Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

На правах рукописи

Егорченкова Елизавета Алексеевна

ВЕРБАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Гордеев Николай Леонидович

Санкт-Петербург
2019

Содержание

Введение

Пусть G — произвольная группа. Для любого слова $w = w(x_1, \dots, x_n) \in F_n$ свободной группы F_n можно задать *вербальное отображение*

$$\widetilde{w} : G^n \to G$$

следующей формулой:

$$\widetilde{w}\big((g_1, \dots, g_n)\big) \stackrel{def}{=} w(g_1, \dots, g_n).$$

Иными словами, мы подставляем g_i вместо x_i в слово w (см. [2], [19], [20]).

Актуальность и степень разработанности темы. Свойства вербальных отображений исследуются в теории групп в течение многих лет. Они связаны с различными теоретико-групповыми задачами. Ярким примером здесь является проблема О. Оре, которая на языке вербальных отображений эквивалентна проблеме доказательства сюръективности отображений $\widetilde{w}$ для конечной простой группы при $w = [x_1, x_2]$ (см. [3], [17]).

В последние 10-15 лет сильно возрос интерес к вербальным отображениям простых (и полупростых) алгебраических групп и их групп точек над различными полями (см. [3]). Здесь отправной точкой является теорема А. Бореля [9]:

Вербальное отображение $\widetilde{w} : G^n \to G$ полупростой алгебраической группы G доминантно для $w \neq 1$.

Однако уже в работе А. Бореля был приведен пример

$$w = x^2, G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

несюръективного вербального отображения. Тем не менее, из теоремы Бореля следует сюръективность вербального отображения для полупростой алгебраической группы в случае, когда

$$w(x_1, \dots, x_n) = w_1(x_1, \dots, x_k)w_2(x_{k+1}, \dots, x_n),$$

т.е. слово w представляется в виде произведения двух слов от независимых переменных (здесь нумерация переменных может быть произвольной). Следует отметить, что проблема описания сюръективных и несюръективных вербальных отображений простых алгебраических групп полностью решена только для слов вида $w = x^n$, $w = [x_1, x_2]$ (см. [3]). Например, для простейшей группы PGL_2 над полем характеристики ноль нет ни одного примера несюръективности нетривиальных вербальных отображений. Исследования сюръективных вербальных отображений простых (полупростых) алгебраических групп интенсивно продолжаются в течение последних лет.

Еще труднее проблема сюръективности вербальных отображений становится для групп вида $G = \mathcal{G}(K)$, где $\mathcal{G}$ — простая (полупростая) алгебраическая группа, определенная над полем K. Здесь можно указать множество примеров несюръективности. Однако сюръективность часто удается доказать, если слово w раскладывается в произведение

$$w = w_1 w_2 \cdots w_k$$

достаточного числа слов с независимыми переменными. Получению оценок для различных k были посвящены работы А. Шалева, А. Люботского, М. Ларсена, М. Либека, П.Х. Тьеппа и др. По аналогии с проблемой Варинга из теории чисел, эти исследования получили название "Проблемы Варинга для вербальных отображений групп".

Исследования такого типа естественно разбиваются на несколько случаев, сильно различающихся как по результатам, так и по методам исследования:

1. поле K бесконечно и группа $\mathcal{G}$ расщепима (группа Шевалле);
2. поле K бесконечно и группа $\mathcal{G}$ изотропна, но нерасщепима;
3. поле K бесконечно и группа $\mathcal{G}$ анизотропна;
4. поле K конечно;
5. поля специального вида $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}_p$, и т.д.

В данной работе мы в основном рассматриваем случай 1. и, отчасти, случаи 2. и 5.

Для простой односвязной алгебраической группы $\mathcal{G}$, определенной и расщепимой над бесконечным полем K, Хэем-Ларсеном-Шалевым был получен следующий важный результат [24]:

Теорема. *Пусть $G = \mathcal{G}(K)$ и пусть $w = w_1 w_2 w_3 w_4 \in F_n$ – произведение четырех слов от независимых переменных. Тогда любой нецентральный элемент группы G содержится в образе вербального отображения $\widetilde{w}$.*

Цель исследования — описание сюръективных вербальных отображений групп K-точек простых алгебраических групп, определенных и расщепимых (изотропных) над бесконечным полем. Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Рассмотреть ситуацию, описанную в теореме Хэя-Ларсена-Шалева и распространить этот результат на случай слов, раскладывающихся в произведения трех слов от независимых переменных (исключая случаи групп типа B_2 и G_2);

2. Получить результат, аналогичный описанному выше, для групп типа B_2 и G_2;

3. Рассмотреть вербальные отображения для слов, раскладывающихся в произведение двух слов с независимыми переменными;

4. Рассмотреть случай изотропной, но нерасщепимой группы над телом и получить результаты о коммутаторной ширине.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты важны как для понимания природы вербальных отображений, так и для структурной теории алгебраических групп.

Методы исследования. В данной работе применялись как стандартные методы теории алгебраических групп, так и некоторые специальные методы этой теории: разложения Гаусса с заданной полупростой частью, теория пересечений регулярных классов, сопряженных с клетками Брюа, теория специальных элементов Кокстера и др.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми в теории алгебраических групп. Мы улучшаем результат Хэя-Ларсена-Шалева, а также получаем ряд результатов о вербальных отображениях, соответствующих произведению двух слов с независимыми переменными. В последней главе мы рассматриваем также случай изотропной, но нерасщепимой группы над телом.

Степень достоверности. Все утверждения диссертации снабжены подробными доказательствами, которые основаны на хорошо известных результатах теории алгебраических групп.

Апробация работы. По теме исследования было прочитано три доклада:

1. Е. А. Егорченкова. Вербальные отображения групп Шевалле над бесконечными полями// Семинар кафедры алгебры РГПУ им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия. 19.04.2019;

2. Е. А. Егорченкова. Вербальные отображения групп Шевалле над бесконечными полями// Городской алгебраический семинар им. Д.К. Фаддеева. ПОМИ, Санкт-Петербург, Россия. 13.05.2019;

3. Е. А. Егорченкова. О коммутаторной ширине группы SL_n над телами// International Workshop "Actual Problems of the Theory of Algebraic Groups". Herzen University, Saint Petersburg, Russia. 16.09.2019-18.09.2019.

По теме работы опубликовано три статьи в журналах, которые входят в список рекомендованных ВАК для соискателей ученой степени кандидата и доктора наук. Все журналы входят в базы SCOPUS и Mathscinet. Archiv der Mathematik входит также в базу Web of Science.

1. Egorchenkova, E. Products of three word maps on simple algebraic groups / E. Egorchenkova, N. Gordeev // Archiv der Mathematik. – 2019. – Volume 112. – Issue 2. – P. 113-122.

2. Егорченкова Е.А. Произведения коммутаторов полной линейной группы над телом / Е.А. Егорченкова, Н.Л. Гордеев // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2018. – Том 470. – С. 88-104.

3. Егорченкова Е.А. Вербальные отображения групп Шевалле над бесконечными полями / Е.А. Егорченкова // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2019. – Том 478. – С. 108-127.

Положения, выносимые на защиту.

В теоремах 1, 2 и 3 $\mathcal{G}$ — это простая односвязная группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, $G = \mathcal{G}(K)$ — группа K-точек группы $\mathcal{G}$, $Z(G)$ — центр G, $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ — образ отображения $\widetilde{w}$. Пусть

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1(X_1, \dots, X_k) \in F_k, \\ w_2 &= w_2(Y_1, \dots, Y_l) \in F_l, \\ w_3 &= w_3(Z_1, \dots Z_m) \in F_m \text{ —} \end{aligned}$$

три нетривиальных слова с независимыми переменными, где F_k, F_l, F_m — свободные группы ранга k, l и m соответственно. Тогда

$$w := w_1 w_2 w_3 \in F_{k+l+m} \text{ —}$$

нетривиальное слово от переменных $\{X_p\}, \{Y_q\}, \{Z_r\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{G}$ — простая односвязная группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, и пусть $G = \mathcal{G}(K)$. Положим, что $\mathcal{G}$ не является группой типа B_2 или G_2. Пусть, далее,*

$$\widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Тогда

$$G \setminus Z(G) \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}.$$

Теорема 2. *Пусть $w = w_1 w_2$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда*

1. *любой регулярный расщепимый полупростой элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G — группа типов A_r, C_r, G_2 или K — совершенное поле, у которого $\dim K \leqslant 1$;*

2. *любой регулярный унипотентный элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G — группа типа A_r или K — совершенное поле, характеристика которого не является плохим простым числом [28] для G и $\dim K \leqslant 1$.*

Здесь $\dim K$ — когомологическая размерность K [29].

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{G}$ — группа типа B_2 или G_2. Тогда*

$$B\, \mathfrak{n}_0\, B \subset \operatorname{Im} \widetilde{w},$$

где $w = w_1 w_2 w_3$ — произведение трех нетривиальных слов с независимыми переменными.

Здесь $B\mathfrak{n}_0 B$ — большая клетка Брюа группы $G = \mathcal{G}(K)$, а $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ — образ вербального отображения

$$\widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G.$$

Теорема 4. *Пусть K — поле характеристики ноль, а $\mathcal{H}$ — простая алгебраическая группа, определенная над полем K. Предположим, что $\mathcal{H}$ — изотропная, но не обязательно расщепимая группа. Пусть, далее, $H = \mathcal{H}(K)$*

и $w = w_1 w_2 \in F_n$ *— произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда любой унипотентный элемент поля* K *лежит в образе вербального отображения* $\widetilde{w} : H^n \to H$.

Пусть D — некоммутативное тело, $D^* = D \backslash \{0\}$ — мультипликативная группа D, $[D^*, D^*]$ — коммутаторная подгруппа D^*,

$$E_n(D) = \big\langle t_{ij}(\lambda) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \;\; \lambda \in D \big\rangle,$$

где $t_{ij}(\lambda)$ — (ij)-трансвекция, $Z\big(E_n(D)\big)$ — центр $E_n(D)$.

Теорема 5. *Пусть* $w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i]$ *и пусть*

$$\widetilde{w} : D^{*2k} \to D^* \;-$$

соответствующее вербальное отображение. Далее, пусть

$$\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D) \;-$$

вербальное отображение на $\mathrm{GL}_n(D)$, *соответствующее тому же слову* w. *Предположим, что* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$. *Тогда*

$$\widetilde{w}\big(\mathrm{GL}_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

Если $n > 2$, *то*

$$\widetilde{w}\big(E_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

В частности, если каждый элемент из $[D^*, D^*]$ *является коммутатором элементов из* D^*, *то каждый нецентральный элемент из* $E_n(D)$ *является коммутатором элементов из* $E_n(D)$.

Объем и структура работы. Текст диссертации изложен на 73-х страницах. Он включает в себя введение, три главы и заключение. Список литературы состоит из 30-ти наименований.

Результаты глав 1 и 3 были опубликованы в совместных работах с научным руководителем ([13], [4]). При этом научным руководителем были сформулированы задачи и указаны некоторые приемы (например, разложение Гаусса с заданной полупростой частью), использованные в его предыдущих работах. Также при написании работы были использованы некоторые методические указания руководителя. Все формулировки и доказательства, приведенные в диссертации, были получены диссертантом самостоятельно.

Глава 1

Произведения трех вербальных отображений простых расщепимых алгебраических групп

1.1 Предварительные сведения

В первой главе мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть K — поле. Любую алгебраическую группу H над K мы будем отождествлять здесь с группой $\mathcal{H}(\overline{K})$, где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание K.

Далее, $\mathcal{G}$ — простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над K, и пусть $G = \mathcal{G}(K)$ — группа K-точек группы $\mathcal{G}$. Обозначим через $R_u(\mathcal{P})$ унипотентный радикал параболической подгруппы $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{G}$.

Для любой группы H обозначим через $Z(H)$ центр H.

Для систем корней и самих корней используем обозначения из [10]. Для корня α обозначим символом $x_\alpha(t)$ (где $t \in K$) соответствующий элемент из корневой подгруппы [7].

Пусть

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1(X_1, \dots, X_k) \in F_k, \\ w_2 &= w_2(Y_1, \dots, Y_l) \in F_l, \\ w_3 &= w_3(Z_1, \dots Z_m) \in F_m \text{ —} \end{aligned}$$

три нетривиальных слова с независимыми переменными, где F_k, F_l, F_m — свободные группы ранга k, l и m соответственно. Тогда

$$w := w_1 w_2 w_3 \in F_{k+l+m} \text{ —}$$

нетривиальное слово от переменных $\{X_p\}, \{Y_q\}, \{Z_r\}$. Основным результатом этой главы является следующая теорема:

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathcal{G}$ — простая односвязная группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, и пусть $G = \mathcal{G}(K)$. Положим, что $\mathcal{G}$ не является группой типов B_2 и G_2. Пусть, далее,*

$$\widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Тогда

$$G \setminus Z(G) \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}.$$

Мы доказываем этот результат редукцией к некой параболической группе $\mathcal{P}$ из $\mathcal{G}$ с фактором Леви, простые компоненты которого имеют тип A_r. Далее, мы используем теорему Лева о произведении трех регулярных классов сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_n(K)$, $n > 2$ [25] (что также использовалось в [24]) и лемму Вассерштайна-Виланд [30] о произведениях трех нецентральных классов подобия для групп $\mathrm{SL}_2(K)$. Также, мы используем представление элемента расщепимой простой группы в разложении Гаусса с заданной полупростой частью [12], [15].

Результат теоремы нельзя прямо распространить на случаи B_2 и G_2 с помощью методов, что мы используем здесь. Они будут рассмотрены в следующей главе.

1.2 Случай $\mathcal{G} = \mathrm{SL}_n$

1.2.1 Произведение классов подобия группы $\mathrm{SL}_n(K)$

Следующий результат Лева [25, теорема 3] является основой для случая

$$G = \mathrm{SL}_n(K).$$

Теорема 1.2.1. *Пусть*

$$M \in \mathrm{GL}_n(K) \setminus Z\big(GL_n(K)\big),$$

$n \geqslant 3$ *и пусть*

$$A_1, A_2, A_3 \in GL_n(K) \;-$$

три регулярные матрицы, такие что

$$\det A_1 \det A_2 \det A_3 = \det M.$$

Тогда существуют такие матрицы

$$A_1', A_2', A_3' \in \mathrm{GL}_n(K),$$

что A_i' сопряжена матрице A_i элементом из группы $\mathrm{SL}_n(K)$ и $M = A_1'A_2'A_3'$.

Таким образом, произведение любых трех регулярных классов сопряженности $C_1C_2C_2$ группы $\mathrm{SL}_n(K)$ содержит множество $\mathrm{SL}_n(K)\backslash Z\big(\mathrm{SL}_n(K)\big)$ при $n \geqslant 3$. Однако при $n = 2$ это неверно. При $n = 2$ мы заменим классы сопряженных элементов на классы подобия.

Определение 1.2.1. *Элементы $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_n(K)$ называются подобными, если*

$$g_2 = \sigma g_1 \sigma^{-1}$$

для некоторого $\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$. Класс подобия S_g элемента $g \in \mathrm{SL}_n(K)$ — это множество всех элементов группы $\mathrm{SL}_2(K)$, подобных g.

Далее мы воспользуемся результатом Вассерштайна-Виланд [30, лемма 6].

Лемма 1.2.1. *Пусть $G = \mathrm{SL}_2(K)$, где $|K| \geqslant 4$. Тогда любой нецентральный элемент $g \in \mathrm{SL}_2(K)$ содержится в произведении любых трех нецентральных классов подобия группы $\mathrm{SL}_2(K)$.*

Далее, по лемме 1.2.1 и теореме Лева получаем

Предложение 1.2.1. *Пусть $|K| \geqslant 4$. Тогда любой нецентральный элемент группы $\mathrm{SL}_n(K)$ содержится в произведении любых трех регулярных классов подобия группы $\mathrm{SL}_n(K)$.*

1.2.2 Полупростые регулярные элементы в образе вербального отображения

Нам потребуется следующее

Предложение 1.2.2. *Пусть Γ — полупростая алгебраическая группа, определенная над бесконечным полем K, и пусть*

$$\widetilde{w} : \Gamma(K)^n \to \Gamma(K) \ —$$

вербальное отображение ($w \neq 1$). Тогда существует полупростой регулярный элемент группы Γ в образе $\mathrm{Im}\, \widetilde{w}$.

Доказательство. Вербальное отображение

$$\widetilde{w} : \Gamma(\overline{K})^n \to \Gamma(\overline{K})$$

доминантно, согласно теореме А. Бореля [9]. Следовательно, существует открытое подмножество группы $X \subset \Gamma(\overline{K})$, содержащееся в $\mathrm{Im}\, \widetilde{w}$. Далее, множество полупростых регулярных элементов группы $\Gamma(\overline{K})$ — это непустое открытое подмножество Y в $\Gamma(\overline{K})$ [29, 2.14]. Следовательно, в группе $\Gamma(\overline{K})$ имеется непустое открытое множество

$$Z = X \cap Y$$

полупростых регулярных элементов, содержащихся в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$. Так как K — бесконечное поле, группа $\Gamma(K)$ плотна в $\Gamma(\overline{K})$ [8, 18.3], а, значит, множество $\widetilde{w}\big(\Gamma(K)^n\big)$ плотно в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ и, следовательно,

$$\widetilde{w}\big(\Gamma(K)^n\big) \cap Z \neq \varnothing.$$

□

1.2.3 Вербальные отображения групп $\mathrm{SL}_n(K)$

Отметим, что если $\widetilde{w} : G^n \to G$ — вербальное отображение, то образ $\widetilde{w}$ инвариантен относительно действия группы автоморфизмов группы G (это хорошо известный и очевидный факт, непосредственно вытекающий из определения вербального отображения). Поскольку сопряжение с элементом группы $\mathrm{GL}_n(K)$ является автоморфизмом группы $\mathrm{SL}_n(K)$, то, если $G = \mathrm{SL}_n(K)$ и $g \in \mathrm{Im}\,\widetilde{w}$, весь класс подобия S_g элемента g содержится в $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$.

