1} \tag{6.11}$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$. База индукции для $j = 1$ сразу следует из (6.10). Проверим индукционный шаг от $j-1$ к j. Из индукционного предположения следует, что

$$B = \sum_{m=0}^{2^{j-1}-1} b_{2^{j-1}(2k)+m} - \sum_{m=2^{j-1}}^{2^j-1} b_{2^{j-1}(2k+1)+m} = 2^{j-1}(b_{2^{j-1}(2k)} - b_{2^{j-1}(2k+1)}).$$

Это и (6.10) дают $b_{2^{j-1}(2k)} = b_{2^{j-1}(2k+1)}$, что вместе с индукционной гипотезой доказывает (6.11). Следовательно, $b_l = b_0 = c$ для каждого $l \in \mathbb{N}$. Поэтому квази-представление Хаара $f_c - f_0$ имеет вид $\sum_{k=0}^{\infty} c\varphi_{0,k}$, что и требовалось доказать. $\Diamond$

Введем теперь класс периодических распределений. Обозначим P класс 1-периодических локально постоянных функций. Ясно, что любая $\phi \in P$ равномерно локально постоянна. Сходимость в P определяется следующим образом. Говорят, что последовательность $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ сходится к нулю в P, если

1. существует $n \in \mathbb{Z}$, такое что ϕ_k постоянна на любом шаре радиуса 2^n;
2. ϕ_k равномерно стремится к нулю I при $k \to \infty$.

Ясно, что пространство P полное.

Пусть P' обозначает двойственное пространство P, то есть P' состоит из непрерывных линейных функционалов $f:\ \phi \to \langle f, \phi\rangle$ на P. Сходимость в P' определяется как слабая сходимость, то есть последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю в P', если

$$\langle f_k, \phi\rangle \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\ \phi \in P.$$

Полнота P' может быть проверена стандартным путем.

Чтобы интерпретировать эти распределения как формальные ряды, нам нужно следующее утверждение.

Предложение 6.2.4. ([8] §1.4, §2.7) 1-*периодическая функция* ϕ *принадлежит* P *тогда и только тогда, когда она является полиномом Уолша.*

Поскольку по предложению 6.2.4 любая $\phi \in P$ является конечной линейной комбинацией функций w_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, то для того чтобы определить P' на P, достаточно определить $\langle f, \mathrm{w}_k \rangle$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому можно отождествить f с формальным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{w}_k, \quad a_k = \langle f, \mathrm{w}_k \rangle,$$

который называется представлением Уолша распределения f. Для удобства мы используем запись

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathrm{w}_k(x), \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad x \in G_2. \tag{6.12}$$

Наконец, введем операцию дифференцирования для периодических распределений. Если ϕ – полином Уолша, тогда его производная Гиббса $\phi^{[1]}$ тоже является полиномом Уолша, и можно определить производную Гиббса $f \in P'$ так:

$$\langle f^{[k]}, \phi \rangle = \langle f, \phi^{[k]} \rangle, \quad \phi \in P.$$

6.3 Дифференциальные уравнения с производной Гиббса

Рассмотрим задачу Коши для одномерного однородного волнового уравнения, в котором неизвестная функция зависит от переменных (x, t), где $x \in G_2$ и t (время) действительно. Пусть $U = [0, +\infty)$ или $U = [0, T]$. Задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = f^{[2]}_{x^2} f(x,\, t), \\ f(x,\, 0) = f^0(x), \quad f'_t(x,\, 0) = f^1(x), \end{cases} \qquad x \in G_2, \quad t \in U. \tag{6.13}$$

Теорема 6.3.1. *Пусть* f^0, $f^1 \in P'$, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n \mathrm{w}_n$ *и* $\sum_{n=0}^{\infty} q_n \mathrm{w}_n$ – *представления Уолша* f^0 *и* f^1 *соответственно. Тогда*

1. *задача Коши (6.13) имеет единственное решение $f(x,t)$, принадлежащее P' для каждого $t \in U$;*

2. *это решение принадлежит C^P, как только*

$$p_n = O(e^{-n\theta(n)}), \quad q_n = O(e^{-n\theta(n)}), \quad n \to \infty, \tag{6.14}$$

где $\theta(n) \to \infty$ при $n \to \infty$;

3. *это решение принадлежит L_2^P, так только (6.14) выполняется.*

Доказательство. 1. Фиксируем $t \in U$. Пусть $f(\cdot, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\mathrm{w}_n$ – представление Уолша $f(\cdot,t)$. Тогда, принимая во внимание, что по (5.5), $\mathrm{w}_n^{[k]} = n^k \mathrm{w}_n$, можно переписать (6.13) так:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \ddot{c}_n(t)\mathrm{w}_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2 c_n(t)\mathrm{w}_n, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(0)\mathrm{w}_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n\mathrm{w}_n \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dot{c}_n(0)\mathrm{w}_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n\mathrm{w}_n, \end{cases}$$

где $\dot{c}_n$ и $\ddot{c}_n$ обозначают обычные первую и вторую производные c_n по t. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ приходим к задаче Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \ddot{c}_n(t) = n^2 c_n(t), \\ c_n(0) = p_n, \quad \dot{c}_n(0) = q_n. \end{cases}$$

Решением задачи являются функции

$$c_n(t) = p_n \operatorname{ch}(nt) + \frac{q_n}{n} \operatorname{sh}(nt).$$

Итак, коэффициенты в представлении Уолша f найдены.

2. Если (6.14) выполнено, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, что дает $f \in C^P$.

3. Если (6.14) выполнено, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, поэтому $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, что дает $f \in L_2^P$. $\Diamond$

6.4 Модифицированная производная Гиббса

В предыдущем параграфе мы описали метод для нахождения 1-периодических решений линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим этот метод на примере простого уравнения $f^{[1]} = g$, где g – 1-периодическая функция, например, $g = \mathrm{w}_k$. Находим коэффициенты Фурье–Уолша $f^{[1]}$, они равны $F(f^{[1]})(n) = \delta_{n,k}$, и испольуя свойство $F(f^{[1]})(n) = nFf(n)$, находим коэффициенты Фурье–Уолша f, по которым и восстанавливаем функцию f, то есть $f = \mathrm{w}_k/k$.

Повторим эту процедуру для непериодической функции g, применяя преобразование Фурье–Уолша вместо коэффициентов Фурье–Уолша, то есть как обычно находим Ff и затем восстанавливаем f. Пусть $g = \mathrm{w}_k\varphi$, где $\varphi = \mathbb{1}_I$, ищем решение f уравнения $f^{[1]} = g$. Желательно получить решение, носитель которого содержится в I. Поскольку $F(f^{[1]}) = \lambda Ff$, и $F(\mathrm{w}_k\varphi) = \varphi_{0,k}$, получим $Ff = (1/\lambda)\varphi_{0,k}$. Следовательно,

$$f(x) = \int\limits_{G_2} (\lambda(\xi))^{-1}\varphi_{0,k}(\xi)\mathrm{w}(x,\, \xi)\, d\xi.$$

Носитель решения не содержится в I, потому что

$$f(x) = \mathrm{w}_k(x) \int_I (\lambda(\xi \oplus k))^{-1}\mathrm{w}_{[\lambda(x)]}(\xi)\, d\xi,$$

и $f(x) = \mathrm{w}_k(x)\ln((k+1/2)^2k^{-1}(k+1)^{-1})$ для $x \in I_{-1} \setminus I$. Нетрудно проверить, что носитель функции f и вовсе не компактен. Кроме того, $f(x) = \mathrm{w}_k(x)\ln((k+1)/k)$ при $x \in I$, то есть f не совпадает на I с периодическим решением уравнения $f^{[1]} = \mathrm{w}_k$ Однако, если мы немного модифицируем определение производной, ситуация кардинальным образом изменится. Используем оператор $\mathcal{D}$, определенный на подходящем классе функций так:

$$\mathcal{D}f(x) = \int\limits_{G_2} \|\xi\|_{G_2} Ff(\xi)\mathrm{w}(\xi,\, x)\, d\xi$$

вместо производной Гиббса. Фактически мы заменяем метрику $d_1(x,\, 0) = \lambda(x)$ на метрику $d(x,\, 0) = \|x\|_{G_2}$ в определении производной Гиббса. Тогда решение уравнения $Df = \mathrm{w}_k\varphi$ имеет компактный носитель. Оно принимает вид

$$f(x) = \int\limits_{G_2} \|\xi\|_{G_2}^{-1} \varphi_{0,k}(\xi) \mathrm{w}(x,\, \xi)\, d\xi$$

$$= \|\lambda^{-1}(k)\|^{-1} \int\limits_{G_2} \varphi_{0,k}(\xi) \mathrm{w}(x,\, \xi)\, d\xi = \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}^{-1} \mathrm{w}_k(x) \varphi(x).$$

Можно по аналогии ввести и модифицированную производную $\mathcal{D}$ для 1-периодических функций. Действительно, пусть f – 1-периодическая функция, определенная на подходящем классе, $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Ff(k)\mathrm{w}_k$ – ее ряд Фурье–Уолша; тогда

$$\mathcal{D}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2} Ff(k) \mathrm{w}_k.$$

Ясно, что $\mathcal{D}\mathrm{w}_k = \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}\mathrm{w}_k$, то есть функции Уолша являются собственными функциями и оператора $\mathcal{D}$. В отличие от производной Гиббса, если g – 1-периодическая функция, то периодическое решение f уравнения $\mathcal{D}f = g$ совпадает на I с решением уравнения $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$. Действительно, если $\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Fg(k)\mathrm{w}_k$ – ряд Фурье–Уолша g, то уравнение $\mathcal{D}f = g$ переписывается в виде

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2} Ff(k) \mathrm{w}_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Fg(k) \mathrm{w}_k,$$

то есть $Ff(k) = \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}^{-1} Fg(k)$, что дает $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}^{-1} Fg(k)\mathrm{w}_k$. С другой стороны, уравнение $\mathcal{D}f = g\mathbb{1}_I$ можно переписать как $\|\xi\|_{G_2} Ff = F(g\mathbb{1}_I)$, то есть $\|\xi\|_{G_2} Ff = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Fg(k)\varphi_{0,k}$. Следовательно,

$$f(x) = \int\limits_{G_2} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\xi\|_{G_2}^{-1} Fg(k) \varphi_{0,k}(\xi) \mathrm{w}(\xi,\, x)\, d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Fg(k) \int\limits_{G_2} \|\xi\|_{G_2}^{-1} \varphi_{0,k}(\xi) \mathrm{w}(\xi,\, x)\, d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Fg(k) \int\limits_{I} \|\xi \oplus \lambda^{-1}(k)\|_{G_2}^{-1} \mathrm{w}(\xi \oplus \lambda^{-1}(k),\, x)\, d\xi$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Fg(k)\mathrm{w}_k(x)\int\limits_I \|\xi\oplus\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}^{-1}\mathrm{w}(\xi,\,x)\,d\xi.$$

Принимая во внимание, что $\|\xi\oplus\lambda^{-1}(k)\|_{G_2} = \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}$ для $\xi\in I$, окончательно получим

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} Fg(k)\mathrm{w}_k(x)\|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}^{-1}\int\limits_I \mathrm{w}(\xi,\,x)\,d\xi$$

$$= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \|\lambda^{-1}(k)\|_{G_2}^{-1} Fg(k)\mathrm{w}_k(x)\right)\mathbb{1}_I.$$

Рассмотрим дробную модифицированную производную Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$, определенную на $\tilde{S}'$. Этот оператор был введен на $L_1(G_2)$ в [7]. Такого типа операторы часто называют псевдодифференциальными.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 6.4.1. *Пусть $\phi\in S$. Для того чтобы ϕ принадлежала $\tilde{S}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\textit{supp}\,F\phi\cap I_n=\emptyset\quad \textit{для некоторого } n\in\mathbb{Z}. \tag{6.15}$$

Доказательство. Необходимость следует из (6.4). Пусть (6.15) выполняется для $\phi\in S$. Из равенства Планшереля и (6.4) следует, что

$$\langle\phi,\psi_{jk}\rangle = \langle F\phi, F\psi_{jk}\rangle = 0,\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

для достаточно большого $-j$. С другой стороны, в доказательстве предложения 6.2.2 установлено, что $\langle\phi,\psi_{jk}\rangle = 0$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$ и достаточно больших j, и для каждого j существует только конечное число $k\in\mathbb{Z}_+$, таких что $\langle\phi,\psi_{jk}\rangle\neq 0$. Следовательно, ϕ полином Хаара, что и доказывает достаточность. $\Diamond$

Пусть $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathbb{D}^\alpha(x) := \|x\|_{G_2}^\alpha$ для $x\in G_2$, $x\neq\mathbf{0}$, и $\mathbb{D}^\alpha(\mathbf{0}) := 1$. Определим дробную модифицированную производную Гиббса $\mathcal{D}^\alpha$ на $\tilde{S}$ по правилу

$$F(\mathcal{D}^\alpha\phi) = \mathbb{D}^\alpha F\phi,\quad \phi\in\tilde{S}.$$

Из леммы 6.4.1 следует, что $\mathcal{D}^\alpha$ корректно определен и $\mathcal{D}^\alpha : \tilde{S} \to \tilde{S}$. Кроме того, оператор $\mathcal{D}^{-\alpha}$ является обратным для $\mathcal{D}^\alpha$, это означает, что $\mathcal{D}^\alpha$ взаимно однозначно отображает $\tilde{S}$ на $\tilde{S}$. Это позволяет распространить дробную модифицированную производную Гиббса на $\tilde{S}'$. Для $f \in \tilde{S}'$ распределение $\mathcal{D}^\alpha f \in \tilde{S}'$ определяется так

$$\langle \mathcal{D}^\alpha f, \phi\rangle = \langle f, \mathcal{D}^\alpha \phi\rangle, \quad \phi \in \tilde{S}.$$

Замечание 6.4.1. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{D}^0 f = g, \quad g \in \tilde{S}'. \tag{6.16}$$

Поскольку $\mathcal{D}^0$ – тождественный оператор на $\tilde{S}'$, ясно, что существует единственное решение $f = g$ в $\tilde{S}'$. Любая локально интегрируемая функция, в частности непрерывная, принадлежит $\tilde{S}'$. Пусть g – непрерывная функция. В этом случае естественно сказать, что решение f также является непрерывной функцией. Однако по теореме 6.2.1, существует бесконечно много различных непрерывных функций f, удовлетворяющих (6.16). Все эти функции имеют одно и то же представление Хаара, однако их квази-представления Хаара различны. Если же $g \in L_2(G_2)$, то только одна функция $f \in L_2(G_2)$ удовлетворяет (6.16).

