КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

САЛИМОВ РУСТЕМ ФАРИДОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ РАЗЛИЧЕНИЯ ДВУСТОРОННИХ ГИПОТЕЗ И ДВУСТОРОННЕГО ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ В d-АПОСТЕРИОРНОМ ПОДХОДЕ

Специальность: 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
кандидат физико-математических наук,
доцент
Симушкин Сергей Владимирович

Казань–2021

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования. Во многих областях применения математической статистики параметр вероятностной модели, относительно которого принимается решение, является случайной величиной, так что вывод относительно этого параметра должен осуществляться с учетом его распределения. В такой «байесовской» ситуации классическое определение риска статистического правила не отвечает сути высказываемых гарантий от последствий принятия неверных решений. С другой стороны, стандартное байесовское определение гарантийности, ориентированное на средние потери от всех принятых решений, также не всегда может удовлетворить запросы практики. Это касается, в первую очередь, задач аттестации и контроля качества, когда гарантии должны быть связаны не с применяемой процедурой контроля, а с принятым решением — необходимо гарантировать не средние потери в экспериментах, в которых нулевая гипотеза (альтернатива) была верна, а средние потери в экспериментах, в которых было принято то или иное решение.

Аналогичная проблема возникает в ситуациях, описываемых общим термином «множественное тестирование», когда экспериментатор сталкивается с большим количеством статистических экспериментов, например, в генетике, в социологических исследованиях, в задачах медицинской диагностики и т.п.

Существующие процедуры точечного оценивания параметров с ограничениями на ошибку и надежность оценки, а также доверительные интервалы с гарантией доверительного уровня также не отвечают существу проблемы гарантийности статистического вывода с точки зрения их практического смысла. Например, в проблеме точечного оценивания более целесообразно гарантировать не вероятность отклонения оценки от истинного значения параметра, а вероятность того, что случайный параметр достаточно далек от полученной оценки. Точно так же при построении доверительных интервалов более естественно гарантировать не вероятность накрытия истинного значения параметра, а вероятность того, что этот параметр попадет в заявленное доверительное множество. Такого рода условные вероятности с точки зрения последствий от принятия неправильных решений называются d-риском, а подход, ориентированный на учет такого рода функции риска, d-апостериорным подходом.

В настоящей диссертационной работе решаются задачи построения процедур различения двух гипотез, двустороннего доверительного оценивания, а также процедур точечного оценивания, для которых достигаются ограничения на величину риска, определяемого, как условное среднее значение потерь по случайному параметру относительно решающей функции, т.е. задачи построения процедур с ограничениями на функцию d-риска.

Таким образом, актуальность темы исследований, приводимых в диссертации, объясняется, в первую очередь, широким спектром возможных применений процедур статистического вывода в рамках ограничений на среднюю величину потерь, которая в большей степени соответствует проблемам множественного тестирования и контроля качества.

Понятие функции d-риска в рамках общей проблемы статистического вывода было сформулировано в начале 80-х годов XX века в работах И.Н. Володина и его учеников. Следует отметить, что основные идеи d-апостериорного подхода в задачах проверки статистических гипотез были сформулированы еще в работах С.Н. Бернштейна [1] и Рао [32] (см. также монографию Ю.К. Беляева [2]). Основным толчком в развитии этого подхода были лекции Л.Н. Большева на семинарах и школах-конференциях с реализацией этих идей в трудах литовских математиков, посвященных проблемам гарантийного контроля качества [3], [19]. Затем эти идеи были распространены на общую проблему статистического вывода и получили развитие в трудах школы математической статистики Казанского университета [9, 31, 39, 50]. Начало была положено в совместном докладе С.В. Симушкина и И.Н. Володина на третьей Международной Вильнюсской Конференции (1981) [13]. Детальное описание теории d-риска можно найти в докторской диссертации И.Н. Володина (1981): «Гарантийные процедуры статистического вывода», а также в статье [14].

К настоящему времени решена только малая часть естественных задач в рамках d-апостериорного подхода к проблеме статистического вывода. Это некоторые задачи проверки двух гипотез [22, 21, 31, 9, 11, 39] и связанные с ними (в духе Неймана) задачи построения доверительных интервалов [16], проблема оптимального оценивания [40, 14, 15], а также задача построения эмпирических аналогов d-гарантийных процедур статистического вывода [24, 41, 25].

В статье [22, Симушкин С.В., 1981] (также см. кандидатскую диссертацию Симушкина С.В., Вильнюс, 1982 г.) был описан вид статистической процедуры, удовлетворяющей заданным ограничениям на d-риск первого рода и минимизирующей значения d-риска второго рода (байесовский аналог процедуры Неймана-Пирсона). В начале XXI века Storey J.D. [42], анализируя проблему множественного тестирования в байесовской постановке, установил, что популярный теперь показатель pFDR совпадает с d-риском первого рода, и переоткрыл утверждение [22] о виде оптимального критерия (см. также работу Wasserman L. [29]). На основе этого описания Володин И.Н. и Новиков А.А. предложили две асимптотические формулы ([7], [9], [31]) для наименьшего объема выборки, при котором возможно достижение ограничений на обе d-апостериорные вероятности ошибок в задаче различения двух односторонних гипотез. Первая формула предназначена для ситуаций, когда априорное распределение параметра сосредоточено вблизи границы между гипотезами, вторая — для случая с малыми ограничениями на функцию d-риска.

В статье [39] был введен аналог классического p-значения, названный «p_d-значением». Как и для случая классического p-значения, нулевая гипотеза должна отвергаться, если p_d-значение не превосходит выбранного ограничения.

В дальнейшем Володин И.Н. и Симушкин С.В. [16], основываясь на описании [22], предложили метод построения семейств «оптимальных» доверительных интервалов, который (как в классическом случае) естественным образом связан с задачей проверки двух гипотез. Конструкция этих интервалов достаточно громоздка, поэтому ими были предложены некоторые асимптотические аналоги оптимальных семейств односторонних доверительных границ.

В статьях Володина И.Н., Симушкина С.В. [14], а также Володина И.Н., Новикова Ан.А. [8] была предложена методика построения оценок случайного значения ϑ, равномерно минимизирующих функцию d-риска. Интересно отметить, что в d-апостериорном подходе определение несмещенности оценки $\widehat{\theta}$ в соответствии с концепцией Лемана приводит к естественному требованию вида $\mathbf{E}\big[\vartheta \,\big|\, \widehat{\theta}\,\big] = \widehat{\theta}$ (см. [15]). В [14] методика построения оценок с равномерно минимальным d-риском была применена к задаче оценивания с квадратичной функцией потерь. Последние исследования по этой тематике представлены в статье [50], где строятся последовательные и основанные на фиксированном числе наблюдений оценки среднего значения нормального распределения с функцией потерь типа 1–0 с заданными ограничениями на ошибку и d-риск оценивания.

В байесовском подходе в ситуации, когда имеется реальная последовательность статистических экспериментов, проблема идентификации априорного распределения может быть решена с привлечением идей H. Robbins ([33], [34]). В работах [24], [25], [41] эти идеи были адаптированы к потребностям d-апостериорного подхода. В частности, в [24] было показано, что включение процесса оценивания в процедуру принятия решения может приводить к той же функции d-риска (см. по этому поводу также исследования методом стохастического моделирования в [37]). Аналогичная методика используется в [28], [42] для проблемы множественного тестирования.

В d-апостериорном подходе существует универсальная последовательная гарантийная процедура, применимая к любой проблеме статистического вывода (см., например, статью Володина И.Н. [6]). Для задачи различения двух гипотез ее асимптотически оптимальные свойства были установлены в [7], [21]. В этой задаче универсальная процедура похожа на последовательную процедуру Вальда с тем отличием, что остановка происходит в зависимости от отношения взвешенных правдоподобий (аналогичные процедуры рассматривались в [30]). Другие последовательные процедуры различения двух гипотез с ограничениями на d-риски были предложены в статьях [23], [9].

Более полное описание полученных результатов, а также некоторых новых результатов и нерешенных проблем, связанных с проблемой различения двух гипотез, можно найти в обзорной статье [36].

Цель диссертационной работы состоит в развитии методов d-апостериорного подхода применительно к задачам проверки интервальных гипотез, построения двусторонних доверительных интервалов и оценок с заданной точностью, а также изучение их асимптотических свойств. Более точно, в диссертационной работе:

а) предлагается асимптотическая формула для необходимого объема выборки при d-гарантийном различении интервальных гипотез;

б) проводится сравнение по среднему объему выборки универсальной процедуры различения интервальных гипотез с процедурой, основанной на фиксированном числе наблюдений;

в) разрабатывается способ построения семейств двусторонних доверительных интервалов для нормальной модели, изучаются асимптотические свойства точности этих семейств и предлагаются асимптотически правильные упрощенные варианты их вычисления;

д) находятся оценки с минимальным d-риском для функции потерь 1–0 с абсолютной и относительной ошибкой в задаче аттестации «малого» параметра.

Методология и методы исследования. В основе приводимых исследований лежит методология байесовского подхода построении вероятностных моделей и принятия решений. При построении d-гарантийных интервальных и точечных оценок случайного параметра, а также при выводе приближенных формул необходимого объема выборки для различении гипотез с ограничениями на d-риски, используется асимптотический анализ апостериорного распределения в духе методов изложенных в монографиях [18] и [43].

Основные результаты:

1. Найдена асимптотика необходимого объема выборки для проверки интервальных гипотез с заданными ограничениями на d-риски, когда последние стремятся к 0. Это новый результат, усиливающий и дополняющий известный

результат Володина и Новикова [10] для проверки односторонних гипотез.

2. Представлены в явном виде наиболее точные доверительные интервалы (в d-апостериорной постановке) для среднего значения нормального распределения с априорным нормальным распределением этого параметра. Установлена асимптотика (в зависимости от объема выборки) функции надежности, на основе которой предложен упрощенный асимптотически точный вариант этих интервалов

3. Построены d-гарантийные процедуры оценивания при фиксированном объеме наблюдений и в рамках последовательной схемы испытаний для среднего значения нормального распределения с гарантированным d-риском относительной ошибки и при априорных сведениях о положительности и малости оцениваемого параметра.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертационной работе разработана новая методика построения процедур статистического вывода с новым аспектом их гарантийности, и это представляет теоретическую значимости для дальнейших исследований в этом направлении. Практическая значимость выражается большим количеством возможных приложений полученных результатов к задачам контроля качества, аттестации выпускаемой продукции и оценки экологических характеристик окружающей среды. Это в первую очередь методы d-гарантийной проверки интервальных гипотез с асимптотическими разложениями для необходимого объема выборки. В качестве подтверждения данного тезиса практической значимости можно указать, например, использование последовательной процедуры d-гарантийного оценивания для определения содержания элемента мышьяка в питьевой воде с гарантированным d-риском относительной ошибки оценивания.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены на XVIII Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам, XII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Казань, 1 - 8 мая 2011 г.); XX Всероссийской Школе-коллоквиуме по стохастическим методам, XIV Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Йошкар-Ола, 12–18 мая 2013 г.); на международной научной конференции Фундаментальные проблемы алгебры, анализа и геометрии Казань (2016); на международной Казанской конференции «Probability Theory & Mathematical Statistics» (2017). Кроме того, результаты работы были представлены на расширенном заседании научного семинара кафедры математической статистики ВМК МГУ (2015), на научном семинаре Лаборатории Чебышева «Теория вероятностей» Санкт-Петербург ПОМИ РАН (2016), а также многократно докладывались на научных семинарах кафедры математической статистики и ежегодных итоговых научных конференциях К(П)ФУ (2008-2020 гг.).

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 8 работ, из них [44], [45] — в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК, [49], [50], [51] — в международных журналах, индексируемых в базе данных WoS и Scopus, [46], [47], [48] — тезисы международных и всероссийских конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения. Общий объем диссертации составляет 105 страниц с 12 рисунками и 6 таблицами. Список использованных литературных источников содержит 51 наименование.

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Симушкину Сергею Владимировичу.

Краткое содержание диссертации

В **главе 1** диссертации решаются задачи построения d-гарантийных процедур различения двух статистических гипотез вида $\mathbf{H}_0 : \theta \in (\theta_1, \theta_2) \subset \mathbb{R}$ и $\mathbf{H}_1 : \theta \notin (\theta_1, \theta_2)$ в рамках вероятностной модели $\{f(x \,|\, \theta), x \in \mathcal{X}\}$, индексированной параметром $\theta \in \mathbb{R}$, и определяемой плотностью относительно некоторой меры μ на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$. Предполагается, что параметр θ в эксперименте есть реализация случайной величины ϑ с некоторой функцией распределения $G(\theta)$ (плотностью $g(\theta)$ по мере Лебега). Обозначим через d_j решение в пользу гипотезы $\mathbf{H}_j, j = 0, 1$.

Во введении к первой главе дается теоретико-вероятностное описание методологии d-апостериорного подхода к проблеме статистической проверки гипотез.

В первом параграфе рассматривается класс критериев, основанных на фиксированном числе n наблюдений $x^{(n)}$. Эти критерии должны удовлетворять заданным ограничениям β_0, β_1 на d-апостериорные вероятности ошибок, определяемые следующим образом. Пусть $\delta_n = \delta_n(x^{(n)})$ — решающая функция, представляющая собой измеримое отображение выборочного пространства $(\mathcal{X}^n, \mathfrak{A}^{\otimes n})$ в множество решений $\{d_0,\, d_1\}$. Тогда вероятности ошибок 1-го и 2-го рода определяются соответственно как условные вероятности

$$\mathcal{R}_1(\delta_n) = \mathbf{P}\{\vartheta \in (\theta_1, \theta_2) \,|\, \delta_n = d_1\},$$
$$\mathcal{R}_0(\delta_n) = \mathbf{P}\{\vartheta \notin (\theta_1, \theta_2) \,|\, \delta_n = d_0\}.$$

При этом, если безусловная вероятность принятия соответствующего решения равна нулю, то вероятность ошибки полагается равной нулю. Под необходимым объемом выборки (НОВ) n^* при заданных ограничениях β_0 и β_1 понимается наименьшее целое число n, для которого существует правило δ_n, удовлетворяющее неравенствам

$$\mathcal{R}_0(\delta_n) \leqslant \beta_0, \quad \mathcal{R}_1(\delta_n) \leqslant \beta_1.$$

В работе [22] показано, что при отыскании процедур с минимальным объемом выборки можно ограничиться правилами δ_n^*, которые принимают нулевую гипотезу только, если апостериорная вероятность справедливости нулевой гипотезы $\pi_0(x^{(n)}) = \mathbf{P}\{\vartheta \in (\theta_1, \theta_2) \,|\, x^{(n)}\} > c$, где критическая константа c находится из условия на d-апостериорную вероятность ошибки 1-го (или 2-го) рода.

Основной результат параграфа 1 содержится в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Если ограничения $\beta_0, \beta_1 \to 0$ так, что $\beta_1/\beta_0 \to \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, и вероятностная модель удовлетворяет условиям регулярности (см. условия (A1) – (A6) в тексте диссертации), то для необходимого объема выборки n^**

справедливо асимптотическое представление

$$n^* \asymp \widetilde{n} = \left(\frac{\rho\, W(1-c_0)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} \right)^2 \frac{1}{\beta_0^2},$$

где функция $W(c) = \varphi(\Phi^{-1}(c)) + c\,\Phi^{-1}(c), 0 < c < 1,\ \varphi, \Phi$ *— плотность и функция распределения стандартного нормального закона, константа* c_0 *есть решение уравнения*

$$\frac{W(c_0)}{W(1-c_0)} = \left(\frac{1}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} - 1 \right) \gamma,$$

$$\rho = \rho(\theta_1, \theta_2) = \left(g(\theta_1) I(\theta_1)^{-1/2} + g(\theta_2) I(\theta_2)^{-1/2} \right),$$

$I(\theta)$ *— информация по Фишеру в точке* θ.

Заметим, что условия регулярности в этой теореме обеспечивают возможность применения теоремы Бернштейна–фон Мизеса об асимптотической нормальности апостериорного распределения и, в основном, состоят из классических условий регулярности (см., например, монографии [18], [43]). Эти условия несколько отличаются от условий работы [10], в которой аналогичная формула получена для задачи различения двух односторонних гипотез. Наше доказательство этой теоремы отличается от приведенного в [10]. Это доказательство разбито на несколько вспомогательных утверждений. В лемме 1.1 устанавливается, что при «жестких» ограничениях, т.е. при $\beta_0, \beta_1 \to 0$, НОВ $n^* \to \infty$. Лемма 1.2 содержит чисто технический результат, позволяющий применить теорему Бернштейна–фон Мизеса. В лемме 1.3 найдено предельное (при $n \to \infty$) распределение апостериорной вероятности $\pi_0(X^{(n)})$. В лемме 1.4 показывается, что d-апостериорные вероятности ошибок правила δ_n^* с ростом n имеют асимптотическое представление вида $\mathcal{R}_k(\delta_n^*) \asymp C_k/\sqrt{n}$, и найдены соответствующие константы C_0, C_1.

Во втором параграфе главы 1 анализируется точность полученной асимптотической формулы на трех конкретных вероятностных моделях: нормально-нормальная модель, когда в эксперименте наблюдается нормальная случайная величина с неизвестным средним, априорное распределение которого также нормально, показательно-показательная модель, в которой параметр интенсивности показательного закона априори распределен по показательному закону, и модель Коши-Коши, в которой принимается решение о параметре сдвига распределения Коши. Заметим, что все мешающие параметры моделей предполагаются известными.

Для первых двух вероятностных моделей выборочное среднее $\overline{X}$ является достаточной статистикой. Поэтому для них удалось установить вид оптимального критерия δ_n^*, минимизирующего риск 1-го рода при ограничениях на риск 2-го рода — Лемма 1.6 (нормально-нормальная модель) и Лемма 1.9 (показательно-показательная модель). В первом случае область принятия нулевой гипотезы имеет вид $l < \overline{X} < r$, где границы l, r зависят от выбранного уровня β_0 на d-апостериорную вероятность ошибки 2-го рода $\mathcal{R}_0$. Во втором случае аналогичный вид имеет область отвержения нулевой гипотезы. В соответствии с этим описанием удалось построить программу отыскания точного значения необходимого объема выборки n^*. Вычисления показали, что асимптотическая формула для n^* работает идеально с точки зрения относительной ошибки приближения. Для уменьшения абсолютной ошибки асимптотическую формулу необходимо уточнить.

Вероятностная модель Коши не обладает одномерной достаточной статистикой, поэтому построение оптимального критерия здесь не представляется возможным (нельзя выразить в простом замкнутом виде неравенство $\mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1,\, \theta_2] \,|\, x^{(n)}\} > c$ относительно апостериорной вероятности справедливости нулевой гипотезы). Ввиду этого, анализ точности асимптотики НОВ проводился по на данным статистического моделирования. Кроме того, для этой модели были найдены значения необходимого объема выборки в классе критериев, основанных на выборочной медиане. Показано, что асимптотическая формула дает вполне приемлемые результаты.

В третьем параграфе в рамках нормально-нормальной модели строится последовательный критерий различения тех же интервальных гипотез, основанный на первом выходе апостериорной вероятности справедливости нулевой гипотезы из интервала $(\beta_1; 1-\beta_0)$. Это так называемый последовательный критерий первого перескока, предложенный в [12]. Поскольку область продолжения наблюдений этого критерия имеет сложную структуру, было предложено его упрощение. Методом стохастического моделирования показано, что основные вероятностные характеристики этих двух последовательных процедур почти всегда мало отличимы (Табл. 1.4).

Глава 2 посвящена описанию в явном виде для вероятностной модели нормального распределения с априорным нормальным распределением семейств доверительных интервалов, общее определение которых введено в работе Володина И.Н. и Симушкина С.В. [16]. Найдена асимптотика для границ доверительных интервалов семейства, когда объем выборки стремится к бесконечности, и на основе этой асимптотики предложен упрощенный вариант доверительного семейства. Показано, что этот вариант имеет такую же асимптотическую точность. В целях упрощения формулировок утверждений описание дается только для случая, когда априорная дисперсия и дисперсия наблюдений равны единице.

В первом параграфе этой главы дается подробное описание методики доверительного оценивания в d-апостериорном подходе. Вводятся основные определения и ставится задача.

Пусть $\mathcal{B}(x) = \{[\theta_1, \theta_2], \theta_1 < \theta_2\}$ — семейство интервалов, зависящее от результата $x (\in \mathcal{X})$ статистического эксперимента.

Определения. Условная вероятность

$$\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,; \mathcal{B}) \;=\; \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, \mathcal{B}(X) \ni [\theta_1, \theta_2]\}, \quad \theta_1 < \theta_2,$$

(как функция границ интервала) называется *надежностью* семейства $\mathcal{B}$, а условная вероятность

$$\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,; \mathcal{B}) \;=\; \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, \mathcal{B}(X) \not\ni [\theta_1, \theta_2]\}, \quad \theta_1 < \theta_2,$$

— *точностью* семейства $\mathcal{B}$. Семейство $\mathcal{B}$ называется *Б-доверительным* (с уровнем доверия $(1-\alpha)$), если надежность

$$\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) \geqslant 1-\alpha$$

для любых $\theta_1 < \theta_2$.

ii) Семейство $\mathscr{B}^*$ называется *наиболее точным* (*оптимальным*) Б-доверительным семейством, если точность любого другого Б-доверительного (с уровнем доверия $(1-\alpha)$) семейства интервалов $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) \geqslant \mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathscr{B}^*)$$

каковы бы ни были $\theta_1 < \theta_2$.

Во втором параграфе методика d-доверительного оценивания применяется к нормально-нормальной модели. Заметим, что здесь (при известной дисперсией) выборочный вектор может быть редуцирован до значения достаточной статистики $T(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X} = n^{-1}\sum_1^n X_i$.