Учитывая это замечание и предложения 1.2.1, 1.2.2, получим

Теорема 1.2.2. *Пусть K — бесконечное поле. Тогда при $n \geqslant 2$*

$$\mathrm{SL}_n(K) \setminus Z\big(\mathrm{SL}_n(K)\big) \subset \mathrm{Im}\widetilde{w_1 w_2 w_3}$$

для любых трех независимых нетривиальных вербальных отображений $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$ и $\widetilde{w}_3$ группы $\mathrm{SL}_n(K)$.

Доказательство. Ввиду предложения 1.2.2 существуют регулярные (полупростые) элементы

$$g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1, g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2, g_3 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3,$$

а, значит,

$$S_{g_1} \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1, S_{g_2} \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2, S_{g_3} \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3.$$

Поскольку $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}_2$ и $\widetilde{w}_3$ — независимые нетривиальные вербальные отображения группы $\mathrm{SL}_n(K)$, то

$$S_{g_1} S_{g_2} S_{g_3} \subset \mathrm{SL}_n(K).$$

Утверждение теоремы следует теперь из предложения 1.2.2. □

Замечание 1.2.1. *Теорема 1.2.2 доказана в [24] при $n \geqslant 3$. Для ее распространения на случай $n = 2$ мы воспользовались тем элементарным фактом, что классы сопряженных элементов можно заменить в данной задаче классами подобия и воспользоваться леммой Вассерштайна-Виланд.*

Поскольку теорема 1.2.2 закрывает доказательство теоремы 1.1.1 для групп типа A_r, в дальнейшем мы исключим из рассмотрения группы этого типа.

1.3 Строение подходящей параболической подгруппы $\mathcal{G}$

Пусть $\mathcal{T}$ — зафиксированный максимальный расщепимый над K тор из группы $\mathcal{G}$ и пусть $\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ — зафиксированная подгруппа Бореля (определенная над K), содержащая $\mathcal{T}$. Далее, пусть R — система корней, соответствующая тору $\mathcal{T}$ и пусть Π — фиксированная система простых корней из R, соответствующая $\mathcal{B}$.

В рассуждениях ниже мы исключаем случаи $R = A_r$, $R = B_2$ и $R = G_2$. Положим, что

$$T = \mathcal{T}(K),\ U = \mathcal{U}(K),\ U^- = \mathcal{U}^-(K),\ B = \mathcal{B}(K).$$

Здесь $\mathcal{B}^- = \mathcal{T}\mathcal{U}^-$ — противоположная подгруппа Бореля.

Для различных типов систем корней R мы определяем простую подгруппу $\mathcal{G}_1 \leqslant \mathcal{G}$, соответствующую подсистеме корней

$$R_1 = \langle \Pi \setminus X \rangle$$

для некоторого $X \subset \Pi$. А именно, R_1 — подсистема корней из R, порожденная простой системой корней $\Pi \setminus X$.

Далее, $\mathcal{G}_1$ — это подгруппа $\mathcal{G}$, порожденная корневыми подгруппами x_α для $\alpha \in R_1$ (эти группы определены над K). При этом максимальный тор

$$\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}$$

группы $\mathcal{G}_1$ порождается корневыми полупростыми подгруппами $h_\alpha(t)$ для всех $\alpha \in \Pi \setminus X$ [7, §3], а тор $\mathcal{T}$ — подгруппами $h_\alpha(t)$, $\alpha \in \Pi$. Отсюда следует, что $\mathcal{G}_1$ — односвязная группа, поскольку таковой является $\mathcal{G}$ [7, лемма 28].

Теперь определим подсистему корней R_1 так, чтобы группа $\mathcal{G}_1$ оказалась произведением групп типа A_r:

$$R = B_r\,(r > 2), C_r, D_r,\ \ R_1 := \{\varepsilon_i - \varepsilon_i \mid i \neq j \leqslant r\},\ \ \mathcal{G}_1 \approx \mathrm{SL}_r;$$
$$R = E_6,\ \ R_1 := R \setminus \{\alpha_1, \alpha_4\},\ \ \mathcal{G}_1 \approx \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_3;$$
$$R = E_7,\ E_8,\ \ R_1 := \big\langle \Pi \setminus \{\alpha_2\}\big\rangle,\ \ \mathcal{G}_1 \approx \mathrm{SL}_7 \text{ или } \mathcal{G}_1 \approx \mathrm{SL}_8;$$
$$R = F_4,\ \ R_1 := \big\langle \Pi \setminus \{\alpha_3\}\big\rangle,\ \ \mathcal{G}_1 \approx \mathrm{SL}_3 \times \mathrm{SL}_2.$$

Лемма 1.3.1. *Не существует корня $\alpha \in R$, ортогонального каждому корню $\beta \in R_1$.*

Доказательство.

Случай 1. $R = B_r, (r > 2), C_r, D_r$.

Корни $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ и ε_i, $2\varepsilon_i$ не могут быть ортогональны всем корням вида $\varepsilon_p - \varepsilon_q$.

Случай 2. $R = E_6$, $R_1 = \langle \alpha_2 \rangle \cup \langle \alpha_3 \rangle \cup \langle \alpha_5, \alpha_6 \rangle$.

Напомним, что в обозначениях [10]

$$\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\ \ \alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,\ \ \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,\ \ \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4.$$

Далее, все корни из R имеют вид

$$\pm\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 - \varepsilon_6 + \sum_{i=1}^{5} (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i\right),$$

где сумма

$$\sum_{i=1}^{5} \nu_i$$

четна и $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 5$.

Очевидно, не найдется корней вида $\pm\frac{1}{2}(\cdots)$, которые были бы ортогональны обоим корням α_2, α_3. Корни вида $\pm(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j)$, ортогональные обоим корням α_2, α_3, удовлетворяют условию $i \geqslant 3$. Но такой корень не может быть ортогонален обоим корням α_4, α_5.

Случай 3. $R = E_7$, $R_1 = \big\langle \Pi \setminus \{\alpha_2\}\big\rangle$.

Рассмотрим корни

$$\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1,\ \ \alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2,\ \ \alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3,\ \ \alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4,\ \ \alpha_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_5.$$

Среди корней вида $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 6$ не найдется корней, ортогональных всем α_i, $i \geqslant 3$. Также, среди корней вида

$$\pm\frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \sum_{i=1}^{6} (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i\right),$$

где сумма

$$\sum_{i=1}^{6} \nu_i$$

нечетна, нет корней, ортогональных всем α_i, $i \geqslant 3$, так как у такого корня все ν_i должны быть четными или нечетными.

Таким образом, корни, ортогональные всем α_i, $i \geqslant 3$ имеют вид $\pm(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)$. Но корни $\pm(\varepsilon_8 - \varepsilon_7)$ не ортогональны корню

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_8 - \varepsilon_7 + \varepsilon_1 - (\sum_{i=2}^{6} \varepsilon_i)\right).$$

Случай 4. $R = E_8$, $R_1 = \big\langle \Pi \setminus \{\alpha_2\} \big\rangle$.

Здесь к предыдущей последовательности α_i, $i \geqslant 3$ добавим $\alpha_8 = \varepsilon_7 - \varepsilon_6$. Среди корней вида $\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 8$ нет корней, которые были бы ортогональны всем α_i, $i \geqslant 3$. Также, среди корней вида

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8} (-1)^{\nu_i} \varepsilon_i\right),$$

где сумма

$$\sum_{i=1}^{6} \nu_i$$

четна, только корни вида

$$\pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i\right)$$

ортогональны всем α_i, $i \geqslant 3$. Но такие корни не будут ортогональны

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_8 - (\sum_{i=2}^{7} \varepsilon_i)\right).$$

Случай 5. $R = F_4$, $R_1 = \big\langle \Pi \setminus \{\alpha_3\} \big\rangle$.

Корни, ортогональные

$$\alpha_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3,\ \alpha_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 -$$

это в точности корни вида $\pm\varepsilon_1$ и $\frac{1}{2}\big(\pm\varepsilon_1 \pm (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)\big)$. Однако эти корни не ортогональны $\alpha_4 = \frac{1}{2}\big(\varepsilon_1 - (\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)\big)$. □

Заметим, что группа $\mathcal{G}_1$ построена как полупростая группа, порожденная корневыми подгруппами, которые соответствуют системе корней $R_1 = \langle \Pi \setminus X \rangle$

для какого-то множества простых корней X. Следовательно, $\mathcal{G}_1$ — коммутатор фактора Леви соответствующей параболической подгруппы $\mathcal{P}_1$. Пусть

$$\mathcal{U}_1 = R_u(\mathcal{P}_1).$$

Группа $\mathcal{U}_1$ порождается корневыми подгруппами $x_\alpha(t)$, $t \in \overline{K}$, $\alpha \in S$, где

$$S := R^+ \setminus R_1^+.$$

1.4 Подходящая фильтрация группы $\mathcal{U}_1$

Предложение 1.4.1. *Существует разложение*

$$S = \bigcup_{i=0}^{d} S_i$$

на непересекающиеся множества корней и такая фильтрация

$$\{\mathcal{U}_1^i\}_{i=0}^d$$

группы $\{\mathcal{U}_1\}$, *что выполнены следующие условия:*

a. $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^0$;

b. $\mathcal{U}_1^i/\mathcal{U}_1^{i+1} \leqslant Z(\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_1^{i+1})$ *для любых* i *(положим, что* $\mathcal{U}_1^{d+1} := \{0\}$*);*

c. *для любых* i *факторгруппа* $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_1^i/\mathcal{U}_1^{i+1}$ *изоморфна линейному пространству над полем* $\overline{K}$, *порожденному образами корневых подгрупп*

$$\langle x_\alpha(t) \mid \ t \in \overline{K}, \ \ \alpha \in S_i \rangle;$$

d. *действие сопряжениями группы* $\mathcal{G}_1$ *на группу* $\mathcal{U}_1$ *стабилизирует каждую подгруппу* $\mathcal{U}_1^i$ *и индуцирует* $\overline{K}$*-линейное действие на каждом факторе* $\mathcal{V}_i$.

Доказательство.

Лемма 1.4.1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$ *и пусть*

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^0 > \mathcal{U}_1^1 = [\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1] > \ldots \mathcal{U}_1^i = [\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_1^{i-1}] > \ldots -$$

центральный ряд $\mathcal{U}_1$. *Тогда существует такая последовательность подмножеств*

$$S = \widetilde{S}_0 \supset \widetilde{S}_1 \supset \ldots \supset \widetilde{S}_i \supset \ldots \supset \widetilde{S}_d \neq \varnothing,$$

что
$$\mathcal{U}_1^i = \langle x_\alpha(t) \mid \alpha \in \widetilde{S}_i,\ \ t \in \overline{K}\rangle$$
для любого i.

Доказательство. Группа $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1^0$ порождена корневыми подгруппами
$$\langle x_\alpha(t) \mid t \in \overline{K}\ \ \alpha \in S\rangle.$$
Положим $\widetilde{S}_0 := S$. Пусть группа $\mathcal{U}_1^i$ порождается корневыми подгруппами
$$\langle x_\alpha(t) \mid t \in \overline{K}\ \ \alpha \in \widetilde{S}_i\rangle$$
для некоторого подмножества $\widetilde{S}_i \subset S$. Рассмотрим коммутаторную формулу Шевалле
$$[x_\gamma(x), x_\alpha(y)] = \prod_{r\gamma+s\alpha\in R} x_{r\gamma+s\alpha}(c_{rs}x^r y^s), \tag{1.4.1}$$
где $0 \neq c_{rs} \in \mathbb{Z}$ [7, §3].

Пусть $\gamma \in \widetilde{S}_0 = S$, $\alpha \in \widetilde{S}_i$. Так как мы исключаем случай $R = G_2$, мы получаем в правой части (1.4.1) следующие множества корней вида $r\gamma + s\alpha$:

1. $\{\gamma + \alpha\}$, или
2. $\{\gamma + \alpha, \gamma + 2\alpha\}$, или
3. $\{\gamma + \alpha, 2\gamma + \alpha\}$.

В случае 1. имеем $x_{\gamma+\alpha}(t) \in \mathcal{U}_1^{i+1}$ для любых $t \in \overline{K}$.

В случае 2. мы можем взять $\delta := \gamma + \alpha$ и затем по формуле (1.4.1) для $\gamma := \delta$ и α получаем, что
$$x_{\delta+\alpha}(t) = x_{\gamma+2\alpha}(t) \in \mathcal{U}_1^{i+1}$$
для любых $t \in \overline{K}$.

Теперь, если мы воспользуемся (1.4.1) для γ и α, то получим, что
$$x_{\gamma+\alpha}(t) \in \mathcal{U}_1^{i+1}$$
для любых $t \in \overline{K}$.

Теперь рассмотрим случай 3. По (1.4.1) имеем
$$\Big[x_\gamma(z), \underbrace{[x_\gamma(x), x_\alpha(y)]}_{\in\mathcal{U}_1^{i+1}}\Big] = \underbrace{x_{2\gamma+\alpha}(c'xyz)}_{\in\mathcal{U}_1^{i+2}},$$

где $0 \neq c' \in \mathbb{Z}$. Здесь мы используем тот факт, что элементы корневой подгруппы $x_{2\gamma+\alpha}(t)$ коммутируют с элементами корневых подгрупп $x_\gamma(p)$ и $x_{\gamma+\alpha}(q)$.

Следовательно,

$$x_{2\gamma+\alpha}(t) \in \mathcal{U}_1^{i+2} \leqslant \mathcal{U}_1^{i+1}$$

для любых $t \in \overline{K}$. Так как

$$\big[x_\gamma(x), x_\alpha(y)\big] \in \mathcal{U}_1^{i+1},$$

то из (1.4.1) и условия 3. получаем $x_{\gamma+\alpha}(t) \in \mathcal{U}_1^{i+1}$ для любых $t \in \overline{K}$.

Таким образом, корневые подгруппы

$$\langle x_{r\gamma+s\alpha}(t) \mid t \in \overline{K}\rangle$$

содержатся в $\mathcal{U}_1^{i+1}$ для любых $\gamma \in R_1^+$, $\alpha \in \widetilde{S}_i$, $r, s \geqslant 1$. По формуле (1.4.1) получается, что группа $\mathcal{U}_1^{i+1}$ порождается корневыми подгруппами, которые соответствуют некоторым множествам $\widetilde{S}_{i+1} \subset \widetilde{S}_i$. Таким образом, мы получаем условие леммы индукцией по i. $\square$

Положим снова, что $\operatorname{char} K = 0$. Пусть $S_i := \widetilde{S}_i \setminus \widetilde{S}_{i+1}$. По лемме 1.4.1

$$\mathcal{U}_1^i \equiv \big\langle x_\alpha(t) \mid t \in \overline{K}, \alpha \in S_i\big\rangle (\operatorname{mod} \mathcal{U}_1^{i+1}). \tag{1.4.2}$$

Мы можем рассматривать факторгруппу $\mathcal{V}_i := \mathcal{U}_1^i / \mathcal{U}_1^{i+1}$ как линейное пространство размерности $|\widetilde{S}_i|$, порожденное образами $x_\alpha(t)$ в $\mathcal{V}_i$. Заметим, что действие группы $\mathcal{G}_1$ с помощью сопряжений на каждую группу $\mathcal{U}_1^i$ сохраняет $\mathcal{U}_1^i$ (это верно, так как $\mathcal{U}_1^i$ — член центрального ряда $\mathcal{U}_1$). Так как действие замкнутой группы $\mathcal{G}_1$ на $\mathcal{V}_i$ индуцировано действием на группе $\mathcal{U}_i$, оно является непрерывным в топологии Зарисского.

Лемма 1.4.2. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$. *Тогда каждый фактор* $\mathcal{V}_i$ *изоморфен линейному пространству над полем* $\overline{K}$, *порожденному образами корневых подгрупп*

$$\langle x_\alpha(t) \mid t \in \overline{K},\ \ \alpha \in S_i\rangle.$$

Действие сопряжениями из $\mathcal{G}_1$ *на* $\mathcal{V}_i$ *является* $\overline{K}$*-линейным.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{char} K = 0$, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ содержится в $\overline{K}$. Более того, множество $\mathbb{N}$ плотно в $\overline{K}$. Далее, имеем

$$ng(v) = g(nv)$$

для любых $g \in \mathcal{G}_1$, $v \in \mathcal{V}_i$ и $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, у нас есть условие

$$\alpha g(v) = g(\alpha v)$$

для любых $\alpha \in \overline{K}$. □

По лемме 1.4.2 получаем, что для любых i и любых $\alpha \in S_i$, $\gamma \in R_1$ выполнено

$$r\gamma + s\alpha \notin S_i, \tag{1.4.3}$$

если $s > 1$. Действительно, по формуле (1.4.1) получается, что если

$$r\gamma + s\alpha \in S_i,$$

где $s > 1$, то действие $x_\gamma(\mu) \in \mathcal{G}_1$, $\mu \in \overline{K}$ сопряжениями на $\mathcal{V}_i$ не является линейным, так как

$$x_\gamma(\mu)x_\alpha(y)x_\gamma(-\mu) = \big[x_\gamma(\mu), x_\alpha(y)\big]x_\alpha(y) \equiv \\ \equiv \prod_{r\gamma+s\alpha \in S_i} x_{r\gamma+s\alpha}(c_{rs}\mu^r y^s)x_\alpha(y)(\operatorname{mod}\mathcal{U}_1^{i+1}). \tag{1.4.4}$$

Теперь пусть $\operatorname{char} K = p \neq 0$. Мы можем определить фильтрацию $\mathcal{U}_1^i$ с помощью формулы (1.4.2). Определим разложение множества корней S на те же подмножества, что и в характеристике ноль

$$S = \bigcup_{i=0}^{d} S_i.$$

Здесь d — номер фильтрации, соответствующей центру в случае нулевой характеристики. Теперь положим (при $\operatorname{char} K = p$), что

$$\mathcal{U}_1^d := \big\langle x_\alpha(t) \mid t \in \overline{K},\ \ \alpha \in S_d \big\rangle,$$
$$\mathcal{U}_1^i := \big\langle x_\alpha(t) \mid t \in \overline{K},\ \ \alpha \in S_i \big\rangle \mathcal{U}_1^{i+1}.$$

В случае, когда $\operatorname{char} K = p$, эта фильтрация может не быть центральным рядом $\mathcal{U}_1^i$, но утверждение леммы 1.4.2 также верно для фильтрации $\mathcal{U}_1^i$. Действительно, условия a. и c. прямо следует из определения $\mathcal{U}_1^i$ (1.4.2). Далее, даже в случае $\operatorname{char} K = p$ у нас выполняется условие b.:

$$\mathcal{U}_1^i/\mathcal{U}_1^{i+1} \leqslant Z(\mathcal{U}_1/\mathcal{U}_1^{i+1}),$$

поскольку мы выбрали подмножества S_i таким образом, что

$$\gamma + \alpha \in \bigcup_{j>i} S_j$$

для любых $\alpha \in S_i$ и $\gamma \in S$ (чтобы получить центральные ряды в нулевой характеристике).