Предложение 6.4.1. *Пусть g, Fg, $\mathbb{D}^\alpha Fg$ локально интегрируемы на G_2, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда условие $\operatorname{supp} Fg \subset I_{-j-1} \setminus I_{-j}$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция g была собственной функцией оператора $\mathcal{D}^\alpha$, соответствующей собственному значению $2^{j\alpha}$.*

Доказательство. Поскольку функция g локально интегрируема, она лежит в пространстве $\tilde{S}'$. Пусть $\operatorname{supp} Fg \subset I_{-j-1} \setminus I_{-j}$. Используя равенство Планшереля, для любой $\phi \in \tilde{S}$ получим

$$\langle \mathcal{D}^\alpha g, \phi\rangle = \langle g, \mathcal{D}^\alpha \phi\rangle = \langle Fg, F(\mathcal{D}^\alpha \phi)\rangle = \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} Fg(\xi)\|\xi\|_{G_2}^\alpha F\phi(\xi)\, d\xi$$

$$= 2^{j\alpha} \int\limits_{G_2} Fg(\xi) F\phi(\xi)\, d\xi = 2^{j\alpha}\langle g, \phi\rangle,$$

что доказывает необходимость.

Теперь пусть g собственная функция оператора $\mathcal{D}^\alpha$, соответствующая собственному значению $2^{j_0\alpha}$. Опять с помощью равенства Планшереля получим

$$0 = \langle \mathcal{D}^\alpha g, \phi\rangle - 2^{j_0\alpha}\langle g, \phi\rangle = \int\limits_{G_2} Fg(\xi)(\|\xi\|_{G_2}^\alpha - 2^{j_0\alpha})F\phi(\xi)\, d\xi$$

для любой $\phi \in \tilde{S}$. Следовательно, для $\phi = \psi_{j,k}$ $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, имеем

$$0 = \int\limits_{G_2} Fg(\xi)(\|\xi\|_{G_2}^\alpha - 2^{j_0\alpha})F\psi_{j,k}(\xi)\, d\xi$$

$$= 2^{-j/2}\int\limits_{G_2} Fg(\xi)(\|\xi\|_{G_2}^\alpha - 2^{j_0\alpha})\mathrm{w}_k(D^{-j}\xi)\mathbb{1}_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}}(\xi)\, d\xi$$

$$= 2^{-j/2}(2^{j\alpha} - 2^{j_0\alpha})\int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} Fg(\xi)\mathrm{w}_k(D^{-j}\xi)\, d\xi$$

$$= 2^{j/2}(2^{j\alpha} - 2^{j_0\alpha})\int\limits_{I} Fg(2^j(\eta\oplus 1))\mathrm{w}_k(\eta)\, d\eta.$$

Поскольку Fg локально интегрируема на G_2, функция $h(\eta) = Fg(2^j(\eta\oplus 1))$ интегрируема на I для каждого фиксированного j, и если $j \neq j_0$, то все коэффициенты Фурье–Уолша функции h равны нулю. Поэтому $h = 0$ почти везде на I для $j \neq j_0$ (см. [8, раздел 10.2.1]). Следовательно, $Fg = 0$ почти везде на $I_{-j-1}\setminus I_{-j}$ как только $j \neq j_0$, что доказывает достаточность. $\Diamond$

Замечание 6.4.2. Если $g \in L_2(G_2)$, то необходимость в предложении 6.4.1 выполняется для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, а достаточность имеет место для $\alpha > 0$.

Следствие 6.4.1. *Любая функция Хаара $\psi_{j,k}$ является собственной функцией $\mathcal{D}^\alpha$, соответствующей собственному значению $2^{j\alpha}$.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 6.4.1 и (6.5). $\Diamond$

6.5 Дифференциальные уравнения с модифицированной производной Гиббса

Для иллюстрации метода, описанного в предыдущем параграфе рассмотрим задачу Коши для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности относительно функции, зависящей от переменных (x,t), где $x \in G_2$ и t (время) – действительное число. Пусть $U = [0,\, \infty)$ или $U = [0,\, T]$. Задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \mathcal{D}_x^\alpha f(x,\, t) + g(x,\, t), \\ f(x,\, 0) = f^0(x), \end{cases} \qquad x \in G_2, \quad t \in U. \tag{6.17}$$

Теорема 6.5.1. *Пусть $f^0 \in \tilde{S}'$, $g_t := g(\cdot,\, t) \in \tilde{S}'$ для каждого $t \in U$, и $g(x,\, \cdot)$ непрерывна на U. Тогда*

1. *задача Коши (6.17) имеет единственное решение $f(x,\, t)$, оно принадлежит $\tilde{S}'$ для каждого $t \in U$;*

2. *это решение принадлежит $L_2(G_2)$ для каждого $t \in U$, как только $f^0 \in L_2(G_2)$,*

$$F(f^0)(\xi) = O(e^{-\|\xi\|_{G_2}^\alpha \theta(\log_2 \|\xi\|_{G_2})}), \quad \|\xi\| \to \infty, \tag{6.18}$$

   для каждого $t \in U$ распределение $g_t \in L_2(G_2)$ и

$$F(g_t)(\xi) = O(e^{-\|\xi\|_{G_2}^\alpha \theta(\log_2 \|\xi\|_{G_2})}), \quad \|\xi\| \to \infty, \tag{6.19}$$

   где $\theta(\nu) \to \infty$ при $\nu \to \infty$;

3. *если либо $\alpha > 0$ и условия (6.18), (6.19) выполнены, либо $\alpha < 0$ и для каждого $t \in U$*

$$Ff^0(\xi) = O(\|\xi\|_{G_2}^{-(\varepsilon+1/2)}), \quad F(g_t)(\xi) = O(\|\xi\|_{G_2}^{-(\varepsilon+1/2)}), \quad \|\xi\| \to \infty, \tag{6.20}$$

   где $\varepsilon > 0$, тогда решение непрерывно на G_2 для каждого $t \in U$, все непрерывные решения даются $f_c(x,\, t) = f_0(x,\, t) + c, c \in \mathbb{C}$.

Доказательство. 1. Пусть $f^0 = \sum_{j,k} b_{j,k}\psi_{j,k}$, $g_t = \sum_{j,k} d_{j,k}(t)\psi_{j,k}$ и $f(\cdot,\, t) = \sum_{j,k} a_{j,k}(t)\psi_{j,k}$ – представления Хаара f^0, g_t и $f(\cdot, t)$ соответственно. Используя следствие 6.4.1, перепишем (6.17) в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}_+} \left(\dot{a}_{j,k}(t) - 2^{j\alpha}a_{j,k}(t) - d_{j,k}(t)\right)\psi_{j,k}(x) = 0, \\ \sum\limits_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}_+} a_{j,k}(0)\psi_{j,k}(x) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}k\in\mathbb{Z}_+} b_{j,k}\psi_{j,k}(x), \end{cases}$$

где $\dot{a}_{j,k}$ означает обычную производную $a_{j,k}$ относительно t. Следовательно, для каждого $j \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ получаем задачу Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dot{a}_{j,k}(t) - 2^{j\alpha}a_{j,k}(t) - d_{j,k}(t) = 0, \\ a_{j,k}(0) = b_{j,k}. \end{cases}$$

Решением служит функция

$$a_{j,k}(t) = \int\limits_0^t e^{2^{j\alpha}(t-\tau)}d_{j,k}(\tau)\,d\tau + b_{j,k}e^{2^{j\alpha}t}.$$

Таким образом, коэффициенты в представлении Хаара f найдены.

2. Пусть $\alpha > 0$. Случай $\alpha < 0$ разбирается аналогично. Возьмем $h \in L_2(G_2)$, тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\,\langle h,\, \psi_{j,k}\rangle\,|^2 = \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |Fh|^2. \tag{6.21}$$

Действительно, пусть h_j – ортогональная проекция h на всплеск-пространство W_j. Тогда, учитывая, что функции $\psi_{j,k}$ образуют базис W_j, и используя равенства Парсеваля и Планшереля, а также (6.4), получим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\,\langle h,\, \psi_{j,k}\rangle\,|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\,\langle h_j,\, \psi_{j,k}\rangle\,|^2 = \|h_j\|^2 = \|Fh_j\|^2$$

$$= \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |Fh_j|^2 = \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |Fh|^2.$$

Фиксируем $t \in U$ и предположим, что все условия пункта 2 выполнены. Вспоминая, что $\{\psi_{j,k}\}_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z}_+}$ – ортонормированный базис в $L_2(G_2)$, и используя представление Хаара f из пункта 1, имеем

$$\|f(\cdot,\, t)\|^2_{L_2(G_2)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}\, k\in\mathbb{Z}_+} |a_{j,k}|^2$$

$$\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}\, k\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha+1}t}|b_{j,k}|^2 + \sum_{j\in\mathbb{Z}\, k\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha+1}t}\left|\int\limits_0^t e^{-2^{j\alpha}\tau} d_{j,k}\, d\tau\right|^2.$$

Применяя неравенство Коши и вычисляя интеграл $\int_0^t e^{2^{j\alpha+1}\tau}\, d\tau$, получим

$$\|f(\cdot,\, t)\|^2_{L_2(G_2)} \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{2^{j\alpha+1}t} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\left\langle f^0,\, \psi_{j,k}\right\rangle|^2$$

$$+\sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{2^{j\alpha+1}t}\frac{1-e^{-2^{j\alpha+1}t}}{2^{j\alpha+1}}\int\limits_0^t \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |(g_\tau,\, \psi_{j,k})|^2\, d\tau.$$

Полагаем в (6.21) $h = f^0$ и $h = g_\tau$

$$\|f(\cdot,\, t)\|^2_{L_2(G_2)} \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{2^{j\alpha+1}t} \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |Ff^0(\xi)|^2\, d\xi$$

$$+\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{e^{2^{j\alpha+1}t}-1}{2^{j\alpha+1}} \int\limits_0^t \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |F(g_\tau)(\xi)|^2\, d\xi\, d\tau.$$

Рассмотрим два случая. Случай 1: $j \geq 0$. По (6.18)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha+1}t} \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |Ff^0(\xi)|^2\, d\xi \leq C\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^j e^{2^{j\alpha+1}(t-\theta(j))} < \infty.$$

По (6.19)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \frac{e^{2^{j\alpha+1}t}-1}{2^{j\alpha+1}} \int\limits_0^t \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |F(g_\tau)(\xi)|^2\, d\xi\, d\tau \leq Ct\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \frac{(e^{2^{j\alpha+1}t}-1)e^{-2^{j\alpha+1}\theta(j)}}{2^{j(\alpha-1)+1}}.$$

Ясно, что последняя сумма конечна.

Случай 2: $j < 0$.

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha+1}t} \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |Ff^0(\xi)|^2\, d\xi + \sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+} \frac{e^{2^{j\alpha+1}t}-1}{2^{j\alpha+1}} \int\limits_0^t \int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}} |F(g_\tau)(\xi)|^2\, d\xi\, d\tau$$

$$\le C_1(t)\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+}\int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}}|Ff^0(\xi)|^2\,d\xi+C_2(t)\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+}\int\limits_0^t\int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}}|F(g_\tau)(\xi)|^2\,d\xi\,d\tau$$

$$\le C_1(t)\int\limits_I|Ff^0(\xi)|^2\,d\xi+C_2(t)\int\limits_0^t\int\limits_I|F(g_\tau)(\xi)|^2\,d\xi\,d\tau\le C_1(t)\|Ff^0\|^2$$

$$+C_2(t)\int\limits_0^t\|F(g_\tau)\|^2\,d\tau=C_1(t)\|f^0\|^2+C_2(t)\int\limits_0^t\|g_\tau\|^2\,d\tau.$$

Осталось заметить, что в силу непрерывности $g(x,\,\cdot)$,

$$\int\limits_0^t\|g_\tau\|^2\,d\tau=\int\limits_{G_2}\int\limits_0^t|g(x,\tau)|^2\,d\tau\,dx=t\int\limits_{G_2}|g(x,\tau_0)|^2\,dx,\quad 0\le\tau_0\le t.$$

Если $\alpha<0$, то случаи 1 и 2 меняются местами.

3. Фиксируем $t\in U$, $x_0\in G_2$ и компактное множество $I_0(x_0)$. По определению функции Хаара для каждого $x\in I_0(x_0)$ существует единственное $k=k(x)=k(x_0)\in\mathbb{Z}_+$, такое что $x\in\operatorname{supp}\varphi_{0,k(x_0)}$, и для каждого $j\in\mathbb{Z}_+$ существует единственное $k=k(j,x)\in\mathbb{Z}_+$, такое что $x\in\operatorname{supp}\psi_{j,k(j,x)}$. По теореме 6.2.1 существует семейство функций $f_c(\cdot,t)\in S'$, состоящее из тех и только тех функций, которые имеют такое же представление Хаара, что и f. Используя квази-представление Хаара $f_c(\cdot,t)$ из теоремы 6.2.1, получим

$$f_c(x,\,t)=a_{k(x)}(t)\varphi_{0,k(x)}(x)+\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}a_{j,k(j,x)}(t)\psi_{j,k(j,x)}(x)+c.$$

Докажем, что для каждого $t\in U$ ряд $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}|a_{j,k(j,x)}(t)|$ равномерно сходится относительно $x\in I_0(x_0)$. Используя равенство Планшереля и (6.5), запишем

$$|b_{j,k}|=\left|\left\langle f^0,\,\psi_{j,k}\right\rangle\right|=2^{-j/2}\left|\int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}}Ff^0(\xi)\mathrm{w}_k(D^j\xi)\,d\xi\right|\le 2^{-j/2}\int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}}|Ff^0|$$

и аналогично

$$|d_{j,k}(t)|=|\langle g_t,\,\psi_{j,k}\rangle|\le 2^{-j/2}\int\limits_{I_{-j-1}\setminus I_{-j}}|F(g_t)|.$$

Следовательно, если $\alpha > 0$, тогда по (6.18) и (6.19) получаем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} |a_{j,k(j,x)}(t)| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha}t}|b_{j,k(j,x)}| + \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha}t}\left|\int\limits_0^t e^{-2^{j\alpha}\tau} d_{j,k(j,x)}(\tau)\,d\tau\right|$$

$$\le C\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{j/2} e^{2^{j\alpha}(t-\theta(j))} + C\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \frac{e^{2^{j\alpha}t}-1}{2^{j(\alpha-1/2)}} e^{-2^{j\alpha}\theta(j)}.$$

Ясно, что обе суммы конечны.