Сначала устанавливается, что наиболее точное доверительное семейство может быть описано с помощью функции апостериорной надежности

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \,\big|\, t) := \frac{\int_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta}\Big[\Phi\Big(\sqrt{n}\big(2\,Z_n - \,t-\theta\big)\Big) - \Phi\Big(\sqrt{n}\big(t-\theta\big)\Big)\Big]\,\varphi\,(\theta)\;d\theta}{\Phi\Big(\frac{2Z_n - t}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\Big) - \Phi\Big(\frac{t}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\Big)}\,,$$

где θ_c, δ — середина и, соответственно, половинная ширина интервала, $Z_n = \big(1+\frac{1}{n}\big)\,\theta_c\,,$ Φ – стандартная нормальная функция распределения.

Наиболее точное семейство описывается в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть $\overline{X} = x$. Определим для каждого θ_c константу $\delta_n^* = \delta_n^*(\theta_c, x)$ из условия*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta_n^* \,\big|\, x) = 1-\alpha.$$

Тогда интервал $[\theta_1, \theta_2]$ входит в наиболее точное семейство $\mathscr{B}_n^*$, если его ширина $(\theta_2 - \theta_1) > 2\delta_n^*(\theta_c, x)$ с $\theta_c = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

Связь между наиболее точным доверительным семейством и полученным значением статистики $\overline{X}$ приведена в

Теореме 2.2. *Если θ_c, δ таковы, что*

$$\Phi(\theta_c+\delta)-\Phi(\theta_c-\delta) \ < \ 1-\alpha \ < \ 1-2\Phi\Big(-\sqrt{n+1}\,\delta\Big)\,,$$

то (i) *существует единственная точка $x_n^* = x_n^*(\theta_c,\delta) > Z_n$ такая, что*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c,\delta \,\big|\, x_n^*) = 1-\alpha;$$

(ii) *интервал $[\theta_c-\delta,\theta_c-\delta]$ включается в наиболее точное доверительное семейство $\mathscr{B}_n^*$ тогда и только тогда, когда выборочное значение статистики $\overline{X}=x$ удовлетворяет неравенствам*

$$2Z_n - x_n^* \leqslant x \leqslant x_n^*\,.$$

Первое неравенство в условии теоремы 2.2 связано с тем, что интервалы $[\theta_c-\delta,\theta_c-\delta]$, априорная вероятность которых $\Phi(\theta_c+\delta)-\Phi(\theta_c-\delta) \geqslant 1-\alpha$, всегда включаются в наиболее точное доверительное семейство. Правая часть второго неравенства есть максимальное значение апостериорной вероятности $\max_x \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_c-\delta,\theta_c-\delta] \,\big|\, \overline{X}=x\}$. Поэтому интервалы со слишком малой шириной δ не могут быть включены в семейство $\mathscr{B}_n^*$.

Доказательства этих теорем основаны на ряде свойств апостериорной надежности как функции значений статистики $\overline{X}=x$ и параметров θ_c,δ (леммы 2.1, 2.2).

В третьем параграфе исследуются асимптотические (при $n\to\infty$) свойства наиболее точного доверительного семейства.

Лемма 2.3. *При любых фиксированных $\delta>0$, θ_c, x*

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{Q}_n(\theta_c,\delta \ \mid \ x) \ = \ \begin{cases} \dfrac{\Phi(\theta_c+\delta)-\Phi(\theta_c-\delta)}{|\Phi(2\theta_c-x)-\Phi(x)|} & ,\ \text{если}\ \ x\notin[\theta_c-\delta;\theta_c+\delta]\,, \\ 1 & ,\ \text{если}\ \ x\in[\theta_c-\delta;\theta_c+\delta]\,. \end{cases}$$

Выберем последовательность чисел $q_n\to 0$ и определим асимптотический аналог наиболее точного семейства

$$\mathscr{B}_{na}^* = \mathscr{B}_{na}^*(x) = \big\{\,[\theta_c-\delta,\theta_c+\delta]:\ \delta \geqslant \delta^*(\theta_c,x)+q_n\,\big\}$$

для выборочного значения $\overline{X} = x$, где $0 < \delta^* = \delta^*(\theta_c, x)$ — решение уравнения

$$\frac{\Phi(\theta_c + \delta^*) - \Phi(\theta_c - \delta^*)}{|\Phi(2\theta_c - x) - \Phi(x)|} = 1 - \alpha\,,$$

$\delta^* = 0$ при $x = \theta_c$.

Теорема 2.5. *Пусть* $q_n \to 0,\ n \to \infty$.

(I) *Семейство* $\mathscr{B}^*_{na}$ *асимптотически надежно, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}(\mathscr{B}^*_{na} \mid A,\, B) = 1 - \alpha \quad (\forall A < B).$$

(II) *Если* $q_n = O_c\left(\frac{1}{n}\right)$, *то для любых* $A < B$

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}\big(\mathscr{B}^*_{na} \,\big|\, A,\, B\big)}{\mathcal{A}\big(\mathscr{B}^*_{n} \,\big|\, A,\, B\big)} < \infty\,.$$

Доказательство этой теоремы использует утверждения двух лемм (леммы 2.5, 2.6), в которых устанавливается асимптотическая эквивалентность (со скоростью сходимости $1/n$) параметров x^*_n, δ^*_n и x^*, δ^*, определяющих наиболее точное семейство и его асимптотический аналог. Кроме того, доказательство теоремы опирается на следующее утверждение, доказываемое методами асимптотического анализа лапласовских интегралов.

Лемма 2.7. *Если константа* $x > B$ *и последовательность* $q_n = \frac{c_n}{n}$, *где* $c_n \to c_0$, *то при* $n \to \infty$

$$\int_A^B \Phi\big(\sqrt{n}(\theta - x - q_n)\big)\varphi(\theta)\, d\theta \ \asymp\ \frac{\varphi(B) e^{-c_0(x-B)}}{\sqrt{2\pi}(x-B)^2}\, \frac{e^{-\frac{(x-B)^2}{2} n}}{n\sqrt{n}}\,.$$

В **главе 3** рассматривается традиционная задача оценки среднего значения нормального распределения в рамках d-апостериорного подхода к проблеме гарантийности процедуры оценивания. Предлагаются основанные на фиксированном числе наблюдений и последовательные процедуры оценки среднего значения нормального распределения с заданными ограничениями на d-риск абсолютной и относительной ошибок при дополнительных априорных сведениях о малости и положительности оцениваемого параметра. Данное свéдение формализуется в терминах показательного априорного распределения с малым значением масштабного параметра.

Если $L(\theta, d), \theta, d \in \mathbb{R}$, — функция потерь от выбора значения оценки d, при истинном значение параметра равно θ, то функция d-риска оценочной функции $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X^{(n)})$ определяется как условное среднее потерь относительно σ-алгебры, порожденной $\widehat{\theta}$:

$$\mathcal{R}(d\,;\,\widehat{\theta}) = \mathbf{E}[L(\vartheta, \widehat{\theta}(X^{(n)}))\,\big|\,\widehat{\theta}(X^{(n)}) = d].$$

В некоторых ситуациях можно построить оценку с равномерно минимальной функцией d-риска (см. [14]). Эта возможность возникает в том случае, когда существует оценка θ^* с функцией d-риска

$$\mathcal{R}(d\,;\,\theta^*) = \inf_{x^{(n)}} \mathbf{E}[L(\vartheta\,;\,d)\,\big|\,X^{(n)} = x^{(n)}].$$

В первом параграфе рассматривается проблема оценивания параметра среднего значения θ нормального $(\,\theta,\,\sigma^2\,)$ распределения с функцией потерь вида $1-0$: $L(\,\theta,\,d\,) = 1$, если $|\,\theta - d\,| > \Delta$, и $L(\,\theta,\,d\,) = 0$ в противном случае, где Δ — заданное ограничение на точность оценивания. Предполагается, что θ является реализацией случайной величины ϑ, имеющей экспоненциальное распределение со средним значением $1/\lambda$. Большие значения параметра λ говорят о том, что вероятностная масса ϑ сконцентрирована около нуля.

Для функций потерь типа 1–0 удобнее иметь дело не с функцией d-риска, а с функцией надежности $\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}) = 1 - \mathcal{R}(d\,;\,\widehat{\theta})$.

Теорема 3.1. *Байесовская оценка, основанная на фиксированном числе n наблюдений* $\widehat{\theta}_B = \max(\Delta,\,\overline{X} - \frac{\lambda\sigma^2}{n})$.

Теорема 3.2. I) *Функция надежности байесовской оценки, основанной на фиксированном числе n наблюдений, для $d > \Delta$ вычисляется как*

$$\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) = \frac{2\Phi(\,\Delta\sqrt{n}/\sigma\,) - 1}{\Phi(\,d\sqrt{n}/\sigma\,)}\,, \qquad d \geqslant \Delta.$$

II) *Наименьший объем выборки n^*, при котором надежность $\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) \geqslant (1-\beta)$ для любых d из носителя распределения $\widehat{\theta}_B$ ($d \geqslant \Delta$), есть наименьшее целое число n такое, что*

$$n \geqslant \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\beta/2)\sigma}{\Delta}\right)^2.$$

Приводится численное сравнение байесовской оценки с огибающей функции надежности (надежностью оценки с равномерно минимальным d-риском). Это сравнение показывает, что наименьший объем выборки n^*, при котором возможно достижение заданной величины надежности, одинаков для обеих оценок.

В заключительном разделе первого параграфа строится универсальная последовательная процедура первого пересечения с моментом остановки

$$\nu = \min\{n : H_n(\overline{X}_n - \tfrac{\lambda\sigma^2}{n}) \geqslant 1-\beta\},$$

где $H_n(t) = \mathbf{P}\{|\vartheta - \theta_B(t)| < \Delta \,\big|\, T = t\}$ — апостериорная надежность байесовской оценки, $T = \overline{X}_n - \frac{\lambda\sigma^2}{n}$. После остановки статистического эксперимента решение принимается с помощью байесовской оценки.

Важно заметить, что с вероятностью единица случайное значение объема выборки ν не превышает n^* (**Лемма 3.3**).

Для неизвестных значений λ и σ в процедурах оценки предлагается эмпирическая байесовская оценка, основанная на архиве предыдущих выборочных данных. В качестве иллюстрации рассматривается реальная задача по определению содержания мышьяка в пищевом продукте. Показано, что применение последовательной схемы приводит к значительному уменьшению объема инспекции.

Во втором параграфе рассматривается аналогичная задача оценки среднего значения нормального распределения при функции потерь 1–0 с относительной ошибкой: $L(\theta,d) = 0$, если $\frac{1}{1+\Delta} < \frac{\vartheta}{d} < 1+\Delta$, и $L(\theta,d) = 1$ в противном случае.

Рассматривается априорное распределение более общего вида, учитывающее не только положительность оцениваемого параметра, но и то, что его значение может быть больше некоторой величины $\theta_0 > 0$:

$$g(\theta) = \lambda \exp\{-\lambda\,(\theta - \theta_0)\,\}, \qquad \theta \geqslant \theta_0.$$

Теорема 3.3. *Пусть* $T = \overline{X}_n - \frac{\lambda\sigma^2}{n}$. *Тогда байесовская оценка*

$$\theta_B = \theta_B(T) = \max\{\,\theta_0(1+\Delta),\ \widehat{a}_n\,\},$$

где

$$\widehat{a}_n = \widehat{a}_n(T) = \frac{T}{(1+\Delta)+(1+\Delta)^{-1}} + \\ + \sqrt{\frac{T^2}{[(1+\Delta)+(1+\Delta)^{-1}]^2} + \frac{4\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n[(1+\Delta)^2-(1+\Delta)^{-2}]}},$$

При этом, $\theta_B = \theta_0(1+\Delta)$, *если*

$$T \leqslant \frac{1}{2}(1+(1+\Delta)^2)\theta_0 - \frac{2\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n\Delta(2+\Delta)\theta_0}.$$

Наименьший объем выборки, при котором возможно достижение заданной величины $(1-\beta)$ на функцию надежности, равен наименьшему целому n, удовлетворяющему неравенству

$$\inf_{a>\theta_0(1+\Delta)}\ \sup_{t} \frac{\Phi\left[(a(1+\Delta)-t)\sqrt{n}/\sigma\right] - \Phi\left[(a/(1+\Delta)-t)\sqrt{n}/\sigma\right]}{\Phi\left((t-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)} \geqslant 1-\beta.$$

Численно показывается, что это значение НОВ идеально аппроксимируется величиной

$$\widetilde{n} = \left(\frac{\Phi^{-1}(\,1-\beta/2\,)\sigma}{\theta_0\,\Delta(1+\Delta)}\right)^2.$$

Как и в первом параграфе предлагается последовательная процедура первого пересечения для оценки θ, основанная на первом достижении апостериорной надежности оценки заданного значения $1-\beta$.

Третий параграф завершается построением процедур оценке содержания элемента мышьяка в питьевой воде.

Глава 1

Минимальный объем наблюдений при различении двух интервальных гипотез

Введение

Задача различения статистических гипотез относительно параметров распределения наблюдаемой случайной величины — одна из важнейших задач математической статистики. Классический подход к решению этой проблемы состоит в построении критериев, которые удовлетворяют заданным ограничениям на вероятность отклонения нулевой гипотезы $\mathbf{H}_0$, когда она верна, и при этом их мощность, т.е. вероятность отклонения $\mathbf{H}_0$, когда верна альтернатива $\mathbf{H}_1$, должна быть максимальной. Способы построения наиболее мощных критериев хорошо известны (см., например, монографию [20, Э.Леман]).

С наиболее мощными критериями естественным образом связана проблема отыскания наименьшего объема наблюдений (необходимого объема выборки — НОВ), при котором существует критерий, удовлетворяющий заданным ограничениям на обе указанные вероятности ошибок. Решению задач по определению минимального объема наблюдений, гарантирующего заданные ограничения, посвящено большое число публикаций (см., например, [6], где можно найти обширную библиографию).

Во многих практических ситуациях критерии, удовлетворяющие заданным ограничениям на классические вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, не решают по-существу проблему гарантийности статистического вывода. Например, при контроле качества серийной продукции важна не вероятность отправки потребителю некондиционного изделия, а доля некондиционной продукции, которая отослана потребителю. Возможность рассмотрения подобных характеристик возникает только в ситуациях, когда контролируемую характеристику можно считать случайной. В работе [13] была предложена характеристика статистической процедуры, названная d-риском и представляющая собой условное математическое ожидание потерь среди экспериментов, закончившихся принятием того или иного решения (от английского design risk); процедуры, у которых d-риск не превосходит заданных ограничений, называются d-гарантийными.

В этой главе рассматриваются две задачи, связанные с d-гарантийными процедурами различения двух статистических гипотез вида $\mathbf{H}_0 : \theta \in (\theta_1, \theta_2)$ и $\mathbf{H}_1 : \theta \notin (\theta_1, \theta_2)$ относительно одномерного параметра θ вероятностной модели наблюдений. В частности, в первом параграфе устанавливается асимптотическая формула для необходимого объема выборки. Аналогичная задача решалась в работе [10] для случая различения двух односторонних гипотез. В этом параграфе получен близкий по сути результат, но при более слабых условиях на вероятностную модель. Идеи [10] были использованы только при доказательстве леммы 1.4 из этой главы.

Во втором параграфе точность полученной асимптотики иллюстрируется в задаче проверки интервальных гипотез для трех конкретных вероятностных моделей: различение интервальных гипотез для среднего значения нормального распределения при априорном нормальном распределении этого параметра, для параметра показательного распределения при априорном гамма-распределении этого параметра и проверке интервальной гипотезы о параметре положения распределения Коши при априорном распределении Коши этого параметра. В первых двух примерах вероятностная модель наблюдений обладает одномерной достаточной статистикой, апостериорное распределение относительно которой может быть легко найдено. Третья модель является примером случая, когда такая одномерная достаточная статистика отсутствует. В этом случае прямой путь нахождения необходимого объема выборки практически не реализуем, поэтому проверка точности асимптотической формулы реализуется с применением методов стохастического моделирования. Кроме того, в этом примере рассмотрен вариант редукции данных к подходящей одномерной статистике (выборочной медиане).

В третьем параграфе предлагается последовательная процедура d-гарантийного различения интервальных гипотез для среднего значения нормального распределения $N(\theta, \sigma^2)$, где θ — реализация случайной величины ϑ, имеющей априорное $N(\mu, \tau^2)$ распределение. Эта процедура представляет собой частный случай универсальной d-гарантийной процедуры первого перескока [6]. Для задачи различения односторонних гипотез такая процедура подробно исследуется с численными иллюстрациями в статье [36]. Отметим, что при различении двух гипотез такую последовательную процедуру можно рассматривать как процедуру вальдовского типа [4], в которой вместо отношения двух правдоподобий относительно простых гипотез рассматривается отношение правдоподобий, усредненных по соответствующим сложным гипотезам (см. [36]). Критерии вальдовского типа строятся и исследуются с точки зрения среднего объема наблюдений в работах [21], [10], [23], [30]. Кроме того в данном параграфе предлагается модификация критерия первого перескока и на данных статистического моделирования показывается схожесть двух построенных процедур с точки зрения среднего объема наблюдений.

1.1. Необходимый объем выборки при d-гарантийном различении интервальных гипотез

1.1.1. Постановка задачи

Пусть в эксперименте наблюдается случайная выборка фиксированного объема n из независимых одинаково распределенных случайных величин $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$, плотность распределения которых $f(\,x\,|\,\theta)$, $x \in \mathcal{X}$, относительно некоторой σ-конечной меры μ на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$, зависит от неизвестного действительного параметра $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^1$. Будем предполагать, что значение параметра θ является реализацией случайной величины

ϑ с известной плотностью $g(\theta)$ относительно меры Лебега на борелевской прямой $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B})$. Функцию распределения ϑ будем обозначать через $G(\theta)$. Таким образом, мы находимся в рамках байесовской парадигмы, однако здесь нас будет интересовать не априорный (байесовский) риск от принятия решений, а d-апостериорный риск.

Опишем подробнее вероятностную модель. Во-первых, необходимо предполагать, что функция плотности $f(\,x \,|\, \theta)$, $x \in \mathcal{X}, \theta \in \mathbb{R}^1$, измерима как отображение измеримого пространства $(\mathcal{X} \times \mathbb{R}^1, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$ в борелевскую прямую $\mathbb{R}^1$. В этом случае можно ввести распределение $\mathbf{P}$ вектора $(\vartheta, X_1, \ldots, X_n)$, задаваемое совместной плотностью $g(\theta) \prod_1^n f(x_i \,|\, \theta)$, то есть

$$\mathbf{P}\Big\{(\vartheta \in B) \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\Big\} = \int_B \bigg(\prod_{i=1}^{n} \int_{A_i} f(\,x_i \,|\, \theta)\, \mu(dx_i) \bigg) g(\theta)\, d\theta, \qquad (1.1)$$

для любых $B \in \mathfrak{B}$, $\{A_i\}_1^n \subset \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$ Регулярное условное распределение $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ относительно сигма-алгебры, порожденной ϑ, определяемое плотностью $f_n(x^{(n)} \,|\, \theta) = \prod_1^n f(\,x_i \,|\, \theta)$ (относительно меры $\mu_n = \otimes_1^n \mu$), как это и принято, будем обозначать через $\mathbf{P}_\theta$. Относительно распределения (1.1) компоненты вектора $X^{(n)}$ условно независимы (при фиксированном ϑ).

Операции математического ожидания относительно мер $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}_\theta$ будем обозначать $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_\theta$ соответственно. Таким образом, в силу формулы полного математического ожидания для любого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{P}\{X^{(n)} \in B\} = \mathbf{E}\big(\mathbf{P}_\vartheta\{X^{(n)} \in B\}\big) = \int_B f(x^{(n)})\, \mu_n(dx^{(n)}),$$

где

$$f(x^{(n)}) = \int_\Theta f(x^{(n)} \,|\, \theta)\, g(\theta) d\theta, \quad x^{(n)} \in \mathcal{X}^n, \quad -$$

функция плотности безусловного распределения $X^{(n)}$. Математическое ожидание любой интегрируемой функции $h : \mathcal{X}^n \to \mathbb{R}^1$ может быть вычислено двумя способами:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\, h(X^{(n)}) = & \int_{\mathcal{X}^n} h(x^{(n)}) f(x^{(n)})\, \mu_n(dx^{(n)}) = \\ = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}_\vartheta\, h(X^{(n)})\right] = & \int_\Theta \left[\int_{\mathcal{X}^n} h(x^{(n)}) f_\theta(x^{(n)})\, \mu_n(dx^{(n)}) \right] g(\theta) d\theta.\end{aligned}$$

Рассмотрим произвольную решающую функцию δ, которая по результатам наблюдений $X^{(n)} = x^{(n)}$ принимает решение d_0 в пользу гипотезы $\mathbf{H}_0 : \theta \in \Theta_0 \ (\subset \Theta)$ или решение d_1 в пользу альтернативной гипотезы $\mathbf{H}_1 : \theta \in \Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$. Другими словами, решающая функция $\delta_n = \delta_n(x^{(n)})$ есть измеримое отображение пространства $(\mathcal{X}^n, \mathfrak{A}^{\otimes n})$ в множество решений $\{d_0, d_1\}$. Определим d-апостериорные вероятности ошибок решающей функции δ как условные вероятности справедливости той или иной гипотезы при условии, что принято решение в пользу ее альтернативы:

$$\mathcal{R}_k(\delta_n) = \mathbf{P}\{\vartheta \in \Theta_{1-k} \,\big|\, \delta_n = d_k\}, \quad k = 0, 1. \tag{1.2}$$

При этом, если безусловная вероятность принятия соответствующего решения равна 0, d-риск полагается равным 0.