Линейность действия $x_\gamma(\mu)$ (где $\gamma \in R_1$, $\mu \in \overline{K}$) на $\mathcal{V}_i$ следует из условий (1.4.3) и (1.4.4), так как при $s \leqslant 1$ в (1.4.4) у нас есть линейное действие $x_\gamma(\mu)$ на $\mathcal{V}_i$.

Таким образом, мы построили фильтрацию группы $\mathcal{U}_1$, удовлетворяющую условиям a., b., c. и d. из предложения. □

Теперь положим

$$G_1 = \mathcal{G}_1(K), \;\; U_1^i := \mathcal{U}_1^i(K).$$

Так как $\mathcal{G}$ — расщепимая K-группа и так как подгруппы $\mathcal{U}_1^i$ порождены K-определенными корневыми подгруппами, из предложения 1.4.1 получаем

$$\begin{aligned} U_1^i &= \langle x_\alpha(t) \mid t \in K, \alpha \in S_i \rangle U_1^{i+1}, \\ V_i &:= \mathcal{V}_i(K) = U_1^i / U_1^{i+1}. \end{aligned}$$

Также заметим, что группа G_1 стабилизирует каждую группу U_1^i. Таким образом, получаем следующее

Предложение 1.4.2. *Существуют разложение*

$$S = \bigcup_{i=0}^{d} S_i$$

на непересекающиеся подмножества корней и такая фильтрация $\{U_1^i\}_{i=0}^d$ *группы* $\{U_1\}$*, что:*

a. $U_1 = U_1^0$*;*

b. $U_1^i/U_1^{i+1} \leqslant Z(U_1/U_1^{i+1})$ *для любых* i *(здесь* $U_1^{d+1} = \{0\}$*);*

c. для любого i *факторгруппа* $V_i = U_1^i/U_1^{i+1}$ *изоморфна линейному пространству над полем* K*, порожденному образами корневых подгрупп*

$$\langle x_\alpha(t) \mid t \in K, \;\; \alpha \in S_i \rangle;$$

d. действие группы G_1 *на* U_1 *сопряжениями стабилизирует каждую подгруппу* U_1^i *и индуцирует* K*-линейное действие на каждом факторе* V_i*.*

1.5 Действие линейных операторов без неподвижных точек на линейных пространствах V_i

Определение 1.5.1. *Пусть V — линейное пространство над полем K. Будем говорить, что линейный оператор $g \in \mathrm{GL}(V)$ действует без неподвижных точек, если $g(v) \neq v$ для любых $v \in V$, $v \neq 0$.*

Замечание 1.5.1. *Заметим, что если $\dim_K V < \infty$ и линейный оператор g действует без неподвижных точек, то линейный оператор $g - 1$ обратим.*

Лемма 1.5.1. *Пусть A — нильпотентная группа с конечной последовательностью нормальных подгрупп $\{A^i\}_{i=0}^{i=d}$ и пусть g — автоморфизм группы A. Положим*

a. $A = A^0$;

b. $A^i/A^{i+1} \leqslant Z(A/A^{i+1})$ для любых i (здесь $A^{d+1} := \{0\}$);

c. для любых i группа $B^i = A^i/A^{i+1}$ изоморфна аддитивной группе конечномерного линейного пространства над полем F .

d. g стабилизирует группу A^i для любых i и для любых i индуцирует действие g на B^i — F-линейное действие без неподвижных точек.

Тогда для любых $a \in A$ существует такой елемент $b \in A$, что $a = g(b)b^{-1}$.

Доказательство. Пусть $d = 0$. Тогда $A = A^0 = B^0$, где B^0 — конечномерное линейное пространство над полем K и g — линейный оператор, действующий без неподвижных точек на A^0. Тогда утверждение следует из замечания 1.5.1 (мы используем аддитивную форму $g(b) - b$ для $g(b)b^{-1}$).

Пусть утверждение выполняется для любых соответствующих разрешимых абелевых групп A' с соответствующей фильтрацией $\{A'^i\}_{i=0}^{i=d-1}$. Теперь положим, что $A' = A/A^d$ и пусть $a \in A$. По предположению индукции существует такой элемент $b' \in A$, что

$$a \equiv g(b')b'^{-1}(\mathrm{mod}\, A^d).$$

Следовательно, $a = g(b')b'^{-1}a'$ для некоторого $a' \in A^d$. Тогда по условиям леммы

$$a' = g(b'')b''^{-1},$$

где $b'' \in A^d$.

Так как по условию b. $A^d \leqslant Z(A)$, получаем

$$a = g(b'b'')(b'b'')^{-1}.$$

□

Теперь вернемся к действию группы $\mathcal{G}_1$ на линейных пространствах $\mathcal{V}_i$. Напомним, что $\mathcal{T}_1 \leqslant \mathcal{T}$ — максимальный тор группы $\mathcal{G}_1$, порожденный корневыми полупростыми элементами $h_\alpha(t)$, где $t \in \overline{K}$ и $\alpha \in \Pi \setminus X$ (напомним, что $R_1 = \langle \Pi \setminus X \rangle$).

Лемма 1.5.2. *Существует открытое по Зарисскому множество $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}_1$ такое, что любой элемент $g \in \mathcal{X}$ действует без неподвижных точек на линейном пространстве $\mathcal{V}_i$ для любых i.*

Доказательство. Пространство $\mathcal{V}_i = \mathcal{U}_1^i/\mathcal{U}_1^{i+1}$ порождено образами корневых подгрупп $\big\langle x_\alpha(t) \big\rangle$ для некоторого $\alpha \in S = R^+ \setminus R_1^+$. Таким образом, нам нужно проверить, что для любого корня $\alpha \in S$ существует такой корень $\beta \in R_1$, что $(\alpha, \beta) \neq 0$. Действительно, в этом случае $\alpha : \mathcal{T}_1 \to \overline{K}^*$ — нетривиальный гомоморфизм, а, значит, $\operatorname{Ker} \alpha < \mathcal{T}_1$ — собственный подтор. Следовательно,

$$\mathcal{X} := \mathcal{T}_1 \setminus \bigcup_{\alpha \in S} \operatorname{Ker} \alpha \text{ —}$$

непустое открытое в $\mathcal{T}_1$ множество элементов, действующих без неподвижных точек на всех $\mathcal{V}_i$. Таким образом, утверждение леммы следует из леммы 1.5.1.

□

Лемма 1.5.3. *Существует открытое по Зарисскому множество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{G}_1$ такое, что любой элемент $g \in \mathcal{Y}$ действует без неподвижных точек на линейном пространстве $\mathcal{V}_i$ для любых i.*

Доказательство. Морфизм $\varphi : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_1$, полученный по формуле

$$\varphi\big((x, y)\big) = yxy^{-1},$$

является доминантным (его образ содержит все полупростые элементы группы $\mathcal{G}_1$). Пусть $\mathcal{X} \subset \mathcal{T}_1$ — множество из леммы 1.5.2. Множество $\mathcal{X} \times \mathcal{G}_1$ — открытое непустое подмножество в $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{G}_1$ и, следовательно, существует такое открытое подмножество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{G}_1$, что для любого $g \in \mathcal{Y}$ найдется прообраз

$$(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{G}_1,$$

соответствующий φ. Таким образом, если $g \in \mathcal{Y}$, то $g = yxy^{-1}$ для некоторого $x \in \mathcal{X}$. Но элементы $x \in \mathcal{X} \subset \mathcal{T}_1$ действуют без неподвижных точек на любом пространстве $\mathcal{V}_i$, а значит, и сопряженный ему элемент ygy^{-1} также действует без неподвижных точек на любом пространстве $\mathcal{V}_i$. □

Определение 1.5.2. *Элемент группы $\mathcal{G}_1$ будем называть $\mathcal{U}_1$-сдвигающим, если он действует без неподвижных точек на любом факторе $\mathcal{V}_i$.*

Лемма 1.5.4. *Существует открытое по Зарисскому множество $\mathcal{Z} \subset \mathcal{G}_1$ такое, что любой элемент $g \in \mathcal{Z}$ является регулярным, полупростым и $\mathcal{U}_1$-сдвигающим.*

Доказательство. Множество регулярных полупростых элементов в любой полупростой группе является открытым по Зарисскому подмножеством в этой группе [29, 2.14], и, таким образом, утверждение следует из леммы 1.5.3. □

1.6 Доказательство теоремы 1.1.1

Лемма 1.6.1. *Пусть $w \in F_d$ — нетривиальное слово и пусть*

$$\widetilde{w} : G_1^d \to G_1 \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Тогда существует такой элемент $g \in \operatorname{Im} \widetilde{w}$, что g — регулярный, полупростой (в $\mathcal{G}_1$) и $\mathcal{U}_1$-сдвигающий.

Доказательство. Пусть $\widetilde{w} : \mathcal{G}_1^d \to \mathcal{G}_1$ — вербальное отображение полупростой алгебраической группы $\mathcal{G}_1$, соответствующее тому же слову $\widetilde{w}$. Из доказательства предложения 1.2.2 следует, что $\widetilde{w}(\mathcal{G}_1^d)$ содержит непустое открытое подмножество $\mathcal{Z}'$ полупростых элементов группы $\mathcal{G}_1$. Ввиду леммы 1.5.4, $\widetilde{w}(\mathcal{G}_1^d)$ содержит непустое открытое подмножество $\mathcal{Z}'' = \mathcal{Z}' \cap \mathcal{Z}$ полупростых элементов группы $\mathcal{G}_1$. Поскольку $G_1 = \mathcal{G}_1(K)$ — подгруппа, плотная в $\mathcal{G}_1$ [8, 18.3], существует элемент $g \in \widetilde{w}(G_1^d) \cap \mathcal{Z}''$. □

Напомним, что

$$w_1 \in F_k, w_2 \in F_l, w_3 \in F_m \text{ —}$$

три нетривиальных слова, $w = w_1 w_2 w_3$ и

$$\widetilde{w}_1 : G^k \to G,\ \widetilde{w}_2 : G^l \to G,\ \widetilde{w}_3 : G^m \to G,\ \widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G \text{ —}$$

соответствующие вербальные отображения.

Лемма 1.6.2. *Существуют такие элементы*

$$g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1,\ \ g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2,\ \ g_3 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3,$$

что

1. *элементы* $g_1, g_2, g_3 \in G_1$*;*

2. *элементы* g_1, g_2, g_3 *— регулярные полупростые в* G_1*, действующие без неподвижных точек на любом линейном пространстве* $V_i = U_1^i/U_1^{i+1}$*;*

3. $xg_1x^{-1}yg_2y^{-1}zg_3z^{-1} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$ *для любых* $x, y, z \in G$*.*

Доказательство. Пусть $(\widetilde{w}_i)_{|G_1}$ — ограничение вербального отображения $\widetilde{w}_i$ на G_1^a, где

$$a = k, l, m.$$

По лемме 1.6.1 получаем такой элемент

$$g_i \in \mathrm{Im}\,(\widetilde{w}_i)_{|G_1} \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_i,$$

что g_i — регулярный полупростой элемент из $\mathcal{G}_1$ (следовательно, регулярный полупростой элемент в G_1) и g_i — $\mathcal{U}_1$-сдвигающий. Так как

$$G_1 = \mathcal{G}_1(K) \leqslant \mathcal{G}_1,$$

то элемент g_i сохраняет фильтрацию $U_i = \mathcal{U}_i(K)$ и действует без неподвижных точек на

$$V_i = U_i/U_{i+1} \leqslant \mathcal{V}_i$$

по предложению 1.4.2 и условию 2.

Таким образом, получаем условия 1. и 2.

Так как образ любого вербального отображения инвариантен относительно сопряжения, получаем

$$xg_1x^{-1} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1,\ \ yg_2y^{-1} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2,\ \ zg_3z^{-1} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3$$

для любых $x, y, z \in G$ и, следовательно,

$$xg_1x^{-1}yg_2y^{-1}zg_3z^{-1} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w} = \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1\,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2\ \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3.$$

□

Теперь мы можем доказать теорему 1.1.1.

Доказательство. Зафиксируем любой регулярный полупростой элемент

$$h \in T_1 = \mathcal{T}_1(K).$$

Такой элемент существует, так как K — бесконечное поле.

Тогда любой нецентральный элемент $g \in G$ сопряжен элементу вида vhu для некоторых $u \in U$, $v \in U^-$ ([12], [15]). Далее, мы можем представить $v = v_0 v_1$, $u = u_1 u_0$, где $v_1 \in U^- \cap G_1$, $v_0 \in U_1^-$ (здесь U_1^- — унипотентный радикал противоположной параболической подгруппы $\mathcal{P}^-(K)$), $u_1 \in U \cap G_1$, $u_0 \in U_1$. Следовательно, существует такой элемент $\gamma \in G$, что

$$\gamma g \gamma^{-1} = vhu = v_0 \underbrace{v_1 h u_1}_{:=\delta \in G_1} u_0. \tag{1.6.1}$$

Отметим, что $\delta = \prod_j \delta_j$, где δ_j — проекция δ на простую компоненту j, изоморфную $\mathrm{SL}_{d_j}(K)$ (SL_{d_j} простая как алгебраическая группа).

Так как h — регулярный полупростой элемент из G_1, то любой

$$\delta_i \notin Z\big(\mathrm{SL}_{d_i}(K)\big).$$

Действительно, если $\delta_i \in Z\big(\mathrm{SL}_{d_i}(K)\big)$, то в любом разложении v, u в (1.6.1) на произведение элементов корневых подгрупп не найдется элементов корневых подгрупп из группы $\mathrm{SL}_{d_i}(K)$. Таким образом,

$$\delta \sigma \delta^{-1} = h \sigma h^{-1}$$

для любых $\sigma \in \mathrm{SL}_{d_i}(K)$. Однако h — регулярный полупростой элемент группы

$$G_1 = \prod_i \mathrm{SL}_{d_i}(K)$$

и, следовательно, сопряжение с h нетривиально на любом компоненте $\mathrm{SL}_{d_i}(K)$.

Также, любой $g_i \in G_1$, $i = 1, 2, 3$ является произведением полупростых элементов

$$g_i = \prod_j g_{ij},$$

где g_{ij} — проекция g_i на простую компоненту j. Так как g_i — регулярный элемент в G_1, то любой элемент g_{ij} является регулярным полупростым элементом из $\mathrm{SL}_{d_j}(K)$. По теореме 1.2.2 получаем, что любой нецентральный элемент группы $\mathrm{SL}_d(K)$ содержится в произведении любых трех регулярных классов подобия. Следовательно, мы можем представить элемент δ в виде произведения элементов классов подобия в G_1 элементов g_1, g_2, g_3.

Мы можем предположить, что $g_1g_2g_3 = \delta$. По предложению 1.4.2 и леммам 1.5.1 и 1.6.2 существуют такие элементы $v' \in U_1^-$, $u' \in U_1$, что $v_0 = [v', g_1]$, $u_0 = [g_3^{-1}, u']$. Таким образом, получаем

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w} \ni v'g_1v'^{-1}g_2u'g_3u'^{-1} = [v', g_1]g_1g_2g_3[g_3^{-1}, u'] = v_0\delta u_0 = \gamma g\gamma^{-1}.$$

Теорема доказана. $\square$

Глава 2

Произведения двух вербальных отображений простых расщепимых алгебраических групп. Случай групп типа B_2 и G_2

2.1 Предварительные сведения

В этой главе мы рассматриваем простые односвязные группы $\mathcal{G}$ типов B_2 и G_2, определенные и расщепимые над бесконечным полем K. Для расщепимой группы $\mathcal{G}$ имеется разложение Брюа

$$\mathcal{G} = \bigcup_{w \in W} \mathcal{B}\ \mathfrak{n}_w\ \mathcal{B},$$

где $\mathcal{B}$ — K-определенная подгруппа Бореля группы $\mathcal{G}$ и $\mathfrak{n}_w$ — фиксированный прообраз элемента w группы Вейля W в $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ — нормализаторе соответствующего максимального K-расщепимого тора из $\mathcal{G}$. Положим $\mathfrak{n}_0 := n_{w_0}$, где w_0 — элемент максимальной длины группы Вейля. Большая клетка $\mathcal{B}\,\mathfrak{n}_0\,\mathcal{B}$ — это открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{G}$ и другие клетки Брюа лежат в замыкании большой клетки (некоторые вопросы, касающиеся больших клеток, см., например, в [21]). Также, у нас есть разложение Брюа расщепимой простой группы $G = \mathcal{G}(K)$:

$$G = \bigcup_{w \in W} B\,\mathfrak{n}_w\,B,$$

где $B = \mathcal{B}(K)$ и $\mathfrak{n}_w$ — фиксированный прообраз элемента группы Вейля в $N_G(T)$ — нормализаторе $T = \mathcal{T}(K)$ (в частности, мы предполагаем ниже, что $\mathfrak{n}_0 \in N_G(T)$). Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема 2.1.1. *Пусть $\mathcal{G}$ — группа типов B_2 или G_2. Тогда*

$$B\,\mathfrak{n}_0\,B \subset \operatorname{Im} \widetilde{w},$$

где $w = w_1 w_2 w_3$ — произведение трех нетривиальных слов с независимыми переменными.

В этой главе мы также исследуем вопрос, когда некоторые классы “больших элементов” принадлежат образу вербального отображения $\widetilde{w}$, где $w = w_1 w_2$ — произведение двух слов с независимыми переменными.