Если же $\alpha < 0$, то по (6.20) имеем

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} |a_{j,k(j,x)}(t)| \le \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha}t}|b_{j,k(j,x)}| + \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha}t}\left|\int\limits_0^t e^{-2^{j\alpha}\tau} d_{j,k(j,x)}(\tau)\,d\tau\right|$$

$$\le C\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} e^{2^{j\alpha}t} 2^{-j\varepsilon} + C\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \frac{e^{2^{j\alpha}t}-1}{2^{j\alpha}} 2^{-j\varepsilon}$$

$$\le Ce^t\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{-j\varepsilon} + C\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\left(t + \frac{e^t t^2}{2} 2^{j\alpha}\right) 2^{-j\varepsilon}.$$

Видим, что обе суммы конечны.

Итак, $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} |a_{j,k(j,x)}(t)|$ равномерно сходится на $I_0(x_0)$. Поэтому $f_c(\cdot, t)$ непрерывна в точке x_0. Осталось заметить, что x_0 – произвольный элемент G_2, так что $f_c(\cdot, t)$ непрерывна на G_2. $\Diamond$

Отметим, что утверждение, аналогичное пункту 1 теоремы 6.5.1, было доказано В. М. Шелковичем в [27] для функций, определенных на поле p-адических чисел. Идея использовать класс распределений $\tilde{S}'$ и представление Хаара для элементов этого класса возникла после изучения [27].

Глава 7

Задача матричного продолжения для фреймов всплесков на группе Виленкина

В середине прошлого века Н. Я. Виленкин начал разрабатывать гармонический анализ на группах, которые определяются как бесконечные произведения циклических групп с топологией, индуцированной произведением [6, 1]. Хорошо известный частный случай – группа Кантора, представляющая собой счетное слабое прямое произведение циклических групп порядка 2. Изучению этой группы мы посвятили главы 6 и 7. Основы гармонического анализа на группах Виленкина/Кантора (по-другому, анализа Уолша) изложены в монографиях [1], [8], [107].

Теория всплесков на группе Виленкина развивается в последние два десятилетия. Большинство результатов получены для групп Виленкина, которые являются бесконечными произведениями циклических групп одного и того же порядка p. В данной главе мы тоже работаем с такими группами. В 1996-1998 В. Лэнгом было определено понятие кратномасштабного анализа на группе Кантора, а также был изложен общих подход, основанный на КМА, для построения ортонормированных базисов всплесков [74] - [76]. Некоторые всплески на группе Кантора изучались независимо Б. Сендовым [109] в 1997. Позже подробное исследование ортогональных и биортогональных базисов всплесков было проведено Ю. А. Фарковым и соавторами в [21, 24, 25, 48, 49]. Недавно новые результаты в этом направлении были получены С. Ф. Лукомским в [85].

Теория всплесков на группе Виленкина и на прямой более или менее схожи. Чтобы построить ортогональный базис всплесков с компактным носителем на прямой, мы начинаем с подходящего тригонометрического полинома (масштабирующей маски) m_0. Масштабирующая маска, порождающая ортонормированный базис, удовлетворяет условию $|m_0(x)|^2+|m_0(x+\pi)|^2 = 1$, которое является необходимым, но не достаточным условием ортогональности. В случае групп Виленкина полиномы Уолша, то есть конечные линейные комбинации характеров, играют роль тригонометрических полиномов. Необходимое условие ортогональности сдвигов масштабирующей функции известно. Полное описание полиномов Уолша (масштабирующих масок), удовлетворяющих этому условию дано в [25]. Достаточные условия также известны [21, 24]. Как и в действительном случае, каждая такая маска приводит к жесткому фрейму всплесков. Кроме того, необходимое условие для ортогональности может быть ослаблено в случае построения жестких фреймов всплесков. Некоторые примеры жестких фреймов на группе Кантора приведены в [48]. В этой главе мы даем точное описание всех полиномов Уолша, порождающих жесткие фреймы всплесков, находим соответствующие маски всплесков (то есть решаем проблему матричного продолжения) и даем точное описание всех решений этой проблемы матричного продолжения. Попытка решить эту задачу была предпринята в [110]. Однако рассуждения, приведенные в [110], ошибочны (см. подробный комментарий в замечании 7.2.2). Заметим также, что проблема матричного продолжения для группы Виленкина не аналогична случаю действительной прямой, и предложенный в этой главе метод не повторяет результат В. Лоутона, С. Ли, З. Шена [77], доказанный для тригонометрических полиномов. Необходимые сведения о группах Виленкина приведены в § 5.1.

7.1 Жесткие фреймы всплесков на группе Виленкина

В этом разделе мы обсуждаем жесткие фреймы всплесков на группе Виленкина, построенные по общей схеме унитарного принципа расширения.

Следуя этой схеме, мы начинаем с масштабирующей функции или ее маски (масштабирующая маска), находим маску всплеска, решая задачу матричного продолжения (7.5), (7.6), и с помощью маски всплеска и масштабирующей функции определяем всплеск-функцию.

Пусть масштабирующая функция $\varphi \in L_2(G)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)), \quad x \in G. \tag{7.1}$$

Для построения фреймов всплесков с компактным носителем необходима масштабирующая функция с компактным носителем. В отличие от всплесков, определенных на действительной прямой, следующее утверждение выполняется для группы Виленкина.

Предложение 7.1.1. *Если φ – масштабирующая функция с компактным носителем, то в (7.1) только конечное количество коэффициентов a_k отличны от нуля.*

Доказательство. Пусть φ удовлетворяет (7.1) и $\operatorname{supp} \varphi \subset \lambda^{-1}[0, p^m)$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Положим

$$f(x) = p \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+ \\ \|k\|_G \le p^{m+1}}} a_k \varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)), \quad g(x) = p \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}_+ \\ \|k\|_G > p^{m+1}}} a_k \varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)).$$

Если $x \in \lambda^{-1}[0, p^m)$ и $\|k\|_G > p^{m+1}$, то $\|Dx \ominus \lambda^{-1}(k)\|_G > p^{m+1}$, поэтому $\varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)) = 0$. Таким образом, $g(x) = 0$ как только $x \in \lambda^{-1}[0, p^m)$. Если $x \notin \lambda^{-1}[0, p^m)$ и $\|k\|_G \le p^{m+1}$, тогда опять $\|Dx \ominus \lambda^{-1}(k)\|_G > p^{m+1}$, и, следовательно, $\varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)) = 0$. Поэтому $f(x) = 0$ как только $x \notin \lambda^{-1}[0, p^m)$. Так как $\varphi(x) = 0$ для всех $x \notin \lambda^{-1}[0, p^m)$, то из (7.1) следует, что $\varphi = f$. $\Diamond$

Хорошо известно, что в случае действительной прямой маска ортогональной масштабирующей функции с компактным носителем является тригонометрическим полиномом. Аналог предложения 7.1.1 не выполняется без дополнительного требования ортогональности [19, замечание 4.1.1].

Пусть φ – масштабирующая функция с компактным носителем. Тогда по предложению 7.1.1 существует натуральное число n, такое что φ удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = p \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \varphi(Dx \ominus \lambda^{-1}(k)), \quad x \in G. \tag{7.2}$$

Находя преобразование Фурье от обеих частей (7.2), имеем

$$F\varphi(\omega) = m_0(D^{-1}\omega) F\varphi(D^{-1}\omega), \tag{7.3}$$

при этом

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \overline{\mathrm{w}_k(\omega)}. \tag{7.4}$$

Функция m_0 называется маской φ или масштабирующей маской. Эта функция является полиномом Уолша порядка $p^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, используя свойства характера группы G, получим $\overline{\mathrm{w}_k(\omega)} = \overline{\chi(x, \lambda^{-1}(k))} = \chi(x, \ominus\lambda^{-1}(k)) = \mathrm{w}_{\lambda(\ominus\lambda^{-1}(k))}(x)$. Из определения операции $\oplus$ следует, что $0 \le k \le p^n - 1$ тогда и только тогда, когда $0 \le \lambda(\ominus\lambda^{-1}(k)) \le p^n - 1$.

Предположим, что существуют полиномы Уолша $m_1, \dots, m_r$ $r \ge p-1$, (маски всплеска), такие что матрица

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) & \dots & m_r(\omega) \\ m_0(\omega \oplus \delta_1) & m_1(\omega \oplus \delta_1) & \dots & m_r(\omega \oplus \delta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_0(\omega \oplus \delta_{p-1}) & m_1(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \dots & m_r(\omega \oplus \delta_{p-1}) \end{pmatrix}, \tag{7.5}$$

где $\delta_l \in G$ и $\lambda(\delta_l) = l/p$, $l \in \{0, \dots, p-1\}$, удовлетворяет условию

$$M(\omega)M^*(\omega) = E_p, \tag{7.6}$$

то есть строки M образуют ортонормированную систему. Символом M^* обозначаем матрицу, сопряженную к M.

Тогда всплеск-функции $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(r)}$ определяются с помощью равенства

$$F(\psi^{(\nu)})(\omega) = m_\nu(D^{-1}\omega) F\varphi(D^{-1}\omega), \quad \nu = 1, \dots, r.$$

При этом говорят, что система всплесков

$$\psi_{j,k}^{(\nu)}(x) = p^{j/2}\psi^{(\nu)}(D^j x \ominus \lambda^{-1}(k)), \quad \nu = 1,\dots,r,\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}_+, \tag{7.7}$$

порождена функцией φ.

Мы рассматриваем случай, когда система $\{\psi_{j,k}^{(\nu)} \mid \nu = 1,\dots,r,\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ образует жесткий фрейм в $L_2(G)$, то есть существует постоянная C, такая что для любой функции $f \in L_2(G)$ выполняется следующее равенство

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\sum_{\nu=1}^{r} |\langle f\,,\psi_{j,k}^{(\nu)}\rangle|^2 = C\|f\|^2.$$

Мы говорим, что фрейм всплесков имеет компактный носитель, если каждая всплеск-функция $\psi^{(\nu)}$ имеет компактный носитель.

Теорема 7.1.1 ([110]). *Пусть φ – масштабирующая функция с компактным носителем и $F\varphi(\mathbf{0}) \neq 0$. Тогда система всплесков $\{\psi_{j,k}^{(\nu)}\}$, порожденная φ, является жестким фреймом в $L_2(G)$ и $C = |F\varphi(\mathbf{0})|^2$.*

Аналог этой теоремы для пространства $L_2(\mathbb{R})$ доказан А. П. Петуховым [94] (см. также [19, § 1.8] или [44, § 1.1]). Доказательство, данное в [110], полностью повторяет доказательство из [94]. Кроме того, следуя [19, § 1.8], теорема 7.1.1 может быть усилена: вместо компактности носителя φ можно предполагать только непрерывность $F\varphi$ в точке $\mathbf{0}$. Однако в этой главе мы рассматриваем только масштабирующие функции с компактным носителем.

7.2 Построение масок всплесков

Если строки матрицы (7.5) ортогональны, то ясно, что

$$\sum_{l=0}^{p-1} \left|m_0\left(\omega\oplus\delta_l\right)\right|^2 \le 1, \qquad \omega\in G. \tag{7.8}$$

Таким образом, для того чтобы масштабирующая функция порождала жесткий фрейм всплесков необходимо, чтобы ее маска удовлетворяла (7.8). Мы докажем, что условие (7.8) является и достаточным, то есть если m_0

удовлетворяет (7.8), то существуют маски всплесков $m_1, \ldots, m_r$. Мы докажем этот факт конструктивно, предложив способ построения масок всплесков (то есть решая задачу матричного продолжения). Для этого нам нужно несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 7.2.1. *Для любого* $k \in \mathbb{Z}_+$ *и* $n \in \{0, \ldots, p-1\}$ *имеем*

$$\mathrm{w}_{pk+n}(\omega) = \mathrm{w}_k(D\omega)\mathrm{w}_n(\omega), \quad \omega \in G. \tag{7.9}$$

Доказательство. Используя определение обобщенной функции Уолша и свойства характеров группы G, имеем

$$\mathrm{w}_{pk+n}(\omega) = \chi(\omega, \lambda^{-1}(pk+n)) = \chi(\omega, \lambda^{-1}(pk) \oplus \lambda^{-1}(n)) = \chi(\omega, \lambda^{-1}(pk))\mathrm{w}_n(\omega),$$

при этом

$$\chi(\omega, \lambda^{-1}(pk)) = \chi(\omega, D\lambda^{-1}(k)) = \chi(D\omega, \lambda^{-1}(k)) = \mathrm{w}_k(D\omega).$$

◊

Предложение 7.2.2. *При* $\omega \in G$ *матрица*

$$W(\omega) = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} \mathrm{w}_0(\omega) & \mathrm{w}_1(\omega) & \ldots & \mathrm{w}_{p-1}(\omega) \\ \mathrm{w}_0(\omega \oplus \delta_1) & \mathrm{w}_1(\omega \oplus \delta_1) & \ldots & \mathrm{w}_{p-1}(\omega \oplus \delta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{w}_0(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \mathrm{w}_1(\omega \oplus \delta_{p-1}) & \ldots & \mathrm{w}_{p-1}(\omega \oplus \delta_{p-1}) \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

где $\delta_l \in G$ *и* $\lambda(\delta_l) = l/p$, $l \in \{0, \ldots, p-1\}$, *унитарна.*

Доказательство. Пусть $\omega \in G$ и $k, s, s' \in \{0, \ldots, p-1\}$. Тогда

$$\mathrm{w}_k(\omega \oplus \delta_s)\overline{\mathrm{w}_k(\omega \oplus \delta_{s'})} = \mathrm{w}_k(\omega)\mathrm{w}_k(\delta_s)\overline{\mathrm{w}_k(\omega)}\,\overline{\mathrm{w}_k(\delta_{s'})}$$
$$= \mathrm{w}_k(\delta_s \ominus \delta_{s'}) = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\, k(s-s')\right).$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{w}_k(\omega \oplus \delta_s)\overline{\mathrm{w}_k(\omega \oplus \delta_{s'})} = p\delta_{s,s'}.$$

◊

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть

$$m_0(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(0)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega)} \tag{7.11}$$

полином Уолша, удовлетворяющий (7.8). Фиксируем $r \in \mathbb{N}$, $r \geq p-1$, и покажем, как найти полиномы

$$m_\nu(\omega) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(\nu)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega)}, \quad \nu = 1, \dots, r, \tag{7.12}$$

для которых строки матрицы (7.5) ортонормированы.