Под необходимым объемом выборки (НОВ) n^* при заданных ограничениях β_0 и β_1 будем понимать наименьшее целое число n, для которого существует правило δ_n, удовлетворяющее неравенствам

$$\mathcal{R}_0(\delta_n) \leqslant \beta_0, \quad \mathcal{R}_1(\delta_n) \leqslant \beta_1.$$

Заметим, что если хотя бы для одной из гипотез априорная вероятность

$$\mathbf{P}\{\vartheta \notin \Theta_k\} \leqslant \beta_k,$$

то $n^* = 0$ и оптимальное правило принимает решение d_k без проведения наблюдений. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что

$$\beta_1 < \mathbf{P}\{\vartheta \in \Theta_0\} < 1 - \beta_0.$$

Ключевую роль в задаче отыскания НОВ играет статистика

$$T_n = T_n(X^{(n)}) = \mathbf{P}\{\, \vartheta \in \Theta_0 \,\big|\, X^{(n)}\, \}, \tag{1.3}$$

равная апостериорной вероятности справедливости гипотезы $\mathbf{H}_0$. Во-первых, следует заметить, что согласно телескопическому свойству условного математического ожидания вероятности ошибок любой решающей функции могут быть вычислены через T_n :

$$\mathcal{R}_0(\delta) = 1 - \mathbf{E}[\,T_n \,\big|\, \delta = d_0], \quad \mathcal{R}_1(\delta) = \mathbf{E}[\,T_n \,\big|\, \delta = d_1]. \tag{1.4}$$

Во-вторых, как было показано в [22], необходимый объем выборки следует искать среди решающих функций вида

$$\delta^*_{n,c}(x^{(n)}) = \begin{cases} d_1, \text{ если } T_n \leqslant c, \\ d_0, \text{ если } T_n > c. \end{cases} \tag{1.5}$$

Точнее говоря, в случае $T_n = c$ решение должно приниматься с помощью рандомизированного правила, что существенно для дискретных статистических экспериментов. Однако при $n \to \infty$ влияние рандомизации на величину риска ничтожно (см. [10]). Поэтому мы ограничились рассмотрением только правил вида (1.5); для d-риска этих правил введем обозначение $\mathcal{R}_k(n,c) = \mathcal{R}_k(\delta^*_{n,c}),\ k = 1,2.$

Из свойств правила $\delta^*_{n,c}$ (см. [38]) отметим непрерывность справа и монотонность ее функции риска по параметру c: при $c \in (0,1)$

i) вероятность ошибки $\mathcal{R}_0(n,c)$ не возрастая изменяется в пределах:

$$\inf_{x^{(n)}}(1 - T_n(x^{(n)})) \ \leqslant\ \mathcal{R}_0(n,c) \ \leqslant\ 1 - \mathbf{P}\{\theta_1 \leqslant \vartheta \leqslant \theta_2\};$$

i) вероятность ошибки $\mathcal{R}_1(n,c)$ не убывая изменяется в пределах:

$$\inf_{x^{(n)}} T_n(x^{(n)}) \ \leqslant\ \mathcal{R}_1(n,c) \ \leqslant\ \mathbf{P}\{\theta_1 \leqslant \vartheta \leqslant \theta_2\}.$$

В силу свойства состоятельности апостериорного распределения [43], статистика T_n в зависимости от истинного значения параметра θ сходится либо к единице, либо к нулю. Поэтому при достаточно большом объеме выборки можно построить критерий, у которого либо риск $\mathcal{R}_0(n,c) \leqslant \beta_0$, либо риск $\mathcal{R}_1(n,c) \leqslant \beta_1$. Поэтому при отыскании НОВ константу $c = c^*_n$, соответствующую оптимальному правилу, можно выбирать как

$$c^*_n = \min\{c \in (0,1) :\ \mathcal{R}_0(\delta_{n,c}) \leqslant \beta_0\}.$$

Апостериорная вероятность справедливости нулевой гипотезы $\mathbf{H}_0 : \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ вычисляется по формуле

$$T_n(x^{(n)}) = \frac{1}{f_n(x^{(n)})} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_n(\, x^{(n)} \,|\, \theta)\, g(\theta)\, d\theta.$$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся как условная (при фиксированном θ) функция распределения статистики T_n, так и ее безусловная функция распределения:

$$\begin{aligned} &F_n(\, t \,|\, \theta) = \mathbf{P}_\theta\{T_n(X^{(n)}) \leqslant t\}, \\ &F_n(t) = \mathbf{E}\big[F_n(\, t \,|\, \vartheta)\big] = \int_\Theta F_n(\, t \,|\, \theta)\, g(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Вероятности ошибок (d-риски) правила (1.5) можно выразить через эти функции распределения:

$$\begin{aligned} R_1(n, c) &= \frac{1}{F_n(c)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_n(c \,|\, \theta) g(\theta)\, d\theta, \\ R_0(n, c) &= \frac{1}{1 - F_n(c)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \big(1 - F_n(c \,|\, \theta)\big) g(\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, необходимый объем выборки n^* (без учета рандомизации) находится как минимальное целое n, при котором

$$\begin{gathered} \frac{1}{F_n(c_n^*)} \int_{(\theta_1,\theta_2)} F_n(\, c_n^* \,|\, \theta)\, g(\theta)\, d\theta \leqslant \beta_1, \qquad \text{где} \\ c_n^* = \min\Big\{c : \quad \frac{1}{1 - F_n(c)} \int_{\theta \notin (\theta_1,\theta_2)} (1 - F_n(\, c \,|\, \theta))\, g(\theta)\, d\theta \leqslant \beta_0\Big\}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Цель этого параграфа — исследование асимптотического поведения НОВ n^* в ситуации с «жесткими» ограничениями: $\beta_0, \beta_1 \to 0$. В статье [10] аналогичная задача решалась для случая различения односторонних гипотез $\mathbf{H}_0 : \theta \leqslant \theta_0$, $\mathbf{H}_1 : \theta > \theta_0$. Здесь мы используем несколько отличные от [10] условия и другую технику доказательства результатов.

1.1.2. Условия регулярности

Опишем сначала условия на вероятностную модель, при которых будет производится анализ n^*. Положим $w(\theta\,;\,x)=\sqrt{f(x\,|\,\theta)},\ x\in\mathcal{X},\theta\in\Theta$, и пусть $\dot w(\theta\,;\,x)$ — производная (по θ) в смысле $L_2(\mu)$ функции $w(\theta\,;\,x),\ \theta\in\Theta$. Расстояние Хеллингера r_2 определяется соотношениями

$$r_2^2(\theta,\theta+h)=\mathbf{E}_\theta\Big(\frac{w(\theta+h\,;\,X)}{w(\theta\,;\,X)}-1\Big)^2=\int_{\mathcal{X}}\big(w(\theta+h\,;\,X)-w(\theta\,;\,X)\big)^2\mu(dx),$$

а информация по Фишеру (см. [18])

$$I(\theta)=4\mathbf{E}_\theta(\dot w(\theta\,;\,X)/w(\theta\,;\,X))^2,\ \theta\in\Theta.$$

Кроме того, введем случайную функцию

$$\Delta_n(\theta)=\frac{1}{\sqrt{nI(\theta)}}\sum_{i=1}^n\frac{2\dot w(\theta,X_i)}{w(\theta,X_i)},$$

представляющую собой нормированную функцию вклада в точке θ. Пусть Φ — функция распределения стандартного нормального $\mathcal{N}(0,1)$ закона, φ — его функция плотности.

Основу условий, в которых будет производиться анализ НОВ n^*, составляют классические условия регулярности ([18, 43]), обеспечивающие локальную асимптотическую нормальность (ЛАН) эксперимента в точках $\theta_1,\ \theta_2$. Точнее, будем предполагать, что плотности $f(x\ \big|\ \theta)$ выбраны так, что найдутся окрестности U_1,U_2 точек $\theta_1,\ \theta_2$ соответственно, в которых выполняются следующие условия.

(A1) Для μ-почти всех x функция $f(\,x\,|\,\theta)$ непрерывна, а $\dot w(\theta\,|\,x)$ есть $L_2(\mu)$-непрерывная функция параметра $\theta\in U_1\bigcup U_2$.

(A2) Существует конечная информация по Фишеру $I(\theta)\neq 0$ для всех $\theta\in U_1\bigcup U_2$.

Как было сказано, эти условия обеспечивают локальную асимптотическую нормальность эксперимента в граничных точках θ_1,θ_2. Мы используем только два следствия из ЛАН, первое из которых известно как первая лемма Ле Кама, а второе легко вытекает из третьей леммы Ле Кама (см. [43, стр. 88, 90]). Пусть $h\in\mathbb{R}^1$ и $t_n=\theta_j+h/\sqrt{nI(\theta_j)}$, тогда:

(L1) последовательности распределений $X^{(n)}$ относительно мер $\mathbf{P}_{\theta_j}$ и $\mathbf{P}_{t_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, взаимно контигуальны;

(L2) функция вклада асимптотически нормальна $\mathcal{N}(h, 1)$ относительно последовательности мер $\mathbf{P}_{t_n}$, то есть для любого $x \in \mathbb{R}^1$

$$\lim_n \mathbf{P}_{t_n}\{\Delta_n(\theta_j) < x\} = \Phi(x - h). \tag{1.7}$$

Кроме того, нам понадобятся следующие условия.

(A3.i) Найдется константа $a > 0$ такая, что при всех $\theta \in \Theta$ и h таких, что $h + \theta \in \Theta$,

$$r_2^2(\theta, \theta + h) \geqslant \frac{ah^2}{1 + h^2};$$

(A3.ii) $$\sup_h \frac{1}{h^2} r_2^2(\theta_j, \theta_j + h) < \infty, \quad j = 0, 1.$$

(A4) Для $j = 0, 1$

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\mathcal{X}} \sup_{|h| < \delta} \big(w(\theta_j + h; x) - w(\theta_j; x)\big)^2 \mu(dx) = 0.$$

(A5) Носители распределений X, т.е. множества $\{x : f(x \,|\, \theta) > 0\}$ не зависят от параметра θ, и для априорной вероятности нулевой гипотезы справедливо $0 < G(\theta_2) - G(\theta_1) < 1$.

(A6) Параметрическое пространство Θ есть ограниченный открытый интервал $\mathbb{R}^1$, априорная плотность g ограничена на Θ и, кроме того, g строго положительна и непрерывна в окрестностях U_1, U_2.

Условие (A5) является обычным в подобного рода задачах. Для вероятностных моделей с этим условием нельзя построить статистическое правило на конечном числе наблюдений, имеющее обе вероятности ошибок, равные нулю. Это обстоятельство гарантирует увеличение НОВ до бесконечности по мере уменьшения до нуля ограничений на вероятности ошибок.

Лемма 1.1. *Пусть выполнено условие (A5), тогда при β_0, $\beta_1 \to 0$ необходимый объем выборки $n^* \to \infty$.*

Доказательство. Заметим сначала, что необходимый объем выборки n^* не убывает при уменьшении β_0, β_1. Поэтому если $n^* \not\to \infty$ при β_0, $\beta_1 \to 0$, то для некоторого конечного объема выборки n существует правило $\delta_{n,c}$ вида (1.5), обе ошибки которого равны нулю. В силу (1.4) это означает, что

$$\mathcal{R}_1(\delta_{n,c}) = \mathbf{E}\{\, T_n \,\big|\, T_n \leqslant c\} = 0,$$
$$\mathcal{R}_0(\delta_{n,c}) = \mathbf{E}\{\, (1 - T_n) \,\big|\, T_n > c\} = 0.$$

Поскольку $0 \leqslant T_n \leqslant 1$, отсюда следует, что статистика T_n сосредоточена в точках 0 и 1: $\quad \mathbf{P}\{T_n = 0\} + \mathbf{P}\{T_n = 1\} = 1$.

Статистика $T_n(x^{(n)}) = 0$ (или $= 1$) только в том случае, если

$$\int_{\Theta_0} f_n(\, x^{(n)} \,|\, \theta)\, g(\theta)\, d\theta = 0 \ \ (\neq 0) \ \text{ и } \ \int_{\Theta_0^c} f_n(\, x^{(n)} \,|\, \theta)\, g(\theta)\, d\theta \neq 0 \ \ (= 0),$$

что невозможно, поскольку по условию носители плотности выборки $f_n(\,\cdot \,|\, \theta)$ совпадают при различных значениях параметра θ. ♠

Лемма 1.2. *Если выполнены условия (A3.i) и (A4), то для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* $j = 1, 2$ *существует равномерно состоятельная последовательность статистических правил* $\phi_n = \phi_n(X^{(n)}) \in [0; 1], n \geqslant 1$, *различения простой гипотезы* $\mathrm{K}_0 : \theta = \theta_j$ *и сложной альтернативы* $\mathrm{K}_1 : |\theta - \theta_j| > \varepsilon$*:*

$$\lim_n \mathbf{E}_{\theta_j}\phi_n = 0, \quad \lim_n \sup_{|\theta-\theta_j|>\varepsilon} \mathbf{E}_\theta(1 - \phi_n) = 0. \tag{1.8}$$

Доказательство. Рассмотрим правило $\phi_n(x^{(n)})$, отвергающее гипотезу $\theta = \theta_1$ (т.е. $\phi_n = 1$) только тогда, когда $\sup_{|h|>\delta} f_n(x^{(n)}|\theta_1 + h)/f_n(x^{(n)}|\theta_1) \geqslant 1$.

Вероятность ошибки первого рода этого правила при $n \to \infty$

$$\mathbf{E}_{\theta_1}\phi_n(X^{(n)}) = \mathbf{P}_{\theta_1}\left\{ \sup_{|h|>\delta} \frac{f_n(X^{(n)}|\theta_1 + h)}{f_n(X^{(n)}|\theta_1)} \geqslant 1 \right\} \to 0$$

— доказательство этого факта (использующее условие ограниченности Θ) см. [18], стр. 55.

Вероятность ошибки второго рода (при $|h| > \delta$)

$$\mathbf{E}_{\theta_1+h}(1 - \phi_n(X^{(n)})) \leqslant \mathbf{P}_{\theta_1+h}\Big\{ \frac{f_n^{1/2}(X^{(n)}|\theta_1)}{f_n^{1/2}(X^{(n)}|\theta_1 + h)} \geqslant 1 \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\mathbf{E}_{\theta_1+h}\Big(\frac{f^{1/2}(X|\theta_1)}{f^{1/2}(X|\theta_1 + h)} \Big) \right)^n \leqslant \gamma^n \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

так как, по условию (A3.i)

$$\gamma \stackrel{def}{=} \sup_{|h|\geqslant\delta} \mathbf{E}_{\theta_1} \frac{f^{1/2}(X|\theta_1+h)}{f^{1/2}(X|\theta_1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2 - \inf_{|h|\geqslant\delta} \mathbf{E}_{\theta_1}\Big(\frac{f^{1/2}(X|\theta_1+h)}{f^{1/2}(X|\theta_1)} - 1\Big)^2\Big) < 1,$$

и $\mathbf{E}_{\theta_1}\big[\big(f(X|\theta_1+h)/f(X|\theta_1)\big)^{1/2}\big] = \mathbf{E}_{\theta_1+h}\big[\big(f(X|\theta_1)/f(X|\theta_1+h)\big)^{1/2}\big]$. ♠

Утверждение этой леммы гарантирует возможность применения теоремы Бернштейна-фон Мизеса об асимптотической нормальности апостериорного распределения (см., например, [43], стр. 141). Применительно к нашей задаче эту теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.1 (Бернштейн–фон Мизес)**.** *Пусть статистический эксперимент удовлетворяет условиям (A1), (A2), (A6) и существует последовательность статистических правил* ϕ_n, *удовлетворяющая (1.8), тогда для любой последовательности* $Z_n \in \mathbb{R}^1$ *при* $n \to \infty$ *по вероятности* $\mathbf{P}_{\theta_j}$ $(j = 1, 2)$

$$\mathbf{P}\Big\{\vartheta < \theta_j + \frac{Z_n}{\sqrt{nI(\theta_j)}} \,\big|\, X^{(n)}\Big\} - \Phi\big(Z_n - \Delta_n(\theta_j)\big) \to 0. \tag{1.9}$$

1.1.3. Асимптотика необходимого объема выборки

Определим функцию

$$W(c) = \int_0^\infty \Phi\big(-t + \Phi^{-1}(c)\big)\,dt = \varphi(\Phi^{-1}(c)) + c\,\Phi^{-1}(c), \quad 0 < c < 1, \tag{1.10}$$

где Φ^{-1} — функция обратная Φ. Второе представление функции W получено интегрированием по частям. Из первого представления видно, что функция W всюду непрерывна и строго возрастает от 0 (при $c \to 0$) до $+\infty$ (при $c \to 1$). Кроме того, положим

$$\rho = \rho(\theta_1, \theta_2) = \Big(g(\theta_1)I(\theta_1)^{-1/2} + g(\theta_2)I(\theta_2)^{-1/2}\Big).$$

Теорема 1.2. *Если ограничения* $\beta_0, \beta_1 \to 0$ *так, что* $\beta_1/\beta_0 \to \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, *и вероятностная модель удовлетворяет условиям (A1) – (A6), то для* *необходимого объема выборки n^* справедливо асимптотическое представление*

$$n^* \asymp \widetilde{n} = \left(\frac{\rho\, W(1-c_0)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)}\right)^2 \frac{1}{\beta_0^2}. \tag{1.11}$$

Критическая константа, соответствующая оптимальному правилу,

$$c^*_{n^*} \to c_0,$$

где c_0 — решение уравнения

$$\frac{W(c_0)}{W(1-c_0)} = \left(\frac{1}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} - 1\right)\gamma. \tag{1.12}$$

Замечание 1. Если ограничения β_0, β_1 имеют разный порядок малости ($\gamma = 0$ или $\gamma = \infty$), то можно утверждать только, что $n^* \max(\beta_0^2, \beta_1^2) \to \infty$, $\;n^* \min(\beta_0^2, \beta_1^2) \to 0$.

Доказательство. Для упрощения изложения будем считать, что ограничения на риски связаны соотношением $\beta_1 = \gamma\, \beta_0$.

Утверждение леммы 1.1 гарантирует, что при $\beta_0 \to 0$ необходимый объем выборки $n^* = n^*(\beta_0) \to \infty$. Осуществляя, если понадобится, стандартный переход к подпоследовательностям, можно считать, что существует (возможно бесконечный) предел

$$\lim_{\beta_0 \to 0} \sqrt{n^*}\beta_0 = \frac{1}{\gamma} \lim_{\beta_0 \to 0} \sqrt{n^*}\beta_1 = z.$$

Пусть c_0 удовлетворяет уравнению (1.12), и (конечная) константа

$$z_0 = \frac{\rho\, W(1-c_0)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} = \frac{\rho\, W(c_0)}{1 - G(\theta_2) + G(\theta_1)}\, \frac{1}{\gamma}.$$

Поскольку риск $\mathcal{R}_0(n, c)$ убывает, а риск $\mathcal{R}_1(n, c)$ возрастает по c, то для необходимого объема выборки n^* в любой точке c не могут одновременно выполняться оба неравенства $\mathcal{R}_0(n^*, c) > \beta_0$, $\;\mathcal{R}_1(n^*, c) > \beta_1$. С другой стороны, в силу минимальности n^* не могут одновременно выполняться неравенства $\mathcal{R}_0(n^*-1, c) \leqslant \beta_0$, $\;\mathcal{R}_1(n^*-1, c) \leqslant \beta_1$. Другими словами, всегда найдется пара возможно различных чисел n_0, n_1 $(= n^*$ или $= n^* - 1)$ для которых выполняются одновременно два неравенства

$$\sqrt{n^*}\mathcal{R}_0(n_0, c_0) > \sqrt{n^*}\beta_0, \qquad \sqrt{n^*}\mathcal{R}_1(n_1, c_0) \leqslant \sqrt{n^*}\beta_1,$$

или одновременно два противоположных неравенства. Заметим, что $n_0 \neq n_1$ в ситуации, когда $\mathcal{R}_k(n^*, c_0) \leqslant \beta_k$ и $\mathcal{R}_k(n^* - 1, c_0) > \beta_k$, $k = 1, 2$. В этом случае можно взять, например, $n_0 = n^* - 1$, $n_1 = n^*$.

Переходя к пределу (по тем подпоследовательностям $\beta_0 \to 0$, для которых выполняются оба указанных неравенства) и воспользовавшись при этом утверждениями леммы 1.4, получаем, что константа z должна удовлетворять системе неравенств

$$\frac{\rho\, W(1 - c_0)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} \geqslant_{(\leqslant)} z, \qquad \frac{\rho\, W(c_0)}{1 - G(\theta_2) + G(\theta_1)} \leqslant_{(\geqslant)} z\,\gamma.$$

После очевидных преобразований отсюда получаем

$$z_0 = \frac{\rho\, W(c_0)}{1 - G(\theta_2) + G(\theta_1)}\,\frac{1}{\gamma} \leqslant_{(\geqslant)} z \leqslant_{(\geqslant)} \frac{\rho\, W(1 - c_0)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} = z_0.$$

Следовательно, $z = z_0$.