Напомним, что элемент $g \in G$ называется *расщепимым* над K, если g сопряжен с некоторым элементом из B. В частности, любой расщепимый полупростой элемент сопряжен с элементом из группы T.

Здесь мы доказываем следующий результат:

Теорема 2.1.2. *Пусть $w = w_1 w_2$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда*

1. *любой регулярный расщепимый полупростой элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G — группа типов A_r, C_r, G_2 или K — совершенное поле, у которого $\dim K \leqslant 1$;*

2. *любой регулярный унипотентный элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G — группа типа A_r или K — совершенное поле, характеристика которого не является плохим простым числом для G и $\dim K \leqslant 1$.*

Здесь $\dim K$ — когомологическая размерность K [29]. Ниже мы разделим теорему 2.1.2 на две части: теорема 2.3.1 и теорема 2.3.2.

Для групп над полями характеристики ноль мы получаем следующий результат:

Пусть K — поле характеристики ноль, а $\mathcal{H}$ — простая алгебраическая группа, определенная над полем K. Предположим, что $\mathcal{H}$ — изотропная, но не обязательно расщепимая группа. Пусть, далее, $H = \mathcal{H}(K)$ и $w = w_1 w_2 \in F_n$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда любой унипотентный элемент поля K лежит в образе вербального отображения $\widetilde{w} : H^n \to H$.

В этой главе мы будем использовать следующие обозначения:

$\mathcal{G}$ — простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K и $G = \mathcal{G}(K)$ — группа K-точек группы $\mathcal{G}$;

$\operatorname{char} K$ — характеристика K;

R — система корней, соответствующая $\mathcal{G}$ (мы нумеруем корни в соответствии с [10]);

$\mathcal{T}$ — зафиксированный максимальный тор $\mathcal{G}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ — его нормализатор в $\mathcal{G}$;

$T = \mathcal{T}(K)$ и $N_G(T)$ — нормализатор подгруппы T в G;

$\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})/\mathcal{T} = W \approx W(R)$, где $W(R)$ — группа Вейля системы корней R (так как K — бесконечное поле, то $N_G(T)/T \approx W$);

$\mathcal{B} = \mathcal{T}\mathcal{U}$ — зафиксированная K-подгруппа Бореля, соответствующая $\mathcal{T}$;

$\mathcal{U}$ — унипотентный радикал $\mathcal{B}$;

для $\alpha \in R$ мы обозначим соответствующую корневую подгруппу $\mathcal{X}_\alpha \leqslant U$;

$$B = \mathcal{B}(K), U = \mathcal{U}(K), X_\alpha = \mathcal{X}_\alpha(K).$$

Здесь мы рассматриваем топологию Зарисского на $\mathcal{G}$ и, следовательно, "открытое множество" и "замкнутое множество" означает открытое и замкнутое множество по Зарисскому.

Мы отождествляем $\mathcal{G}$ с группой $\mathcal{G}(\overline{K})$, где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание K.

Элемент $g \in G$ называется регулярным, если он регулярен в $\mathcal{G}$.

Для слова w мы будем обозначать через $\widetilde{w}$ вербальное отображение

$$\widetilde{w} : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G},$$

а также

$$\widetilde{w} : G^n \to G.$$

2.2 Регулярные классы сопряженных элементов группы G

2.2.1 Сечение регулярных классов сопряженных элементов простой односвязной алгебраической группы

Пусть $R = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle$ — зафиксированная система корней, соответствующая тору $\mathcal{T}$. Для корня $\alpha \in R$ обозначим через w_α отражение из группы Вейля W, соответствующее α. Для корня α обозначим через $\mathfrak{n}_\alpha$ любой элемент из $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$, соответствующий отражению $w_\alpha \in W$.

Определение 2.2.1. *Элемент Кокстера $w_c \in W$ — это произведение*

$$w_c = \prod_{i=1}^{r} w_{\alpha_i} = w_{\alpha_{i_1}} w_{\alpha_{i_2}} \cdots w_{\alpha_{i_r}}. \tag{2.2.1}$$

Произведение в (2.2.1) может быть взято в любом порядке [10, VI, §1]. Мы будем обозначать

$$\mathfrak{n}_c = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i}$$

и также будем называть элемент $\mathfrak{n}_c$ элементом Кокстера группы $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$. Мы можем выбрать элементы $\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ таким образом, что

$$\mathfrak{n}_{\alpha_i}, \mathfrak{n}_c \in N_G(T).$$

Будем также называть $\mathfrak{n}_c$ элементом Кокстера группы $N_G(T)$.

Заметим, что для любого $t \in \mathcal{T}$ (соответственно, $t \in T$) элемент $t\mathfrak{n}_c$ также является элементом Кокстера из $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ (соответственно, $N_G(T)$).

Для любого зафиксированного элемента Кокстера $\mathfrak{n}_c$ обозначим

$$\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c} = \mathcal{X}_{\beta_1}\mathcal{X}_{\beta_2}\cdots\mathcal{X}_{\beta_r}, \tag{2.2.2}$$

где

$$\beta_k = w_{\alpha_{i_r}} w_{\alpha_{i_{r-1}}} \cdots w_{\alpha_{i_{k+1}}}(\alpha_k).$$

Заметим, что β_k — положительные корни [10, VI, §1, предложение 33]. Тогда множество

$$\mathfrak{n}_c\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$$

является сечением регулярных классов сопряженности из $\mathcal{G}$ [29], то есть, любой класс сопряженных регулярных элементов $\mathcal{C}$ из $\mathcal{G}$ пересекается с $\mathfrak{n}_c\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$ только в одной точке. Любая перестановка отражений w_{α_i} в (2.2.1) также дает нам элемент Кокстера из W. Поэтому, если мы зафиксируем элемент Кокстера w_c, то w_c^{-1} также будет элементом Кокстера из W. Это выполняется, так как w_c^{-1} — произведение отражений w_{α_i}, взятых в обратном порядке.

Если мы зафиксируем элемент Кокстера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$, то любой элемент вида $t\mathfrak{n}_c$ или $t\mathfrak{n}_c^{-1}$ также является элементом Кокстера для любого $t \in T$ и, следовательно, множества $t\mathfrak{n}_c\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$ и $t\mathfrak{n}_c^{-1}\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c^{-1}}$ — это сечения регулярных классов сопряженности из группы $\mathcal{G}$.

2.2.2 Подмножества $\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c}$ группы G.

Отметим, что множество $\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$ в (2.2.2) — замкнутая K-определенная подгруппа в $\mathcal{G}$ [29, 7.1, 7.2] и, следовательно, $\mathfrak{n}_c\mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}$ — замкнутое K-определенное множество $\mathcal{G}$. Более того у нас выполняется соотношение

$$\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c} := \mathfrak{n}_c \mathcal{M}_{\mathfrak{n}_c}(K) = \mathfrak{n}_c X_{\beta_1} X_{\beta_2} \cdots X_{\beta_r}, \text{ где } \mathfrak{n}_c X_{\beta_1} X_{\beta_2} \cdots X_{\beta_r} \leqslant U$$

Ниже мы будем использовать следующий результат:

Предложение 2.2.1. *Пусть $S_1, S_2 \subset G$ — два G-инвариантных подмножества относительно действия группы G на G сопряжениями. Предположим, что*

$$S_1 \cap \mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c} \neq \varnothing, \;\; S_2 \cap \mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c} \neq \varnothing \tag{2.2.3}$$

для любого элемента Кокстера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$. Тогда множество $S_1 S_2$ содержит все регулярные расщепимые полупростые элементы группы G.

Доказательство. Пусть $t \in T$. Так как $t\mathfrak{n}_c^{-1}$ — также элемент Кокстера из $N_G(T)$, то по условию (2.2.3) получаем, что существуют элементы

$$g_1 = t\mathfrak{n}_c^{-1} u_1 \in S_1, \;\; g_2 = \mathfrak{n}_c u_2 \in S_2$$

для некоторых $u_1, u_2 \in U$.

Так как S_1, S_2 — G-инвариантные множества, получаем, что

$$g_1' = u_1 t \mathfrak{n}_c^{-1} \in S_1$$

и, следовательно,

$$g_1' g_2 = (u_1 t \mathfrak{n}_c^{-1})(\mathfrak{n}_c u_2) = t \underbrace{(t^{-1} u_1 t) u_2}_{:= u \in U} = tu \in S_1 S_2. \tag{2.2.4}$$

Далее, если t — регулярный элемент из T, мы можем найти такой элемент $v \in U$, что

$$vtv^{-1} = tu$$

(см., например, [17]).

Таким образом, из (2.2.4) следует, что

$$t = v^{-1}(tu)v \in S_1 S_2.$$

□

2.2.3 Специальные элементы Кокстера

Пусть
$$U^* = \langle X_\alpha \mid \alpha \in R^+,\ \ ht(\alpha) > 1\rangle,$$
где $ht(\alpha)$ — высота α в соответствии с системой простых корней. Тогда
$$U = X_{\alpha_1} X_{\alpha_2} \cdots X_{\alpha_r} U^*.$$
Следовательно, любой элемент $u \in U$ можно представить в виде
$$u = u_1 u_2 \cdots u_r u^*, \tag{2.2.5}$$
где $u_i \in X_{\alpha_i}$, $u^* \in U^*$.

Пусть $u_i \in X_{\alpha_i}$, $u' \in U$ — зафиксированные элементы и пусть $R \neq A_1, A_2$. Тогда существует такой элемент Кокстера $w_c \in W$, что для любого его прообраза $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$ и любого $u' \in U$ существует элемент $v \in U$, удовлетворяющий равенству
$$[u'\mathfrak{n}_c, v] = u_1 u_2 \cdots u_r u^* \tag{2.2.6}$$
для некоторого $u^* \in U^*$ [14, теорема 2.1]. Мы будем называть такой элемент Кокстера $w_c \in W$ и любой его прообраз $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$ *специальным элементом Кокстера*. Мы воспользуемся следующей вариацией формулы (2.2.6):

Предложение 2.2.2. *Пусть $R \neq A_1, A_2$ и пусть $\mathfrak{n}_c$ — специальный элемент Кокстера. Далее, пусть $u', u'' \in U$, $u_i \in X_{\alpha_i}$ — зафиксированные элементы. Тогда существуют такие элементы $v \in U$, $u^* \in U^*$, что*
$$(u'\mathfrak{n}_c)(v\mathfrak{n}_c^{-1}u''v^{-1}) = u_1 u_2 \cdots u_r u^*.$$

Доказательство. Положим $y = u'u''$. Тогда
$$y \equiv y_1 y_2 \cdots y_r (\operatorname{mod} U^*) \tag{2.2.7}$$
для некоторых $y_i \in X_{\alpha_i}$.

Тогда из (2.2.6) мы можем найти такие элементы $v \in U$, $u^{*\prime} \in U^*$, что
$$[u'\mathfrak{n}_c, v] = (u_1 y_1^{-1})(u_2 y_2^{-1}) \cdots (u_r y_r^{-1}) u^{*\prime}. \tag{2.2.8}$$
Далее
$$(u'\mathfrak{n}_c)v(\mathfrak{n}_c^{-1}u'')v^{-1} = \underbrace{(u'\mathfrak{n}_c)v(\mathfrak{n}_c^{-1}u'^{-1})v^{-1}}_{=[u'\mathfrak{n}_c, v]}(v\,\underbrace{u'u''}_{=y}\,v^{-1}) \overset{(2.2.8)}{=}$$
$$= (u_1 y_1^{-1})(u_2 y_2^{-1}) \cdots (u_r y_r^{-1}) u^{*\prime}(\underbrace{\ vyv^{-1}\ }_{\equiv y (\operatorname{mod} U^*)}) \overset{(2.2.7)}{=} u_1 u_2 \cdots u_r u^*$$

для некоторого $u^* \in U^*$. □

2.2.4 Регулярные полупростые элементы, лежащие в образе вербального отображения

Основным моментом в доказательстве теоремы [24], является существование регулярных полупростых элементов в образах любого вербального отображения в случае бесконечного поля K. Здесь мы воспользуемся следующим фактом:

Предложение 2.2.3. *Пусть $\widetilde{w} : G^n \to G$ — нетривиальное вербальное отображение. Тогда можно найти бесконечное множество регулярных полупростых элементов, содержащихся в множестве*

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w} \cap B\, \mathfrak{n}_0\, B.$$

Доказательство. Множество $\widetilde{w}(\mathcal{G})$ содержит открытое непустое подмножество $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}$ в соответствие с теоремой А. Бореля [9]. Множество $\mathcal{B}\, \mathfrak{n}_0\, \mathcal{B}$ также открыто и непусто в $\mathcal{G}$ [28, 8.3.11]. Следовательно, $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cap B\, \mathfrak{n}_0\, \mathcal{B}$ — также открытое непустое подмножество $\mathcal{G}$. Далее, множество $\mathcal{S}_r$ полупростых регулярных элементов, содержащихся в группе $\mathcal{G}$, содержит открытое непустое подмножество O'' [8, 12.1, 12.3]. Таким образом множество $\mathcal{O}''' = \mathcal{O}' \cap \mathcal{O}''$ открыто и не пусто в $\mathcal{G}$. Множество G плотно в $\mathcal{G}$ [8, 18.3], и, следовательно, множество $G \cap \mathcal{O}'''$ бесконечно и любой его элемент является регулярным и полупростым в G и, так как $G \cap \mathcal{B}\mathfrak{n}_0\mathcal{B} = B\mathfrak{n}_0 B$, также принадлежит пересечению $\mathrm{Im}\ \widetilde{w} \cap B\mathfrak{n}_0 B$. □

2.3 Произведение двух независимых вербальных отображений G

Пусть

$$\widetilde{w}_1 : G^k \to G,\ \ \widetilde{w}_2 : G^l \to G\ —$$

два вербальных отображения с независимыми переменными, где $k + l = n$ и пусть

$$\widetilde{w} = \widetilde{w_1 w_2} : G^n \to G\ —$$

вербальное отображение, соответствующее произведению $w_1 w_2$. Тогда

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w} = \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1\ \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2.$$

2.3.1 Регулярные расщепимые полупростые элементы

В [24] было доказано, что в образе вербального отображения

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w} = \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1\, \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$$

можно найти полупростые регулярные расщепимые элементы из G. Тогда разложение Гаусса с заданной полупростой частью ([12], [17]) дает нам следующий результат: любой нецентральный элемент из G принадлежит образу вербального отображения, соответствующего произведению четырех независимых слов.

Здесь мы докажем следующий результат:

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнено одно из условий:*

a. $R = A_r, B_2 = C_2, C_r, r > 2, G_2$;

b. K *— совершенное поле и* $\dim K \leqslant 1$.

Тогда для любого регулярного элемента $t \in T$ *выполняется включение*

$$tU \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}.$$

Доказательство. Возьмем регулярные полупростые элементы из G:

$$g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1, g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \tag{2.3.1}$$

(см. предложение 2.2.3).

a. Случай 1. $R = A_r$.

Здесь $G = \mathrm{SL}_{r+1}(K)$. Пусть S_1, S_2 — классы подобия g_1, g_2. Так как образ любого вербального отображения $\mathrm{Aut}(G)$-инвариантен (здесь $\mathrm{Aut}(G)$ — группа автоморфизмов G; см. [20, 1.1]), имеем

$$S_1 \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1,\ \ S_2 \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2.$$

Следовательно,

$$S_1 S_2 \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}.$$

Заметим, что класс подобия регулярных элементов пересекается с множеством $\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c}$ для любого элемента Кокстера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$. Это следует из теории рациональных форм линейного оператора. Таким образом, получаем условие (2.2.3) предложения 2.2.1 и, следовательно, множество

$$S_1 S_2 \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$$

содержит все регулярные расщепимые полупростые элементы из G. Далее, если $t \in T$ — регулярный полупростой элемент, то для любого $u \in U$ существует такой элемент $v \in U$, что

$$[t^{-1}, v] = u$$

([17]). Таким образом

$$vtv^{-1} = t(t^{-1}vtv^{-1}) = t[t^{-1}, v] = tu \in \operatorname{Im} \widetilde{w}.$$

Случай 2. $R = C_r, r \geqslant 2$.

Здесь

$$R = \langle \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \dots, 2\varepsilon_r \rangle.$$

Для корня $\alpha \in R$ и $s \in K^*$ символом $h_\alpha(s)$ будем обозначать соответствующий корневой элемент группы T [7, лемма 19].

Для доказательства нам понадобится следующая лемма:

Лемма 2.3.1.

$$T = \left\langle h_{2\varepsilon_1}(s_1), h_{2\varepsilon_2}(s_2), \dots, h_{2\varepsilon_r}(s_r) \mid s_1, \dots, s_r \in K^* \right\rangle.$$

Доказательство. Так как группа $\mathcal{G}$ односвязна, то

$$T = \left\langle h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(l_1), \dots, h_{\varepsilon_{r-1}-\varepsilon_r}(l_{r-1}), h_{2\varepsilon_r}(l_r) \mid l_1, \dots, l_r \in K^* \right\rangle$$

(см. [7, лемма 28]).

Следовательно, достаточно показать, что $h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(s) = h_{2\varepsilon_1}(s)h_{2\varepsilon_2}(s^{-1})$.