Предложение 7.2.3. *Пусть* $m_0, \dots, m_r$ *полиномы, определенные в* (7.11) *и* (7.12), *пусть*

$$\mu_{\nu,s}(\omega) := \sqrt{p} \sum_{k=0}^{p^{n-1}-1} a_{pk+s}^{(\nu)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega)}, \quad \nu = 0, \dots, r, \ s = 0, \dots, p-1. \tag{7.13}$$

Тогда

$$m_\nu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{s=0}^{p-1} \mu_{\nu,s}(D\omega) \overline{\mathrm{w}_s(\omega)}, \tag{7.14}$$

и для всех $s, s' \in \{0, \dots, p-1\}$ *верна следующая эквивалентность*

$$\sum_{\nu=0}^{r} m_\nu(\omega \oplus \delta_s) \overline{m_\nu(\omega \oplus \delta_{s'})} = \delta_{s,s'} \iff \sum_{\nu=0}^{r} \mu_{\nu,s}(D\omega) \overline{\mu_{\nu,s'}(D\omega)} = \delta_{s,s'}. \tag{7.15}$$

Кроме того, для всех $\nu, \nu' \in \{0, \dots, r\}$ *выполняется*

$$\sum_{k=0}^{p-1} m_\nu(\omega \oplus \delta_k) \overline{m_{\nu'}(\omega \oplus \delta_k)} = \sum_{k=0}^{p-1} \mu_{\nu,k}(D\omega) \overline{\mu_{\nu',k}(D\omega)}. \tag{7.16}$$

Доказательство. Применяя (7.9) и 1-периодичность функций w_k для $\nu \in \{0, \dots, r\}$ и $s \in \{0, \dots, p-1\}$, получим

$$m_\nu(\omega \oplus \delta_s) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k^{(\nu)} \overline{\mathrm{w}_k(\omega \oplus \delta_s)} = \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p^{n-1}-1} a_{pk+q}^{(\nu)} \overline{\mathrm{w}_{pk+q}(\omega \oplus \delta_s)}$$

$$= \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p^{n-1}-1} a_{pk+q}^{(\nu)} \overline{\mathrm{w}_k(D\omega)}\, \overline{\mathrm{w}_q(\omega \oplus \delta_s)} = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{q=0}^{p-1} \mu_{\nu,q}(D\omega) \overline{\mathrm{w}_q(\omega \oplus \delta_s)}, \quad (7.17)$$

что дает (7.14).

Обозначим $\Gamma(\omega)$ матрицу

$$\Gamma(\omega) = \begin{pmatrix} \mu_{0,0}(\omega) & \mu_{1,0}(\omega) & \dots & \mu_{r,0}(\omega) \\ \mu_{0,1}(\omega) & \mu_{1,1}(\omega) & \dots & \mu_{r,1}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{0,p-1}(\omega) & \mu_{1,p-1}(\omega) & \dots & \mu_{r,p-1}(\omega) \end{pmatrix}.$$

По (7.17), $M(\omega) = \Gamma(D\omega) W^*(\omega)$, поэтому

$$M^*(\omega) M(\omega) = W(\omega) \Gamma^*(D\omega) \Gamma(D\omega) W^*(\omega).$$

Следовательно,

$$M^*(\omega) M(\omega) = E_{r+1} \iff \Gamma^*(D\omega) \Gamma(D\omega) = E_{r+1}.$$

Итак, (7.15) доказано. Окончательно, из предложения 7.2.2 следует

$$M(\omega) M^*(\omega) = \Gamma(D\omega)(W^*(\omega) W(\omega)) \Gamma^*(D\omega) = \Gamma(D\omega) \Gamma^*(D\omega),$$

и (7.16) доказано. $\Diamond$

Функции, $\mu_{\nu,k}$ определенные в (7.13), называются полифазными компонентами m_ν.

Следствие 7.2.1. *Пусть m_0 определено в (7.11) и удовлетворяет (7.8), и пусть $b_{n,l}^{(0,s)} := \mu_{0,s}(D^{1-n}(\lambda^{-1}(l)))$, где $\mu_{0,s}$ – полифазные компоненты m_0. Тогда*

$$\sum_{s=0}^{p-1} |b_{n,l}^{(0,s)}|^2 \le 1, \quad l = 0, \dots, p^n - 1. \quad (7.18)$$

Кроме того, полиномы Уолша m_ν, $\nu = 1, \dots, r$, являются масками всплесков, соответствующими m_0 тогда и только тогда, когда их полифазные компоненты

$$\mu_{\nu,s}(D\omega) = \sum_{l=0}^{p^n-1} b_{n,l}^{(\nu,s)} \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[l\,p^{-n},\,(l+1)\,p^{-n})}(\omega), \quad \omega \in U, \quad s = 0, \dots, p-1, \quad (7.19)$$

где $b_{n,l}^{(\nu,s)}$ – *комплексные числа, удовлетворяющие*

$$\sum_{\nu=0}^{r} b_{n,l}^{(\nu,s)} \overline{b_{n,l}^{(\nu,s')}} = \delta_{s,s'}, \quad s, s' = 0, \dots, p-1, \quad l = 0, \dots, p^n - 1. \tag{7.20}$$

Доказательство. Из (7.8) и (7.16) следует, что

$$\sum_{s=0}^{p-1} |\mu_{0,s}(D\omega)|^2 \le 1, \quad \omega \in G,$$

поэтому (7.18) выполняется.

По (7.15) условие (7.6) эквивалентно

$$\sum_{\nu=0}^{r} \mu_{\nu,s}(D\omega) \overline{\mu_{\nu,s'}(D\omega)} = \delta_{s,s'}, \quad \omega \in G, \quad s, s' = 0, \dots, p-1. \tag{7.21}$$

Поскольку полиномы $\mu_{\nu,s}(D\cdot)$ постоянны на каждом множестве $\lambda^{-1}[l\,p^{-n},\,(l+1)\,p^{-n})$, $l = 0, \dots, p^n - 1$, получаем (7.19). Пользуясь далее равенством

$$\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[l\,p^{-n},\,(l+1)\,p^{-n})}(\omega)\mathbb{1}_{\lambda^{-1}[l'\,p^{-n},\,(l'+1)\,p^{-n})}(\omega) = \delta_{l,l'}$$

для каждого $\omega \in \lambda^{-1}[0, 1)$ и для всех $l, l' \in \{0, \dots p^n - 1\}$, учитывая 1-периодичность функции $\mu_{\nu,s}$ и $D^{-n}(\lambda^{-1}(l)) \in \lambda^{-1}[l\,p^{-n},\,(l+1)\,p^{-n})$, видим, что (7.21) эквивалентно (7.20). $\Diamond$

Таким образом, достаточно решить систему (7.20) для каждого $l \in \{0, \dots, p^n - 1\}$ относительно неизвестных $b_{n,l}^{(\nu,s)}$, $\nu = 1, \dots, r$, $s = 0, \dots, p-1$, обеспечив при этом выполнение требования (7.18). Эту задачу легко решить, используя следующее утверждение, основанное на преобразовании Хаусхолдера (см., например, [19, §2.6]).

Предложение 7.2.4. *Пусть* $c_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, r$, $c_0 \ne 1$, $\sum_{k=0}^{r} |c_k|^2 = 1$, *и пусть*

$$c_{k0} = c_k, \quad c_{0j} = \overline{c}_{j0}\,\frac{1 - c_{00}}{1 - \overline{c}_{00}}, \quad c_{kj} = \delta_{kj} - \frac{c_{k0}\overline{c}_{j0}}{1 - \overline{c}_{00}}, \quad j, k = 1, \dots, r. \tag{7.22}$$

Тогда матрица $(c_{jk})_{j,k=0}^{r}$ *унитарна.*

Замечание 7.2.1. Если $c_0 = c_{00}$ близко к 1, то вычисления с использованием матрицы (7.22) численно неустойчивы. Однако, чтобы избежать этой проблемы, достаточно подходящим образом перенумеровать исходный вектор $(c_k)_{k=0,\dots,r}$.

Итак, на основании предложений 7.2.1–7.2.4 решение проблемы матричного продолжения для группы Виленкина имеет вид.

Теорема 7.2.1. *Пусть m_0 определена в* (7.11) *и удовлетворяет* (7.8). *Обозначим $b_{n,l}^{*(0,s)} = \mu_{0,s}(D^{1-n}\lambda^{-1}(l))$, $s = 0,\dots,p-1$, $l = 0,\dots,p^n-1$. Выберем числа $b_{n,l}^{*(0,p)},\dots,b_{n,l}^{*(0,r)} \in \mathbb{C}$ произвольно, но так, чтобы выполнялось условие $\sum_{k=0}^{r}|b_{n,l}^{*(0,k)}|^2 = 1$. Для каждого l обозначим $c_k = b_{n,l}^{*(0,k)}$, $k = 0,\dots,r$; для каждого $s \in \{0,\dots,p-1\}$ и $\nu \in \{1,\dots,r\}$ вычислим $c_{s,\nu}$ с помощью (7.22) при $c_0 \neq 1$ или положим $c_{s,\nu} = \delta_{s\nu}$ при $c_0 = 1$; обозначим $b_{n,l}^{*(\nu,s)} = c_{s,\nu}$. Тогда полиномы Уолша, определенные в (7.14), полифазные компоненты для которых определены в (7.19) равенствами $b_{n,l}^{(\nu,s)} = b_{n,l}^{*(\nu,s)}$, являются масками всплеска, соответствующими маске m_0.*

Ясно, что найденная в теореме 7.2.1 матрица (7.5) может быть выбрана не единственным способом. Во-первых, существует свобода в выборе коэффициентов $b_{n,l}^{*(0,p)},\dots,b_{n,l}^{*(0,r)}$. Во-вторых, предложение 7.2.4 указывает только одну унитарную матрицу, построенную по данному первому столбцу. Следующая теорема дает полное описание всех таких матричных продолжений.

Теорема 7.2.2. *Пусть m_0 определена в* (7.11) *и удовлетворяет* (7.8), *$b_{n,l}^{*(\nu,s)}$, $s = 0,\dots,p-1$, $l = 0,\dots,p^n-1$, определены в теореме 7.2.1 и пусть $V_l := (v_{n,l}^{(\nu,k)})_{\nu,k=0,\dots,r}$, $l = 0,\dots,p^n-1$, – унитарная матрица с первым столбцом $(1,0,\dots,0)^T$. Тогда полиномы m_ν, $\nu = 1,\dots,r$ являются масками всплеска, соответствующими маске m_0 тогда и только тогда, когда*

$$m_\nu(\omega) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{q=0}^{p^n-1} \left(\sum_{s=0}^{p-1} c_{n,\lambda(\lambda^{-1}(q)\ominus\lambda^{-1}(s))}^{(\nu,s)} \right) \overline{\mathrm{w}_q(\omega)},$$

где

$$c_{n,t}^{(\nu,s)} = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{r} b_{n,l}^{*(k,s)} v_{n,l}^{(\nu,k)} \mathrm{w}_t(D^{1-n}\lambda^{-1}(l)).$$

Доказательство. Хорошо известно, что любое решение системы (7.20) (для каждого фиксированного l) может быть записано так:

$$b_{n,l}^{(\nu,s)} = \sum_{k=0}^{r} b_{n,l}^{*(k,s)} \tilde{v}_{n,l}^{(\nu,k)},$$

где $\tilde{V}_l := (\tilde{v}_{n,l}^{(\nu,k)})_{\nu,k=0,\dots,r}$ – унитарная матрица. Ясно, что для выполнения условия

$$b_{n,l}^{(0,s)} = b_{n,l}^{*(0,s)}, \quad s = 0, \dots, p-1, \tag{7.23}$$

первый столбец матрицы $\tilde{V}$ должен быть равен $(1, 0, \dots, 0)^T$, то есть

$$b_{n,l}^{(\nu,s)} = \sum_{k=0}^{r} b_{n,l}^{*(k,s)} v_{n,l}^{(\nu,k)}.$$

Пусть полиномы Уолша m_ν, $\nu = 1, \dots, r$, определенные в (7.12), являются масками всплеска, соответствующими m_0. Обозначим $\mu_{\nu,s}$ полифазные компоненты m_ν, $\nu = 0, \dots, p-1$. По следствию 7.2.1,

$$\mu_{\nu,s}(D\omega) = \sum_{l=0}^{p^n-1} b_{n,l}^{(\nu,s)} \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[l\,p^{-n},\,(l+1)\,p^{-n})}(\omega),$$

где $b_{n,l}^{(\nu,s)}$ удовлетворяет (7.20) для каждого l, и $b_{n,l}^{(0,s)} = \mu_{0,s}(D^{1-n}\lambda^{-1}(l))$ эквивалентно (7.23). Поскольку система $\{\mathrm{w}_l\}_{l=0,\dots,p^n-1}$ ортонормирована на $\lambda^{-1}[0,\,1)$ и w_l постоянна на $\lambda^{-1}[k\,p^{-n},\,(k+1)\,p^{-n})$, $k = 0, \dots, p^n-1$, имеем

$$\mu_{\nu,s}(D\omega) = \sum_{l=0}^{p^n-1} c_{n,l}^{(\nu,s)} \overline{\mathrm{w}_l(\omega)},$$