Покажем теперь, что $c^* = c^*_{n^*} \to c_0$. Так как риск $\mathcal{R}_0(n^*, c)$ убывает по параметру c, то в случае $c^* < c_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$$\sqrt{n^*}\mathcal{R}_0(n^*, c_0 - \varepsilon) \leqslant \sqrt{n^*}\mathcal{R}_0(n^*, c^*) \leqslant \sqrt{n^*}\beta_0.$$

Поэтому, если $\varliminf\limits_{\beta_0 \to 0} c^* < c_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то, снова переходя к пределу по соответствующим подпоследовательностям (и учитывая, что $\sqrt{n^*}\beta_0 \to z_0$), получаем неравенство, противоречащее строгой монотонности функции W и определению z_0 :

$$\frac{\rho\, W(1 - c_0 + \varepsilon)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)} \leqslant z_0 = \frac{\rho\, W(1 - c_0)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)}.$$

Если $c^* > c_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то по построению c^*

$$\sqrt{n^*}\mathcal{R}_0(n^*, c_0 + \varepsilon) > \sqrt{n^*}\beta_0.$$

Откуда аналогичным образом получается противоречие, если предположить, что $\overline{\lim\limits_{\beta_0\to 0}}\, c^* > c_0+\varepsilon$. ♠

К замечанию 1. Если $\gamma = 0$, то, полагая $\lim\sqrt{n^*}\beta_0 = q_0,\ \lim\sqrt{n^*}\beta_1 = q_1$ и рассуждая аналогично предыдущему, можно показать, что при любом $c\in(0,1)$ должны выполняться неравенства

$$\frac{\rho\, W(1-c)}{G(\theta_2)-G(\theta_1)} \leqslant q_0, \qquad \frac{\rho\, W(c)}{1-G(\theta_2)+G(\theta_1)} \geqslant q_1.$$

Поскольку $\lim_{c\to 0} W(c) = 0,\ \lim_{c\to 0} W(1-c) = \infty$, то отсюда следует, что $q_0 = \infty, q_1 = 0$, а критическая константа $c^*\to 0$. Аналогично для $\gamma = \infty$.

Лемма 1.3. *Если выполнены условия (A2) – (A5), то для* $t_{jn} = t/\sqrt{nI(\theta_j)},\ t\in\mathbb{R}^1,\ j = 1,2,$ *при любом* $c\in(0,\,1)$

$$\lim_{n\to\infty} F_n\big(\,c\,\big|\,\theta_1+t_{1n}\big) = \Phi(\Phi^{-1}(c)-t),$$
$$\lim_{n\to\infty} F_n\big(\,c\,\big|\,\theta_2+t_{2n}\big) = \Phi(\Phi^{-1}(c)+t).$$

Доказательство. Рассмотрим точку θ_1 и соответствующую ей последовательность $t_{1n} = \theta_1 + t/\sqrt{nI(\theta_1)},\ t\in\mathbb{R},\ n\geqslant 1$. В силу отмеченной взаимной контигуальности мер $\mathbf{P}_{\theta_1}$ и $\mathbf{P}_{t_{1n}}$ (свойство (L1)) утверждение (1.9) о сходимости к нулю по вероятности $\mathbf{P}_{\theta_1}$ может быть заменено на сходимость по вероятности $\mathbf{P}_{t_{1n}}$. Следовательно, распределение (относительно $\mathbf{P}_{t_{1n}}$) статистики

$$T_n = \mathbf{P}\Big\{\,\vartheta < \theta_1 + \tfrac{Z_n}{\sqrt{nI(\theta_1)}}\,\big|\,X^{(n)}\Big\} - \mathbf{P}\Big\{\,\vartheta < \theta_1 + \tfrac{0}{\sqrt{nI(\theta_1)}}\,\big|\,X^{(n)}\Big\},$$

где $Z_n = (\theta_2-\theta_1)\sqrt{nI(\theta_1)} \to +\infty,\ \ n\to\infty$, асимптотически эквивалентно распределению случайной величины $1-\Phi(-\Delta_n(\theta_1))$. Другими словами,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\mathbf{P}_{t_{1n}}\{T_n<c\} - \mathbf{P}_{t_{1n}}\{\Delta_n(\theta_1) < \Phi^{-1}(c)\}\Big) = 0.$$

Справедливость утверждения леммы следует теперь из (1.7). ♠

Лемма 1.4. *Если выполнены условия (A2) – (A5), то для* $c \in (0,\,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathcal{R}_0(n,c) = \frac{\rho\, W(1-c)}{G(\theta_2) - G(\theta_1)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\mathcal{R}_1(n,c) = \frac{\rho\, W(c)}{1 - G(\theta_2) + G(\theta_1)}.$$

Доказательство. Предельные значения знаменателей в выражениях для обоих рисков находятся просто. Действительно, из теоремы Бернштейна-фон Мизеса (1.9) следует свойство состоятельности апостериорной вероятности $U_n(\theta_j) = \mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta_j \,\big|\, X^{(n)}\}$: при $n \to \infty$

$$U_n(\theta_j) = \mathbf{P}\Big\{\vartheta \leqslant \theta + \frac{(\theta_j - \theta)\sqrt{nI(\theta_j)}}{\sqrt{nI(\theta_j)}} \,\big|\, X^{(n)}\Big\} \xrightarrow{\mathbf{P}_\theta} \begin{cases} 1, & \text{если } \theta < \theta_j, \\ 0, & \text{если } \theta > \theta_j. \end{cases}$$

Поскольку $\mathbf{P}\{\vartheta = \theta_j\} = 0$, $j = 1, 2$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости для любого $0 < c < 1$ при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{T_n > c\} &= \mathbf{E}\big[\mathbf{P}_\vartheta\{U_n(\theta_2) - U_n(\theta_1) > c\}\big] \to \\ &\to \mathbf{E}\,\mathrm{I}(\theta_1 \leqslant \vartheta \leqslant \theta_2) = G(\theta_2) - G(\theta_1). \end{aligned}$$

Перейдем к анализу числителей. Рассмотрим интеграл

$$J^0_{1,n} = \int\limits_{-M}^{\theta_1} \big[1 - F_n(c \,|\, \theta)\big] g(\theta) d\theta = \frac{1}{\sqrt{nI(\theta_1)}} \int\limits_0^{M_n} \big[1 - F_n\big(c \,|\, \theta_n(t)\big)\big] g(\theta_n(t))\, dt,$$

где $\theta_n(t) = \theta_1 - t/\sqrt{nI(\theta_1)}$, $M_n = (M + \theta_1)\sqrt{nI(\theta_1)} \to +\infty$. По условию $g\big(\theta_1 - t/\sqrt{nI(\theta_1)}\,\big) \to g(\theta_1)$ для всех $t \geqslant 0$. Если формально применить первое соотношение леммы 1.3, то получим

$$\sqrt{n} J^0_{1,n} \to \frac{g(\theta_1)}{\sqrt{I(\theta_1)}} \int_0^\infty \big(1 - \Phi\big(t + \Phi^{-1}(c)\big)\big)\, dt = \frac{g(\theta_1)}{\sqrt{I(\theta_1)}} W(1-c).$$

Произведя замену $\theta = \theta_2 + t/\sqrt{nI(\theta_2)}$, аналогично получаем

$$\sqrt{n} J^0_{2,n} = \sqrt{n} \int_{\theta_2}^M \big[1 - F_n(c \,|\, \theta)\big] g(\theta) d\theta \to \frac{g(\theta_2)}{\sqrt{I(\theta_2)}} W(1-c).$$

Для завершения доказательства леммы осталось показать равномерную интегрируемость в области $t \geqslant 0$ последовательностей соответствующих подынтегральных функций. Рассмотрим, например, подынтегральное выражение в $J^0_{1,n}\sqrt{nI(\theta_1)}$. По неравенству Маркова

$$\big[1 - F_n\big(c \,\big|\, \theta_n(t)\big)\big] g(\theta_n(t)) \leqslant \sup_\theta g(\theta)\mathbf{P}_{\theta_n(t)}\{T_n > c\} \leqslant \frac{\sup_\theta g(\theta)}{c}\mathbf{E}_{\theta_n(t)}T_n,$$

где $\theta_n(t) = \theta_1 - t/\sqrt{nI(\theta_1)} \in [-M, M]$ для всех $0 \leqslant t \leqslant M_n$.

Статистику $T_n = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f_n(x^{(n)} \,|\, \theta)g(\theta)\,d\theta/f_n(x^{(n)})$ после замены $\theta = \theta_n(t) + u/\sqrt{nI(\theta_1)}$ и разбиения области интегрирования на интервалы единичной длины можно представить в виде

$$T_n(x^{(n)}) = \sum_{h=0}^{h_n} Q_{t+h},$$

где $h_n = \max\{h : h < (\theta_2 - \theta_1)\sqrt{nI(\theta_1)},\ h = 1, 2, \ldots\}$ и

$$Q_{t+h} = \frac{(nI(\theta_1))^{-1/2}}{f_n(x^{(n)})}\int_{t+h}^{t+h+1} f_n\big(x^{(n)} \,\big|\, \theta_n(t) + \tfrac{u}{\sqrt{nI(\theta_1)}}\big)g\big(\theta_n(t) + \tfrac{u}{\sqrt{nI(\theta_1)}}\big)\,du$$

с соответствующим верхним пределом в случае, когда $h = h_n$.

В монографии [18, стр. 67, 254] показано, что в рассматриваемых здесь условиях с заданным компактным множеством $\Theta = [-M, M]$ существуют константы $a, b, c > 0$ такие, что

$$\mathbf{E}_{\theta_n(t)}Q_{t+h} \leqslant a(t+h)^b e^{-c(t+h)^2},$$

если $\theta_n(t) \in \Theta = [-M, M]$, в частности это неравенство справедливо при $0 \leqslant t \leqslant M_n$. Стало быть, для любого $A > 0$ и $M_n > A$

$$\int_A^{M_n}\left(\mathbf{E}_{\theta_n(t)}T_n\right)dt \leqslant a\sum_{h=0}^{\infty}\int_{A+h}^{\infty} t^b e^{-ct^2}\,dt \leqslant a\sum_{h=0}^{\infty}\int_{A+h}^{\infty}\frac{1}{2t^3}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant a\sum_{k=]A[-1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \to 0 \ \ (A \to +\infty),$$

где $]A[$ есть целая часть A, и неравенство $t^b e^{-ct^2} \leqslant 1/2t^3$, очевидно, справедливо для всех достаточно больших $t > 0$.

Таким образом, искомые интегралы $J^0_{1,n}\sqrt{nI(\theta_1)}$ сходятся равномерно (по $n \geqslant 1$), что завершает доказательство леммы 4. ♠

1.2. Численные иллюстрации

Продемонстрируем точность полученной аппроксимации НОВ на трех примерах с конкретными вероятностными моделями. В первых двух примерах вероятностная модель наблюдений обладает одномерной достаточной статистикой, апостериорное распределение относительно которой может быть легко найдено. Это обстоятельство позволяет выразить область принятия решений оптимальным критерием (1.5) в виде двусторонних неравенств относительно значений этой статистики, что, в свою очередь, дает возможность отыскания точных значений соответствующих критических констант и необходимого объема выборки n^*. В третьем примере с распределением Коши в качестве вероятностной модели наблюдений отсутствует одномерная достаточная статистика. В этом случае прямой путь нахождения n^* из соотношений (1.6) практически не реализуем. Здесь проверка точности асимптотической формулы (1.11) осуществлена с привлечением методов стохастического моделирования. Кроме того, в этом примере рассмотрен вариант редукции данных к подходящей одномерной статистике (выборочной медиане).

Заметим еще, что в наших примерах границы интервалов $[\theta_1, \theta_2]$ для нулевой гипотезы и ограничения β_0, β_1 на d-риски подобраны так, чтобы априорная вероятность справедливости нулевой гипотезы удовлетворяла неравенствам $\beta_1 < G(\theta_1) - G(\theta_2) < 1 - \beta_0$. Как было сказано, в противном случае необходимый объем выборки $n^* = 0$.

1.2.1. Нормально-нормальная модель

Пусть выборка $X^{(n)}$ поступает из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, где θ есть реализация случайной величины ϑ, имеющей нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu,\tau^2)$. Мешающие параметры μ,σ^2 и τ^2 считаем известными (например, оцененными по архивным данным в рамках модели II дисперсионного анализа). Не ограничивая общности, можно положить $\mu=0$.

Для вероятностной модели $\mathcal{N}(\theta,\sigma^2)$ выборочное среднее $\overline{X}=\sum_1^n X_i/n$ является достаточной статистикой. Хорошо известно (см., например, [17]), что в этом случае апостериорное распределение ϑ при фиксированном значении $\overline{X}=\overline{x}$ также нормально $\mathcal{N}(m(\overline{x}),S^2)$ с параметрами

$$m(\overline{x})=\frac{\overline{x}+\mu\sigma^2/n\tau^2}{1+\sigma^2/n\tau^2} \;=\; \frac{\overline{x}-\mu}{1+\sigma^2/n\tau^2}+\mu, \qquad S^2=\frac{1}{1+\sigma^2/n\tau^2}\,\frac{\sigma^2}{n}.$$

Безусловное распределение статистики $\overline{X}$ также нормально со средним μ и дисперсией $\tau^2+\sigma^2/n$.

Лемма 1.5. i) *При фиксированном значении* $\overline{X}=x$ *апостериорная вероятность справедливости гипотезы* $\mathbf{H}_0:\theta\in[\theta_1,\theta_2]$ *равна*

$$\pi_0(x) \;=\; \Phi\big[(\theta_2-m(x))/S\big]-\Phi\big[(\theta_1-m(x))/S\big]; \tag{1.13}$$

ii) *функция* $\pi_0(x), x\in\mathcal{R}$, *симметрична около точки*

$$x^*=\Big(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-\mu\Big)\Big(1+\frac{\sigma^2}{n\tau^2}\Big)+\mu;$$

iii) *для* $x<x^*$ *функция* $\pi_0(x)$ *строго возрастает, а для* $x>x^*$ *— строго убывает;*

iv) *предел* $\lim_{x\to\pm\infty}\pi_0(x)=0$;

v) *максимум* $\max_x\pi_0(x)=2\Phi((\theta_2-\theta_1)/2S)-1$.

Доказательство. В выражении (1.13) для функции π_0 произведем замену $x=y+x^*$. После несложных арифметических преобразований получим

$$\pi_0(y)=\Phi\Big(\frac{C-y}{Q}\Big)-\Phi\Big(\frac{-C-y}{Q}\Big)=\Phi\Big(\frac{C-y}{Q}\Big)+\Phi\Big(\frac{C+y}{Q}\Big)-1,$$

где $C=\frac{1}{2}(\theta_2-\theta_1)(1+\sigma^2/n\tau^2), Q=(1+\sigma^2/n\tau^2)S$, и второе равенство есть следствие симметрии стандартной нормальной функции распределения Φ. Таким образом, функция π_0 есть четная функция переменной y, что доказывает утверждение ii) леммы. Последние два утверждения леммы тривиально выводятся из свойств функции Φ. ♠

<u>Замечание.</u> Из представленных формул видно, что для иллюстративных целей можно рассмотреть только случай $\mu = 0$; общий случай получается заменой $X_i \to X_i + \mu, \theta \to \theta + \mu$.

Утверждения леммы позволяют описать вид статистического критерия.

Лемма 1.6. *Область принятия гипотезы* $\mathbf{H}_0 : \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ *правилом* (1.5) *может быть записана в виде* $l \leqslant \overline{X} \leqslant r$, *где* $l = l(\delta) = \theta^* - \delta, r = r(\delta) = \theta^* + \delta,\ \theta^* = \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1)(1 + \sigma^2/n\tau^2)$ — *«почти середина» анализируемого интервала (при* $\mu = 0$*). В соответствии с* (1.6) *константу* $\delta = \delta_n$ *(зависящую от объема выборки* n *и заданного ограничения* β_0*) следует выбирать как решение уравнения*

$$\beta_0 \ = \ \mathbf{P}\big\{\vartheta \notin [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, \theta^* - \delta \leqslant \overline{X} \leqslant \theta^* + \delta\big\}$$

или

$$\beta_0 \ = \ 1 - \frac{1}{p_n(\delta)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\Phi\Big(\frac{\theta^* + \delta - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{\theta^* - \delta - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)\Big) \frac{1}{\tau}\varphi(\theta/\tau)\, d\theta,$$

где $p_n(\delta) = \Phi\big((\theta^* + \delta)/\sqrt{\tau^2 + \sigma^2/n}\,\big) - \Phi\big((\theta^* - \delta)/\sqrt{\tau^2 + \sigma^2/n}\,\big)$ — *безусловная вероятность принятия* $\mathbf{H}_0$. *Необходимый объем выборки* n^* *находится теперь как наименьшее* n, *при котором выполняется неравенство*

$$\beta_1 \ \geqslant \ \mathbf{P}\big\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, |\overline{X} - \theta^*| > \delta_n\big\}$$

или

$$\beta_1 \ \geqslant \ \frac{1}{1 - p_n(\delta_n)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(1 - \Phi\Big(\frac{\theta^* + \delta_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big) + \Phi\Big(\frac{\theta^* - \delta_n - \theta}{\sigma/\sqrt{n}}\Big)\Big) \frac{1}{\tau}\varphi(\theta/\tau)\, d\theta.$$

В таблице 1.1, построенной с помощью пакета программ R, приведены точные значения НОВ n^*, а также его асимптотическое приближение $\widetilde{n}$ (1.11). Рассмотрен случай стандартизированного нормального $\mathcal{N}(\theta, 1)$ распределения наблюдений X и стандартного нормального $\mathcal{N}(0, 1)$ априорного распределения

Таблица 1.1. НОВ n^* и приближение $\widetilde{n}$ в модели N-N

$\mathbf{H}_0$	β_0	β_1	$\widetilde{n}$	n^*	$\widetilde{n}/n^*$	$\mathcal{R}_0(\widetilde{n},\delta^*)$	$\mathcal{R}_1(\widetilde{n},\delta^*)$
$\theta \in [0,2]$	0.10	0.05	26	24	1.083	0.0947	0.0488
$\theta \in [0,1]$	0.10	0.10	28	30	0.933	0.1132	0.0919
$\theta \in [0,2]$	0.05	0.05	53	52	1.019	0.0497	0.0499
$\theta \in [0,1]$	0.10	0.05	59	58	1.017	0.1007	0.0479
$\theta \in [-2,1]$	0.01	0.05	188	187	1.005	0.0105	0.0473
$\theta \in [-2,1]$	0.01	0.01	767	759	1.011	0.0099	0.0099

параметра ϑ. Кроме того, здесь приведены значения d-рисков правила (1.5) при объеме выборки $n = \widetilde{n}$ с критической константой c, найденной по асимптотической формуле (1.12). Как и ожидалось, асимптотическая формула работает идеально даже при умеренных значениях β_0, β_1.

1.2.2. Показательно-показательная модель

В эксперименте наблюдается случайная величина X с показательным распределением $\mathcal{E}(\theta)$ с плотностью $f(x \,|\, \theta) = \theta e^{-\theta x}, x \geqslant 0$, где θ есть реализация случайной величины ϑ, имеющей стандартное показательное распределение $\mathcal{E}(1)$ (здесь масштабный параметр выбран равным единице только в целях большей прозрачности изложения).

Достаточная статистика $S = \sum_1^n X_i$ при фиксированном значении параметра θ имеет гамма распределение $\mathcal{G}(n,\theta)$ с параметром формы n и масштабным параметром $1/\theta$.

Лемма 1.7. i) *Безусловная плотность S равна $f(x) = \frac{nx^{n-1}}{(x+1)^{n+1}}$, $x \geqslant 0$.*

ii) *Апостериорное распределение ϑ при фиксированном значении $S = s$ совпадает с гамма-распределением $\mathcal{G}(n+1, s+1)$.*

Доказательство. i) Для нахождения безусловной плотности S проинтегрируем условную плотность S по носителю ϑ

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\theta^n e^{-\theta(x+1)}d\theta.$$

Воспользовавшись n раз формулой интегрирования по частям получаем искомую плотность $f(x) = \frac{nx^{n-1}}{(x+1)^{n+1}},\ x \geqslant 0.$

ii) Функция плотности апостериорного распределения ϑ:

$$g(\theta \,|\, s) = \frac{p(s|\theta)g(\theta)}{f(s)} = \frac{\theta^n s^{n-1}\exp^{-(s+1)\theta}(s+1)^{n+1}}{\Gamma(n)ns^{n-1}} = \frac{(s+1)^{n+1}\theta^n\exp^{-(s+1)\theta}}{\Gamma(n+1)},$$

т.е. совпадает с плотностью гамма-распределения $\mathcal{G}(n+1, s+1)$. ♠

Таким образом, область принятия нулевой гипотезы правилом (1.5) задается неравенством

$$\Gamma(\theta_2(s+1); n+1) - \Gamma(\theta_1(s+1); n+1) \geqslant c,$$

где $\Gamma(\,\cdot\,; n+1)$ — функция распределения гамма закона с параметром формы $(n+1)$ и единичным параметром масштаба.

Справедлива следующая

Лемма 1.8. *Для любых $\theta_1 < \theta_2, n \geqslant 1$ апостериорная вероятность нулевой гипотезы $\Gamma(\theta_2(s+1); n+1) - \Gamma(\theta_1(s+1);\ n+1)$ как функция $s \geqslant 0$*

i) *непрерывна всюду;*

ii) *имеет единственный локальный максимум в точке $s = \frac{n+1}{\theta_2-\theta_1}\ln\frac{\theta_2}{\theta_1} - 1$.*

Доказательство. i) Непрерывность следует из непрерывности функции распределения гамма закона. ii) для нахождения максимума возьмем производную от функции по s и приравняем ее нулю

$$\theta_2\frac{1}{\Gamma(n+1)}(\theta_2(s+1))^n e^{-\theta_2(s+1)} - \theta_1\frac{1}{\Gamma(n+1)}(\theta_1(s+1))^n e^{-\theta_1(s+1)} = 0.$$

После элементарных алгебраических преобразований получаем единственное решение при

$$s = \frac{n+1}{\theta_2-\theta_1}\ln\frac{\theta 2}{\theta_1} - 1.$$

Несложно убедиться, что эта точка является точкой дистижения локального максимума. ♠

Отсюда можно найти вид оптимального статистического правила.