Проверим, что для фундаментальных весов ε_1 и $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ действия $h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(s)$ и $h_{2\varepsilon_1}(s)h_{2\varepsilon_2}(s^{-1})$ на соответствующие весовые векторы v_{ε_1} и $v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$ одинаковы. Имеем

$$\begin{aligned}
h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(s)(v_{\varepsilon_1}) &= s^{\frac{2(\varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_2)}} v_{\varepsilon_1} = s v_{\varepsilon_1},\\
h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(s)(v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}) &= s^{\frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1-\varepsilon_2,\varepsilon_1-\varepsilon_2)}} v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = s^0 v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2},\\
h_{2\varepsilon_1}(s)h_{2\varepsilon_2}(s^{-1})(v_{\varepsilon_1}) &= s^{\frac{2(\varepsilon_1,2\varepsilon_1)}{(2\varepsilon_1,2\varepsilon_1)}} v_{\varepsilon_1} = s v_{\varepsilon_1},\\
h_{2\varepsilon_1}(s)h_{2\varepsilon_2}(s^{-1})(v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}) &= s^{\frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2,2\varepsilon_1)}{(2\varepsilon_1,2\varepsilon_1)}} s^{-\frac{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2,2\varepsilon_2)}{(2\varepsilon_2,2\varepsilon_2)}} v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = v_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}
\end{aligned}$$

(см. [7, лемма 19. с.]). Следовательно, операторы $h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(s)$ и $h_{2\varepsilon_1}(s)h_{2\varepsilon_2}(s^{-1})$ совпадают для любого линейного представления группы G. Таким образом, $h_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(s) = h_{2\varepsilon_1}(s)h_{2\varepsilon_2}(s^{-1})$. Откуда получаем утверждение леммы. □

Далее, пусть

$$\Gamma_i = \langle X_{\pm 2\varepsilon_i} \rangle.$$

Так как $\mathcal{G}$ — односвязная группа, а $2\varepsilon_r$ — корень из системы простых корней, то группа $\langle \mathcal{X}_{\pm 2\varepsilon_r} \rangle$ также односвязна [7, лемма 28]). Тогда

$$\Gamma_r \approx \mathrm{SL}_2(K)$$

и, следовательно,

$$\Gamma_i \approx \mathrm{SL}_2(K)$$

для любого i, так как все группы Γ_i сопряжены в G. Из того, что любая группа Γ_j коммутирует с любой группой Γ_i (при $j \neq i$), мы получаем естественный гомоморфизм

$$\varphi : \Gamma := \prod_{i=1}^{r} \Gamma_i \to G.$$

Так как $\mathcal{G}$ — односвязная группа, максимальная подгруппа группы T экспоненты 2 имеет порядок 2^r [7, лемма 28]. Следовательно, ограничение φ на центр Γ является мономорфизмом, ввиду леммы 2.3.1. Таким образом, φ — мономорфизм. Следовательно, отождествляя $\varphi(\Gamma) := \Gamma$, мы получаем

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{n} \Gamma_i \leqslant G.$$

Пусть

$$T_i := \big\langle h_{2\varepsilon_i}(s) \mid s \in K^* \big\rangle.$$

Тогда

$$T = \prod_{i=1}^{n} T_i$$

по лемме 2.3.1, и любой регулярный элемент $t \in T$ можно представить в виде произведения

$$\prod_{i=1}^{n} t_i,$$

где $t_i \in T_i$ — регулярный элемент из $\Gamma_i \approx \mathrm{SL}_2(K)$. Действительно, если какой-либо элемент t_i нерегулярен в Γ_i, то t_i и t коммутируют с унипотентными элементами из группы $X_{2\varepsilon_i}$.

Теперь, если мы рассмотрим ограничение $\widetilde{w}_1', \widetilde{w}_2'$ отображений $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ на Γ, то с помощью результата из случая 1 (для $\mathrm{SL}_2(K)$) мы получим,

$$t = \prod_{i=1}^{n} t_i \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1' \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2'$$

и, следовательно,

$$t \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2.$$

Так как t — регулярный элемент из G, то $tU \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}$.

Случай 3. $R = G_2$.

Здесь

$$R = \langle \alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \alpha_2 = -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rangle.$$

Положим $\beta := -2\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3$.

Для доказательства воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2.3.2.

$$T = \big\langle h_\beta(s_1), h_{\alpha_2}(s_2) \mid s_1, s_2 \in K^* \big\rangle.$$

Доказательство. Так как группа $\mathcal{G}$ односвязна, группа

$$T = \big\langle h_{\alpha_1}(l_1), h_{\alpha_2}(l_2) \mid l_1, l_2 \in K^* \big\rangle.$$

Тогда условие следует из равенства

$$h_{\alpha_1}(s) = h_\beta(s) h_{\alpha_2}(s^{-1}),$$

которое можно проверить прямым вычислением. Действительно, поскольку решетка, порожденная корнями, совпадает здесь с решеткой весов, достаточно проверить совпадение $h_{\alpha_1}(s)$ и $h_\beta(s)h_{\alpha_2}(s^{-1})$ на весовых векторах v_{α_1} и v_{α_2}, соответствующих простым корням α_1 и α_2:

$$\begin{aligned}
h_{\alpha_1}(s)(v_{\alpha_1}) &= s^2 v_{\alpha_1},\\
h_{\alpha_1}(s)(v_{\alpha_2}) &= s^{\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle} v_{\alpha_2} = s^{\frac{2(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}} v_{\alpha_2} = s^{-3} v_{\alpha_2},\\
h_\beta(s) h_{\alpha_2}(s^{-1})(v_{\alpha_1}) &= s^{-\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle} s^{\langle \alpha_1, \beta \rangle} v_{\alpha_1} = s^1 s^1 v_{\alpha_1} = s^2 v_{\alpha_1},\\
h_\beta(s) h_{\alpha_2}(s^{-1})(v_{\alpha_2}) &= s^{-\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} s^{\langle \alpha_2, \beta \rangle} v_{\alpha_1} = s^{-2} s^{-1} v_{\alpha_1} = s^{-3} v_{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

□

Положим

$$\Gamma := \langle X_{\pm\alpha_2}, X_{\pm\beta}\rangle.$$

Пусть $\operatorname{char} K \neq 3$ и пусть

$$z = h_\beta(\varsigma_3)h_{\alpha_2}(\varsigma_3^{-1}),$$

где $\varsigma_3 \in \overline{K}^*$ — фиксированный неединичный кубический корень из единицы, а $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание K. Тогда

$$z \in Z\big(\langle \mathcal{X}_{\pm\alpha_2}, \mathcal{X}_{\pm\beta}\rangle\big)$$

и $z \neq 1$. Это следует из прямого вычисления действия z на v_{α_1}, v_β и v_{α_2}:

$$\begin{aligned} z(v_{\alpha_1}) &= h_\beta(\varsigma_3)h_{\alpha_2}(\varsigma_3^{-1})(v_{\alpha_1}) = \varsigma_3^{-\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle}\varsigma_3^{\langle\alpha_1,\beta\rangle}v_{\alpha_1} = \varsigma_3^1\varsigma_3^1 v_{\alpha_1} = \varsigma_3^2 v_{\alpha_1},\\ z(v_\beta) &= h_\beta(\varsigma_3)h_{\alpha_2}(\varsigma_3^{-1})(v_\beta) = \varsigma_3^{-\langle\beta,\alpha_2\rangle}\varsigma_3^{\langle\beta,\beta\rangle}v_\beta = \varsigma_3^1\varsigma_3^2 v_\beta = v_\beta,\\ z(v_{\alpha_2}) &= h_\beta(\varsigma_3)h_{\alpha_2}(\varsigma_3^{-1})(v_{\alpha_2}) = \varsigma_3^{-\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle}\varsigma_3^{\langle\alpha_2,\beta\rangle}v_{\alpha_2} = \varsigma_3^{-2}\varsigma_3^{-1}v_{\alpha_1} = v_{\alpha_2}. \end{aligned}$$

Поэтому $\langle \mathcal{X}_{\pm\alpha_2}, \mathcal{X}_{\pm\beta}\rangle$ — односвязная группа, а, значит, $\Gamma \approx \mathrm{SL}_3(K)$. Так как $\Gamma \leqslant G$, мы можем рассмотреть ограничения $\widetilde{w}_1', \widetilde{w}_2'$ отображений $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2$ на Γ и воспользоваться случаем, когда $G = \mathrm{SL}_m(K)$. Таким образом, мы можем получить любой регулярный элемент $t \in T$ в $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ (лемма 2.3.2) и, следовательно,

$$tU \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}.$$

b. При условии b. на поле K пересечение $\mathcal{C} \cap G$ любого полупростого класса сопряженности $\mathcal{C}$ из $\mathcal{G}$ — это единственный класс сопряженности в G [29, 10.3], и, следовательно, полупростые регулярные классы сопряженности из G пересекаются с множествами $\mathfrak{n}_c M_{\mathfrak{n}_c}$ для любого элемента Коксетера $\mathfrak{n}_c \in N_G(T)$. Пусть S_1, S_2 — классы сопряженности регулярных полупростых элементов

$$g_1 \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_1, g_2 \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_2.$$

Таким образом мы получаем условие (2.2.3) из предложения 2.2.1 для S_1, S_2 и, следовательно, $t \in \operatorname{Im} \widetilde{w}$ для любого регулярного полупростого элемента $t \in T$. Тогда

$$tU \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}.$$

$\square$

2.3.2 Регулярные унипотентные элементы

Теорема 2.3.2. *Положим, что либо $R = A_r$, либо K — такое совершенное поле, что $p = \operatorname{char} K$ не является плохим простым числом для R и $\dim K \leqslant 1$. Тогда*

$$g \in \operatorname{Im} \widetilde{w}$$

для любого регулярного унипотентного элемента $g \in G$.

Доказательство. Пусть $R \neq A_1, A_2$. Можно найти такие элементы

$$g_1 \in \operatorname{Im}\, \widetilde{w}_1,\;\; g_2 \in \operatorname{Im}\, \widetilde{w}_2,$$

что

$$g_1 = u'\mathfrak{n}_c,\;\; g_2 = \mathfrak{n}_c^{-1}u'' \tag{2.3.2}$$

для некоторых $u', u'' \in U$, где $\mathfrak{n}_c$ — специальный элемент Кокстера. Действительно, в случае $R = A_r$ это следует из теории рациональных форм, а в остальных случаях мы можем воспользоваться тем же аргументом, что и в доказательстве теоремы 2.3.1, например, взять два полупростых регулярных элемента группы G, как в пункте b. теоремы 2.3.1.

Пусть S_1, S_2 — классы подобия (в случае $R = A_r$) или сопряженности (в остальных случаях) g_1, g_2 в G.

Далее, пусть $u \in U$ — регулярный элемент. Тогда

$$u = u_1 u_2 \cdots u_r u^* \tag{2.3.3}$$

для некоторых $u_i \in U_{\alpha_i}$, $u_i \neq 1, u^* \in U^*$.

По предложениям 2.2.2 и (2.3.2), (2.3.3) получаем

$$g_1 v g_2 v^{-1} \equiv u_1 u_2 \cdots u_r (\operatorname{mod} U^*) \tag{2.3.4}$$

для некоторого $v \in U$.

Так как $u_i \neq 1$ для любого i, элемент

$$g_1 v g_2 v^{-1} \in U$$

является регулярным унипотентным элементом. Из (2.3.4) следует, что существует такой элемент $\widetilde{u} \in U$, для которого

$$\widetilde{u}(g_1 v g_2 v^{-1})\widetilde{u}^{-1} = u. \tag{2.3.5}$$

Действительно, (2.3.5) легко проверяется для случая $G = \mathrm{SL}_n(K)$ индукцией по n, с помощью элементарных матричных вычислений. Для случая, когда K — совершенное поле, у которого $\operatorname{char} K$ не является плохим простым числом для R и $\dim K \leqslant 1$, это доказано в [14, лемма 1.2].

Следовательно,

$$u \in (\underbrace{\widetilde{u} g_1 \widetilde{u}^{-1}}_{\in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1})(\underbrace{\widetilde{u} v g_2 v^{-1} \widetilde{u}^{-1}}_{\in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2}) \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 = \mathrm{Im}\ \widetilde{w}.$$

Если $R = A_r$, то любые регулярные унипотентные элементы находятся в одном и том же классе подобия из G и, следовательно, любой регулярный унипотентный элемент принадлежит $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}$. В случаях, когда $R \neq A_r$ результат теоремы следует из следующей леммы:

Лемма 2.3.3. *Пусть K — такое совершенное поле, что $p = \operatorname{char} K$ не является плохим простым числом для R и $\dim K < 1$. Тогда для любых двух регулярных унипотентных элементов $u, u' \in G$ существует такой автоморфизм*

$$f \in \mathrm{Aut}(G),$$

что $f(u) = u'$.

Доказательство. При условии на поле получаем

$$t\gamma u\gamma^{-1}t^{-1} = u' \tag{2.3.6}$$

для некоторых $\gamma \in G$ и некоторого $t \in \mathcal{T}$ [16, лемма 4.4].

Пусть $\mathcal{G}_{ad}$ — присоединенная группа, соответствующая группе $\mathcal{G}$, и пусть

$$\theta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_{ad} \text{ —}$$

естественный морфизм. Мы можем так выбрать элемент t в (2.3.6), что

$$\theta(t) \in \mathcal{G}_{ad}(K) \tag{2.3.7}$$

(см. доказательство леммы 4.4 в [16]).

Заметим, что для любого $\alpha \in R$ образ $\theta(X_\alpha)$ — соответствующая корневая подгруппа $\mathcal{G}_{ad}(K)$ и, следовательно,

$$\theta(t)\theta(X_\alpha)\theta(t^{-1}) = \theta(X_\alpha)$$

ввиду (2.3.7). Таким образом

$$tX_\alpha t^{-1} \equiv X_\alpha \big(\operatorname{mod} Z(\mathcal{G})\big).$$

Но элементы из групп X_α и $tX_\alpha t^{-1}$ унипотентны. Следовательно,

$$tX_\alpha t^{-1} = X_\alpha.$$

Таким образом, элемент $t \in \mathcal{T}$ стабилизирует любую корневую подгруппу X_α из G и, следовательно, сопряжение t индуцирует автоморфизм на G. □

Пусть $R = A_1$. Тогда $G = \mathrm{SL}_2(K)$. Так как образ вербального отображения инвариантен относительно любого автоморфизма группы, на которой оно определено, мы можем положить

$$g_1 = \begin{pmatrix} a & -s_1 \\ s_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & s_2^{-1} \\ -s_2 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2, \tag{2.3.8}$$

где $a = tr\, g_1$, $b = tr\, g_2$ и $s_1, s_2 \in K^*$. Более того, в (2.3.8) мы можем взять любую пару $s_1, s_2 \in K^*$, так как класс подобия нецентрального элемента из $\mathrm{SL}_2(K)$ определяется его следом. В частности, мы можем взять $s_1 = s_2 = 1$. Тогда из (2.3.8) получаем

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2. \tag{2.3.9}$$

Так как у нас бесконечное число классов подобия в $\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_i$ (потому что K — бесконечное поле), мы можем считать, что $a - b \neq 0$ в (2.3.9). Действительно, мы можем зафиксировать элемент $g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1$ и изменить класс подобия $g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$.

Таким образом, получаем нетривиальный унипотентный элемент в

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2.$$

Так как все нетривиальные унипотентные элементы из $\mathrm{SL}_2(K)$ принадлежат одному и тому же классу подобия, мы получаем условие теоремы.

Пусть

$$R = \langle \alpha = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \beta = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \rangle = A_2.$$

Тогда $G = \mathrm{SL}_3(K)$ и мы можем взять следующие рациональные формы элементов $g_1 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1$, $g_2 \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2$:

$$g_1 \in \mathfrak{n}_{w_\beta} \mathfrak{n}_{w_\alpha} X_\alpha X_{w_\alpha(\beta)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_\alpha X_{\alpha+\beta},$$

$$g_2 \in \mathfrak{n}_{w_\alpha}\mathfrak{n}_{w_\beta} X_\beta X_{w_\beta(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_\beta X_{\alpha+\beta}.$$

Следовательно,

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы можем считать, что $a_1, b_1 \neq 0$. Действительно, для элементов Кокстера

$$\mathfrak{n}_c = \mathfrak{n}_{w_\alpha}\mathfrak{n}_{w_\beta},\ \ \mathfrak{n}'_c = \mathfrak{n}_{w_\beta}\mathfrak{n}_{w_\alpha}$$

множества $\mathfrak{n}_c \mathrm{M}_{\mathfrak{n}_c}, \mathfrak{n}'_c \mathrm{M}_{\mathfrak{n}'_c}$ — это сечения регулярных элементов из $\mathcal{G}$. Поэтому замыкания множеств Υ_1, Υ_2 всех регулярных классов, пересекающихся с множествами $\mathfrak{n}_c \mathcal{X}_{\alpha+\beta}, \mathfrak{n}'_c \mathcal{X}_{\alpha+\beta}$ соответственно, являются собственными замкнутыми подмножествами $\mathcal{G}$. Следовательно, среди регулярных классов подобия группы $G = \mathcal{G}(K)$ можно найти такой класс подобия C_1, что

$$C_1 \cap \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \neq \varnothing,\ \ C_1 \cap \mathfrak{n}_c \mathcal{X}_{\alpha+\beta} = \varnothing$$

и такой класс подобия C_2, что

$$C_2 \cap \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \neq \varnothing,\ \ C_2 \cap \mathfrak{n}'_c \mathcal{X}_{\alpha+\beta} = \varnothing.$$

Элементы $g_1 \in C_1, g_2 \in C_2$ — в точности те, для которых $a_1, b_1 \neq 0$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} g_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} g_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 + b_2 + a_1 b_1 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{:=u} \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}.$$

Так как $a_1, b_1 \neq 0$, элемент u регулярен. Из того, что любой регулярный унипотентный элемент из $G = \mathrm{SL}_3(K)$ подобен элементу u, мы получаем наше утверждение.

$\square$

Следствие 2.3.1. *Любой унипотентный элемент группы* $\mathrm{SL}_n(K)$ *содержится в* $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$.

Доказательство. Из теории нормальной Жордановой формы следует, что любой унипотентный элемент u подобен произведению

$$\prod_{i=1}^{d} u_i,$$

где u_i — регулярный унипотентный элемент подгруппы $\Gamma_i \approx \mathrm{SL}_{n_i}(K)$. При этом, все группы Γ_i коммутируют между собой и, следовательно,

$$\Gamma = \prod_{i=1}^{d} \Gamma_i \text{ —}$$

это подгруппа группы G. Ограничивая $\widetilde{w}$ на подгруппу Γ и применяя теорему 2.3.2, получаем $u \in \mathrm{Im}\,\widetilde{w}$. $\square$

2.3.3 Случай $\mathrm{char}\, K = 0$

В случае, когда характеристика поля K равна нулю, результат предыдущего следствия можно получить для более общего случая с помощью теоремы Морозова-Джекобсона.

Теорема 2.3.3. *Пусть $\mathcal{H}$ — простая изотропная, но не обязательно расщепимая алгебраическая группа, определенная над полем K характеристики ноль, и пусть $H = \mathcal{H}(K)$. Пусть, далее,*

$$\widetilde{w} : H^n \to H \text{ —}$$

вербальное отображение, где $w = w_1 w_2$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда любой унипотентный элемент группы H содержится в $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$.