где

$$\begin{aligned} c_{n,t}^{(\nu,s)} &= \int_{\lambda^{-1}[0,\,1)} \left(\sum_{l=0}^{p^n-1} b_{n,l}^{(\nu,s)} \mathbb{1}_{\lambda^{-1}[l\,p^{-n},\,(l+1)\,p^{-n})}(\omega) \right) \mathrm{w}_t(\omega)\,d\omega \\ &= \sum_{l=0}^{p^n-1} b_{n,l}^{(\nu,s)} \int_{\lambda^{-1}[l\,p^{-n},\,(l+1)\,p^{-n})} \mathrm{w}_t(\omega)\,d\omega \\ = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} b_{n,l}^{(\nu,s)} &\mathrm{w}_t(D^{1-n}\lambda^{-1}(l)) = \frac{1}{p^n} \sum_{l=0}^{p^n-1} \sum_{k=0}^{r} b_{n,l}^{*(k,s)} v_{n,l}^{(\nu,k)} \mathrm{w}_t(D^{1-n}\lambda^{-1}(l)). \end{aligned}$$

По (7.14) получим

$$m_\nu(\omega)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{s=0}^{p-1}\left(\sum_{l=0}^{p^n-1}c_{n,l}^{(\nu,s)}\overline{\mathrm{w}_l(\omega)}\right)\overline{\mathrm{w}_s(\omega)}.$$

Используя определения обобщенных функций Уолша, получим

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_l(\omega)\mathrm{w}_s(\omega)=\chi(\omega,\,\lambda^{-1}(l))\chi(\omega,\,\lambda^{-1}(s))=\chi(\omega,\,\lambda^{-1}(l)\oplus\lambda^{-1}(s))\\=\mathrm{w}_{\lambda(\lambda^{-1}(l)\oplus\lambda^{-1}(s))}(\omega).\end{aligned}$$

Изменим порядок суммирования. Обозначим $q=\lambda(\lambda^{-1}(l)\oplus\lambda^{-1}(s))$, тогда $\lambda^{-1}(q)=\lambda^{-1}(l)\oplus\lambda^{-1}(s)$, поэтому $\lambda^{-1}(l)=\lambda^{-1}(q)\ominus\lambda^{-1}(s)$, таким образом, $l=\lambda(\lambda^{-1}(q)\ominus\lambda^{-1}(s))$. Окончательно,

$$m_\nu(\omega)=\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{q=0}^{p^n-1}\left(\sum_{s=0}^{p-1}c_{n,\lambda(\lambda^{-1}(q)\ominus\lambda^{-1}(s))}^{(\nu,s)}\right)\overline{\mathrm{w}_q(\omega)}.$$

Обратное утверждение доказывается теми же рассуждениями, проведенными в обратном порядке. $\Diamond$

Замечание 7.2.2. Иной метод для нахождения масок всплесков $m_1,\dots m_r$ предложен в [110, теорема 3.5]. К сожалению, в доказательстве этой теоремы содержатся грубые ошибки. Во-первых, предложенный вид матрицы $\mathcal{M}_0(\xi)=\mathcal{P}(\xi)\sqrt{\Lambda(\xi)}\mathcal{Q}(\xi)$ не имеет требуемой структуры: k-ая строка матрицы $\mathcal{M}_0(\xi)$ должна быть $(m_1(\xi\oplus\delta_k),\dots,m_L(\xi\oplus\delta_k))$, где $\delta_k=k/p$ (см. (7.5)). Автор утверждает, что эта структура есть для любой унитарной матрицы $\mathcal{Q}(\xi)$. Но если $\mathcal{Q}(\xi)$ равна единичной матрице, то некоторые элементы матрицы $\mathcal{P}(\xi)\sqrt{\Lambda(\xi)}$ равны нулю (например, все элементы первого столбца кроме первых двух элементов), такая матрица нужной структуры не имеет. Во-вторых, даже если для отдельных, специально подобранных матриц $\mathcal{Q}(\xi)$ результат верен, то при умножении матрицы вида (7.5) на произвольную унитарную матрицу $\mathcal{Q}(\xi)$, упомянутая выше структура матрицы не сохраняется.

Следующая теорема дает точное описание всех полиномов Уолша, порождающих жесткие фреймы всплесков.

Теорема 7.2.3. *Маситабирующая функция с компактным носителем порождает жесткий фрейм всплесков с компактным носителем тогда и только тогда, когда ее маска m_0 является полиномом Уолша, удовлетворяющим условиям $m_0(\mathbf{0}) = 1$ и (7.8).*

Доказательство. Отметим, что условие $F\varphi(\mathbf{0}) \neq 0$ в теореме 7.1.1 необходимо для того, чтобы φ порождала жесткий фрейм всплесков. Действительно, доказательство теоремы 7.1.1 основывается на тождестве

$$\sum_{i=-\infty}^{j-1} \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f\,, \psi_{i,k}^{(\nu)}\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f\,, \varphi_{j,k}\rangle|^2$$

и соотношении

$$\lim_{j\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} |\langle f, \varphi_{jk}\rangle|^2 = |F\varphi(\mathbf{0})|^2 \|f\|^2, \tag{7.24}$$

которое выполняется для каждого $f \in L_2(G)$ Следовательно, если $\{\psi_{j,k}^{(\nu)}\}$ жесткий фрейм, то $F\varphi(\mathbf{0}) \neq 0$. Из (7.3) следует, что $m_0(\mathbf{0}) = 1$. По предложению 7.1.1 заключаем, что m_0 – полином Уолша. Свойство (7.8) следует из ортонормированности строк матрицы (7.5). Таким образом, необходимость доказана.

Если теперь m_0 – полином Уолша, $m_0(\mathbf{0}) = 1$, то $F\varphi(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(D^{-j}\omega)$, и следовательно, $F\varphi(\mathbf{0}) = 1$. Существование масок всплесков, удовлетворяющих (7.5), следует из (7.8) и теоремы 7.2.2. $\Diamond$

Глава 8

Безусловная сходимость разложений по фреймам всплесков

Безусловная сходимость разложений по базисам всплесков в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ изучена подробно, и первые достаточные условия на всплеск-функции, обеспечивающие безусловность разложений в $L_p(\mathbb{R})$ в том случае, когда в $L_2(\mathbb{R})$ система образует ортонормированный базис, доказаны И. Мейером и приведены в большинстве классических монографий по теории всплесков ([9], [88], [122]). Эти достаточные условия предполагают гладкость всплеск-функций ($\psi \in C^1(\mathbb{R})$), которая используется в методе доказательства, основанном на свойствах оператора Кальдерона–Зигмунда [10]. Достаточные условия, не предполагающие гладкость, а только определенную скорость убывания всплеск-функций, предложены в работе Г. Грипенберга [7], его результат усилен в работе П. Войташчика [123] и перенесен им на случай биортогональных базисов всплесков в [51] (см. также главу 11 в [19] и главу 7 в [12]).

В данной работе изучается безусловная сходимость в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков. Мы не называем здесь фрейм безусловным, так как термин „безусловный фрейм“ уже существует и имеет другое определение [38]. Основной результат сформулирован в теореме 8.2.1. Требования, предъявляемые к фреймам, совпадают с условиями в теореме П. Войташчика. Так что наш результат является распространением теоремы П. Войташчика на фреймы всплесков.

8.1 Двойственные фреймы

Напомним, что определения фрейма и бесселевой последовательности приведены в главе 3 на странице 88. Фрейм $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется двойственным для фрейма $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого $f \in H$ имеет место разложение $f = \sum_{n\in\mathbb{N}}(f,\, g_n) f_n$. Из определения фрейма следует, что это разложение безусловно сходится в H [39, следствие 3.2.5]. Для каждого фрейма существует двойственный, называемый каноническим [39, теорема 5.1.6]. Если фрейм не является базисом, то двойственный фрейм определяется не единственным образом [39, лемма 6.3.1]. Если фрейм $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ служит двойственным для фрейма $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, то и наоборот, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является двойственным фреймом для $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Поэтому говорят о паре двойственных фреймов.

Рассмотрим функции $\psi,\ \tilde{\psi} \in L_2(\mathbb{R})$. Если системы $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ образуют пару двойственных фреймов, то говорят, что задана пара двойственных фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$.

8.2 Достаточные условия для фреймов всплесков

Пусть $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ – пара двойственных фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$. Хорошо известно, что ряд $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$ безусловно сходится для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. Теорема 8.2.1 дает достаточные условия для безусловной сходимости рядов $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$ в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, где функции ψ, $\tilde{\psi}$ принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R})$ при любом $p \in (1,\, \infty)$.

Теорема 8.2.1. *Пусть $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ – пара двойственных фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, пусть существует четная ограниченная убывающая на $[0,\, \infty)$ функция η, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^\infty \eta(x)\ln(1+x)\,dx < \infty, \ \text{и такая что } |\psi(x)|, |\tilde{\psi}(x)| \le \eta(x),$$

тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, ряд $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$ безусловно сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Отметим, что условия теоремы 8.2.1 (существование ограниченной суммируемой мажоранты) обеспечивают принадлежность функций ψ, $\tilde{\psi}$ всем пространствам $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$. Разобьем доказательство теоремы 8.2.1 на доказательства нескольких вспомогательных утверждений.

Обозначим $U_\varepsilon f := \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\varepsilon_{j,k} = \pm 1$ последовательность знаков.

Лемма 8.2.1 (предложение 1 [123], лемма 11.1.9 [19]). *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. Пусть существует четная ограниченная убывающая на $[0,\, \infty)$ функция η, удовлетворяющая условию $\int\limits_0^\infty \eta(x)\ln(1+x)\,dx < \infty$, и такая что $|\psi(x)|, |\tilde{\psi}(x)| \le \eta(x)$. Тогда*

$$\mu\{x \in \mathbb{R} \,:\, |U_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_1.$$

Лемма 8.2.2. *Пусть $U_\Omega f := \sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$, $1 < p < \infty$. Функции ψ и $\tilde{\psi}$ удовлетворяют условиям теоремы 8.2.1. Тогда для всех конечных множеств $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$ и функций $f \in L_p(\mathbb{R})$ выполняется неравенство*

$$\|U_\Omega f\|_p \le M\|f\|_p,$$

где постоянная M зависит только от p и функций ψ, $\tilde{\psi}$.

Доказательство. Так как $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ – фреймы, то оператор U_ε имеет сильный тип $(2,2)$. Действительно,

$$\|U_\varepsilon f\|_2 = \left\| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \right\|_2 = \left| \left(\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k},\, g \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g) \right|,$$

где $\|g\|_2 \le 1$. Тогда из неравенства Коши и определения фрейма последовательно имеем

$$\left| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g) \right|^2 \le \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})|^2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |(\psi_{j,k},\, g)|^2$$

$$= B\tilde{B}\|g\|_2^2\|f\|_2^2 \le B\tilde{B}\|f\|_2^2,$$

где B, $\tilde{B}$ – верхние границы фреймов $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ соответственно. Тогда из леммы 8.2.1, применяя интерполяционную теорему Марцинкевича, получим неравенство $\|U_\varepsilon f\|_p \le M\|f\|_p$ для $1 < p < 2$ и $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$. Искомое неравенство для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, следует из возможности представить оператор U_Ω в виде полусуммы двух операторов вида U_ε, ограниченности оператора U_Ω в $L_p(\mathbb{R})$ и плотности $L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $2 < p < \infty$. Тогда

$$\|U_\Omega f\|_p = \left\|\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}\right\|_p = \left|\left(\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k},\, g\right)\right|$$

$$= \left|\left(f,\, \sum_{(j,k)\in\Omega}(\psi_{j,k},\, g)\tilde{\psi}_{j,k}\right)\right|,$$

где $\|g\|_q \le 1$, $1/p+1/q = 1$. Пользуясь неравенством Гельдера и тем фактом, что искомое неравенство уже доказано для $1 < q < 2$, мы окончательно получим

$$\left|\left(f,\, \sum_{(j,k)\in\Omega}(\psi_{j,k},\, g)\tilde{\psi}_{j,k}\right)\right| \le \|f\|_p \left\|\sum_{(j,k)\in\Omega}(\psi_{j,k},\, g)\tilde{\psi}_{j,k}\right\|_q$$

$$\le M\|f\|_p\|g\|_q \le M\|f\|_p.$$

$\diamondsuit$

Лемма 8.2.3. *Пусть $f^{j,k} \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0(\varepsilon)$, такое что для любого конечного множества индексов $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 \setminus B_{n_0(\varepsilon)}$, где $B_{n_0(\varepsilon)}$ – круг радиуса $n_0(\varepsilon)$ с центром в нуле, выполняется неравенство $\left\|\sum_{(j,k)\in\Omega} f^{j,k}\right\|_p < \varepsilon$, то двойной ряд $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} f^{j,k}$ безусловно сходится в $L_p(\mathbb{R})$.*

Доказательство леммы аналогично хорошо известному доказательству безусловной сходимости для кратных числовых рядов.

Лемма 8.2.4. *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *и* $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ *– пара двойственных фреймов всплесков в* $L_2(\mathbb{R})$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $n_0(\varepsilon)$, *такое что для любого конечного множества индексов* $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 \setminus B_{n_0(\varepsilon)}$, *где* $B_{n_0(\varepsilon)}$ *– круг радиуса* $n_0(\varepsilon)$ *с центром в нуле, выполняется неравенство* $\left\|\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}\right\|_2 < \varepsilon$.

Доказательство. Действительно,

$$\left\|\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}\right\|_2 = \left|\left(\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k},\, g_\Omega\right)\right| = \left|\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g_\Omega)\right|,$$

где $\|g_\Omega\|_2 \le 1$. Тогда из неравенства Коши, определения фрейма и $\Big((f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\Big)_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \in l_2$ последовательно имеем

$$\left|\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g_\Omega)\right|^2 \le \sum_{(j,k)\in\Omega}|(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})|^2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}|(\psi_{j,k},\, g_\Omega)|^2$$

$$\le B\|g_\Omega\|_2^2\varepsilon \le B\varepsilon,$$

где B – верхняя граница фрейма $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$. $\Diamond$

Лемма 8.2.5. *Пусть* $g \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *и функции* ψ, $\tilde{\psi}$ *удовлетворяют условиям теоремы 8.2.1. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $n_0(\varepsilon)$, *такое что для любого конечного множества индексов* $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 \setminus B_{n_0(\varepsilon)}$, *где* $B_{n_0(\varepsilon)}$ *– круг радиуса* $n_0(\varepsilon)$ *с центром в нуле, выполняется неравенство* $\left\|\sum_{(j,k)\in\Omega}(g,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}\right\|_p < \varepsilon$.