Лемма 1.9. *Область принятия нулевой гипотезы* $\mathbf{H}_0 : \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ *имеет вид* $l \leqslant S \leqslant r$*, где правая граница* r *должна выбираться в зависимости от левой границы* l $(< r)$ *так, чтобы*

$$\Gamma(\theta_2(r+1); n+1) - \Gamma(\theta_1(r+1); n+1) =$$
$$= \Gamma(\theta_2(l+1); n+1) - \Gamma(\theta_1(l+1); n+1).$$

В свою очередь, левая граница l *в соответствии с* (1.1) *выбирается как решение уравнения*

$$\beta_1 = \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, l \leqslant S \leqslant r(l)\} =$$
$$= 1 - \frac{1}{q_n(l)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \big(\Gamma(\theta\, r; n) - \Gamma(\theta\, l; n)\big) e^{-\theta}\, d\theta,$$

где $q_n(l) = (r/(r+1))^n - (l/(l+1))^n$ *— безусловная вероятность принятия нулевой гипотезы.*

На рис. 1.1 приведены левая и правая границы принятия гипотезы $\mathbf{H}_0 : \theta \in [1, 3]$ при НОВ $n = n^* = 21$ (см. таблицу 1.2).

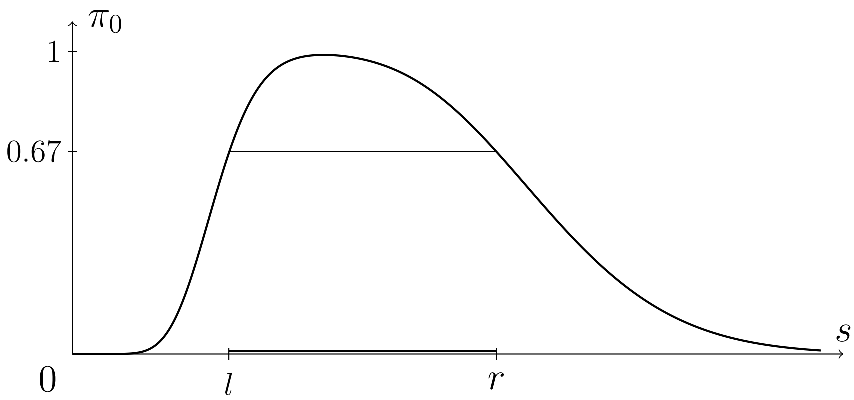


Рис. 1.1. Границы области принятия нулевой гипотезы; модель Ex–Ex

Таблица 1.2 построена аналогично Таблице 1.1. Здесь уже наблюдается не столь идеальная близость $\widetilde{n}$ к n^*.

Таблица 1.2. НОВ n^* и приближение $\widetilde{n}$ в модели Ex-Ex

$\mathbf{H}_0$	β_0	β_1	$\widetilde{n}$	n^*	$\widetilde{n}/n^*$	$\mathcal{R}_0(\widetilde{n},\delta^*)$	$\mathcal{R}_1(\widetilde{n},\delta^*)$
$\theta\in[1,3]$	0.10	0.10	19	21	0.905	0.1211	0.0878
$\theta\in[0.5,2]$	0.10	0.05	41	39	1.051	0.0994	0.0469
$\theta\in[0.5,1]$	0.05	0.05	140	149	0.940	0.0568	0.0481
$\theta\in[1.5,2.5]$	0.01	0.05	291	326	0.893	0.0145	0.0478
$\theta\in[1.5,2.5]$	0.01	0.01	2870	2956	0.971	0.0106	0.00991

1.2.3. Модель Коши-Коши

Пусть теперь выборка $X^{(n)}$ поступает из распределения Коши $\mathcal{C}(\theta,1)$ с единичным параметром масштаба и медианой θ, которая есть реализация случайной величины ϑ со стандартным распределением Коши $\mathcal{C}(0,1)$. Так как здесь отсутствует простая достаточная статистика, то область принятия нулевой гипотезы может быть описана только с использованием всех выборочных значений в виде

$$\frac{Z(\theta_2,x^{(n)})-Z(\theta_1,x^{(n)})}{Z(\infty,x^{(n)})}\geqslant c, \tag{1.14}$$

где $Z(t,x^{(n)})=\int_{-\infty}^{t}\prod_1^n\big(1+(x_i-\theta)^2\big)(1+\theta^2)\,d\theta,\ t\in\mathbb{R}^1$, и $Z(\infty,x^{(n)})/\pi^{n+1}$ есть плотность безусловного распределения выборочного вектора $X^{(n)}$.

Проверка точности асимптотической формулы для НОВ осуществлялась методом стохастического моделирования. Для каждого подходящего значения объема выборки n производилось большое число ($k=10\,000$) экспериментов, в каждом из которых генерировался случайный параметр θ из распределения $\mathcal{C}(0,1)$, а затем генерировалась выборка $x^{(n)}$ из распределения $\mathcal{C}(\theta,1)$. Для полученной выборки находилась апостериорная вероятность p в левой части (1.14). Результатом всех экспериментов являлся k-мерный набор пар (θ,p), по которым строилась частотная оценка d-рисков первого и второго рода в зависимости от выбора константы c в (1.14). Объем выборки n признавался доста-

Таблица 1.3. НОВ n^* и приближение $\widetilde{n}$ в модели Cauchy-Cauchy

$\mathbf{H}_0$	β_0	β_1	$\widetilde{n}$	n^*	$\widetilde{n}/n^*$	$\widetilde{n}(m)$
$\theta \in [1, 2]$	0.01	0.01	1139	1165	0.978	1409
$\theta \in [-1, 1]$	0.01	0.05	205	214	0.958	257
$\theta \in [-2, 0]$	0.05	0.01	372	360	1.033	463

точным (т.е. $n \geqslant n^*$), если находилась константа c, при которой оценки обоих рисков не превосходили выбранных ограничений.

В таблице 1.3 приведены результаты проведенных модельных испытаний. Кроме всего прочего, здесь еще даны приближенные значения НОВ для решающих правил, основанных на медиане выборки. Следует отметить два обстоятельства. Во-первых, ориентируясь на выборочную медиану, нельзя асимптотическую формулу (1.11) применять непосредственно, так как в данном случае информация по Фишеру не обладает свойством аддитивности по объему выборки. По-видимому, можно видоизменить эту формулу так, чтобы в ее левой части вместо объема выборки n появилась информация по Фишеру, содержащаяся в выборочной медиане. Арифметически такое изменение достигается соответствующим преобразованием функции ρ. Теоретическое обоснование справедливости этой новой формулы, как нам представляется, можно осуществить, если воспользоваться общей методикой, разработанной в монографии [18], позволяющей исследовать асимптотические свойства критериев не только в ситуации независимых одинаково распределенных наблюдений.

Во-вторых, выборочная медиана не является достаточной статистикой, что приводит к потере информации и, соответственно, к увеличению НОВ. Как видно из приведенной таблицы, увеличение НОВ, в полном соответствии с теорией, происходит пропорционально уменьшению информации Фишера при переходе к выборочной медиане.

1.3. Последовательный d-гарантийный критерий различения интервальных гипотез

1.3.1. Последовательный критерий первого перескока

Рассмотрим теперь задачу построения последовательного критерия различения двух сложных гипотез $\mathbf{H}_0 : \theta \in \Theta_0 = (\theta_1, \theta_2)$ и $\mathbf{H}_1 : \theta \notin \Theta_0$ о среднем значении нормального распределения $N(\theta, \sigma^2)$. Пусть $X_1, X_2 \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных по нормальному (θ, σ^2) закону случайных величин. θ — реализация случайной величины ϑ, имеющей априорное $N(\mu, \tau^2)$ распределение. Апостериорная вероятность справедливости гипотезы $\mathbf{H}_0$ по выборке фиксированного объема $X^{(n)} = (X_1 \ldots X_n)$ в рамках указанной вероятностной модели равна:

$$T_n(X^{(n)}) = \mathbf{P}\{\vartheta \in (\theta_1, \theta_2) \,\big|\, X^{(n)}\} = \Phi\left[\frac{\theta_2 - m}{S}\right] - \Phi\left[\frac{\theta_1 - m}{S}\right],$$

где

$$m = m(\overline{X}) = \frac{\overline{X} + \mu\sigma^2/n\tau^2}{1 + \sigma^2/n\tau^2}, \qquad S^2 = \frac{1}{1 + \sigma^2/n\tau^2}\,\frac{\sigma^2}{n}.$$

Область продолжения наблюдений последовательного критерия первого перескока с заданными ограничениями β_0, β_1 имеет вид

$$\beta_1 < T_n(X^{(n)}) < 1 - \beta_0.$$

Решение d_0 в пользу нулевой гипотезы принимается, если $T_n(X^{(n)}) \geqslant 1 - \beta_0$, в противном случае, т.е. если $T_n(X^{(n)}) \leqslant \beta_1$, нулевая гипотеза отвергается.

Момент прекращения наблюдений статистического эксперимента определяется, как $\nu = \min\{n : T_n(X^{(n)}) \leqslant \beta_1$ или $T_n(X^{(n)}) \geqslant 1 - \beta_0\}$. Тот факт, что в случае, если марковский момент ν замкнут, то такая процедура будет d-гарантийной, следует из хорошо известного телескопического свойства условного математического ожидания. Например,

$$\mathcal{R}_1(\delta_\nu) = \mathbf{E}\{T_\nu(X^{(\nu)}) \,\big|\, T_\nu(X^{(\nu)}) \leqslant \beta_1\} \leqslant \beta_1.$$

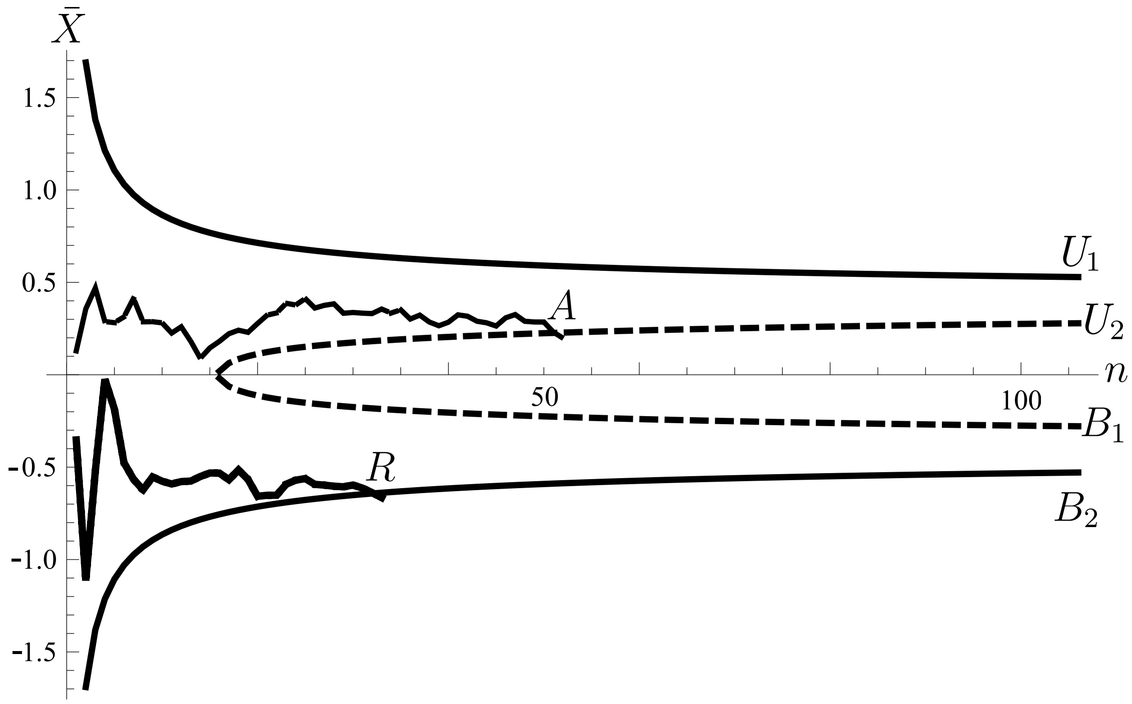


Рис. 1.2. Область продолжения эксперимента; $\mu = 0, \sigma^2 = 1, \tau^2 = 1$

Распределение статистики ν и ее характеристики исследуются методом статистического моделирования. Отметим, что при различении односторонних гипотез такой анализ проводился в [36], где были выявлены существенные патологии в распределении ν, в частности, данные моделирования указывают на возможные бесконечные значения безусловного среднего $\mathbf{E}\nu$. Для нашего случая различения двусторонних гипотез таких патологий не отмечено.

Апостериорная вероятность зависит от выборочных данных только через значение статистики $\overline{X}_n$, следовательно, область продолжения эксперимента определяется значениями этой статистики. На Рис. 1.2 указаны две траектории случайного блуждания $\overline{X}_n, n = 1, 2, \ldots,$ приводящие к принятию решения d_0 в пользу нулевой гипотезы $\mathbf{H}_0 : \theta \in (-0.5, 0.5)$ (траектория A) и решения d_1 (траектория R). Параметры модели выбраны равными $\sigma^2 = \tau^2 = 1$ и $\mu = 0$. По оси абсцисс откладываются значения n, а значения статистики $\overline{X}_n$ — по оси ординат. Эксперимент прекращается, если значение статистики $\overline{X}_n$ попадет либо ниже линии B_2 (выше линии U_1) — нулевая гипотеза отвергается, либо между линий U_2, B_1 — нулевая гипотеза принимается.

Обратим внимание, что при малом объеме выборки ($n \leqslant 15$) нулевая гипотеза никогда не принимается, но только может быть отвергнута.

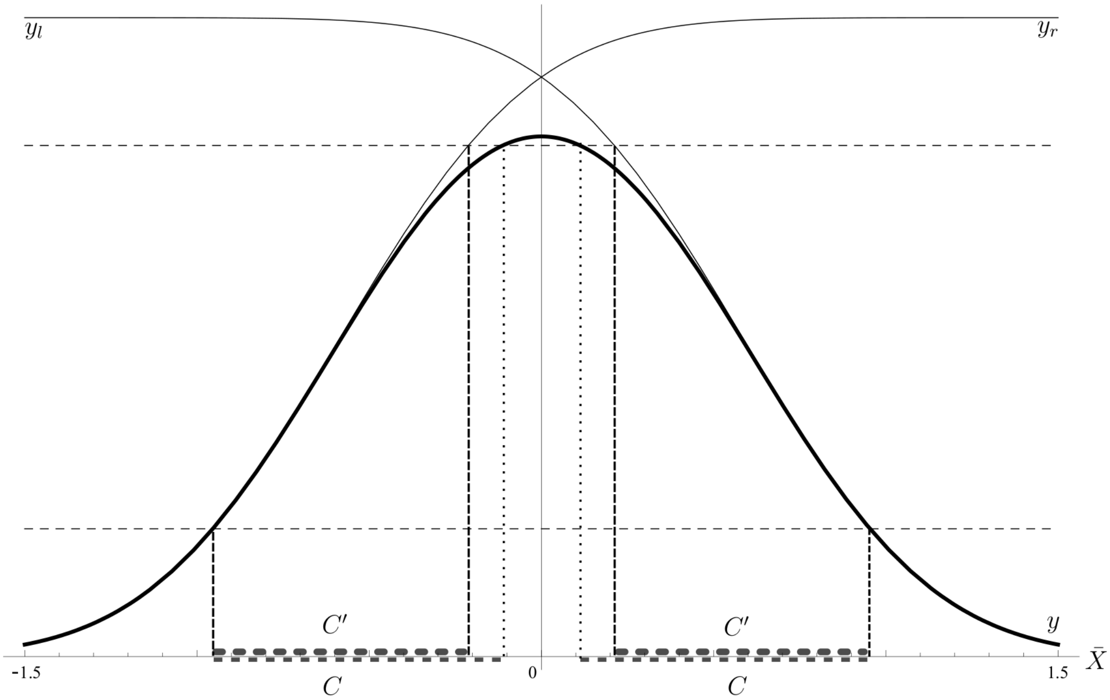


Рис. 1.3. Апостериорная вероятность истинности $\mathbf{H}_0$ и кривые для модифицированного критерия

1.3.2. Модификация критерия первого перескока

Модернизируем вид области продолжения наблюдений универсальной процедуры с целью упрощения ее представления. При каждом фиксированном объеме выборки апостериорная вероятность справедливости нулевой гипотезы есть разность двух функций $\Phi\left[\frac{\theta_2-m}{S}\right] - \Phi\left[\frac{\theta_1-m}{S}\right]$. Как показывают численные иллюстрации, поведение этой вероятности в зависимости от $\overline{X}_n$ хорошо аппроксимируется функцией $y_{_M} = \min(y_l, y_r)$, где $y_l = 1 - \Phi\left[\frac{\theta_1-m}{S}\right]$ и $y_r = \Phi\left[\frac{\theta_2-m}{S}\right]$. На рис. 1.3 приведены графики апостериорной вероятности (утолщенная колоколообразная линия) и графики функций y_l, y_r (более тонкие линии). Кроме того, здесь изображены границы β_1 и $1-\beta_0$ (соответственно, нижняя и верхняя пунктирные линии). Предлагается вместо апостериорной вероятности в задании области продолжения эксперимента использовать функцию $y_м$. Из рисунка видно, что апостериорная вероятность и ее модифицированное значение достаточно близки, что особенно заметно при больших значениях n. На рис. 1.3 область продолжения эксперимента для процедуры первого перескока и модифицированной процедуры обозначены как C и C' соответственно.

1.3.3. Сравнение характеристик последовательной процедуры первого перескока и ее модификации

Таблица 1.4. Характеристики ν и $\widetilde{\nu}$

		$\beta_0 = \beta_1 = 0.1$				$\beta_0 = \beta_1 = 0.05$			
μ		$\overline{\nu}$	$\nu_{0.95}$	$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1$	$\overline{\nu}$	$\nu_{0.95}$	$\mathcal{R}_0$	$\mathcal{R}_1$
0	ν	33.57	114	0.067	0.092	99.14	487	0.035	0.048
	$\widetilde{\nu}$	32.53	109	0.068	0.098	98.13	480	0.035	0.049
0.5	ν	30.66	106	0.065	0.089	90.5	431	0.034	0.048
	$\widetilde{\nu}$	29.81	102	0.065	0.095	89.7	425	0.034	0.049
2.5	ν	1.99	2	0.013	0.013	8.05	6	0.007	0.05
	$\widetilde{\nu}$	1.97	2	0.085	0.090	8.04	6	0.007	0.05

Для значений $\sigma^2 = \tau^2 = 1$ было проведено 10^5 испытаний, в каждом из которых фиксировался момент остановки наблюдений ν (основанный на апостериорной вероятности) и значение $\widetilde{\nu}$ (основанное на модифицированной статистике). Было рассмотрено два случая $\beta_0 = \beta_1 = 0.05$ и $\beta_0 = \beta_1 = 0.1$. Среднее арифметическое $\overline{\nu}$ момента остановки, квантиль $\nu_{0.95}$ и оценки для d-рисков $(\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1)$ приведены в Таблице 1.4. Результаты, полученные в ходе моделирования, свидетельствуют о близости характеристик ν и $\widetilde{\nu}$.

Глава 2

Двусторонние доверительные интервалы

Введение

Идея построения доверительных множеств в d-апостериорном подходе созвучна схеме построения оптимальных доверительных множеств в классическом подходе. В этой схеме предполагается наличие семейств статистических критериев для проверки класса гипотез, и доверительное утверждение содержит все те гипотезы, которые принимаются критерием заданного уровня. Так, при построении классической наиболее точной нижней доверительной границы рассматривается семейство статистических гипотез вида $\mathbf{H}_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $\mathbf{H}_1 : \theta > \theta_0, \theta_0 \in R^1$, и соответствующее им семейство равномерно наиболее мощных статистических критериев заданного уровня α. Набор параметров θ_0 (зависящий от результатов наблюдений), для которых нулевая гипотеза принимается, образует $(1-\alpha)$-доверительный интервал. Обычно это семейство обладает так называемым свойством вложенности (наследственности) по θ_0, поэтому все доверительное множество может быть задано с помощью одного граничного значения, задающего в данном случае нижнюю доверительную границу. Таким образом, описание доверительных интервалов в классическом подходе может быть осуществлено с использованием только одной-двух статистик.

В статье [16] аналогичная схема реализована в проблеме построения доверительных множеств в d-апостериорном подходе. В этом случае, к сожалению, свойство вложенности будет выполняться не всегда, поэтому доверительные множества не всегда можно описать одной статистикой — доверительное утверждение должно содержать все множества, которые принимаются соответствующим критерием из рассматриваемого класса. В d-апостериорном подходе доверительные границы, построенные с помощью одной конечномерной статистики, обладают надежностью, превышающей заданный уровень $1 - \alpha$. В частности, этим свойством обладают байесовские доверительные области (credible regions, [17]), апостериорная вероятность попадания в которые равна $1 - \alpha$. Следовательно, байесовские доверительные множества не будут наиболее точными в d-апостериорном подходе.

В работе [16] подробно рассмотрена проблема построения односторонних границ. В этой главе диссертации изучаются асимптотические свойства наиболее точных двусторонних доверительных интервалов, построенных по схеме, описанной в [16], для случая так называемой нормально-нормальной модели. В частности, находится вид наиболее точного семейства доверительных интервалов. Показывается, что с ростом объема выборки точность этого семейства (в смысле d-апостериорного подхода) стремится к 0, и устанавливается ее скорость сходимости. Кроме того, находится асимптотический вид наиболее точного доверительного семейства, предлагается вариант построения асимптотически наиболее точных семейств.