Доказательство. Следующая форма теоремы Морозова-Джекобсона хорошо известна, однако поскольку мы затрудняемся указать точную ссылку именно на такую формулировку, мы приведем здесь доказательство данного утверждения.

Предложение 2.3.1. (Морозов-Джекобсон). *Для любого унипотентного элемента $u \in H$ существует подгруппа $\Gamma \leqslant H$ такая, что*

$$\Gamma \approx \mathrm{SL}_2(K)$$

или

$$\Gamma \approx \mathrm{PSL}_2(K)$$

и $u \in \Gamma$.

Доказательство. Так как $\mathcal{H}$ — это K-определенная алгебраическая группа, то можно считать, что $\mathcal{H} \leqslant \mathrm{GL}_n(\overline{K})$ для некоторого n и

$$\mathcal{H}(K) = \mathcal{H} \cap \mathrm{GL}_n(K).$$

Напомним, что мы отождествляем здесь алгебраические группы с группами точек над замыканиями полей определения.

Вложение K-группы $\mathcal{H}$ в K-группу $\mathrm{GL}_n(\overline{K})$ индуцирует вложение алгебры Ли $L(\mathcal{H})$ группы $\mathcal{H}$ в алгебру Ли $L\big(\mathrm{GL}_n(\overline{K})\big)$. Таким образом, мы отождествляем алгебру $L(\mathcal{H})$ с подалгеброй Ли $\mathrm{M}_n(\overline{K})$. Алгебра

$$L_K(\mathcal{H}) := L(\mathcal{H})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} = L(\mathcal{H}) \cap \mathrm{M}_n(K)$$

является K-структурой алгебры $L(\mathcal{H})$ [28, 11.1.6], а, значит,

$$L(\mathcal{H}) \approx L_K(\mathcal{H}) \otimes_K \overline{K}.$$

Поэтому $L_K(\mathcal{H})$ — простая алгебра Ли над K (так как $L(\mathcal{H})$ — простая алгебра Ли).

Далее, любой унипотентный элемент группы $\mathcal{H}$ представляется в виде $\exp \nu$, где

$$\exp(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\nu^i}{i!}$$

и

$$\nu \in L(\mathcal{H}) \leqslant \mathrm{M}_n(\overline{K}) \text{ —}$$

нильпотентный элемент. Любой унипотентный элемент $u \in \mathcal{H}$ содержится в унипотентном радикале $R_u(\mathfrak{B})$ некоторой подгруппы Бореля $\mathfrak{B} \leqslant \mathcal{H}$. Поэтому

u содержится в группе, порожденной корневыми элементами u_α, где α пробегает множество положительных корней, соответствующих $\mathfrak{B}$. При этом,

$$u_\alpha = \exp(\nu_\alpha)$$

для подходящего корневого нильпотентного элемента $\nu_\alpha \in L(\mathcal{H})$ [7, §4]. Используя формулу Кэмпбелла-Хаусдорфа для $R_u(\mathfrak{B})$, получаем, что и любой унипонетный элемент представим в виде $\exp \nu$.

Далее, пусть

$$\mathcal{U} \subset \mathrm{GL}_n(\overline{K}) \text{ —}$$

множество всех унипотентных матриц, а

$$\mathcal{N} \subset \mathrm{M}_n(\overline{K}) \text{ —}$$

множество всех нильпотентных матриц и пусть

$$\log : \mathcal{U} \to \mathcal{N} \text{ —}$$

отображение, определенное формулой

$$\log(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(x-1)^i}{i}.$$

Пусть $\nu \in \mathcal{N}_{tr}$, где $\mathcal{N}_{tr}$ — множество всех верхних треугольных нильпотентных матриц. Тогда $\exp(\nu) \in \mathcal{U}_{tr}$, где $\mathcal{U}_{tr}$ — множество всех верхних унипотентных треугольных матриц. Поскольку отображения

$$\exp : \mathcal{N}_{tr} \to \mathcal{U}_{tr},\ \log : \mathcal{U}_{tr} \to \mathcal{N}_{tr}$$

биективны [6, I, §7, теорема 2], имеем $\nu = \log u$. Поскольку любой нильпотентный элемент $\mathrm{M}_n(\overline{K})$ сопряжен с некоторым элементом из $\mathcal{N}_{tr}$, то для любого $\nu \in \mathcal{N}$ имеем

$$\log\bigl(\exp(\nu)\bigr) = \nu.$$

С другой стороны,

$$\exp\bigl(\log(v)\bigr) = v$$

для любого $v \in \mathcal{U}$, а значит отображения

$$\exp : \mathcal{N} \to \mathcal{U},\ \log : \mathcal{U} \to \mathcal{N}$$

биективны.

Для унипотентного элемента $u \in \mathcal{H}(K)$ существует единственный нильпотентный элемент $\nu \in \mathcal{N}$ такой, что $\exp(\nu) = u$. Поскольку

$$\nu = \log(u) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(u-1)^i}{i},$$

то $\nu \in \mathrm{M}_n(K)$. С другой стороны, как было показано выше, $u = \exp \nu'$ для некоторого $\nu' \in L(\mathcal{H})$. Ввиду единственности элемента ν, получаем

$$\nu = \nu' \in L(\mathcal{H}) \cap \mathrm{M}_n(K) = L_K(\mathcal{H}).$$

Из теоремы Морозова-Джекобсона [11, §11] следует, что существует подалгебра Ли $\mathfrak{l}_3 \leqslant L_K(\mathcal{H})$, изоморфная алгебре $sl_2(K)$ и содержащая нильпотентный элемент ν. Тогда группа Γ, порожденная экспонентами нильпотентных элементов подалгебры $\mathfrak{l}_3$, содержит элемент u и содержится в группе $\mathcal{H}(K)$. Кроме того, группа, порожденная нильпотентными элементами трехмерной алгебры $\mathfrak{l}_3 \leqslant \mathrm{M}_n(K)$, изоморфна либо группе $\mathrm{SL}_2(K)$, либо $\mathrm{PSL}_2(K)$ [7, §4]. □

Теорема 2.3.3 теперь, очевидно, вытекает из следствия 2.3.1 и теоремы Морозова-Джекобсона. □

Замечание 2.3.1. *Теорему 2.3.3, по-видимому, можно распространить и на поля, характеристика которых достаточно велика для группы $\mathcal{H}$.*

2.4 Группы типа B_2 и G_2 (Теорема 2.1.1)

Пусть

$$\widetilde{w}_1 : G^k \to G, \widetilde{w}_2 : G^l \to G, \widetilde{w}_3 : G^q \to G -$$

три вербальных отображения с независимыми переменными, где $k + l + q = n$ и пусть

$$\widetilde{w} = \widetilde{w_1 w_2 w_3} : G^n \to G -$$

вербальное отображение, соответствующее произведению $w_1 w_2 w_3$. Тогда

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{w} = \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \, \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \, \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3.$$

Теорема 2.4.1. *Пусть $\mathcal{G}$ — группа типов B_2 или G_2. Тогда*

$$B\mathfrak{n}_0 B \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \, \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \, \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3.$$

Доказательство. Мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 2.4.1. *Для любых $a, b \in T$ существуют такие элементы $s, t \in T$, что*

$$at = bs^2$$

и t регулярен.

Доказательство. Для любого корня $\alpha \in R$ пусть $\alpha : \mathcal{T} \to \overline{K}^*$ — соответствующий характер и пусть $\mathcal{T}_\alpha = \operatorname{Ker} \alpha$. Тогда подмножество

$$\mathcal{T}_R = \bigcup_{\alpha \in R} \mathcal{T}_\alpha \subset \mathcal{T}$$

является собственным замкнутым подмножеством $\mathcal{T}$ и, следовательно, множество $\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_R$ — непустое открытое подмножество $\mathcal{T}$. Заметим, что $T = \mathcal{T}(K)$ — плотное подмножество $\mathcal{T}$ [8, 18.3]. Тогда множество T^2 также плотно в $\mathcal{T}$. Действительно, у нас есть непрерывная изогения

$$i^2 : \mathcal{T} \to \mathcal{T},$$

где $i^2(x) = x^2$, и, следовательно, $i^2(T) = T^2$ плотно в $\mathcal{T}$.

Таким образом $a^{-1}bT^2$ также плотно в $\mathcal{T}$. Тогда существует такой элемент

$$t = a^{-1}bs^2 \in a^{-1}bT^2,$$

что $t \in \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_R$, и, следовательно, t регулярен. Умножая t на a, получаем

$$at = bs^2.$$

□

Теперь мы можем доказать теорему 2.1.1. В случае $R = B_2, G_2$ элемент $w_0 \in W$ является произведением двух отражений $w_\alpha w_\beta$, которые соответствуют ортогональным корням таким, что $\alpha + \beta \notin R$. Для любого прообраза $\mathfrak{n}_0 \in N_G(T)$ имеем

$$\mathfrak{n}_0(t) = t^{-1} \tag{2.4.1}$$

для любого $t \in T$. Далее мы можем зафиксировать элемент $\mathfrak{n}_0$. По предложению 2.2.3 получаем

$$g_1 = \mathfrak{n}_0 a u_1 \in \operatorname{Im} \widetilde{w}_1 \tag{2.4.2}$$

для некоторых $u_1 \in U$, $a \in T$.

Теперь пусть $g_0 \in B\mathfrak{n}_0 B$. Мы можем считать $g_0 = \mathfrak{n}_0 b u_0$ для некоторых $b \in T$, $u_0 \in U$. Пусть элементы $t, s \in T$ такие, что элементы $a, b, s, t \in T$ удовлетворяют условию леммы 2.4.1. Так как

$$s^{-1} g_0 s = s^{-1}(\mathfrak{n}_0 b u_0) s = s^{-1}(\mathfrak{n}_0) s b s^{-1} u_0 s = \\ = \mathfrak{n}_0 \underbrace{(\mathfrak{n}_0^{-1} s^{-1} \mathfrak{n}_0 s)}_{=s^2\ (2.4.1)} b s^{-1} u_0 s = \mathfrak{n}_0 b s^2 (s^{-1} u_0 s),$$

мы также можем считать $g_0 := \mathfrak{n}_0 b s^2 u_0$. По теореме 2.3.1, а. имеем

$$tu' \in \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3 \tag{2.4.3}$$

для любого $u' \in U$.

Так как t — регулярный элемент, мы можем считать, что

$$u' = t^{-1} u_1^{-1} t u_0.$$

Тогда

$$\underbrace{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1}_{\ni g_1\ (2.4.2)} \underbrace{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3}_{\ni tu'\ (2.4.3)} \ni g_1 t u' = \\ = (\mathfrak{n}_0 a u_1)(t t^{-1} u_1^{-1} t u_0) = \\ = \mathfrak{n}_0 \underbrace{at}_{:=bs^2} u_0 = \mathfrak{n}_0 b s^2 u_0 = g_0.$$

Следовательно,

$$B\mathfrak{n}_0 B \subset \mathrm{Im}\ \widetilde{w} = \mathrm{Im}\ \widetilde{w}_1 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_2 \,\mathrm{Im}\ \widetilde{w}_3.$$

□

Глава 3

Произведение коммутаторов полной линейной группы над телом

3.1 Предварительные сведения

В этой главе мы рассматриваем случай изотропной, но нерасщепимой формы $\mathcal{G}$ группы SL_{cn}. А именно, пусть D — тело над своим центром K с индексом $c > 1$ и пусть $\mathrm{GL}_n(D)$ — группа обратимых $n \times n$ матриц над D. Далее, пусть

$$\mathrm{SL}_n(D) = \{d \in \mathrm{GL}_n(D) \mid \mathrm{Nrd}\, d = 1\},$$

где $\mathrm{Nrd}\, d$ — редуцированная норма d (заметим, что эти обозначения совпадают с обозначениями из [5], [28], но не совпадают с обозначениями из [1], где $\mathrm{SL}_n(D)$ — множество матриц с единичным определителем). Тогда существует такая форма $\mathcal{G}$ группы SL_{cn}, что

$$\mathcal{G}(K) = \mathrm{SL}_n(D).$$

Более того, каждая “внутренняя форма” группы SL над K является группой такой формы для подходящего тела K [5, §2.3, предложение 17]. Подгруппу $\mathcal{G}^+(K)$, порожденную унипотентными элементами $\mathcal{G}(K)$, мы обозначаем $E_n(D)$. Это группа, порожденная трансвекциями $\mathrm{GL}_n(D)$. Группа $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$ является простой [1] (здесь K — это бесконечное поле, потому что $c > 1$) и

$$E_n(D) \trianglelefteq \mathcal{G}(K) = \mathrm{SL}_n(D), \;\; \mathrm{SL}_n(D)/E_n(D) \approx \mathrm{SL}_1(D)/[D^*, D^*] \tag{3.1.1}$$

([5, §7.2]).

Здесь мы рассматриваем вербальное отображение

$$\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D),$$

где

$$w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i].$$

Сюръективность $w = [x, y]$ для расщепимой (или квазирасщепимой) группы $\mathcal{G}^+(K)$ (точнее, для $\mathcal{G}^+(K)/Z\big(\mathcal{G}^+(K)\big)$ можно доказать (во всяком случае, для больших полей, см. [17]) с помощью метода под названием “разложение Гаусса с заданной полупростой частью". Это разложение было описано для различных случаев ([12], [15], [18], [22] [26], [27]). В случае расщепимой (или квазирасщепимой) группы $\mathcal{G}$ этот метод основан на том, что для каждого нецентрального класса сопряженности C группы $\mathcal{G}^+(K)$ можно найти представитель $g \in C$ с разложением Гаусса

$$g = vhu$$

с любым элементом $h \in \mathcal{T} \cap \mathcal{G}^+(K)$, где $\mathcal{T}$ — зафиксированный максимальный расщепимый (квазирасщепимый) тор $\mathcal{G}$ и $u, v \in \mathcal{G}^+(K)$ — элементы из унипотентных радикалов зафиксированной подгруппы Бореля $\mathcal{B}$ (содержащей $\mathcal{T}$) и противоположной подгруппы Бореля $\mathcal{B}^-$. Здесь мы рассматриваем аналогию с разложением для изотропной, но нерасщепимой группы $E_n(D)$, заменяя расщепимый тор группой диагональных матриц. Тем не менее, в этом случае у нас есть некая "неопределенность", связанная с некоммутативностью D. А именно, элемент h можно задать "с точность до" множителя из $[D^*, D^*]$. Таким образом, мы не можем использовать метод "разложения Гаусса с заданной полупростой частью" в том же виде, что и в случае расщепимых групп. Но мы можем доказать следующий результат:

Теорема 3.1.1. *Пусть* $w = \prod_{i=1}^{k} [x_i, y_i]$ *и пусть*

$$\widetilde{w} : D^{*2k} \to D^* \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Далее, пусть

$$\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D) \text{ —}$$

вербальное отображение на $\mathrm{GL}_n(D)$*, соответствующее тому же слову* w*. Предположим* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$*. Тогда*

$$\widetilde{w}\big(\mathrm{GL}_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

Если к тому же $n > 2$*, тогда*

$$\widetilde{w}\big(E_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

В частности, если каждый элемент из $[D^*, D^*]$ *является коммутатором элементов из* D^**, тогда каждый нецентральный элемент из* $E_n(D)$ *является коммутатором элементов из* $E_n(D)$*.*

В этой главе мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$C_\Gamma(g)$ — централизатор элемента $g \in \Gamma$ группы Γ;

$Z(G)$ — центр группы G.

D является телом над полем K (здесь K — центр D);

мы предполагаем, что $\dim_K D < \infty$ и $D \neq K$, следовательно, K — бесконечное поле;

$\overline{K}$ — алгебраическое замыкание K;

$D^* = D \setminus \{0\}$ — мультипликативная группа D;

$[D^*, D^*]$ — коммутаторная подгруппа D^* (для любой группы G мы обозначаем через $[G, G]$ коммутаторную подгруппу);

c — индекс D (следовательно, у нас есть вложение $i : D \to \mathrm{M}_c(K_s)$).

I_n — единичная матрица в $\mathrm{GL}_n(D)$;

$\mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n)$ — диагональная матрица из $\mathrm{GL}_n(D)$;

$t_{ij}(\lambda) \in \mathrm{GL}_n(D)$ — (ij)-трансвекция;

$E_n(D) = \big\langle t_{ij}(\lambda) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ \ \lambda \in D \big\rangle$ (здесь $t_{ij}(\lambda)$ — (ij)-трансвекция).

Здесь $\det : \mathrm{GL}_n(D) \to D^*/[D^*, D^*]$ — определитель в смысле [1]. Отметим, что

$$E_n(D) = \mathrm{Ker}\det,\ \ E_n(D) = \big[\mathrm{GL}_n(D), \mathrm{GL}_n(D)\big] \tag{3.1.2}$$

([1, IV, §1, теорема 4.3, теорема 4.7]). Отметим, что обозначения в [1] отличаются от наших, а именно, $E_n(D)$ в [1] обозначается через $\mathrm{SL}_n(D)$.

Отметим еще раз, что $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$ — простая группа [1, теорема 4.10].

Здесь $U, U^- \leqslant \mathrm{GL}_n(D)$ — группы соответственно верхних и нижних треугольных матриц с единицами на главной диагонали, при этом отметим, что

$$U, U^- \leqslant E_n(D).$$

3.2 Некоторые матричные формулы в $\mathrm{GL}_n(D)$

Ниже мы будем использовать следующие известные факты о матрицах над D (тем не менее, мы не можем дать подходящие ссылки).