Доказательство. Подберем такое $p_0 \ge 3$, чтобы $p_0 - 2 < p < p_0$ и найдем непрерывную функцию f с компактным носителем, для которой $\|g - f\|_p < \varepsilon$. Докажем, что для функции f верно утверждение леммы.

Из неравенства Гельдера и из леммы 8.2.2 последовательно получим

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\sum_{(j,k)\in\Omega}(f,\, \tilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}(x)\right|^p dx$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k}(x) \right|^{(p-p_0+2)\,\frac{2}{p-p_0+2}} dx \right)^{\frac{p-p_0+2}{2}}$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k}(x) \right|^{(p_0-2)\frac{2}{p_0-p}} dx \right)^{\frac{p_0-p}{2}} = \left\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \right\|_2^{p-p_0+2}$$

$$\times \left\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \right\|_{\frac{2(p_0-2)}{p_0-p}}^{p_0-2} \leq \left(M \|f\|_{\frac{2(p_0-2)}{p_0-p}} \right)^{p_0-2} \left\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \right\|_2^{p-p_0+2},$$

где M зависит только от p, p_0, ψ и $\tilde{\psi}$. Так как $f \in L_2(\mathbb{R})$, то из леммы 8.2.4 следует, что лемма 8.2.5 верна для функции f.

Для функции $g \in L_p(\mathbb{R})$ вывод следует из леммы 8.2.2, так как

$$\left\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (g,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \right\|_p \leq \left\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (g-f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \right\|_p + \left\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \right\|_p$$

$$\leq M\|g-f\|_p + \left\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \tilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k} \right\|_p.$$

$\lozenge$

Доказательство теоремы 8.2.1 сводится к последовательному применению леммы 8.2.5 и леммы 8.2.3.

8.3 Достаточные условия для произвольных фреймов

Из лемм 8.2.3–8.2.5 также следует достаточное условие для безусловной сходимости в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, разложений по произвольной паре двойственных фреймов из $L_2(\mathbb{R})$ (аналог достаточной части теоремы 8.3.2 для двойственных фреймов).

Теорема 8.3.1. *Если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\tilde{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – пара двойственных фреймов в $L_2(\mathbb{R})$, $f_n,\ \tilde{f}_n \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, и существует постоянная M, такая* *что для любого конечного множества индексов* Ω *и любой функции* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \sum_{n\in\Omega} (f,\, \tilde{f}_n) f_n \right\|_p \le M \|f\|_p, \tag{8.1}$$

то ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} (f,\, \tilde{f}_n) f_n$ *безусловно сходится в* $L_p(\mathbb{R})$.

Теорема 8.3.1 является аналогом для случая двойственных фреймов достаточного условия следующей известной теоремы, на которой основывается доказательство безусловной сходимости разложений по базисам всплесков.

Теорема 8.3.2. (глава 1, §4, теорема 10 [12]) *Пусть* X *– банахово пространство. Для того чтобы полная и минимальная в* X *система* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *являлась безусловным базисом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная* M*, для которой при любом наборе чисел* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N}$ *с* $\varepsilon_n = \pm 1$ *для* $1 \le n \le N$, $N = 1, 2, \ldots,$ *выполняются неравенства*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n (x,\, y_n) x_n \right\| \le M \|x\|, \tag{8.2}$$

где $\{x_n,\, y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– биортонормированная система.*

Условия (8.1) и (8.2) равносильны. Выполнение условия (8.1) для пары двойственных фреймов всплесков проверено в лемме 8.2.2, ее доказательство следует из результата П. Войташчика. Леммы 8.2.3–8.2.5 заменяют требование минимальности системы из теоремы 8.3.2, которое не выполняется для произвольных фреймов.

Глава 9

Альтернативная формула восстановления для непрерывного всплеск-преобразования

Непрерывное всплеск-преобразование (НВП) является одним из мощных инструментов современного анализа в различных областях науки, связанных с изучением нестационарных сигналов, так как оно позволяет получить детализированное частотно-временное разложение нестационарного сигнала (см., например, [28] и обширную библиографию в книге).

Например, НВП, где в качестве ядра используется стандартный приведенный всплеск Морле (the standard reduced Morlet wavelet), используется для представления в частотно-временной плоскости (переменная a соответствует частоте, а переменная b – времени) решений динамических систем (см., например, подробный обзор [116]). В статье [98] на примере классического осциллятора Рёслера [105] показано, что с помощью преобразования Хаусхолдера (7.22) можно выделить главную частотную компоненту решения. Для этого преобразование Хаусхолдера применяется к вектору, полученному из модуля НВП дискретизацией параметра a при фиксированном значении параметра b.

В то же время НВП применяется не только для разложения сигнала, но и для его восстановления. В частности, оно используется в современных задачах квантовой механики, поскольку всплески дают удобный метод для представления когерентных состояний [89, 118], а также в задачах нейродинамики [93], где импульсы (спайки), форму которых можно интерпретировать как всплеск-функции, являются типичным видом регистрируемой активности.

Приложения НВП к изучению широкого класса физических процессов ограничиваются большими значениями центральных частот в силу наличия условия допустимости. В этой главе предлагается альтернативная формула восстановления НВП, которая применима даже в случае нарушения условия допустимости. В частности, мы исследуем преобразование, в котором в качестве всплеск-функции используется стандартный приведенный всплеск Морле для произвольной центральной частоты, включая предельный случай $\omega_0 \to 0$, когда НВП сводится к свертке с ядром Гаусса. И также используем функцию Гаусса, чтобы показать различие предложенной и классической формул.

9.1 Классическая формула восстановления

НВП функций из $L_2(\mathbb{R})$ определяется следующим образом

$$W_{n,\psi}f(a,\, b) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\psi_{n,a,b}(x)}\, dx, \tag{9.1}$$

где $n = 1$ или $n = 2$,

$$\psi_{1,a,b}(x) = \frac{1}{|a|}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad \psi_{2,a,b}(x) = \frac{1}{|a|^{1/2}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Для $n = 1$ мы предполагаем, что $\psi \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|\, dx = 1$, тогда $\int_{\mathbb{R}} |\psi_{1,a,b}(x)|\, dx = 1$. Для $n = 2$ мы полагаем, что $\psi \in L_2(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2\, dx = 1$, тогда $\left(\int_{\mathbb{R}} |\psi_{2,a,b}(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = 1$.

Необходимым условием “классического” обращения НВП является условие допустимости [9]

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty,$$

которое эквивалентно равенству $\widehat{\psi}(0) = 0$ при слабом дополнительном предположении $(1 + |\cdot|^\alpha)\psi \in L_1(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$.

При соблюдении условия допустимости для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ выполняется

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi_{2,a,b}(x) W_{2,\psi} f(a,\, b) \frac{dadb}{a^2}, \tag{9.2}$$

где равенство понимается в слабом смысле. Если дополнительно известно, что f непрерывна в точке $x \in \mathbb{R}$, тогда [26, теорема 3.10] равенство выполняется в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Аналогичный результат имеет место для пары различных всплеск-функций ψ и g, используемых в прямом (функция ψ) и обратном (функция g) НВП. В этом случае условие допустимости состоит из двух частей:

$$\omega^{-1}\overline{\widehat{\psi}(\omega)}\widehat{g}(\omega) \in L_1(\mathbb{R}) \text{ и } C_{\psi,g} := \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-1}\overline{\widehat{\psi}(\omega)}\widehat{g}(\omega)\, d\omega \neq 0.$$

А сам результат выглядит следующим образом (см. [9, предложение 2.4.2]): если $\psi,\ g,\ xg(x) \in L_1(\mathbb{R}),\ g' \in L_2(\mathbb{R}),\ \widehat{\psi}(0) = \widehat{g}(0) = 0,\ f \in L_2(\mathbb{R}),\ f$ ограничена, f непрерывна в точке $x \in \mathbb{R}$, тогда

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi,g}} \lim_{A_1 \to 0,\, A_2 \to \infty} \int_{A_1 \le |a| \le A_2} \frac{da}{a^2} \int_{\mathbb{R}} g_{2,a,b}(x) W_{2,\psi} f(a,\, b)\, db. \tag{9.3}$$

Функция также может быть восстановлена так (см. [68, теорема 2.2]):

$$f(x) = \lim_{\rho \to \infty\, \varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\rho} \frac{da}{a} \int_{\mathbb{R}} g_{1,a,b}(x) W_{1,\psi} f(a,\, b)\, db, \tag{9.4}$$

если следующие условия выполнены для функции f и всплесков ψ, g:

a) f непрерывна в точке $x \in \mathbb{R}$,

b) $\lim_{u\to\infty} \frac{1}{2u}\int_{t-u}^{t+u} f(x)\, dx = 0$ равномерно по t;

c) $\log(2 + |\cdot|)\psi \in L_1(\mathbb{R})$ и $\log(2 + |\cdot|)g \in L_1(\mathbb{R})$,

d) $\omega^{-1}\widehat{\psi}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)} \in L_1(\mathbb{R})$,

e) $\int_0^\infty \omega^{-1}\widehat{\psi}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega = \int_{-\infty}^0 |\omega|^{-1}\widehat{\psi}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega = 1$.

Видим, что требование e) более ограничительно, чем условия $C_{\psi,g} \neq 0$, $C_\psi < \infty$ $(\psi = g)$. Сходимость почти везде и в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p < \infty)$ изучалась подробно в [84, 104, 120].

В то же время один из самых полезных и часто используемых в приложениях всплеск, называемый стандартным приведенным всплеском Морле

$\psi_M(\xi) = \exp(i\omega_0\xi)\exp(-\xi^2/2)$ не удовлетворяет условию допустимости, поскольку $\widehat{\psi_M}(0) = C_1\exp(-\omega_0^2/2)$. Однако это число достаточно мало для используемых на практике центральных частот (обычно $\omega_0 \geq 5$), что позволяет применять преобразование для разложения сигналов, когда в точном восстановлении нет необходимости [43, 29, 96, 97]. Стандартный приведенный всплеск Морле модифицируют с тем, чтобы условие допустимости выполнялось, и получают точный всплеск Морле (the exact Morlet wavelet) $\psi_{M,ex}(\xi) = C\left(\exp(i\omega_0\xi) - \exp(-\omega_0^2/2)\right)\exp(-\xi^2/2)$, где C – нормирующий множитель. Однако для точного всплеска Морле взаимосвязь между частотами сигнала и максимумом модуля всплескового преобразования сложнее чем для стандартного приведенного. Поэтому приведенная версия чаще используется в приложениях.

9.2 Альтернативная формула восстановления

Следующий результат является основным в данной главе. Он показывает, что нарушение требования допустимости на самом деле не означает невозможность восстановить функцию по ее НВП.

Теорема 9.2.1. *Если* f, ψ, $\omega\widehat{\psi}(\omega) \in L_2(\mathbb{R})$ *и* $\widehat{f}$, $\widehat{\psi} \in L_1(\mathbb{R})$, *тогда почти везде на* $\mathbb{R}$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{db}{b-x}\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial b}W_{1,\psi}f(a,\,b)\,da = \overline{\psi(0)}\,f(x),\\ \frac{1}{\pi}\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{db}{b-x}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{|a|}\frac{\partial}{\partial b}W_{2,\psi}f(a,\,b)\,da = \overline{\psi(0)}\,f(x).\end{gathered} \tag{9.5}$$

Если дополнительно $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [0,\,\infty)$, *тогда почти везде на* $\mathbb{R}$

$$-i\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial b}W_{1,\psi}f(a,\,b)\,da = \overline{\psi(0)}\,f(b),\;\; -i\int_{\mathbb{R}}\sqrt{|a|}\frac{\partial}{\partial b}W_{2,\psi}f(a,\,b)\,da = \overline{\psi(0)}\,f(b). \tag{9.6}$$

Доказательство. Мы рассмотрим случай L_1-нормировки, то есть $n = 1$. Случай $n = 2$ доказывается аналогично. Из определения НВП следует,

что
$$W_{1,\psi}f(a,\,b)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\psi_{a,b}(x)}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}e^{i\omega b}\,d\omega.$$
Поскольку $\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\omega\right|\,d\omega<\infty$ для фиксированного $a\in\mathbb{R}$, мы получаем
$$-i\frac{\partial}{\partial b}W_{1,\psi}f(a,\,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\omega e^{i\omega b}\,d\omega.$$
Из $\widehat{f},\,\widehat{\psi}\in L_1(\mathbb{R})$ следует
$$\int_{\mathbb{R}}d\omega\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\omega\right|\,da=\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{f}(\omega)\right|\,d\omega\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\psi}(\xi)\right|\,d\xi<\infty.$$
Поэтому по теореме Фубини получаем
$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial b}W_{1,\psi}f(a,\,b)\,da&=\frac{-i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega b}\,d\omega\int_{\mathbb{R}}\overline{\widehat{\psi}(a\omega)}\omega\,da\\&=\frac{\overline{\psi(0)}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(-i)\mathrm{sgn}(\omega)\widehat{f}(\omega)e^{i\omega b}\,d\omega=\frac{\overline{\psi(0)}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{Hf}(\omega)e^{i\omega b}\,d\omega=\overline{\psi(0)}\,Hf(b),\end{aligned}$$
где H – преобразование Гильберта. Хорошо известно, что преобразование Гильберта обратимо на $L_2(\mathbb{R})$, $H^{-1}=-H$, и обратное преобразование $H^{-1}(Hf)(x)=f(x)$ выполняется почти везде на $\mathbb{R}$, что доказывает (9.5).