Определение доверительного семейства в d-апостериорном подходе начинается с описания класса B_0 подмножеств Θ_0 параметрического пространства Θ, который формализует совокупность всевозможных требований, предъявляемых покупателями к аттестуемой продукции. Например, при контроле качества металла по значению предельной прочности потребителю важно, чтобы прочность была достаточно высокой, но не выше некоторого предельного значения (хрупкость), то есть класс требований B_0 состоит из двусторонних интервалов. В реальной ситуации этот класс ограничен некоторыми естественными границами; мы будем считать, что разрешены любые конечные замкнутые интервалы $[\theta_1, \theta_2], \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^1$. Для этой частной задачи определение, данное в [16], можно трансформировать следующим образом.

2.1. Наиболее точные доверительные интервалы в d-апостериорном подходе

Пусть $\mathcal{B}(x) = \{[\theta_1, \theta_2], \theta_1 < \theta_2\}$ — семейство интервалов, зависящее от результата $x(\in \mathcal{X})$ статистического эксперимента.

Определение. Условная вероятность

$$\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) \;=\; \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, \mathcal{B}(X) \ni [\theta_1, \theta_2]\}, \quad \theta_1 < \theta_2,$$

(как функция границ интервала) называется *надежностью* семейства $\mathcal{B}$, а условная вероятность

$$\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) \;=\; \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, \mathcal{B}(X) \not\ni [\theta_1, \theta_2]\}, \quad \theta_1 < \theta_2,$$

— *точностью* семейства $\mathcal{B}$.

Здесь неявно предполагается, что все указанные события измеримы. Кроме того, в целях удобства формулировки будем полагать надежность семейства $\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) = 1$, если $\mathbf{P}\{\mathcal{B}(X) \ni [\theta_1, \theta_2]\} = 0$, и, наоборот, точность $\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) = 0$, если $\mathbf{P}\{\mathcal{B}(X) \not\ni [\theta_1, \theta_2]\} = 0$.

Определение. i) Семейство $\mathcal{B}$ называется *Б-доверительным* (с уровнем доверия $(1-\alpha)$), если надежность

$$\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) \geqslant 1 - \alpha$$

для любых $\theta_1 < \theta_2$.

ii) Семейство $\mathscr{B}^*$ называется *наиболее точным* (*оптимальным*) Б-доверительным семейством, если точность любого другого Б-доверительного (с уровнем доверия $(1-\alpha)$) семейства интервалов $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathcal{B}) \geqslant \mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,;\, \mathscr{B}^*) \tag{2.1}$$

каковы бы не были $\theta_1 < \theta_2$.

Замечание 1. Префикс «Б» в названии предложен в [16] в связи с тем, что одним из первых, кто обратил внимание на необходимость рассмотрения подобного коэффициента надежности, был С.Н. Бернштейн. Так как мы будем иметь дело только с Б-доверительными семействами, то в дальнейшем этот префикс будет опускаться. Кроме того, т.к. уровень доверия $(1-\alpha)$ во всех утверждениях данной главы фиксирован, то указание на этот уровень также будет опускаться.

Замечание 2. Условие (2.1) требует пояснения. Если для некоторого интервала $[\theta_1, \theta_2]$ и доверительного семейства $\mathcal{B}$ безусловная вероятность $\mathbf{P}\{\mathcal{B}(X) \not\ni [\theta_1, \theta_2]\} = 0$, то для этого интервала значение функции надежности семейства $\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,; \mathcal{B}) = \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2]\} \geqslant 1-\alpha$. По конструкции оптимального семейства $\mathscr{B}^*$ интервалы, для которых вероятность $\mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2]\} \geqslant 1-\alpha$, включаются в это семейство при любых результатах наблюдений. Поэтому также $\mathbf{P}\{\mathscr{B}^*(X) \not\ni [\theta_1, \theta_2]\} = 0$ и $\mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,; \mathscr{B}^*) = \mathcal{A}(\theta_1, \theta_2\,; \mathcal{B}) = 0$.

Замечание 3. Байесовские интервалы (bayes credible region), определяемые как пара статистик $\underline{\theta}(X), \overline{\theta}(X)$, удовлетворяющая для почти всех X условию

$$\mathbf{P}\{\vartheta \in [\underline{\theta}(X); \overline{\theta}(X)] \,\big|\, X\} \geqslant 1-\alpha,$$

дают один возможный способ построения Б-доверительных семейств:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{cr}}(x) \;=\; \{[\theta_1, \theta_2] :\; \theta_1 \leqslant \underline{\theta}(x),\; \theta_2 \geqslant \overline{\theta}(x)\}.$$

Доказательство этого факта сразу следует из телескопического свойства условного математического ожидания:

$$\begin{gathered}\mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, \mathcal{B}_{\mathrm{cr}} \ni [\theta_1, \theta_2]\} = \mathbf{E}\left[\mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,\big|\, X\} \,\big|\, \mathcal{B}_{\mathrm{cr}} \ni [\theta_1, \theta_2]\right] \geqslant \\ \geqslant \mathbf{E}\left[\mathbf{P}\{\vartheta \in [\underline{\theta}(X); \overline{\theta}(X)] \,\big|\, X\} \,\big|\, \mathcal{B}_{\mathrm{cr}} \ni [\theta_1, \theta_2]\right] \;\geqslant\; 1-\alpha.\end{gathered}$$

К сожалению, это семейство излишне надежно. В частности, при объеме выборки $n \to \infty$ надежность $\mathcal{Q}(\theta_1, \theta_2\,; \mathcal{B}_{\mathrm{cr}}) \to 1$, что не позволяет надеяться на его высокую точность.

Для описания наиболее точного семейства рассмотрим задачу проверки нулевой гипотезы $\mathbf{H}_0 : \theta \in [\theta_1, \theta_2]$ и связанную с этой гипотезой статистику $T(X\,;\,\theta_1,\theta_2) = \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1,\theta_2] \,\big|\, X\}$ (см. предыдущую главу). Как и в классическом подходе, здесь также можно строить критерий, используя аналог p-значения, предложенный в [39]:

$$p_d(x\,;\,\theta_1,\theta_2) \;=\; \mathbf{P}\{\vartheta \notin [\theta_1,\theta_2] \,\big|\, T(X\,;\,\theta_1,\theta_2) > T(x\,;\,\theta_1,\theta_2)\},$$

где x — экспериментальное значение выборки X. Гипотеза $\mathbf{H}_0$ принимается, если $p_d(x\,;\,\theta_1,\theta_2) \leqslant \alpha$. Таким образом, наиболее точное семейство (без учета рандомизации) имеет вид

$$\mathscr{B}^*(x) = \{[\theta_1,\theta_2] :\; p_d(x\,;\,\theta_1,\theta_2) \leqslant \alpha\}.$$

Данное семейство интервалов не обладает свойством вложенности, т.е. если интервал $[\theta_1,\theta_2] \in \mathscr{B}^*(x)$, то не всякий более широкий интервал будет также входить в это семейство. Поэтому в общем случае $\mathscr{B}^*$ имеет достаточно сложную структуру. В этой главе показывается, что в модели N-N для данного семейства можно предложить некоторый упрощенный вариант описания. Кроме того, показывается, что с ростом объема выборки точность этого семейства стремится к 0, и устанавливается ее скорость сходимости; предлагается вариант построения асимптотически наиболее точных семейств.

2.2. Доверительные интервалы для N–N модели

В эксперименте наблюдается выборка $(X_1,\ldots,X_n)$ из нормального распределения с плотностью

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\Big(\frac{x-\theta}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\Big\},\; x \in \mathcal{R}^1,$$

где φ — функция плотности стандартного нормального $N(0,1)$ закона. Параметр θ есть реализация нормальной случайной величины ϑ с плотностью $\frac{1}{\tau}\varphi\big(\frac{\theta-\mu}{\tau}\big)$, среднее значение μ и дисперсия τ^2 которой считаются известными.

Дисперсия выборки σ^2 также известна. Поскольку в данной постановке параметры μ, σ^2, τ^2 не играют существенной роли, то в целях сокращения записи все результаты будут излагаться в частном случае $\mu = 0, \sigma^2 = 1, \tau^2 = 1$.

В рассматриваемой модели выборочный вектор может быть редуцирован до значения достаточной статистики $T(X_1, \ldots, X_n) = \overline{X} = n^{-1} \sum_1^n X_i$. Как известно (см., например, [17]), условное (при фиксированном θ) распределение этой статистик также нормально $N(\theta, 1/n)$, а безусловное (априорное) распределение нормально $N(\mu, 1 + 1/n)$.

Апостериорное распределение описано в лемме 1.5:

$$\begin{aligned} \pi_0(\theta_1, \theta_2 \,|\, x) &= \mathbf{P}\{\vartheta \in [\theta_1, \theta_2] \,|\, \overline{X} = x\} = \\ &= \Phi\left(\tfrac{\theta_2 - m(x)}{S}\right) - \Phi\left(\tfrac{\theta_1 - m(x)}{S}\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где (в предположении $\mu = 0, \sigma^2 = \tau^2 = 1$)

$$m(x) = \frac{x}{1 + 1/n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n+1}. \tag{2.3}$$

В той же лемме установлено, что вероятность (2.2) как функция x симметрична около точки $Z_n = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)(1 + 1/n)$. Поэтому неравенство $\pi_0(\theta_1, \theta_2 \,|\, y) \geqslant \pi_0(\theta_1, \theta_2 \,|\, x)$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &y \in [x, 2Z_n - x], \ \text{ если } x \leqslant Z_n, \\ &y \in [2Z_n - x, x], \ \text{ если } x \geqslant Z_n. \end{aligned}$$

Таким образом, p_d-значение

$$\begin{aligned} p_d(x\,;\, \theta_1, \theta_2) &= \\ &= 1 - \frac{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\Phi\Big(\sqrt{n}\big(2Z_n - x - \theta\big)\Big) - \Phi\Big(\sqrt{n}\big(x - \theta\big)\Big)\right] \varphi\left(\theta\right)\, d\theta}{\Phi\left(\frac{2Z_n - x}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right)}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Чтобы устранить неопределенность в точке $x = Z_n$ можно положить по непрерывности (см. лемму 2.2 далее)

$$p_d(Z_n\,;\, \theta_1, \theta_2) = 2\Phi\big(-\sqrt{n+1}\,\delta\big), \tag{2.5}$$

где $2\delta = (\theta_2 - \theta_1)$ — ширина интервала.

Наиболее точное семейство может быть описано (см. теорему 2.1 ниже) посредством задания «граничного» семейства интервалов

$$\{\, [\theta_1, \theta_2] \ : p_d(x\,;\,\theta_1, \theta_2) \ = \ \alpha \}.$$

В дальнейшем вместо p-значения нам удобнее будет оперировать *функцией апостериорной надежности*:

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) = 1 - p_d(x\,;\,\theta_1, \theta_2) = \\ = \frac{\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta} \Big[\Phi\Big(\sqrt{n}\big(2Z_n - x - \theta\big)\Big) - \Phi\Big(\sqrt{n}\big(x - \theta\big)\Big)\Big]\, \varphi\,(\theta)\; d\theta}{\Phi\Big(\frac{2Z_n - x}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\Big) - \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\Big)}, \qquad (2.6)$$

зависящей от середины интервала $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$ и его половинной ширины $\delta = (\theta_2 - \theta_1)/2$. Таким образом, наиболее точное семейство

$$\mathscr{B}_n^*(\overline{x}) \ = \ \Big\{[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta] : \ \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid \overline{x}) \geqslant 1 - \alpha\Big\}. \qquad (2.7)$$

2.2.1. Свойства функции апостериорной надежности

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые свойства функции апостериорной надежности $\mathcal{Q}_n$.

Сначала рассмотрим ее как функцию ширины интервала δ.

Лемма 2.1. *При любых фиксированных* n, θ_c, x

(i) $\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x)$ *есть непрерывная, возрастающая функция* $\delta > 0$*;*

(ii) $\inf_\delta \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) = 0, \quad \sup_\delta \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) = 1;$

(iii) *существует единственная точка* $\delta_n^* = \delta_n^*(\theta_c, t)$ *такая, что*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta_n^* \mid x) = 1 - \alpha.$$

Доказательство. Утверждения леммы 2.1 вполне очевидны кроме, может быть, свойства (ii), для доказательства которого достаточно заметить, что числитель $\mathcal{Q}_n$ есть вероятность

$$\mathbf{P}\big\{(\vartheta \in [\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]) \cap (x \leqslant \overline{X} \leqslant 2Z_n - x)\big\},$$

а знаменатель отличается от него лишь тем, что вместо интервала $[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]$ взята вся числовая прямая. Напомним, что $Z_n = \theta_c(1 + 1/n)$ не зависит от δ. Поэтому если ширина интервала δ меняется от $\delta = 0$ до бесконечности, то функция апостериорной надежности $\mathcal{Q}_n$ будет, строго возрастая, меняться от 0 до 1. ♠

Теорема 2.1. *Пусть* $\overline{X} = x$. *Определим для каждого* θ_c *константу* $\delta_n^* = \delta_n^*(\theta_c, x)$ *из условия*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta_n^* \,|\, x) = 1 - \alpha.$$

Тогда интервал $[\theta_1, \theta_2]$ *входит в наиболее точное семейство* $\mathscr{B}_n^*$, *если его ширина* $(\theta_2 - \theta_1) > 2\delta_n^*(\theta_c, x)$ *с* $\theta_c = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$.

Доказательство. Константа δ_n^* существует в силу утверждения (iii) леммы 2.1. Справедливость утверждения теоремы следует теперь из свойства монотонности (i). ♠

На рисунке 2.1 приведены границы 95%–доверительного семейства при значении $\overline{X} = 2$ и объеме выборки $n = 10$ в зависимости от центральной точки θ_c. Для примера показан интервал с центром $\theta_c = 0.5$ и краями $A = -0.95, B = 1.95$ $(< \overline{X})$, попадающий в это семейство. Интервал $[C, D]$ — интервал минимальной ширины (с центром $\theta_c = x/(1 + 1/n)$), который может быть включен в оптимальное семейство при заданном объеме выборки.

При $\theta_c \to \infty$ нижняя кривая приближается к наиболее точной нижней доверительной границе — в данном случае к 1.528. Соответственно, при $\theta_c \to -\infty$ верхняя кривая приближается к наиболее точной верхней доверительной границе — 1.432. Обратим внимание на то, что для $\overline{X} = 2$ наиболее точная нижняя граница больше верхней границы. Другими словами, в d-апостериорном подходе нельзя строить двусторонние интервалы путем соединения нижней и верхней доверительных границ.

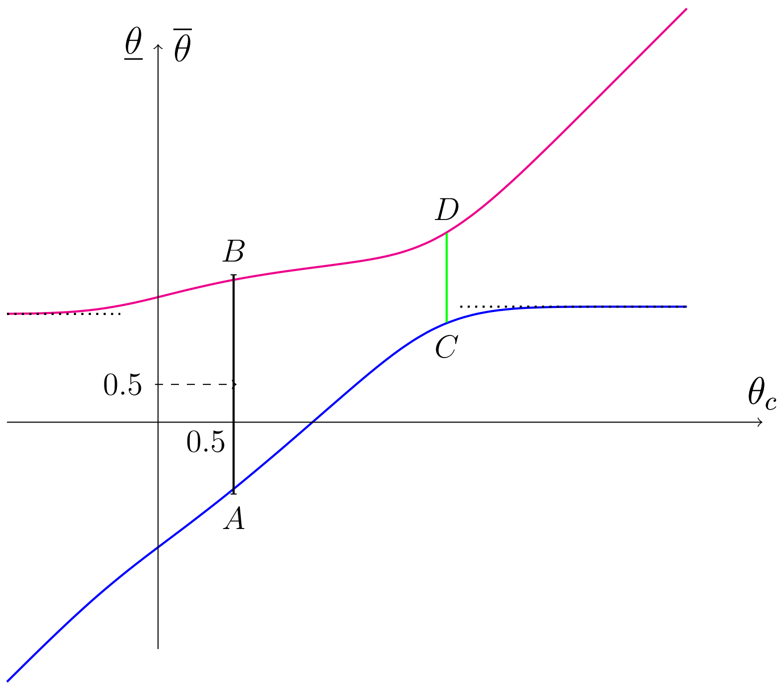


Рис. 2.1. Границы оптимального семейства; $n = 10, \overline{X} = 2, (1-\alpha) = 0.95$.

В следующей лемме устанавливаются свойства $\mathcal{Q}_n$ как функции результата статистического эксперимента $\overline{X} = x$.

Лемма 2.2. *При любых n, θ_c, δ функция $\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x)$, $x \in \mathcal{R}$,*

(i) *симметрична по x относительно точки $Z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\theta_c$:*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) = \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid 2Z_n - x)\,;$$

(ii) *непрерывна по x;*

(iii) *возрастает при $x < Z_n$ и убывает при $x > Z_n$;*

(iv) *достигает максимума при $x = Z_n$:*

$$\begin{aligned} \max_x \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) &= \mathbf{P}\left\{\theta_c - \delta \leqslant \vartheta \leqslant \theta_c + \delta \,\middle|\, \overline{X} = Z_n\right\} = \\ &= 2\Phi\left(\sqrt{n+1}\,\delta\right) - 1; \end{aligned}$$

(v) $\inf\limits_x \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) = \mathbf{P}\{\theta_c - \delta \leqslant \vartheta \leqslant \theta_c + \delta\} = \Phi(\theta_c + \delta) - \Phi(\theta_c - \delta)$.

Доказательство. Симметрия и непрерывность функции $\mathcal{Q}_n$ сразу видны из ее представления (2.6).

Для доказательства остальных утверждений леммы положим $A = \theta_c - \delta, B = \theta_c + \delta$, и заметим, что функция $\mathcal{Q}_n$ есть условная вероятность

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) = \mathbf{P}\left\{\vartheta \in [A,B] \,\middle|\, \pi_0\big([A,B] \mid \overline{X}\,\big) \geqslant p\right\}\,, \tag{2.8}$$

с константой $p = p(x) = \pi_0(\,[A,B]\,|\,x)$, равной экспериментальному значению апостериорной вероятности (2.2).

Хорошо известно, что для нормального закона вероятность попадания в конечный интервал есть убывающая функция расстояния между центром распределения $m(x)$ и серединой интервала θ_c. Так как $m(x)$ есть возрастающая функция x (см. (2.3)), то при $x < Z_n$ значение $p(x)$ увеличивается с ростом x, а при $x > Z_n$ — уменьшается.

В [12] показано, что правая часть (2.8) есть возрастающая функция p, поэтому при $x < Z_n$ $(x > Z_n)$ значение константы $p(x)$ будет увеличиваться (уменьшаться) с ростом x, а вместе с ней будет увеличиваться (уменьшаться) и $\mathcal{Q}_n$. Утверждение (iii) доказано.

По телескопическому свойству условного математического ожидания

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta; x) \;&=\; \mathbf{P}\left\{\vartheta \in [A,B] \,\middle|\, \pi_0(\,[A,B] \mid \overline{X}\,) \geqslant p(x)\right\} = \\ &=\; \mathbf{E}\left[\pi_0([A,B] \mid \overline{X}\,) \,\middle|\, \pi_0([A,B] \mid \overline{X}\,) \geqslant p(x)\right] \;\geqslant\; p(x).\end{aligned}$$

Отсюда получаем (с $p(x) = \pi_0(\,[A,B] \mid x)$), что

$$\pi_0(\,[A,B] \mid x) \leqslant \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta; x) \leqslant \max_y \pi_0(\,[A,B] \mid y).$$

Таким образом, $x = Z_n$ есть точка максимума $\mathcal{Q}_n$. Поскольку апостериорное среднее $m(Z_n) = \theta_c$, то ввиду (2.2)

$$\begin{aligned}\max_x \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta\,;\, x) = \pi_0(\,[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta] \mid Z_n) \;&=\; \Phi\left(\tfrac{\theta_2 - m(Z_n)}{S}\right) - \Phi\left(\tfrac{\theta_1 - m(Z_n)}{S}\right) \;= \\ =\; \Phi\left(\tfrac{\delta}{S}\right) - \Phi\left(-\tfrac{\delta}{S}\right) \;&=\; 2\Phi\big(\sqrt{n+1}\,\delta\big) - 1.\end{aligned}$$

Утверждение (v) следует из того, что при $x \to \pm\infty$ значение апостериорной вероятности $p(x) \to 0$, следовательно, событие $\{\pi_0([A,B] \mid \overline{X}\,) \geqslant p(x)\}$

стремится к достоверному событию, поэтому

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta\,;\, x) \;=\; \mathbf{P}\left\{\vartheta \in [A,B] \,\middle|\, \pi_0\big([A,B] \mid \overline{X}\,\big) \geqslant p(x)\right\} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \mathbf{P}\{\vartheta \in [A,B]\},$$

что и требовалось. ♠

Из (v) следует, что интервалы $[A,B]$, априорная вероятность которых

$$\mathbf{P}\{A \leqslant \vartheta \leqslant B\} = \Phi(B) - \Phi(A) \geqslant 1-\alpha,$$

всегда (независимо от результатов наблюдений) будут включаться в наиболее точное доверительное семейство.

Теорема 2.2. *Если θ_c, δ таковы, что*

$$\Phi(\theta_c+\delta) - \Phi(\theta_c-\delta) \;<\; 1-\alpha \;<\; 2\Phi\big(\sqrt{n+1}\,\delta\big) - 1\,,$$

то

(i) *существует единственная точка $x_n^* = x_n^*(\theta_c,\delta) > Z_n$ такая, что*

$$\mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x_n^*) = 1-\alpha; \tag{2.9}$$

(ii) *интервал $[\theta_c-\delta, \theta_c+\delta]$ включается в наиболее точное доверительное семейство $\mathscr{B}_n^*$ тогда и только тогда, когда значение статистики $\overline{X}$ удовлетворяет неравенствам*

$$2Z_n - x_n^* \leqslant \overline{X} \leqslant x_n^*\,.$$

Таким образом, изучение асимптотического поведения наиболее точного доверительного семейства сводится к изучению асимптотического поведения констант δ_n^* и x_n^*.