Лемма 3.2.1. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ a_{21} & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ a_{n1} & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & X & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

где $X, Y \in \mathrm{GL}_{n-1}(D), s \in D^*, a_{1i}, a_{j1} \in D$. *Тогда*

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ b_{21} & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ b_{n1} & | & & & \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} s & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & YXY^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

где

$$(b_{12}, \ldots, b_{1n}) = (a_{12}, \ldots, a_{1n})Y^{-1}, \quad \begin{pmatrix} b_{21} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Доказательство. Обозначим матрицы, в произведении дающие A, через A_1, A_2 и A_3 соответственно. Тогда

$$MAM^{-1} = MA_1A_2A_3M^{-1} = MA_1M^{-1}MA_2M^{-1}MA_3M^{-1}.$$

Таким образом:

$$MA_1M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ a_{21} & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ a_{n1} & | & & & \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ b_{21} & | & & & \\ \cdots & & & Y & \\ b_{n1} & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ b_{21} & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ b_{n1} & | & & & \end{pmatrix};$$

$$MA_2M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & X & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} s & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & YX & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & YXY^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix};$$

$$MA_3M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & | & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & Y^{-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix}$$

□

В тех же обозначениях, что и в лемме 3.2.1, имеем

Лемма 3.2.2. *Положим $n \geqslant 3$. Положим $a_{i1} \neq 0$ для некоторых $i = 2, \dots, n$. Тогда существует такая матрица $M \in E_{n-1}(D)$ (в лемме 3.2.1), что*

$$\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $a_{1i} \neq 0$ для некоторых i. Поскольку все ненулевые векторы m-мерного линейного пространства над D лежат в одной орбите группы $\mathrm{GL}_m(D)$, то мы можем найти такую матрицу $M \in E_{n-1}(D)$, что

$$\begin{pmatrix} b_{21} \\ b_{31} \\ \cdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $q \in D^*$. □

3.3 Группа $\mathrm{GL}_n(D)$ как группа K-точек алгебраической группы

Существуют редуктивная алгебраическая группа $\widetilde{\mathcal{G}}$ и простая алгебраическая группа $\mathcal{G}$ типа A_{cn-1}, определенные над полем K таким образом, что

$$\widetilde{\mathcal{G}}(K) = \mathrm{GL}_n(D),\ \widetilde{\mathcal{G}}(\overline{K}) = \mathrm{GL}_{cn}(\overline{K}),\ \mathcal{G}(K) = \mathrm{SL}_n(D),\ \mathcal{G}(\overline{K}) = \mathrm{SL}_{cn}(\overline{K})$$

([28, 12.3.8], [5, §2.3]).

Лемма 3.3.1. *Группа $\big[\mathrm{GL}_n(D), \mathrm{GL}_n(D)\big]$ плотна в алгебраической группе $\mathcal{G}$ (здесь не исключается случай $n = 1$). В частности, группа $[D^*, D^*]$ плотна в $\mathrm{SL}_c(\overline{K})$.*

Доказательство. Пусть $w = [x, y]$ и пусть

$$\widetilde{w} : \widetilde{\mathcal{G}} \times \widetilde{\mathcal{G}} \to \mathcal{G} \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Заметим, что любой коммутатор групп GL_{cn} принадлежит $\mathcal{G} = \mathrm{SL}_{cn}$. Так как ограничение $\widetilde{w}$ на $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ — это доминантное вербальное отображение (в соответствии с теоремой Бореля [9], то

$$\overline{\mathrm{Im}\ \widetilde{w}} = \mathcal{G}.$$

Далее, $\widetilde{\mathcal{G}}(K) = \mathrm{GL}_n(D)$ — плотная подгруппа в $\widetilde{\mathcal{G}}$ [8, 18.3]. Следовательно, группа $\mathrm{GL}_n(D) \times \mathrm{GL}_n(D)$ плотна в $\widetilde{\mathcal{G}} \times \widetilde{\mathcal{G}}$ и, более того, $\widetilde{w}\big(\mathrm{GL}_n(D) \times \mathrm{GL}_n(D)\big)$ — плотное подмножество в $\mathcal{G}$. Но

$$\widetilde{w}\big(\mathrm{GL}_n(D) \times \mathrm{GL}_n(D)\big) = \big\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_n(D)\big\} \subset \big[\mathrm{GL}_n(D), \mathrm{GL}_n(D)\big].$$

□

3.4 Разложение Гаусса с заданной полупростой частью

Теорема 3.4.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и пусть $s_1, \ldots, s_{n-1} \in D^*$. Тогда для любого нецентрального элемента $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ существуют такие элементы*

$$s_n \in D^*, \gamma \in E_n(D), v \in U^-, u \in U,$$

что

$$\gamma A \gamma^{-1} = vhu,$$

где $h = \mathrm{diag}(s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n)$.

Доказательство.

Случай $n = 2$.

Пусть
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
Мы можем считать, что $c \neq 0$. В противном случае группа
$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, d \in D^*, b \in D \right\}$$
нормализуется в $\mathrm{GL}_n(D)$ подгруппой $E_n(D)$ [1, теорема 4.9]. Тогда
$$\begin{pmatrix} 1 & (s_1 - a)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(s_1 - a)c^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} s_1 & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ** & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ** \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай $n > 2$.

Предположим, что утверждение теоремы выполняется для группы $\mathrm{GL}_{n-1}(D)$. Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(D)$ — нецентральная матрица. Используя те же аргументы, что и в случае $n = 2$, и леммы 3.2.1, 3.2.2, мы можем положить, что
$$A = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ q & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & X & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} \tag{3.4.1}$$
для некоторого $q \in D^*$.

Мы можем считать, что $X \notin Z\big(\mathrm{GL}_{n-1}(D)\big)$. Действительно, пусть $X = \alpha I_{n-1}$ для некоторого $\alpha \in K$. Тогда мы можем рассмотреть матрицу $t_{13}(1)At_{13}(-1)$

вместо A. Имеем

$$t_{13}(1)At_{13}(-1)=(t_{13}(1)\begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ q & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(-1))\times$$

$$\times(t_{13}(1)\begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & \alpha I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(-1)))(t_{13}(1)\begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(-1)) =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & - & \cdots & - \\ q & | & & & & \\ 0 & | & & & & \\ \cdots & & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & & \end{pmatrix} t_{23}(-q)\begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & \alpha I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} t_{13}(s_1^{-1}(\alpha-s_1))\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & | & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ q & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} s_1 & | & 0 & \cdots & 0 \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & X' & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & | & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ - & | & - & \cdots & - \\ 0 & | & & & \\ 0 & | & & & \\ \cdots & & & I_{n-1} & \\ 0 & | & & & \end{pmatrix},$$

где $X'\in \mathrm{GL}_{n-1}(D)$ — матрица с ненулевым элементом x'_{12}. Таким образом,

$$X'\notin Z\big(\mathrm{GL}_{n-1}(D)\big)$$

и, следовательно, мы можем предполагать, что

$$X = X' \notin Z\big(GL_{n-1}(D)\big).$$

По индукционному предположению существует такая матрица $Y \in E_{n-1}(D)$, что

$$YXY^{-1} = V_1 \operatorname{diag}(s_2, \dots, s_{n-1}, s_n) U_2 \tag{3.4.2}$$

для некоторой нижней треугольной матрицы $V_1 \in \mathrm{GL}_{n-1}(D)$ и верхней треугольной матрицы $U_1 \in GL_{n-1}(D)$ с единицами на главных диагоналях и некоторого $s_n \in D^*$. Теперь утверждение следует из леммы 3.2.1 и (3.4.1), (3.4.2).

Замечание 3.4.1. *Мы можем взять $A \in \mathrm{SL}_n(D)$ или $A \in E_n(D)$ в теореме 3.4.1. Следовательно, у нас есть матрица $\gamma A \gamma^{-1}$ с заданной полупростой частью (с точностью до элемента s_n) в разложении Гаусса также и в группе $\mathrm{SL}_n(D)$ (соответственно, в $E_n(D)$).*

Замечание 3.4.2. *В случае, когда D — поле, элемент s_n однозначно определяется формулой*

$$s_n = (\det A)(s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^{-1}.$$

В случае, когда D — не поле, у нас также выполнено

$$s_1 s_2 \cdots s_n = \det A,$$

но $\det A \in D^*/[D^*, D^*]$ и, следовательно, последний элемент s_n определен с точностью до элемента из $[D^*, D^*]$. Это является препятствием к доказательству того, что каждый нецентральный элемент из $E_n(D)$ — это единственный коммутатор. Таким образом, остается открытыми вопрос о том, является ли любой нецентральный элемент из $E_n(D)$ единственным коммутатором, также как и вопрос о том, верно ли, что

$$E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big) \subset C_1 C_2$$

для любых двух “общих” классов сопряженности.

В конце этого раздела мы приведем пример, показывающий трудности с последним элементом s_n в разложении Гаусса.

Пусть $n = 2$ и пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $1 \neq s \in [D^*, D^*]$. Тогда $A \in E_2(D)$ [1, теорема 4.2].

Покажем, что среди элементов класса сопряженности A нет элементов из U^-U (то есть, нет элементов, имеющих разложение Гаусса с полупростой частью $h = 1$). Пусть

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(D).$$

Если $a \neq 0$, то $\det A = ad - aca^{-1}b\big(\mathrm{mod}[D^*, D^*]\big)$ [1, IV, §1]. Тогда

$$\delta := d - ca^{-1}b \neq 0.$$

Легко проверить, что

$$M^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} & -a^{-1}b\delta^{-1} \\ -\delta^{-1}ca^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix}, & \text{если } a \neq 0, \\ \\ \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}, & \text{если } a = 0 \end{cases}.$$

Положим, что $a \neq 0$ и матрица MAM^{-1} имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ (то есть, в левом верхнем углу имеем 1). Тогда

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} & -a^{-1}b\delta^{-1} \\ -\delta^{-1}ca^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & bs \\ c & ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} & -a^{-1}b\delta^{-1} \\ -\delta^{-1}ca^{-1} & \delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \times (1 + a^{-1}b\delta^{-1}c)a^{-1} - bs \times \delta^{-1}ca^{-1} = 1 \Leftrightarrow 1 + b\delta^{-1}ca^{-1} - bs\delta^{-1}ca^{-1} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b(1-s)\delta^{-1}ca^{-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \text{или} \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow MAM^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & dsd^{-1} \end{pmatrix} \\ \text{или} \\ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & dsd^{-1} \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Положим $a = 0$ и матрица MAM^{-1} имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} 0 & bs \\ c & ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c^{-1}db^{-1} & c^{-1} \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \Rightarrow bsb^{-1} = 1 \Rightarrow s = 1.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы доказали, что мы не можем получить элемент из класса сопряженности A с разложением Гаусса vu, где $v \in U^-, u \in U^+$.

□

3.5 D-расщепимые и D-регулярные элементы из $\mathrm{GL}_n(D)$

Пусть H — множества диагональных матриц из $\mathrm{GL}_n(D)$.

Определение 3.5.1. *Элемент $g \in \mathrm{GL}_n(D)$ называется D-расщепимым, если g подобен диагональной матрице.*

Замечание 3.5.1. *Если элемент $g \in E_n(D)$ подобен диагональной матрице, то g является $E_n(D)$-сопряженным с диагональной матрицей. Действительно, положим $SgS^{-1} \in H$ для некоторого $S \in \mathrm{GL}_n(D)$. Тогда $S = S_dS_1$, где $S_d \in H$ и $S_1 \in E_n(D)$ [1, теорема 4.1]. Тогда*

$$S_1gS_1^{-1} = S_d^{-1}(SgS^{-1})S_d \in H.$$

Определение 3.5.2. *Элемент $g \in \mathrm{GL}_n(D)$ называется D-регулярным, если он подобен некоторому элементу $h \in H$, для которого*

$$C_{\mathrm{GL}_n(D)}(h) \leqslant H.$$

Предложение 3.5.1. *Матрица $h = \mathrm{diag}(s_1, \cdots s_n)$ является D-регулярным элементом тогда и только тогда, когда любые два элемента $s_i, s_j \in D^*$, где $i \neq j$, не сопряжены в D^*.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{GL}_n(D)$ и пусть x_{ij} — (ij)-элемент матрицы X, $x_{ij} \neq 0$. Тогда (ij)-элемент матрицы hXh^{-1} равен $s_ix_{ij}s_j^{-1}$. Следовательно,

$$x_{ij} = s_ix_{ij}s_j^{-1} \Leftrightarrow x_{ij}s_jx_{ij}^{-1} = s_i.$$

□

Отметим, что вложение $K \to D$ индуцирует вложение $j : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{GL}_n(D)$. Следующее следствие из предложения 3.5.1 очевидно:

Следствие 3.5.1. *Пусть $g \in \mathrm{GL}_n(K)$ — расщепимый полупростой элемент. Тогда*

$$j(g) \text{ — } D\text{-регулярный} \Leftrightarrow g \text{ — регулярный}.$$

3.6 Фильтрация групп U, U^-

Имеем

$$U = \langle t_{ij}(\lambda) \mid \lambda \in D, i < j \rangle.$$

Для всех пар $i < j, p < q$ выполняется следующее соотношение:

$$\left[t_{ij}(\lambda), t_{pq}(\mu)\right] = \begin{cases} I_n, & \text{если } j \neq p \text{ и } i \neq q \\ t_{iq}(\lambda\mu), & \text{если } j = p \\ t_{pj}(-\mu\lambda), & \text{если } i = q \end{cases}$$

([23, 1.2.C.]). Тогда группы

$$U_k = \langle t_{ij}(\lambda) \mid \lambda \in D, j - i \geqslant k \rangle$$

являются нормальными подгруппами U и $U_{k+1} \leqslant U_k$ для всех k. Более того, для всех пар целых чисел $1 \leqslant p < q \leqslant n$ верно, что

$$U_{q-1}/U_q \leqslant Z(U_p/U_q). \tag{3.6.1}$$

Также, каждая подгруппа U_k нормализуется подгруппой H.

Предложение 3.6.1. *Пусть $h \in H$ — D-регулярный элемент. Тогда для каждого элемента $u \in U$ существует такой элемент $u' \in U$, что $u = [h, u']$.*

Доказательство. Пусть

$$h = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Так как h — D-регулярный элемент, то

$$ht_{ij}(\lambda)h^{-1} = t_{ij}(s_i\lambda s_j^{-1}) \neq t_{ij}(\lambda),$$

если $\lambda \neq 0$.

Следовательно,

$$[h, t_{ij}(\lambda)] = t_{ij}(s_i \lambda s_j^{-1} - \lambda) \neq I_n.$$

Далее, для каждого элемента $\mu \in D$ можно найти такой элемент $\lambda \in D$, что

$$\mu = s_i \lambda s_j^{-1} - \lambda.$$

Действительно, отображение

$$F : X \to s_i X s_j^{-1} - X$$

является K-линейным оператором на K-линейном пространстве D (мы полагаем здесь, что $\dim_K D < \infty$). Так как

$$s_i X s_j^{-1} - X = 0$$

тогда и только тогда, когда $X = 0$, то оператор F обратим.

Следовательно, для каждого элемента $\mu \in D$ существует элемент $\lambda \in D$ такой, что

$$[h, t_{ij}(\lambda)] = t_{ij}(\mu). \tag{3.6.2}$$

Рассмотрим группу U_k. Имеем

$$U_k = \langle t_{1\ k+1}(\lambda_1), t_{2\ k+2}(\lambda_2), \ldots, t_{n-k,n}(\lambda_k) \rangle U_{k+1}.$$

Более того, группа U_k/U_{k+1} абелева и порождается $t_{i,k+i}(\lambda_i) (\operatorname{mod} U_{k+1})$. Из (3.6.2) следует, что для каждого $u \in U_k/U_{k+1}$ существует такой элемент $u' \in U_k/U_{k+1}$, что $[h, u'] = u$. Предположим, что это же верно и для каждой факторгруппы U_k/U_l, где $l - k < m$ и докажем, что результат верен для любой факторгруппы U_p/U_q, где $q - p = m$. По предположению индукции для каждого $u \in U_p/U_q$ существует такой элемент $u' \in U_p/U_q$, что

$$[h, u'] \equiv u (\operatorname{mod} U_{q-1}) \Leftrightarrow [h, u'] u_1 = u$$

для некоторого $u_1 \in U_{q-1}/U_q$.

С другой стороны, $u_1 = [h, u'']$ для некоторого $u'' \in U_{q-1}/U_q$. Так как по (3.6.1)

$$U_{q-1}/U_q \leq Z(U_p/U_q),$$

имеем

$$u = [h, u'] u_1 = [h, u'][h, u''] \Rightarrow u = [h, u'u''].$$

Таким образом, получаем наше утверждение индукцией по $p - q$. $\square$

3.7 Доказательство теоремы 3.1.1

В ходе доказательства мы будем пользоваться следующей леммой:

Лемма 3.7.1. *Пусть $s \in D^*$. Тогда существуют такие элементы*

$$s_1, \dots, s_{n-1} \in D^*,$$

что

$$h = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_{n-1}, s) \in E_n(D)$$

и h – D-регулярный элемент. Более того, если $n > 2$ и $s \neq 1$, то можно выбрать элементы $s_1, \dots, s_{n-1} \in D^*$ так, чтобы $s_1 = 1$.

Доказательство. Проведем доказательство в три шага.

Шаг 1. *Пусть $s \in D^*$, тогда* $\operatorname{diag}(s, s^{-1}) \in E_2(D)$.

Доказательство. Рассмотрим цепь умножений на трансвекции

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ s & s^{-1} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & s^{-1}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ s & s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s^{-2}-s^{-1} \\ s & s^{-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s^{-2}-s^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2(D).$$

□

Напомним, что c здесь — индекс алгебры D. Пусть

$$\xi(X) = X^c + \chi_1(X)X^{c-1} + \dots + \chi_c(X) -$$

характеристический многочлен $X \in \mathrm{GL}_c(\overline{K})$ и пусть

$$\pi : \mathrm{GL}_c(\overline{K}) \to A^c, \quad \pi(X) := \big(\chi_1(X), \dots, \chi_c(X)\big) -$$

морфизм c-мерного аффинного пространства $A^c_{\overline{K}}$ (здесь мы рассматриваем $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$ и $A^c_{\overline{K}}$ как аффинные алгебраические многообразия над $\overline{K}$; см. [28]). Далее, у нас есть вложения $D^* \leqslant \mathrm{GL}_c(\overline{K})$ и $[D^*, D^*] \leqslant \mathrm{SL}_c(\overline{K})$.