Если дополнительно $\mathrm{supp}\widehat{f}\subset[0,\,\infty)$, то последняя цепочка равенств переписывается так:
$$-i\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial b}W_{1,\psi}f(a,\,b)\,da=\frac{\overline{\psi(0)}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega b}\,d\omega=\overline{\psi(0)}\,f(b),$$
что доказывает (9.6). ♢

Для того чтобы проиллюстрировать теорему 9.2.1, рассмотрим формулу восстановления (9.6) для $n=1$ и возьмем $\psi,\ f\in S$, где S – пространство Шварца. Тогда $\widehat{f}(\cdot)\overline{\widehat{\psi}(a\cdot)}\in S$, следовательно, $W_{1,\psi}f(a,\,\cdot)\in S$ для любого фиксированного $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Следовательно, производную $\frac{\partial}{\partial b}W_{1,\psi}f(a,\,b)$ можно представить, используя производную дельта-функции Дирака δ
$$\frac{\partial}{\partial b}W_{1,\psi}f(a,\,b)=-\int_{\mathbb{R}}W_{1,\psi}f(a,\,t)\delta'(t-b)\,dt.$$
Можно отождествить $\delta'(t-b)$ и $\delta'_{1,a,b}(t)$. Действительно, для любого $\phi\in S$ имеем
$$(\delta_{1,a,b},\,\phi)=\int_{\mathbb{R}}\delta_{1,a,b}(x)\phi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\delta(x)\phi(ax+b)\,dx=\phi(b)=(\delta(\cdot-b),\,\phi)\,,$$

поэтому

$$\left(\delta'_{1,a,b},\, \phi\right) = -\left(\delta_{1,a,b},\, \phi'\right) = -\left(\delta(\cdot - b),\, \phi'\right) = \left(\delta'(\cdot - b),\, \phi\right).$$

Таким образом, если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [0,\, \infty)$, то мы получаем "квази классическую" форму для формулы восстановления (9.6)

$$f(x) = \frac{i}{\overline{\psi(0)}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} W_{1,\psi} f(a,\, b) \delta'(b - x)\, db\, da \tag{9.7}$$

Однако, (9.7) не сводится к известным формулам восстановления (9.2)–(9.4). В самом деле, если выбрать $\psi(x) = Ce^{-cx^2}$ и $g = \delta'$, то $\widehat{\delta'}(\omega) = i\omega$ и $\widehat{\psi}(\omega) = C_1 e^{-c_1\omega^2}$, $c_1 > 0$,

$$C_{\psi,g} = \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-1} \overline{\widehat{\psi}(\omega)} \widehat{g}(\omega)\, d\omega = iC_1 \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(\omega) e^{-c_1\omega^2}\, d\omega = 0.$$

Таким образом, условие допустимости не выполняется. Условие e), процитированное в разделе 9.1, также не выполняется:

$$\int_0^{\infty} \omega^{-1} \widehat{\psi}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega = -\int_{-\infty}^{0} |\omega|^{-1} \widehat{\psi}(\omega) \overline{\widehat{g}(\omega)}\, d\omega \left(= iC_1 \int_0^{\infty} e^{-c_1\omega^2}\, d\omega \right).$$

С другой стороны, рассмотрим стандартный приведенный всплеск Морле с центральной частотой ω_0, то есть $\psi_M(x) = C \exp(i\omega_0 x) \exp(-x^2/2)$, где множитель C зависит от выбранной нормы, и $\widehat{\psi_M}(\omega) = C_1 \exp(-(\omega - \omega_0)^2/2)$. Ясно, что $C_{\psi_M} = \infty$, и условие e) не выполняется (положим здесь $g = \psi = \psi_M$). Таким образом, формулы восстановления (9.2) и (9.4) не применимы. Однако, функция ψ_M удовлетворяет всем условиям теоремы 9.2.1, поэтому можно восстановить функцию с помощью (9.5) и (9.6). Этот факт можно интерпретировать в терминах "квази классической" формулы (9.7). Достаточно взять формально ψ_M в качестве анализирующего всплеска и δ' в качестве восстанавливающего. В этом случае $C_{\psi_M,\delta'} < \infty$, $C_{\psi_M,\delta'} \neq 0$.

В заключение отметим, что достаточно неограничительные условия на функцию ψ в теореме 9.2.1 позволяют использовать этот метод восстановления для широкого класса интегральных преобразований, например, с ядрами, построенными на основе на функции Гаусса, которые используются в диффузионном сглаживании [61].

Заключение

В данной работе изучаются свойства дискретного всплеск-преобразования для функций, определенных на прямой, периодических функций, функций определенных на группах Виленкина. Во всех этих случаях исследуется частотно-временная локализованность систем всплесков: построены хорошо локализованные базисы и фреймы всплесков, введена характеристика локализованности для функций, заданных на группе Кантора. Проводится сравнение систем нестационарных всплесков и периодических всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения. Получено точное решение проблемы матричного продолжения для жестких фреймов периодических всплесков, определенных на группах Виленкина. Получены достаточные условия для безусловной сходимости разложений по двойственным фреймам всплесков. Применение методов теории всплесков проиллюстрировано на примере решения дифференциальных уравнений. Также в работе изучаются свойства НВП: обсуждается использование НВП для представления в частотно-временной плоскости решений динамических систем, получена альтернативная формула обращения НВП, не требующая выполнения условия допустимости.

Отметим некоторые вопросы, возникающие в связи с рассмотренными в данной работе задачами.

1. Чему равна точная нижняя грань множества значений КН Гейзенберга, вычисленная на множестве всех всплеск-функций, порождающих ортонормированный базис или фрейм Парсеваля всплесков? Достигается ли эта грань? Известно [32, 55], что это число принадлежит отрезку $[(2-\sqrt{2})^{-1},\ 2.134]$ в случае базисов и $[3/2,\ 2.134]$ в случае фреймов. В главе 3 на эти вопросы получены частичные ответы для систем периодических всплесков.

2. Верно ли следующее обобщение теоремы Г. Баттла 3.0.1: если $\int_{\mathbb{R}} f = \varepsilon$ и $c(\widehat{f}) = 0$, то $UC_H(f) \geq \alpha(\varepsilon)$, где $\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon) = 3/2$. Это утверждение играет ту же роль для нестационарных систем всплесков, что и

теорема Г. Баттла для стационарных. Поэтому приведенное обобщение поможет изучать локализованность нестационарных систем. Например, если приведенное обобщение верно, то для построения нестационарных систем всплесков с наименьшими возможными КН, достаточно построить систему периодических всплесков $(\psi_j^P)_{j\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющую условиям теоремы 4.2.2 и асимптотическому равенству $\lim\limits_{j\to\infty} UC_B(\psi_j) = 3/2$, и воспользоваться теоремой 4.2.2.

3. В главе 8 мы рассматривали безусловную сходимость разложений по фреймам всплесков. Известно понятие безусловного фрейма в гильбертовом пространстве: фрейм f_n, $n \in \mathbb{N}$ называется безусловным, если из сходимости ряда $\sum_n c_n f_n$ следует безусловная сходимость этого ряда. Возникает вопрос об описании класса фреймов всплесков, которые являются безусловными. В [38] показано, что любой безусловный фрейм является почти-базисом Рисса. (Система называется почти-базисом Рисса, если она является объединением базиса Рисса и конечного множества элементов.) В связи с этим возникает уточняющий вопрос: существует ли система всплесков, которая является почти-базисом Рисса, но не является базисом Рисса? Если ответ на сформулированный вопрос отрицательный, то понятие безусловного фрейма всплесков совпадает с понятием базиса Рисса всплесков. Если ответ положительный, то представляет интерес поиск достаточных условий, при которых фреймы всплесков являются безусловными.

4. В главе 4 проведено сопоставление систем нестационарных всплесков и периодических всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения. Естественной представляется общая постановка задачи: дан нестационарный КМА, проводится процедура ортогонализации, какими свойствами будет обладать полученный периодический КМА, какие классы периодических всплесковых последовательностей могут быть построены с помощью данного КМА, будет ли совпадать полученный КМА с одним из известных периодических КМА, построеннных А. П. Петуховым или Й. Ко, С. Ли, Г. Таном, или М. А. Скопи-

ной. В этой постановке представляет интерес и изучение свойств самих нестационарных систем всплесков. В частности, сохраняется ли связь условия Стрэнга–Фикса для масштабирующих функций, порядка нуля в точке π масштабирующей маски и гладкости масштабирующей функции для нестационарных систем всплесков. Для определенного класса нестационарных всплесков с компактным носителем, имеющих ограничение на рост носителя, вопрос изучен в [64]. В каком виде это свойство переносится на периодические системы всплесков.

В заключение я хочу поблагодарить за постоянную поддержку и сотрудничество М. А. Скопину, И. Я. Новикова, В. Ю. Протасова, Ю. А. Фаркова, Е. Б. Постникова, А. В. Кривошеина, Ю. Престина, а также коллег по кафедре математического анализа СПбГУ, сотрудников института математики университета г. Любек и коллег по кафедре высшей математики СПбПУ.

Литература

[1] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах. — Баку: Элм, 1981.

[2] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979.

[3] М. З. Берколайко, И. Я. Новиков. Безусловные базисы в пространствах функций анизотропной гладкости // Труды МИРАН. — 1993. — Т. 204. — С. 35–51.

[4] М. З. Берколайко, И. Я. Новиков. О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56. — № 3–4. — С. 877–883.

[5] Ф. П. Васильев. Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981.

[6] Н. Я. Виленкин. Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1947. — Т. 11. — № 4. — С. 363–400.

[7] Б. И. Голубов. Элементы диадического анализа. Изд. 2-е. — М.: ЛКИ, 2007.

[8] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. .А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. Изд. 2-е. — М.: ЛКИ, 2008.

[9] И. Добеши. Десять лекций по вейвлетам. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.

[10] Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1983. — Т. 21. — С. 42–129.

[11] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.

[12] Б. С. Кашин, А. А. Саакян. Ортогональные ряды. Изд. 2-е, доп. — М.: АФЦ, 1999.

[13] Е. А. Лебедева. Безусловная сходимость разложений по фреймам всплесков // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 456.

[14] Е. А. Лебедева. Минимизация константы неопределенности семейства всплесков Мейера // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81. — № 4. — С. 553–560.

[15] Е. А. Лебедева. О принципе неопределенности для всплеск-функций Мейера // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2011. — Т. 389. — С. 131–142.

[16] Е. А. Лебедева. Экспоненциально убывающие всплески, имеющие равномерно ограниченные константы неопределенности по параметру, определяющему гладкость // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49. — № 3. — С. 574–591.

[17] Е. А. Лебедева, В. Ю. Протасов. Всплески Мейера с наименьшей константой неопределенности // Матем. заметки. — 2008. — Т. 84. — № 5. — С. 732–740.

[18] И. Я. Новиков. Константы неопределенности для модифицированных всплесков Добеши // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Тула: ТулГУ. — 1998. — Т. 4. — № 1. — С. 107–111.

[19] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005.

[20] А. П. Петухов. Периодические всплески // Матем. сб. — 1997. — Т. 188. — № 10. — С. 69–94.

[21] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков. Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Матем. сб. — 2006. — Т. 197. — № 10. — С. 129–160.

[22] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. — С. 129–149.

[23] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Интерполяционно-ортогональные системы всплесков // Тр. ИММ УрО РАН. — 2008. — Т. 14. — № 3. — 2008. — С. 153–161.

[24] Ю. А. Фарков. Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп // Матем. заметки. — Т. 82. — № 6. — С. 934–952.

[25] Ю. А. Фарков. Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69. — № 3. — С. 193–220.

[26] Ч. Чуи. Введение в вэйвлеты. — М.: Мир, 2001.

[27] В. М. Шелкович. p-адические эволюционные псевдодифференциальные уравнения и p-адические всплески // Изв. РАН. Сер. матем. — 2011. — Т. 75. — №. 6. — С. 163–194.

[28] P. S. Addison. The illustrated wavelet transform handbook: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance. — CRC Press, 2002.

[29] P. S. Addison, M. Morvidone, J. N. Watson, D. Clifton. Wavelet transform reassignment and the use of low-oscillation complex wavelets // Mechanical systems and signal processing. — 2006. — Vol. 20. — P. 1429–1443.

[30] K. Ajith, Z. Ye. More efficient ground truth ROI image coding technique: implementation and wavelet based application analysis // J. of Zhejiang University, Science A. — 2007. — Vol. 8. — No. 6. — P. 835–840.

[31] R. Balan. An uncertainty inequality for wavelet sets // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 1998. — Vol. 5. — P. 106–108.

[32] G. Battle. Heisenberg inequalities for wavelets states // Appl. Comp. Harm. Analysis. — 1997. — Vol. 4. — P. 119–146.

[33] A. Blumen, J. Klafter, G. Zumofen. Relaxation behavior in ultrametric spaces// J. Phys. A. — 1986. — Vol. 19. — No. 2. — L77.

[34] C. de Boor, R. DeVore, A. Ron. On the construction of multivariate (pre)wavelets // Constr. Approx. — 1993. — Vol. 9. — P. 123–166.

[35] E. Breitenberger. Uncertainty measures and uncertainty relations for angle observables // Found. Phys. — 1985. — Vol. 15. — P. 353–364.

[36] P. L. Butzer, H. J. Wagner. A calculus for Walsh functions defined on $\mathbb{R}_+$ // Proc. Sympos. Applic. Walsh Functions, Washington, D.C. — 1973. — P. 75–81.

[37] P. L. Butzer, H. J. Wagner. Walsh series and the concept of a derivative // Applic. Anal. — 1973. — Vol. 3. — P. 29–46.

[38] P. G. Casazza, O. Christensen. Hilbert space frames containing Riesz basis and Banach spaces which have no subspace isomorphic to c_0 // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — Vol. 202. — P. 940–950.

[39] O. Christensen. An introduction to frames and Riesz bases. Applied and Numerical Harmonic Analysis. — Birkhäuser, Boston, 2016.

[40] C. K. Chui, J. Wang. A study of asymptotically optimal time-frequency localization by scaling functions and wavelets // Ann. Numer. Math. — 1996. — Vol. 4. — P. 193–216.

[41] C. K. Chui, J. Wang. High-order orthonormal scaling functions and wavelets give poor time-frequency localization // J. Fourier Anal. Appl. — 1996. — Vol. 2. — No. 5. — P. 415–426.

[42] S. Dahlke, P. Maass. The affine uncertainty principle in one and two dimensions // Computers Math. Applic. — 1995. — Vol. 30. — No. 3–6. — P. 293–305.