2.3. Асимптотические свойства наиболее точного семейства

Как показывают следующие утверждения, в отличие от классических доверительных интервалов, в d-апостериорном подходе наиболее точное доверительное семейство не вырождается даже при $n \to \infty$.

Следующее утверждение устанавливается простым предельным переходом под знаком интеграла.

Лемма 2.3. *При любых фиксированных* $\delta > 0$, θ_c, x

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta \mid x) =$$

$$= \mathcal{Q}_\infty(\theta_c, \delta \mid x) := \begin{cases} \dfrac{\Phi(\theta_c+\delta) - \Phi(\theta_c-\delta)}{|\Phi(2\theta_c - x) - \Phi(x)|} & , \textit{если} \;\; x \notin [\theta_c - \delta; \theta_c + \delta]\,, \\ \qquad\qquad 1 & , \textit{если} \;\; x \in [\theta_c - \delta; \theta_c + \delta]\,. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, знаменатель функции $\mathcal{Q}_n$

$$\Phi\left(\frac{2Z_n - x}{\sqrt{1+1/n}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+1/n}}\right) \underset{n\to\infty}{\to} \Phi(2\theta_c - x) - \Phi(x)\,.$$

Подынтегральная функция в числителе (2.6) не превосходит функции $\varphi(\theta), \theta \in [\theta_1, \theta_2]$, поэтому здесь законен переход к пределу по $n \to \infty$ под знаком интеграла.

Учитывая симметрию функции $\mathcal{Q}_n$, рассмотрим только случай $x < \theta_c$. Пусть $x < \theta_c - \delta$, тогда $2Z_n - x > \theta_c + \delta$ (начиная с некоторого n, так как $Z_n \to \theta_c$), поэтому при всех $\theta \in [\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]$

$$\Phi(\sqrt{n}(2Z_n - x - \theta)) \to 1, \quad \Phi(\sqrt{n}(x - \theta)) \to 0\,.$$

Следовательно, числитель $\mathcal{Q}_n$

$$\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta} [\Phi(\sqrt{n}(2Z_n - x - \theta)) - \Phi(\sqrt{n}(x-\theta))]\varphi(\theta)\,d\theta \to$$

$$\to \int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta} \varphi(\theta)\,d\theta = \Phi(\theta_c+\delta) - \Phi(\theta_c-\delta).$$

Пусть теперь $\theta_c - \delta < x < \theta_c$, тогда аналогично

$$\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta} [\Phi(\sqrt{n}(2Z_n - x - \theta)) - \Phi(\sqrt{n}(x-\theta))]\varphi(\theta)\,d\theta$$

$$\to \int\limits_{x}^{2\theta_c - x} \varphi(\theta)\,d\theta = \Phi(2\theta_c - x) - \Phi(x),$$

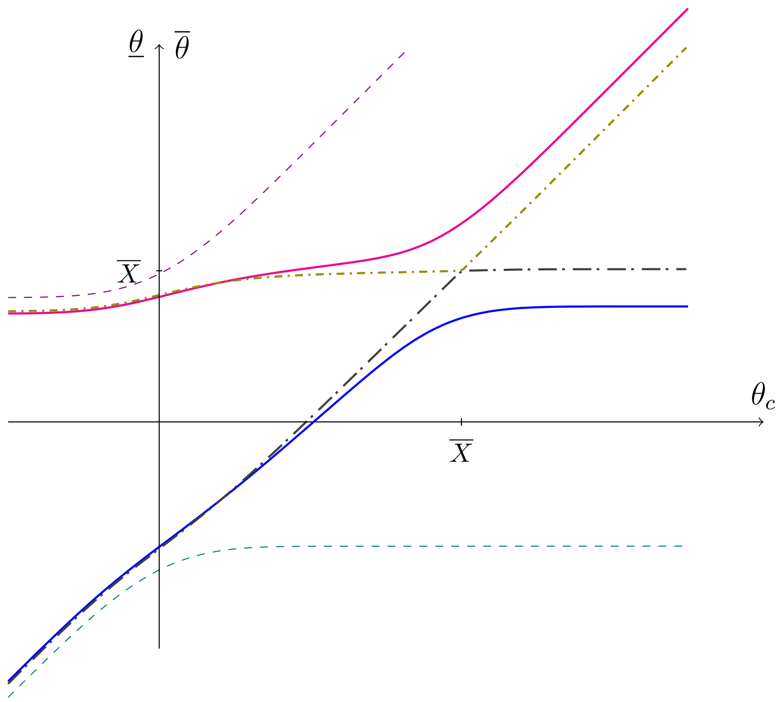


Рис. 2.2. Границы оптимального семейства; $n = 10, \overline{X} = 2, (1-\alpha) = 0.95$.

что совпадает с предельным значением для знаменателя $\mathcal{Q}_n$. ♠

Определим константу $0 < \delta^* = \delta^*(\theta_c, x)$ из уравнения

$$\frac{\Phi(\theta_c + \delta^*) - \Phi(\theta_c - \delta^*)}{|\Phi(2\theta_c - x) - \Phi(x)|} = 1 - \alpha\,, \tag{2.10}$$

полагая $\delta^* = 0$ при $x = \theta_c$. Поскольку при $\delta^* = 0$ левая часть этого уравнения равна нулю, а при $\delta^* = |\theta_c - x|$ — единице, то такая константа всегда существует и $\delta^* < |\theta_c - x|$.

Определим асимптотическое наиболее точного семейства

$$\mathscr{B}^*_a = \mathscr{B}^*_a(x) = \left\{\, [\theta_c - \delta, \theta_c + \delta] :\ \delta \geqslant \delta^*(\theta_c, x) \,\right\}$$

при выборочном значении $\overline{X} = x$. Заметим, что в это семейство включаются все интервалы с центром $\theta_c = x$, в частности, вырожденный интервал $[x, x]$, состоящий из одной точки x.

На рис. 2.2 графики рис. 2.1 дополнены линиями соответствующих границ асимптотического семейства (штрих-пунктирные линии). Кроме того, здесь представлены границы интервалов (пунктирные линии), которые включаются в оптимальное семейство без проведения наблюдений, поскольку имеют априорную вероятность больше $1-\alpha$.

Отметим два интересных факта. Во-первых, границы наиболее точного семейства интервалов при конечном объеме выборки не всегда шире границ асимптотического семейства.

Во-вторых, при бесконечном объеме выборки, когда значение статистики $\overline{X}$, по-существу, совпадает с истинным значением параметра θ (в нашем случае $\theta = 2$), в доверительное семейство попадают интервалы, не содержащие это истинное значение. Этот факт становится вполне естественным, если взглянуть на него с точки зрения точности и надежности семейства. Действительно, как следует из предыдущего, в асимптотическое семейство не попадают интервалы $[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]$, для которых $\delta < \delta^* < |\theta_c - x|$, т.е. $x < \theta_c - \delta$ или $x > \theta_c + \delta$, а значит, такой интервал не будет содержать наблюдаемое значение $x = \theta$ — истинное значение параметра. Поэтому точность

$$\mathbf{P}\left\{\vartheta \in [A,B] \,\middle|\, \mathcal{B}^* \not\ni [A,B]\right\} \leqslant \frac{\mathbf{P}\{(\vartheta \in [A,B]) \cap (\vartheta \notin [A,B])\}}{\mathbf{P}\{\mathcal{B}^* \not\ni [A,B]\}} = 0,$$

что ожидаемо при $n = \infty$. С другой стороны, если интервал включается в доверительное семейство только, когда этот интервал содержит истинное значение θ, то надежность такого семейства будет равна 1, то есть семейство излишне надежно.

Изучение дальнейших асимптотических свойств наиболее точного доверительного семейства начнем с установления скорости сходимости оптимальной ширины доверительного интервала δ_n^* к ее предельному значению δ^*.

Лемма 2.4. *Для любых фиксированных* $\theta_c\,, x$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^*(\theta_c, x) = \delta^*(\theta_c, x).$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ предел $\varliminf\limits_{n\to\infty} \delta_n^* < \delta^* - \varepsilon$. Тогда в силу строгой монотонности функций $\mathcal{Q}_n$ и $\mathcal{Q}_\infty$ по параметру δ

$$1-\alpha = \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta_n^* \,|\, x) \leqslant \mathcal{Q}_\infty(\theta_c, \delta^* - \varepsilon \,|\, x) < 1-\alpha\,.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. ♠

Лемма 2.5. *(I) Для любых $\theta_c \neq x$ таких, что значение функции*

$$Q(\theta_c, x) := \frac{(1-\alpha)|(2\theta_c + x)\varphi(2\theta_c - x) + x\varphi(x)|}{2(\varphi(\theta_c + \delta^*) + \varphi(\theta_c - \delta^*))} \neq 0, \tag{2.11}$$

справедливо асимптотическое равенство

$$|\delta_n^* - \delta^*| \asymp \frac{Q(\theta_c, x)}{n},\ n \to \infty\,.$$

(II) Если $\theta_c = x$, то

$$\delta_n^* \asymp \frac{z^{(\frac{\alpha}{2})}}{\sqrt{n}},\ n \to \infty\,,$$

где $z^{(\frac{\alpha}{2})}$ — квантиль стандартного нормального закона порядка $(1 - \frac{\alpha}{2})$.

Доказательство. (I) Обозначим через $R_n(\delta)$ и D_n, соответственно, числитель и знаменатель функции $\mathcal{Q}_n$ (см. (2.6)). Числитель и знаменатель функции $\mathcal{Q}_\infty$ будем обозначать через $R(\delta)$ и D. Тогда константы δ_n^* и δ^* можно определить как решения уравнений

$$R_n(\delta_n^*) - (1-\alpha)D_n = 0, \quad R(\delta^*) - (1-\alpha)D = 0.$$

Формула конечных приращений, примененная к функции $R_n(\delta)$, позволяет представить расхождение $\delta^* - \delta_n^*$ в виде

$$\delta^* - \delta_n^* = \frac{R_n(\delta^*) - (1-\alpha)D_n}{R_n'(\tilde{\delta}_n)} = \frac{(R_n(\delta^*) - R(\delta^*)) - (1-\alpha)(D_n - D)}{R_n'(\tilde{\delta}_n)}\,,$$

где производная $R_n'(\tilde{\delta}_n)$ функции $R_n(\delta)$ вычислена в некоторой средней точке между δ_n^* и δ^*.

Учитывая симметрию функций $\mathcal{Q}_n$ и $\mathcal{Q}_\infty$, рассмотрим только $x < \theta_c$. Из леммы 2.4 следует, что $\tilde{\delta}_n \to \delta^*$, а по построению $\theta_c - \delta^* > x$, поэтому при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}(2Z_n - x - \theta_c \pm \tilde{\delta}_n) \ = \ \sqrt{n}(\theta_c \pm \tilde{\delta}_n - x) + \frac{2\theta_c}{\sqrt{n}} \ \to \ +\infty,$$

$$\sqrt{n}\big(x - \theta_c \pm \tilde{\delta}_n\big) \ \to \ -\infty\,.$$

Таким образом,

$$R_n'(\tilde{\delta}_n) = \Big[\Phi\Big(\sqrt{n}\big(2\,Z_n - x - \theta_c - \tilde{\delta}_n\big)\Big) - \Phi\Big(\sqrt{n}\big(x - \theta_c - \tilde{\delta}_n\big)\Big)\Big]\,\varphi\big(\theta_c + \tilde{\delta}_n\big) +$$

$$+ \Big[\Phi\Big(\sqrt{n}\big(2\,Z_n - x - \theta_c + \tilde{\delta}_n\big)\Big) - \Phi\Big(\sqrt{n}\big(x - \theta_c + \tilde{\delta}_n\big)\Big)\Big]\,\varphi\big(\theta_c - \tilde{\delta}_n\big) \ \to$$

$$\to \varphi(\theta_c + \delta^*) + \varphi(\theta_c - \delta^*) > 0.$$

Применяя хорошо известные неравенства (см., например, [3], стр.196)

$$\frac{\varphi\,(t)}{t}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \leqslant 1 - \Phi(t) = \Phi(-t) \leqslant \frac{\varphi\,(t)}{t},\ t > 0\,, \tag{2.12}$$

можно легко установить, что разность числителей $R_n(\delta^*) - R(\delta^*)$ имеет экспоненциальный порядок малости при $n \to \infty$. Поэтому исследуемая нами скорость сходимости полностью определяется разностью

$$D_n - D = \left[\Phi\left(\frac{2Z_n - x}{\sqrt{1+1/n}}\right) - \Phi(2\theta_c - x)\right] - \left[\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+1/n}}\right) - \Phi(x)\right].$$

Воспользовавшись снова формулой конечных приращений а также разложением в ряд Тейлора функции $(1+t)^{-1/2}, t \to 0$, получаем, что

$$D_n - D \asymp \frac{\Delta}{n}\,,\ n \to \infty,$$

с константой $\Delta = \Delta(\theta_c, x) = (2\theta_c + x)\varphi(2\theta_c - x) + x\varphi(x)$.

(II) В случае, когда $\theta_c = x$ константа $\delta^* = 0$ и знаменатель $\mathcal{Q}_n$

$$D_n = \Phi\left(\frac{x + \frac{2x}{n}}{\sqrt{1+1/n}}\right) - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+1/n}}\right) \asymp \frac{2x}{n}\,\varphi(x),\ n \to \infty\,.$$

Числитель $\mathcal{Q}_n$ после замены $\sqrt{n}(x - \theta) = y$ можно представить в виде

$$R_n(\delta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int\limits_{-\sqrt{n}\delta}^{\sqrt{n}\delta} \Big[\Phi\Big(y + \frac{2x}{\sqrt{n}}\Big) - \Phi\big(y\big)\Big]\varphi\Big(x - \frac{y}{\sqrt{n}}\Big)\,dy\,.$$

Если $\sqrt{n}\delta_n \to C$, то в силу теоремы об ограниченной сходимости можно перейти к пределу под знаком интеграла, что дает при $n \to \infty$ представление

$$R_n(\delta_n) \asymp \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{2x}{\sqrt{n}}\,\varphi(x) \int\limits_{-C}^{C} \varphi(y)\,dy = \frac{2x}{n}\,\varphi(x)(2\Phi(C) - 1).$$

Таким образом, если взять $C = z^{(\frac{\alpha}{2})}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n(\theta_c, \delta_n \,|\, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n(\delta_n)}{D_n} = (1-\alpha)\,.$$

С другой стороны, если, например, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\delta_n^* > z^{(\frac{\alpha}{2})}(1+\varepsilon)$, то

$$(1-\alpha) = \varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n\left(\theta_c, \delta_n^* \,\middle|\, x\right) \geqslant (2\Phi(z^{(\frac{\alpha}{2})}(1+\varepsilon)) - 1) > (1-\alpha)\,,$$

что доказывает утверждение теоремы. ♠

Заметим, что функция $Q(\theta_c, x)$ принимает нулевые значения не более, чем в двух точках θ_c для каждого значения x. Специальное исследование для этих точек нам не понадобится.

Как показано в теореме 2.2 наиболее точное семейство содержит интервал $[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]$, если выборочное значение статистики $\overline{X} = x$ удовлетворяет неравенствам $2Z_n - x_n^* \leqslant x \leqslant x_n^*$. Аналогичное утверждение справедливо и для асимптотического семейства. А именно, пусть $x^* > \theta_c + \delta$ – единственное решение уравнения

$$\frac{\Phi(\theta_c + \delta) - \Phi(\theta_c - \delta)}{\Phi(x^*) - \Phi(2\theta_c - x^*)} = 1 - \alpha\,. \tag{2.13}$$

Тогда интервал $[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta] \in \mathscr{B}^*(x)$, если $2\theta_c - x^* \leqslant x \leqslant x^*$.

Лемма 2.6. *Для любых* θ_c *и* $\delta > 0$ *относительно решений уравнений* (2.9) *и* (2.13) *справедливо асимптотическое равенство*

$$|x_n^* - x^*| \asymp \frac{\tau(\theta_c, \delta)}{n},\ n \to \infty\,,$$

с константой

$$\tau(\theta_c, \delta) = \frac{x^*\varphi(x^*) + (2\theta_c + x^*)\varphi(2\theta_c - x^*)}{2(\varphi(x^*) + \varphi(2\theta_c - x^*))}.$$

Доказательство. Аналогично лемме 2.4, доказывается сходимость $x_n^* \to x^*$ при $n \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что для некоторого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого N_0, выполняется $x_n^* > \theta_c + \delta + \varepsilon,\ \forall n > N_0$.

Запишем уравнения, определяющие константы x_n^* и x^* в виде

$$\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta}\Big[\Phi\big(\sqrt{n}(x_n^*-\theta)\big)-\Phi\Big(\sqrt{n}\Big(2\Big(1+\tfrac{1}{n}\Big)\theta_c-x_n^*-\theta\Big)\Big)\Big]\varphi(\theta)\,d\theta =$$
$$=\Phi\bigg(\frac{x_n^*}{\sqrt{1+1/n}}\bigg)-\Phi\bigg(\frac{2(1+\frac{1}{n})\theta_c-x_n^*}{\sqrt{1+1/n}}\bigg),$$
$$\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta}\varphi(\theta)\,d\theta \ = \ \Phi(x^*)-\Phi(2\theta_c-x^*).$$

Так как производная $\Phi'=\varphi$, то разность правых частей этих уравнений (при соответствующем выборе точек $t_n'\to x^*, t_n''\to 2\theta_c-x^*$) может быть записана как

$$\bigg(\frac{x_n^*}{\sqrt{1+1/n}}-x^*\bigg)\big(\varphi(t_n')+\varphi(t_n'')\big)-2\theta_c(\sqrt{1+1/n}-1)\varphi(t_n'')=$$
$$=\tfrac{1}{n}\Big(n(x_n^*-x^*)-\tfrac{1}{2}x_n^*+o(1)x_n^*\Big)\big(\varphi(t_n')+\varphi(t_n'')\big)-2\theta_c\varphi(t_n'')\Big(\tfrac{1}{2}+o(1)\Big).$$

Разность левых частей предыдущих уравнений имеет экспоненциальный порядок малости. Действительно, в силу неравенств (2.12) и неравенства $x_n^*>\theta_c+\delta+\varepsilon$, справедливого для достаточно больших n,

$$\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta}\Phi\big(-\sqrt{n}(x_n^*-\theta)\big)\varphi(\theta)\,d\theta\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\int\limits_{-\infty}^{\theta_c+\delta}\frac{\varphi\big(\sqrt{n}(x_n^*-\theta)\big)\varphi(\theta)}{(x_n^*-\theta)}\,d\theta\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varphi(0)}{\sqrt{n}\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\theta_c+\delta}\varphi\big(\sqrt{n}(\theta-x_n^*)\big)\,d\theta \ = \ \frac{1}{n\varepsilon}\Phi\big(-\sqrt{n}\varepsilon\big)\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}\varepsilon}e^{-\frac{1}{2}n\varepsilon^2} \ = \ o\big(\tfrac{1}{n^2}\big).$$

Аналогично для $\int_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta}\Phi\big(\sqrt{n}\big(2\big(1+\frac{1}{n}\big)\theta_c-x_n^*-\theta\big)\big)\varphi(\theta)\,d\theta$. Следовательно,

$$n(x_n^*-x^*)=\frac{1}{2}x_n^*+o(1)x_n^*+\frac{o\big(\frac{1}{n}\big)+2\theta_c\varphi(t_n'')\Big(\frac{1}{2}+o(1)\Big)\Big)}{\varphi(t_n')+\varphi(t_n'')} \ \to$$
$$\to \ \frac{1}{2}x^*+\frac{\theta_c\varphi(2\theta_c-x^*)}{\varphi(x^*)+\varphi(2\theta_c-x^*)},$$

что доказывает теорему. ♠

2.3.1. Асимптотические аналоги оптимального семейства

Рассмотрим произвольную числовую последовательность $q_n \to 0,\ n \to \infty$, и определим семейство

$$\mathcal{B}_n(x) = \{\, [\underline{\theta}, \overline{\theta}] = [\theta_c - \delta, \theta_c + \delta] :\ -\infty < \theta_c < \infty\,,\ \delta \geqslant \delta^*(\theta_c, x) + q_n \,\}.$$

Как показано в следующей теореме это семейство асимптотически надежно при любом выборе последовательности q_n. Точность этого семейства будет по порядку совпадать с точностью наиболее точного семейства лишь при специальном выборе этой последовательности. Будем говорить, что $q_n = O_c\left(\frac{1}{n}\right)$, если $q_n = \frac{c_n}{n}$, где последовательность $c_n \to c_0$ с некоторой константой c_0.