Шаг 2. *Для каждого $r \in D^*$ множество $\pi\big(r[D^*, D^*]\big)$ плотно в $\pi\big(r\mathrm{SL}_c(\overline{K})\big)$.*

Доказательство. Так как множество $[D^*, D^*]$ плотно в $\mathrm{SL}_c(\overline{K})$ (лемма 3.3.1) и так как отображение $X \to rX$ является морфизмом $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$, то $r[D^*, D^*]$ плотно в $r\mathrm{SL}_c(\overline{K})$ и, следовательно, $\pi\big(r[D^*, D^*]\big)$ плотно $\pi\big(r\mathrm{SL}_c(\overline{K})\big)$. □

Шаг 3. *Для каждого $r \in D^*$ найдется бесконечно много классов сопряженности D^*, пересекающихся с множеством $r[D^*, D^*]$.*

Доказательство. Для каждой матрицы $X \in r\mathrm{SL}_c(\overline{K})$ только коэффициент $\chi_c(X)$ определен (а именно, $\chi_c(X)$ — определитель r как матрицы в $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$). У других коэффициентов могут быть любые наборы значений. Так как $\pi\big(r[D^*, D^*]\big)$ плотно в $\pi\big(r\mathrm{SL}_c(\overline{K})\big)$, мы можем получить бесконечно много матриц в множестве $r[D^*, D^*]$ с различными наборами значений функций $\chi_1, \ldots, \chi_{c-1}$ и, следовательно, мы можем получить бесконечно много $r[D^*, D^*]$ из различных классов сопряженности $\mathrm{GL}_c(\overline{K})$ и, следовательно, из различных классов сопряженности D^*.

□

Теперь мы можем завершить доказательство леммы. Согласно шагу 3 существует элемент $s' = s^{-1}t$, где $t \in [D^*, D^*]$, такой, что s', s принадлежат различным классам сопряженности D^*. Тогда

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}}_{\in E_2(D)} \underbrace{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in E_2(D)} = \begin{pmatrix} s^{-1}t & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in E_2(D).$$

Более того, матрица $\mathrm{diag}(s', s)$ является D-регулярной. Теперь положим, что $s_{n-1} = s'$. Снова согласно шагу 3 мы можем найти элементы

$$s_1, \ldots, s_{n-2} \in [D^*, D^*]$$

из различных классов сопряженности, не принадлежащих классам сопряженности s_{n-1}, s. Таким образом,

$$h := \mathrm{diag}(s_1, \ldots, \underbrace{s_{n-1}}_{=s'}, s) \in E_n(D).$$

Более того, если $n > 2$ и $s \neq 1$, то можно выбрать элементы

$$s_{n-1} = s' \neq 1, \ldots, s_2 \neq 1, s_1 = 1.$$

□

Теперь мы можем доказать теорему.

Пусть $g \in E_n(D) \setminus Z\bigl(E_n(D)\bigr)$. Этот элемент $E_n(D)$-сопряжен элементу

$$g' = vhu,$$

где $h = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, r)$ для некоторого $r \in D^*$ и $v \in U^-, u \in U$ (теорема 3.4.1). Так как $\det h \equiv 1\bigl(\operatorname{mod}[D^*, D^*]\bigr)$, имеем $r \in [D^*, D^*]$. Далее, существуют такие элементы $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in D^*$, что

$$r = [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_k, b_k],$$

где k — целое число из условия теоремы 3.1.1. Положим $s := a_1, t = b_1$. Мы можем считать, что $s \neq 1$ (если $a_1 = 1$ имеем $[a_1, b_1] = 1$ и, следовательно, мы можем взять $a_1 = s \neq 1$ и $b_1 = s \neq 1$). Положим

$$h' = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, sts^{-1}t^{-1}) = \operatorname{diag}(1, \dots, 1, s) \operatorname{diag}(1, \dots, 1, ts^{-1}t^{-1}). \tag{3.7.1}$$

Далее,

$$h = h' \underbrace{\prod_{i=2}^{k} \operatorname{diag}(1, \dots 1, [a_i, b_i])}_{=:h''} = h'h''. \tag{3.7.2}$$

По (3.7.1) и лемме 3.7.1 имеем D-регулярные элементы

$$h_1 = \operatorname{diag}(s_1, \dots, s_{n-1}, s),\ h_2 = \operatorname{diag}(s_1^{-1}, s_2^{-1}, \dots, s_{n-1}^{-1}, ts^{-1}t^{-1}) \in E_n(D). \tag{3.7.3}$$

Более того, мы можем и будем считать, что $s_1 = 1$, если $n > 2$. Таким образом

$$h' = h_1 h_2, \quad h_2 = \tau h_1^{-1} \tau^{-1}, \tag{3.7.4}$$

где

$$tau = \begin{cases} \operatorname{diag}(t^{-1}, 1, \dots, 1, t), & \text{если } \ n > 2, \\ \operatorname{diag}(1, t) & \text{если } \ n = 2. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\tau \in E_n(D), \quad \text{если } \ n > 2 \quad (\text{согласно шагу } 1). \tag{3.7.5}$$

Более того, из (3.7.2) получаем, что

$$g' = vhu = vh'h''u = vh' \underbrace{(h''uh''^{-1})}_{=:u' \in U} h'' = \underbrace{vh'u'}_{g''} h'' \tag{3.7.6}$$

Согласно предложению 3.6.1

$$v = v'h_1v'^{-1}h_1^{-1}, \quad h_2^{-1}u''h_2u''^{-1} = u' \tag{3.7.7}$$

для некоторых $u'' \in U$, $v' \in U^-$.

Из (3.7.4), (3.7.6) и (3.7.7) получаем

$$\begin{aligned} g'' = \underbrace{v'h_1v'^{-1}h_1^{-1}}_{=v}\underbrace{h_1h_2}_{=h'}\underbrace{h_2^{-1}u''h_2u''^{-1}}_{=u'} = \\ = v'h_1v'^{-1}u''\tau h_1^{-1}\tau^{-1}u''^{-1} = \\ = \underbrace{v'h_1v'^{-1}}_{=:x}\underbrace{u''\tau v'^{-1}v'h_1^{-1}v'^{-1}v'\tau^{-1}u''^{-1}}_{=:yx^{-1}y^{-1}} = [x,y]. \end{aligned}$$

Более того, если $n > 2$, то $x, y \in E_n(D)$ (3.7.3), (3.7.5). Таким образом, элемент g'' является единственным коммутатором элементов группы $E_n(D)$, если $n > 2$ или единственным коммутатором элементов группы $\mathrm{GL}_2(D)$, если $n = 2$.

Далее, для любых $i = 2, \ldots, k$ положим

$$h_{a_i} = \begin{cases} \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, a_i^{-1}, a_i), & \text{если } \ n > 2 \\ \mathrm{diag}(1, a_i), & \text{если } \ n = 2. \end{cases},$$

$$h_{b_i} = \begin{cases} \mathrm{diag}(b_i^{-1}, 1, \ldots, 1, b_i), & \text{если } \ n > 2 \\ \mathrm{diag}(1, b_i), & \text{если } \ n = 2. \end{cases}.$$

Ввиду шага 1, $h_{a_i}, h_{b_i} \in E_n(D)$, если $n > 2$. Из определения h_{a_i}, h_{b_i} следует, что для любых $i = 2, \ldots, k$ мы имеем

$$\mathrm{diag}\big(1, \ldots, 1, [a_i, b_i]\big) = [h_{a_i}, h_{b_i}].$$

Следовательно, элемент g' является произведением k коммутаторов элементов группы $\mathrm{GL}_n(D)$ и, если $n > 2$, является произведением k коммутаторов элементов $E_n(D)$.

Теорема 3.1.1 доказана.

3.8 Следствия и примеры

Так как любой элемент z группы $Z\big(E_n(D)\big)$ можно представить как произведение двух нецентральных элементов $g \in E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big)$ и $g^{-1}z$, то из теоремы 3.1.1 получаем

Следствие 3.8.1. *Если* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$ *для* $w = \prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i]$, *то*

$$\widetilde{\omega}\big(\mathrm{GL}_n(D)^{4k}\big) = E_n(D)$$

для $\omega = \prod_{i=1}^{2k}[x_i, y_i]$. *При этом*

$$\widetilde{\omega}\big(E_n(D)^{4k}\big) = E_n(D),$$

если $n > 2$.

Если любой нецентральный элемент группы $E_n(D)$ является произведением k коммутаторов, то любой неединичный элемент группы $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$ является произведением k коммутаторов. Действительно, образ $w(g_1, \ldots, g_m)$ в $E_n(D)/Z(D)$ совпадает с элементом $w(\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_m)$, где $\bar{g}_i$ – это образ элемента $g_i \in E_n(D)$ в $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$. Единичный элемент также является произведением k коммутаторов (например, коммутирующих элементов). Таким образом, получаем из теоремы 3.1.1

Следствие 3.8.2. *Если* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$ *для* $w = \prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i]$ *и* $n > 2$, *то*

$$\widetilde{w}\Bigg(\Big(E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)\Big)^{2k}\Bigg) = E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big).$$

Если мы обозначим через $l_{D^*}\big([D^*, D^*]\big)$ коммутаторную ширину $[D^*, D^*]$ в D^*, а через $l\Big(E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)\Big)$ — коммутаторную ширину $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$, тогда следствие 3.8.2 дает нам следующее неравенство

$$l\Big(E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)\Big) \leqslant l_{D^*}\big([D^*, D^*]\big) \ \ (n > 2).$$

Вопрос о представлении любого нецентрального элемента простой группы $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$ *в виде единственного коммутатора остается открытым.*

Пример 1. Пусть $K = \mathbb{R}$ — поле вещественных чисел и пусть $D = \mathcal{Q}$ — алгебра кватернионов. Тогда $\mathcal{Q}^* \approx U_2(\mathbb{C})$ и $[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*] \approx \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Также, здесь

$$[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*] = \mathrm{SL}_1(\mathcal{Q}),$$

а значит,

$$E_n(\mathcal{Q}) = \mathrm{SL}_n(\mathcal{Q}).$$

По теореме Гото [17] каждый элемент из $\mathrm{SU}(\mathbb{C})$ является единственным коммутатором элементов из $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$. Таким образом, каждый элемент в группе

$$\mathrm{SL}_n(\mathcal{Q})/Z\big(\mathrm{SL}_n(\mathcal{Q})\big) = E_n(\mathcal{Q})/Z\big(E_n(\mathcal{Q})\big) \ —$$

единственный коммутатор, если $n > 2$ (следствие 3.8.2). Тем не менее, это верно и для случая $n = 2$, потому что каждый элемент из $[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*] \approx \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ — единственный коммутатор элементов из группы $[\mathcal{Q}^*, \mathcal{Q}^*]$ (см. доказательство теоремы 3.1.1).

Пример 2. Пусть K — локальное поле. Тогда $[D^*, D^*] = \mathrm{SL}_1(D)$ и каждый элемент из $\mathrm{SL}_1(D)$ является произведением двух коммутаторов элементов из D^* [5, §1.4]. Тогда любой элемент группы $\mathrm{SL}_n(D)/Z\big(SL_n(D)\big)$ является произведением двух коммутаторов $\mathrm{SL}_n(D)/Z\big(SL_n(D)\big)$, если $n > 2$.

Заключение

В первой главе данной работы мы рассмотрели случай простой односвязной алгебраической группы $\mathcal{G}$, определенной и расщепимой над бесконечным полем K. Мы улучшили результат, который был получен Хэем-Ларсеном-Шалевым для слов, раскладывающихся в произведение четырех слов с независимыми переменными, распространив его на случай слов, представимых в виде произведения трех слов с независимыми переменными. Однако в этом случае, мы исключили из рассмотрения группы типа B_2 и G_2.

Во второй главе мы рассмотрели вербальные отображения для слов, раскладывающихся в произведение двух слов с независимыми переменными. Получены результаты для регулярных расщепимых полупростых и регулярных унипотентных элементов группы $G = \mathcal{G}(K)$, где $\mathcal{G}$ такая же, как определено выше. С помощью теоремы Морозова-Джекобсона и случая регулярных унипотентных элементов мы получили результат для слов, раскладывающихся в произведение двух слов от независимых переменных в случае поля нулевой характеристики и изотропной, но нерасщепимой группы. Используя случай регулярных расщепимых полупростых элементов, мы получили результат, аналогичный результату из первой главы, для больших клеток Брюа групп типа B_2 и G_2.

В третьей главе мы рассмотрели случай изотропной, но нерасщепимой группы над телом и получили результаты, касающиеся коммутаторной ширины данной группы. Из теоремы получено два следствия, а также приведены примеры для групп над различными телами.

Список литературы

1. Артин Э. Геометрическая алгебра / Э. Артин; перевод с английского В.М. Котлова; под редакцией Л.А. Калужнина. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969. – 284 с. : иллюстрации.

2. Гордеев Н.Л. Вербальные отображения и вербальные отображения с константами простых алгебраических групп / Н.Л. Гордеев, Б.Э. Кунявский, Е.Б. Плоткин // Доклады академии наук. – 2016. – Том 471. – Номер 2. – С. 136-138.

3. Гордеев Н.Л. Геометрия вербальных отображений в простых алгебраических группах над специальными полями / Н.Л. Гордеев, Б.Э. Кунявский, Е.Б. Плоткин // Успехи математических наук. – 2018. – Том 73. – Выпуск 5(443). – С. 3-52.

4. Егорченкова Е.А. Произведения коммутаторов полной линейной группы над телом / Е.А. Егорченкова, Н.Л. Гордеев // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2018. – Том 470. – С. 88-104.

5. Платонов В.П. Алгебраические группы и теория чисел / В.П. Платонов, А.С. Рапинчук. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1991. – 656 с.

6. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли / Ж.-П. Серр; перевод с английского А.В. Волынского; под редакцией А.Л. Онищика. – Москва : Мир, 1969. – 376 с.

7. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг; перевод с английского И.Н. Бернштейна и А.Н. Яковлева; под редакцией А.А. Кирилова. – Москва : Мир, 1975. – 262 с.

8. Borel, A. Linear Algebraic Groups / A. Borel. – 2nd ed. – New York : Springer-Verlag, 1991. – 290 p.

9. Borel, A. On free subgroups of semi-simple groups / A. Borel // L'Enseignement Mathématique. – 1983. – Volume 29. – P. 151-164.

10. Bourbaki, N. Éléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6 / N. Bourbaki. – Paris : Masson, 1981. – 290 p.

11. Bourbaki, N. Éléments de Mathématique. Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 7 et 8 / N. Bourbaki. – Paris : Masson, 1975. – 265 p.

12. Chernousov, V. Gauss decomposition with prescribed semisimple part: short proof / V. Chernousov, E. W. Ellers, N. Gordeev // Journal of Algebra. – 2000. – Volume 229. – Issue 1.– P. 314-332

13. Egorchenkova, E. Products of three word maps on simple algebraic groups / E. Egorchenkova, N. Gordeev // Archiv der Mathematik. – 2019. – Volume 112. – Issue 2. – P. 113-122.

14. Ellers, E.W. Commutators with some special elements in Chevalley groups / E.W. Ellers, N. Gordeev // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Volume 202. – Issue 3. – P. 395-403

15. Ellers, E.W. Gauss decomposition with prescribed semisimple part in Chevalley groups. III. Finite twisted groups / E.W. Ellers, N. Gordeev // Communications in Algebra. – 1996. – Vol. 24. – No. 14. – P. 4447-4475.

16. Ellers, E.W. Intersection of conjugacy classes with Bruhat cells in Chevalley groups / E.W. Ellers, N. Gordeev // Pacific Journal of Mathematics. – 2004. – Volume 214. – No. 2. – P. 245-261

17. Ellers, E.W. On the conjectures of J. Thompson and O. Ore / E.W. Ellers, N. Gordeev // Transactions of the American Mathematical Society. – 1998. – Volume 350. – No. 9. – P. 3657-3671.

18. Gordeev, N. Sums of orbits of algebraic groups I / N. Gordeev // Journal of Algebra. – 2006. – Volume 295. – No. 1. – P. 62-80.

19. Gordeev, N. Word maps, word maps with constants and representation varieties of one-relator groups / N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin // Journal of Algebra. – 2018. – Volume 500. – P. 390-424.

20. Gordeev, N. Word maps on perfect algebraic groups / N. Gordeev, B. Kunyavskii, E. Plotkin // International Journal of Algebra and Computation. – 2018. – Volume 28. – No. 8. – P. 1487-1515.

21. Gordeev, N. Big elements in irreducible linear groups / N. Gordeev, U. Rehmann // Archiv der Mathematik. – 2014. – Volume 103. – No. 3. – P. 201-210.

22. Gordeev, N. Products of conjugacy classes in Chevalley groups over local rings / N. Gordeev, J. Saxl // St. Petersburg Mathematical Journal. – 2006. – Volume 17. – No. 2. – 285-293.

23. Hahn, A.J. The Classical groups and K-theory / A.J. Hahn, O.T. O'Meara. – Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 1989. – 578 p.

24. Hui, C.Y. The Waring problem for Lie groups and Chevalley groups / C.Y. Hui, M. Larsen, A. Shalev // Israel Journal of Mathematics. – 2015. – Volume 210. – Issue 1. – P. 81-100.

25. Lev, A. Products of cyclic conjugacy classes in the groups $\mathrm{PSL}(n, F)$ / A. Lev // Linear Algebra and its Applications. – 1993. – Volume 179. – P. 59-83.

26. Morita, J. Prescribed Gauss decompositions for Kac-Moody groups over fields / J. Morita, E. Plotkin // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. – 2001. – Volume 106. – P. 153-163.

27. Sheng-Kui Ye. Gauss Decomposition with Prescribed Semisimple Part in Quadratic Groups / Sheng-Kui Ye, Sheng Chen, Chun-Sheng Wang // Communications in Algebra. – 2009. – Volume 37. – P. 3054-3063.

28. Springer, T.A. Linear Algebraic Groups / T.A. Springer. – 2nd edition. – Boston : Birkhäuser, 1998. – 334 p.

29. Steinberg, R. Regular elements of semisimple algebraic groups / R. Steinberg // Publications Mathématiques de l'IHÉS. – 1965. – Volume 25. – P. 49-80.

30. Vaserstein, L. Products of conjugacy classes of two by two matrices / L. Vaserstein, E. Wheland // Linear Algebra and its Applications. – 1995. – Volume 230. – P. 165-188.