[43] I. De Moortel, S. A. Munday, A. W. Hood. Wavelet analysis: the effect of varying basic wavelet parameters // Solar Physics. — 2004. — Vol. 222. — P. 203–228.

[44] B. Dong, Z. Shen. Framelets: MRA-based wavelet frames and applications, in Mathematics in image processing // IAS/Park City mathematics series. — 2013. — Vol. 19. — P. 7–208.

[45] D. L. Donoho, X. Huo. Uncertainty principles and Ideal Atomic Decomposition // IEEE Trans. Inform. Theory. — 2001. — Vol. 47. — No. 7. — P. 2845–2862.

[46] N. Dyn, A. Ron. Multiresolution analysis by infinitely differentiable compactly supported functions // Appl. Comput. Harmonic Anal. — 1995. — Vol. 2. — P. 15–20.

[47] N. Dyn, O. Kounchev, D. Levin, H. Render. Regularity of generalized Daubechies wavelets reproducing exponential polynomials with real-valued parameters // Appl. Comput. Harmonic Anal. — 2014. — Vol.37. — P. 288–306.

[48] Yu. A. Farkov. Examples of frames on the Cantor dyadic group // J. Math. Sci. — 2012. — Vol. 187. — No. 1. — P. 22–34.

[49] Yu. A. Farkov, U. Goginava, T. Kopaliani. Unconditional convergence of wavelet expansion on the Cantor dyadic group // Jaen J. Approx. — 2011. — Vol. 3. — No. 1. — P. 117–133.

[50] Yu. Farkov, E. Lebedeva, M. Skopina. Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. — 2015. — Vol. 13. — No. 5. — P. 1550036.

[51] T. Fiegel, P. Wojtaszczyk. Special bases in functional spaces // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. — 2001. — Vol. 1. — P. 561–597.

[52] G. B. Folland, A. Sitaram. The uncertainty principle: a mathematical survey // J. Fourier Anal. Appl. — 1997. — Vol. 3. — No. 3. — P. 207–238.

[53] J. E. Gibbs. Walsh spectrometry, a form of spectral analysis well suited to binary digital computation. — Teddington: Nat. Phys. Lab., UK, 1967.

[54] J. E. Gibbs, R. S. Stankovic. Why IWGD-89? A look at the bibliography of Gibbs derivatives // Theory and applications of Gibbs derivatives (Proc. first intern. workshop on Gibbs derivatives. Kuapari-Dubrovnik, September 26-28, 1989). Beograd: Math. Institute, 1990. — P. XIV-XXIV

[55] Ž. Gimbutas, A. Bastys. Daubechies compactly supported wavelets with minimal Heisenberg boxes // Lit. Math. J. — 1995. — Vol. 35. — P. 343–362.

[56] S. S. Goh, C. A. Micchelli. Uncertainty principles in Hilbert spaces // J. Fourier Anal. Appl. — 2002. — Vol. 8. — No. 4. — P. 335–373.

[57] S. S. Goh, B. Han, Z. Shen. Tight periodic wavelet frames and approximation orders // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2010. — Vol. 31. — P. 228–248.

[58] S. S. Goh, K. M. Teo. Extension principles for tight wavelet frames of periodic functions // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2008. — Vol. 25. P. 168–186.

[59] S. S. Goh, Ch. H. Yeo. Uncertainty products of local periodic wavelets // Adv. Comput. Math. — 2000. — Vol. 13. — P. 319–333.

[60] T. N. T. Goodman, S. L. Lee. Asymptotic optimality in time-frequency localization of scaling functions and wavelets // Frontiers in Interpolation and Application, (Eds.) N.K. Govil, H.N. Mhaskar, R.N. Mohapatra, Z. Nashed, J. Szadados. — Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[61] J. Gosme, C. Richard, P. Gonçalvès. Adaptive diffusion as a versatile tool for time-frequency and time-scale representations processing: a review // IEEE Trans. Signal Process. — 2005. — Vol. 53. — P. 4136–4146.

[62] G. Gripenberg. Wavelet bases in $L_p(\mathbb{R})$ // Studia Math. — 1993. — Vol. 106. — No. 2. — P. 175–187.

[63] K. Gröchenig. Uncertainty principles for time-frequency representations // Advances in Gabor analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal. — Birkhaüser Boston, Boston, MA, 2003. — P. 11-30.

[64] B. Han, Z. Shen, Compactly supported symmetric C^∞ wavelets with spectral approximation order // SIAM J. Math. Anal. — 2008. — Vol. 40. — No. 3. — P. 905–938.

[65] V. Havin, B. Joricke. The uncertainty principle in harmonic analysis. — Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[66] W. Heisenberg. The actual concept of quantum theoretical kinematics and mechanics // Physikalische Z. — 1927. — Vol. 43. — P. 172–198.

[67] E. Hewitt, K. A. Ross. Abstract harmonic analysis. — Springer-Verlag, New York, 1963.

[68] M. Holschneider, P. Tchamitchian. Pointwise analysis of Riemann's "nondifferentiable" function // Inventiones Mathematicae. — 1991. — Vol. 105. — P. 157–175.

[69] I. M. Johnstone, G. Kerkyacharian, D. Picard, M. Raimond. Wavelet deconvolution in a periodic setting // J. R. Statist. Soc. B. — 2004. — Vol.66. — No 3. — P. 547–573.

[70] A. N. Kochubei. Pseudo-differential equations and stochastics over non-archimedean fields. — Marcel Dekker, New York, 2001.

[71] Y. W. Koh, S. L. Lee, H. H. Tan. Periodic orthogonal splines and wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 1995. — Vol. 2. — P. 201–218.

[72] S. V. Kozyrev, V. Al. Osipov, V. A. Avetisov, Nondegenerate ultrametric diffusion // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46. — P. 063302.

[73] A. V. Krivoshein, E. A. Lebedeva. Uncertainty principle for the Cantor dyadic group // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — Vol. 423. — No. 2. — P. 1231–1242.

[74] W. C. Lang. Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. — 1996. — Vol. 27. — P. 305–312.

[75] W. C. Lang. Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Intern. J. Math. and Math. Sci. — 1998. — Vol. 21. — P. 307–317.

[76] W. C. Lang. Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. — 1998. — Vol. 24. — P. 533–544.

[77] W. Lawton, S. N. Lee, Z. Shen. Stability and orthonormality of multivariate refinable functions // SIAM J. Math. Anal. — 1977. — Vol. 28. — No. 4. — P. 999–1114.

[78] E. A. Lebedeva. An inequality for a periodic uncertainty constant // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2017. — Vol. 42. — No. 2. — P. 536–549.

[79] E. A. Lebedeva. On a connection between nonstationary and periodic wavelets // J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 451. — No. 1. — P. 434–447.

[80] E. A. Lebedeva. Uncertainty constants and quasispline wavelets // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2011. — Vol. 30. — No. 2. — P. 214–230.

[81] E. A. Lebedeva, E. B. Postnikov. On alternative wavelet reconstruction formula: a case study of approximate wavelets // R. Soc. open sci. — 2014. — Vol. 1. — 140124.

[82] E. A. Lebedeva, J. Prestin. Periodic wavelet frames and time-frequency localization // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 2014. — Vol. 37. — No. 2. — P. 347–359.

[83] E. Lebedeva, M. Skopina. Walsh and wavelet methods for differential equations on the Cantor group // J. Math. Anal. Appl. — 2015. — Vol. 430. — No. 2. — P. 593–613.

[84] K. Li, W. Sun. Pointwise convergence of the Calderon reproducing formula // J. Fourier. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 18. — P. 439–455.

[85] S. F. Lukomskii. Step refinable functions and orthogonal MRA on p-adic Vilenkin groups // J. Fourier Anal. Appl. — 2014. — Vol. 20. — P. 42–65.

[86] I. Maksimenko, M. Skopina. Multivariate periodic wavelets // St. Petersburg Math. J. — 2004. — Vol. 15. — P. 165–190.

[87] Y. Meyer. Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbras d'opérateurs // Seminaire Bourbaki 1985/86. — 1987. — No. 145-146. — P. 209–223.

[88] Y. Meyer. Wavelets and Operators. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, MA, 1992.

[89] A. H. Muzhikyan, G. T. Avanesyan. Asymptotically exact localized expansions for signals in the time-frequency domain // J. Phys. A Math. Theor. — 2012. — Vol. 45. — No. 24. — P. 244035.

[90] F. J. Narcowich, J. D. Ward. Wavelets associated with periodic basis functions // Appl. Comput. Harmon. Anal. — 1996. — Vol. 3. — P. 40–56.

[91] I. Ya. Novikov. Modified Daubechies wavelets preserving localization with growth of smoothness // East J. Approximation. — 1995. — Vol. 1. — No. 3. — P. 314–348.

[92] A. T. Ogielski, D. L. Stein. Dynamics on ultrametric spaces // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 55. — P. 1634.

[93] A. N. Pavlov, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, E. Yu. Sitnikova, V. A. Makarov, A. A. Ovchinnikov. Wavelet analysis in neurodynamics // Physics-Uspekhi. — 2012. — Vol. 55. — P. 845–875.

[94] A. P. Petukhov. Explicit construction of framelets // Appl. Comput. Harmonic Anal. — 2001. — Vol. 11. — P. 313–327.

[95] G. Plonka, M. Tasche. A unified approach to periodic wavelets // Wavelets: theory, algorithms, and applications, C. Chui, L. Montefusco, L. Puccio (Eds.). — Academic Press, New York, 1994. — P.137–151.

[96] E. B. Postnikov. On precision of wavelet phase synchronization of chaotic systems // J. Exp. Theor. Phys. — 2007. — Vol. 105. — P. 652–654.

[97] E.B. Postnikov. Wavelet phase synchronization and chaoticity // Phys. Rev. E. — 2009. — Vol. 80. — P. 057201.

[98] E. B. Postnikov, E. A. Lebedeva. Decomposition of strong nonlinear oscillations via modified continuous wavelet transform // Phys. rev. E. — 2010. — Vol. 82. — No. 5. — P. 057201.

[99] E. B. Postnikov, E. A. Lebedeva, A. I. Lavrova. Computational implementation of the inverse continuous wavelet transform without a requirement of the admissibility condition // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 282. — P. 128–136.

[100] J. Prestin, E. Quak. Optimal functions for a periodic uncertainty principle and multiresolution analysis // Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. — 1999. — Vol. 42. — P. 225–242.

[101] J. Prestin, E. Quak, H. Rauhut, K. Selig. On the connection of uncertainty principles for functions on the circle and on the real line // J. Fourier Anal. Appl. — 2003. — Vol. 9. — P. 387–409.

[102] J. F. Price, A. Sitaram. Local uncertainty inequalities for locally compact groups // Trans. of AMS — 1998. — Vol. 308. — No. 1. — P. 105–114.

[103] H. Rauhut. Best time localized trigonometric polynomials and wavelets // Adv. Comput. Math. — 2005. — Vol. 22. — P. 1–20.

[104] M. Rao, H. Sikic, R. Song. Application of Carleson's theorem to wavelet inversion // Control Cybern. — 1994. — Vol. 23. — P. 761–771.

[105] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos // Phys. Lett. — 1976. — Vol. 57. — No. 5. — P. 397–398.

[106] A. Ron, Z. W. Shen. Affine systems in $L_2(\mathbb{R}^d)$: the analysis of the analysis operator // J. Func. Anal. — 1997. — Vol. 148. — P. 408–447.

[107] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon. Walsh series. An introduction to dyadic harmonic analysis. — Academiai Kiado, Budapest, 1990.

[108] E. Schrödinger. About Heisenberg uncertainty relation // Proc. of the Prussian acad. of scien. — 1930. — Vol. XIX. — P. 296–303.

[109] Bl. Sendov. Multiresolution analysis of functions defined on the dyadic topological group // East J. Approx. — 1997. — Vol. 3. — No. 2. — P. 225–239.

[110] F. A. Shah. Tight wavelet frames generazed by the Walsh polynomials // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. — 2013. — Vol. 11. — No. 6. — P. 1350042.

[111] K. Selig. Trigonometric wavelets and the uncertainty principle // Approximation theory, M. W. Müller, M. Felten, D. H. Mache (Eds.), Math. Research. Akademie Verlag, Berlin — 1995. — Vol. 86. — P. 293–304.

[112] K. K. Selig. Uncertainty principles revisited // Electronic Trans. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 14. — P. 165–177.

[113] M. Skopina. Local convergence of Fourier series with respect to periodized wavelets // J. Approx. Theory. — 1998. — Vol. 94. — No. 2. — P. 191–202.

[114] M. Skopina. Multiresolution analysis of periodic functions // East J. Approx. — 1997. — Vol. 3. — P. 203–224.

[115] R. S. Stankovic, J. Astola. Gibbs Derivative the First Forty Years. — T.I.C.S.P.#39, Tampere, 2008.

[116] W. T. Staszewski, K. Worden. Wavelet analysis of time-series: coherent structures, chaos and noise. // Int. J. Bifurcation Chaos. — 1999. — Vol. 9. — No. 3. — P. 455.

[117] C. Torrence, G. P. Compo. A practical guide to wavelet analysis // Bull. Am. Meteorol. Soc. — 1998. — Vol. 79. — P. 61–78.

[118] M. Toutounji. Quantum dynamics and electronic spectroscopy within the framework of wavelets // J. Phys. B. — 2013. — Vol. 46. — P. 065101.

[119] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden. On the asymptotic convergence of B-spline wavelets to Gabor functions // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1992. — Vol. 38. — P. 864–872.

[120] F. Weisz. Inversion formulas for the continuous wavelet transform // Acta Math. Hungar. — 2013. — Vol. 138. — P. 237–258.

[121] E. Whittaker, G. Watson. A course of modern analysis. — Cambribge Univ. Press, London, 2002.

[122] P. Wojtaszczyk. A mathematical introduction to wavelets. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, MA, 1997.

[123] P. Wojtaszczyk. Wavelets as unconditional bases in $L_p(\mathbb{R})$ // J. Fourier Anal. Appl. — 1999. — Vol. 5. — No. 1. — P. 73–85.

[124] V. A. Zheludev. Wavelets based on periodic splines // Russ. Acad. Sci. Dokl. Math. — 1994. — Vol. 49. — P. 216–222.