Теорема 2.3. (I) *Семейство $\mathcal{B}_n$ асимптотически надежно:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}\big([A, B]\,;\, \mathcal{B}_n\big) = 1 - \alpha \quad (\forall A < B).$$

(II) *Если $q_n = O_c\left(\frac{1}{n}\right)$, то для любых $A < B$*

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{A}\big([A, B]\,;\, \mathcal{B}_n\big)}{\mathcal{A}\big([A; B]\,;\, \mathscr{B}_n^*\big)} < \infty\,.$$

Доказательство. (I) Поскольку включение интервала $[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]$ в семейство $\mathcal{B}_n$ эквивалентно включению интервала $[\theta_c - \delta + q_n, \theta_c + \delta - q_n]$ в семейство $\mathcal{B}^*$, то, как было замечено перед формулировкой теоремы 2.6, событие $\{\mathcal{B}_n \ni [\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]\}$ выполняется тогда и только тогда, когда наблюденное значение статистики $\overline{X} = x$ принадлежит области $2\theta_c - t_n^* \leqslant x \leqslant t_n^*$, где $t_n^* = x^*(\theta_c, \delta - q_n)$. Непрерывность и монотонность функции $\mathcal{Q}_\infty(\theta_c, \delta; x)$ по параметрам x и δ (при фиксированном θ_c) обеспечивает сходимость $t_n^* \to x^*$, откуда, воспользовавшись схемой доказательства леммы 2.3, находим, что при $n \to \infty$ надежность

$$\mathcal{Q}(\theta_c - \delta, \theta_c + \delta\,;\, \mathcal{B}_n) \ \to\ \frac{\Phi(\theta_c + \delta) - \Phi(\theta_c - \delta)}{\Phi(x^*) - \Phi(2\theta_c - x^*)} = 1 - \alpha\,.$$

(II) Запишем равенства, определяющие константы x^* и $t_n^* = x^*(\theta_c, \delta - q_n)$, в виде

$$(\Phi(t_n^*) - \Phi(2\theta_c - t_n^*))(1-\alpha) = \Phi(\theta_c + \delta - q_n) - \Phi(\theta_c - \delta + q_n)\,,$$
$$(\Phi(x^*) - \Phi(2\theta_c - x^*))(1-\alpha) = \Phi(\theta_c + \delta) - \Phi(\theta_c - \delta)\,.$$

Вычитая из первого равенства второе и применяя формулу конечных приращений, устанавливаем, что при $n \to \infty$

$$t_n^* - x^* \asymp -\frac{\varphi(\theta_c+\delta) + \varphi(\theta_c-\delta)}{(1-\alpha)(\varphi(x^*) + \varphi(2\theta_c - x^*))}\, q_n\,.$$

Таким образом, как точное семейство $\mathscr{B}_n^*$ (см. теорему 2.6), так и семейство $\mathcal{B}_n$ содержат интервал $[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]$ только, когда значение статистики $\overline{X}$ удовлетворяет неравенствам вида $2\theta_c - x^* - r_n \leqslant \overline{X} \leqslant x^* + r_n$, причем для обоих семейств последовательность $r_n = O_c(\frac{1}{n})$. Точность этих семейств для фиксированного интервала $[\theta_c - \delta, \theta_c + \delta]$ равна

$$\mathbf{P}\left\{\theta_c - \delta \leqslant \vartheta \leqslant \theta_c + \delta \,\middle|\, \overline{X} \notin [2\theta_c - x^* - r_n,\, x^* + r_n]\right\} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta} \left[\Phi\Big(\sqrt{n}\big(\theta - x^* - r_n\big)\Big) + \Phi\Big(\sqrt{n}\big(2\theta_c - \theta - x^* - r_n\big)\Big)\right] \varphi(\theta)\, d\theta}{1 - \left[\Phi\Big(\frac{x^*+r_n}{\sqrt{1+1/n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{2\theta_c - x^* - r_n}{\sqrt{1+1/n}}\Big)\right]} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\theta_c-\delta}^{\theta_c+\delta} \Phi\Big(\sqrt{n}\big(\theta - x^* - r_n\big)\Big)\Big(\varphi(\theta) + \varphi(2\theta_c - \theta)\Big)\, d\theta}{1 - \left[\Phi\Big(\frac{x^*+r_n}{\sqrt{1+1/n}}\Big) - \Phi\Big(\frac{2\theta_c - x^* - r_n}{\sqrt{1+1/n}}\Big)\right]}\,.$$

Применяя утверждение следующей леммы 2.7 (с заменой функции $\varphi(\theta)$ на $(\varphi(\theta) + \varphi(2\theta_c - \theta)))$, получаем, что точность обоих рассматриваемых семейств асимптотически эквивалентна (при $n \to \infty$) последовательности

$$\frac{(\varphi(\theta_c+\delta) + \varphi(\theta_c-\delta))e^{-c_0(x^*-\theta_c-\delta)}}{(\Phi(-x^*) + \Phi(2\theta_c - x^*))\,(x^* - \theta_c - \delta)^2}\,\frac{e^{-\frac{(x^*-\theta_c-\delta)^2}{2}n}}{n\sqrt{n}}\,,$$

возможно с различными константами c_0. Доказательство завершено. ♠

Доказательство теоремы опирается на следующее утверждение относительно скорости сходимости к нулю интегралов, определяющих вероятности отвержения гипотезы $\theta \in [A, B]$ при использовании доверительных семейств интервалов, подобных наиболее точному или асимптотическому аналогу наиболее точного семейства.

Лемма 2.7. *Если константа $x > B$ и последовательность $q_n = \frac{c_n}{n}$, где $c_n \to c_0$, то*

$$\int_A^B \Phi\big(\sqrt{n}(\theta - x - q_n)\big)\varphi(\theta)\,d\theta \;\asymp\; \frac{\varphi(B)e^{-c_0(x-B)}}{\sqrt{2\pi}(x-B)^2}\,\frac{e^{-\frac{(x-B)^2}{2}n}}{n\sqrt{n}}\,,\; n \to \infty\,.$$

Утверждение леммы остается верным и для $q_n \equiv c_0 = 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала интеграл I_n с областью интегрирования $B - \frac{1}{n^{3/4}} \leqslant \theta \leqslant B$ и произведем в нем замену переменных $\theta \mapsto B - \frac{y}{n}$:

$$I_n = \frac{1}{n}\int\limits_0^{\sqrt[4]{n}} \Phi\left(\sqrt{n}\left(-\frac{y}{n} - (x-B) - q_n\right)\right)\varphi\Big(B - \frac{y}{n}\Big)\,dy.$$

Двусторонние неравенства (2.12) обеспечивают возможность эквивалентной подстановки $\Phi(-x) \asymp \frac{\varphi(x)}{x}$ (при $x \to \infty$) в полученное выражение

$$I_n \asymp \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n\sqrt{n}}\int\limits_0^{\sqrt[4]{n}} \frac{\exp\{-\frac{n}{2}(\frac{y}{n} + (x-B) + q_n)^2\}}{(\frac{y}{n} + (x-B) + q_n)}\varphi\Big(B - \frac{y}{n}\Big)\,dy$$
$$= \frac{\exp\{-\frac{n}{2}(x-B)^2 - (x-B)\,n\,q_n - \frac{1}{2}n\,q_n^2\}}{\sqrt{2\pi}\,n\sqrt{n}}\int\limits_0^{\sqrt[4]{n}} e^{-(x-B)y}H_n(y)\,dy\,,$$

где функция

$$H_n(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2n}}e^{-y\,q_n}}{(\frac{y}{n} + (x-B) + q_n)}\varphi\Big(B - \frac{y}{n}\Big) \;\to\; \frac{\varphi(B)}{t-B} > 0,$$

причем сходимость равномерная по всем значениям переменной y из области интегрирования $0 \leqslant y \leqslant \sqrt[4]{n}$. Таким образом, после очевидных преобразований получаем, что

$$I_n \asymp \frac{\varphi(B)e^{-c_0(x-B)}}{(x-B)^2}\,\frac{e^{-\frac{(x-B)^2}{2}n}}{n\sqrt{n}}\,.$$

Таблица 2.1. Надежность асимптотического семейства с $q_n = \frac{1}{n}$.

θ_c	n	$\widetilde{\delta}_n$	δ										
			0.07	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
0	50	0.274	–	–	–	0.83	0.87	0.91	0.93	0.946	0.953	0.956	0.957
	100	0.195	–	–	0.81	0.87	0.90	0.935	0.94	0.949	0.953	0.954	0.954
	500	0.088	–	0.81	0.89	0.92	0.93	0.94	0.950	0.951	0.951	0.951	0.951
	1000	0.062	0.81	0.86	0.91	0.93	0.94	0.949	0.951	0.951	0.951	0.951	0.950

Оставшаяся часть рассматриваемого интеграла может быть оценена сверху (с учетом монотонности функции Φ и неравенства (2.12)) выражением

$$\frac{\varphi\left(\sqrt{n}\left(B - \frac{1}{n^{3/4}} - x - q_n\right)\right)}{\sqrt{n}\left((x-B) + \frac{1}{n^{3/4}} + q_n\right)} \int\limits_A^{B-n^{-3/4}} \varphi(\theta)\, d\theta \underset{n\to\infty}{\asymp} O_c\left(\frac{e^{-\frac{(x-B)^2}{2}n}\, e^{-(x-B)\sqrt[4]{n}}}{\sqrt{n}}\right),$$

которое экспоненциально мало по сравнению с полученной нами асимптотикой для I_n. ♠

2.3.2. Исправленный вариант асимптотического семейства

Из выражения (2.5) для минимума p_d-значения вытекает, что в оптимальное семейство ни при каком результате наблюдений не будут включены интервалы, у которых половинная ширина

$$\delta < \widetilde{\delta}_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Phi^{-1}\left(1 - \tfrac{\alpha}{2}\right).$$

Определим семейство (с каким-либо $q_n = O_c(\frac{1}{n})$)

$$\widetilde{\mathcal{B}}_n(x) = \{\, [\underline{\theta}, \overline{\theta}] = [\theta_c - \delta, \theta_c + \delta] : \ -\infty < \theta_c < \infty\,,\ \delta \geqslant \max(\widetilde{\delta}_n, \delta^*(\theta_c, x) + q_n)\,\}.$$

Поскольку такая операция приводит только к сужению доверительного семейства, то надежность этого семейства будет совпадать с надежностью асимптотического аналога, предложенного в предыдущем разделе.

В таблице 2.1 приведены численные результаты анализа надежности семейства $\widetilde{\mathcal{B}}_n$, построенного по уровню 0.95 с $q_n = \frac{1}{n}$. Интервалы, априорная вероятность которых больше 0.95, не включены в таблицу.

Глава 3

Оценка параметра с ограничениями на d-риск

Введение. Проблема оценивания в d-апостериорном подходе

Тематику этой главы в некотором смысле можно считать продолжением тематики двух предыдущих глав. Здесь изучаются способы построения оценок в ситуации, когда мерой качества оценки выбирается d-апостериорный риск относительно функции потерь, учитывающей двустороннее отклонение оценки от параметра вероятностной модели. Точнее, рассматривается задача оценки среднего значения нормального распределения в рамках байесовской парадигмы, когда статистик имеет дело с реальной последовательностью статистических экспериментов, в каждом из которых по результатам измерений необходимо предложить оценку текущего среднего. Новизна подхода состоит в том, что в качестве меры точности оценки выбирается не классический априорный риск, а так называемый d-риск, определяемый как условное среднее значение потерь относительно сигма-алгебры, порожденной оценочной функцией. Как всегда в байесовском подходе, проблема состоит в спецификации априорного распределения параметра. Здесь рассматривается ситуация, когда имеется дополнительная информация о малости и положительности этого параметра. Такую ситуацию можно формализовать многими способами. В этой главе диссертации рассматривается однопараметрическая экспоненциальная модель априорного распределения с «большим» показателем интенсивности («малым» масштабным параметром) и функцией потерь, учитывающей абсолютную ошибку отклонения, а также двухпараметрическая экспоненциальная модель с функцией потерь, учитывающей относительную ошибку. Поскольку значения параметров априорного распределения, как правило, неизвестны, то развиваются методы их оценки в рамках эмпирического байесовского подхода.

Общая задача оценивания в d-апостериорном подходе формулируется следующим образом. Пусть X — случайная выборка, и пусть $\mathscr{P} = \{\, \mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta \,\}$ — семейство возможных распределений случайного элемента X на измеримом выборочном пространстве, индексированных некоторым параметром $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$. По результатам наблюдений X необходимо указать оценку $\widehat{\theta}$ параметра распределения.

Предположим, что задача оценивания возникает многократно (имеется последовательность однотипных статистических задач), причем оцениваемый параметр в каждом эксперименте есть реализация некоторой случайной величины ϑ. Тогда d-апостериорный риск для заданной функции потерь $L(\theta, d), \theta \in \Theta, d \in \mathcal{D}$, определяется, как условное математическое ожидание $\mathbf{E}\left\{ L(\vartheta, \widehat{\theta}(X)) \,\middle|\, \widehat{\theta}(X) \right\}$ относительно сигма-алгебры, порожденной оценочной функцией $\widehat{\theta}(x), x \in \mathcal{X}$. Для большинства ситуаций, рассматриваемых также в этой диссертационной работе, можно определить соответствующее регулярное условное распределение ϑ при фиксированном значении $\widehat{\theta} = d$, поэтому d-риск можно интерпретировать как функцию принимаемых решений (оценок) d:

$$\mathcal{R}(d\,; \widehat{\theta}\,) = \mathbf{E}\big\{ L(\vartheta, d) \,\big|\, \widehat{\theta}(X) = d \big\}, \quad d \in \mathcal{D} = \Theta.$$

Вне носителя распределения $\widehat{\theta}$ мы полагаем d-риск равным нулю.

Замечание. Запись d-риска в виде $\mathcal{R}(d\,; \widehat{\theta}\,)$ не указывает на зависимость риска от реализаций оценочной функции $\widehat{\theta}$, как случайной величины. Риск $\mathcal{R}(d\,; \widehat{\theta}\,)$ есть значение средних потерь от принятия решения d в результате применения этой оценочной функции.

Особое определение d-риска вне носителя распределения оценочной функции осложняет сравнение оценок посредством функции d-риска, поскольку сравниваемые оценки могут иметь различный носитель. В рассматриваемых далее ситуациях возможно построение оценок, распределение которых имеет максимально широкий носитель и наименьшую (в каждой точке d) функцию d-риска. Идея метода построения таких оценок (см. [14]) основывается на следующем очевидном неравенстве, вытекающем из телескопического свойства условного математического ожидания.

Лемма 3.1 ([14]). *Пусть* $\mathrm{R}(d\,;\,x)=\mathbf{E}\big\{L(\vartheta,d)\,\big|\,x\big\}$ — *апостериорный риск (апостериорные средние потери) решения* $d\in\mathcal{D}$ *при фиксированном результате наблюдений* $X=x$. *Тогда d-риск любой оценочной функции* $\widehat{\theta}$

$$\mathcal{R}(d\,;\,\widehat{\theta}\,)\geqslant\inf_x\mathrm{R}(d\,;\,x). \tag{3.1}$$

Оценку, у которой d-риск $\mathcal{R}(d\,;\,\widehat{\theta}\,)=\inf_x\mathrm{R}(d\,;\,x)$ при всех d из носителя распределения $\widehat{\theta}$, естественно считать «оптимальной» и называть «оценкой с равномерно минимальным d-риском».

В диссертации процедуры оценивания конструируются для двух схем: а) объем выборки фиксирован и б) наблюдения осуществляются последовательно. Для практических приложений предлагается эмпирическая оценка параметров априорного распределения, а также предлагается метод выбора этих параметров на основе государственного стандарта, определяющего точность и надежность оценки. Свойства оценок, связанные с их надежностью при заданной точности исследуются на данных статистического моделирования. Даются приложения к d-гарантийной оценке содержания элемента мышьяка в пищевых продуктах.

3.1. Оценка нормального среднего с ограничением на абсолютную ошибку

3.1.1. Оценка по фиксированному объему выборки

Рассматривается проблема оценивания среднего значения θ нормального

$\mathcal{N}(\theta,\,\sigma^2\,)$ распределения при функции потерь вида:

$$L(\,\theta,\,d\,) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |\,\theta - d\,| > \Delta, \\ 0, & \text{если} \quad |\,\theta - d\,| \leqslant \Delta, \end{cases}$$

где Δ — заданное ограничение на точность оценивания. Таким образом, случайная выборка $X = X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ есть вектор фиксированного объема n независимых нормальных $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ случайных величин, а d-риск оценочной функции $\widehat{\theta}$ есть условная вероятность

$$\mathcal{R}(d\,;\,\widehat{\theta}) = \mathbf{P}\big\{\,|\,\vartheta - \widehat{\theta}_n\,| > \Delta\,\big|\,\widehat{\theta}_n = d\big\}.$$

Параметр σ^2 будем считать известным (в рамках эмпирического байесовского подхода его можно оценить по данным предыдущих наблюдений). Для любого фиксированного значения объема выборки $n\,(=\,1, 2, \ldots\,)$ статистическая модель обладает достаточной статистикой $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, распределение которой при фиксированном θ также нормально со средним $n\theta$ и дисперсией $n\sigma^2$. Пусть $p_n(s\,|\,\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\varphi\big((s-n\theta)/\sqrt{n}\sigma\big), s \in \mathbb{R},$ — плотность этого распределения.

Априорные сведения исследователя о положительности и малости значения θ в каждом эксперименте формализуем с помощью предположения, что θ является реализацией случайной величины ϑ, имеющей экспоненциальное распределение. Таким образом, функция плотности ϑ

$$g(\theta) = \lambda e^{-\lambda\,\theta}, \quad \theta > 0, \lambda > 0.$$

Большие значения параметра λ говорят о том, что вероятностная масса ϑ сконцентрирована в малой окрестности нуля.

Проблема оценивания математического ожидания по результатам наблюдений нормальной случайной величины имеет давнюю историю, восходящую к классикам математической статистики, творившим в конце 18-го — начале 19-го веков. К середине прошлого века было понято, что оценка, равная выборочному среднему $\overline{X} = \overline{X}_n$, оптимальна во всех более или менее разумных интерпретациях. В частности было установлено, что среди всех последовательных процедур с моментом остановки ν и решающей функцией (оценкой) $\widehat{\theta}_\nu$, которые удовлетворяют гарантирующему условию

$$\inf_\theta \mathbf{P}_\theta\big(\,|\theta - \widehat{\theta}_\nu| \geqslant \Delta\,\big) \leqslant \alpha, \tag{3.2}$$

нерандомизированная оценка $\widehat{\theta}_\nu = \overline{X}_\nu$, основанная на фиксированном числе наблюдений $\nu = n$, дает минимум для среднего объема выборки $\mathbf{E}_\theta\,\nu$. Достаточно простые методы доказательства подобных фактов можно найти в статье [5]. Так как $\overline{X}_n$ имеет нормальное распределение с параметрами $(\theta, \sigma^2/n)$, минимальный объем выборки, при котором возможно достижения заданных ограничений на точность (Δ) и надежность $(1-\alpha)$ вида (3.2) определяется, как наименьшее целое значение n, для которого выполняется неравенство

$$n \geqslant \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)\sigma}{\Delta}\right)^2. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь аналогичную задачу с точки зрения d-апостериорного подхода. Пусть объем выборки n фиксирован. Необходимо построить оценку $\widehat{\theta}_n$, которая удовлетворяет неравенству

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{R}(d;\,\widehat{\theta}_n) = \operatorname*{vrai\,sup}_{d\in\mathcal{D}} \mathbf{P}\{\,|\,\vartheta - \widehat{\theta}_n\,| > \Delta \,\big|\, \widehat{\theta}_n = d\,\} \leqslant \beta,$$

где существенный супремум определяется относительно безусловного распределения оценочной функции $\widehat{\theta}_n$.

Заметим, что в соответствии с нашим договором для значений d вне носителя распределения $\widehat{\theta}_n$ величина $\mathcal{R}(\,d;\,\widehat{\theta}_n\,) = 0 < \beta$.

В d-апостериорном подходе, как в любом другом ответвлении байесовского подхода, ключевую роль играет апостериорное распределение ϑ относительно реализаций случайной выборки $X^{(n)} = (\,X_1, \ldots, X_n\,)$. Так как в нашем случае имеется достаточная статистика $S = \sum_{k=1}^n X_k$, то можно ограничиться рассмотрением апостериорного распределения относительно этой статистики. Сначала найдем безусловную плотность распределения S:

$$p_n(s) = \int_0^\infty p_n(s\,|\,\theta) g(\theta)\,d\theta = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}}\,e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}(s-n\theta)^2} \lambda e^{-\lambda\theta}\,d\theta =$$
$$= \frac{\lambda}{n}\,e^{\lambda^2\sigma^2/2n}\,\Phi\Big(\frac{s-\lambda\sigma^2}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\,e^{-\lambda s/n}, \quad s \in \mathbb{R}^1,$$

после стандартных преобразований интеграла Эйлера–Пуассона. Здесь нам удобнее будет перейти к статистике

$$T = \frac{S - \lambda\sigma^2}{n} = \overline{X} - \frac{\lambda\sigma^2}{n}\,.$$

Распределение этой статистики также имеет плотность, которую будем обозначать тем же символом p_n:

$$p_n(t) = \lambda e^{-\lambda^2\sigma^2/2n}\,\Phi\big(t\sqrt{n}/\sigma\big)\,e^{-\lambda t},\quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{3.4}$$

Плотность апостериорного распределения ϑ относительно T записывается как

$$\begin{aligned} g_n(\theta \,|\, T) &= \frac{p_n(T \,|\, \theta) g(\theta)}{p_n(T)} = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\Phi(T\sqrt{n}/\sigma)\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}\,(\theta - T)^2\right\},\ \theta > 0, \end{aligned}$$

т.е. представляет собой функцию плотности усеченного в нуле нормального $\mathcal{N}(T, \sigma^2/n)$ распределения.

Запишем надежность оценочной функции $\widehat{\theta}_n$:

$$\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_n) = 1 - \mathcal{R}(d;\,\widehat{\theta}_n) = \mathbf{P}\{|\vartheta - \widehat{\theta}_n| \leqslant \Delta \,|\, \widehat{\theta}_n = d\},\quad d \in \mathcal{D}.$$

Апостериорная надежность решения a (> 0) (т.е. какого-либо конкретного значения, принимаемого оценочной функцией) при фиксированном значении T вычисляется как

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(a \,|\, T) &= \mathbf{P}(\,|\vartheta - a| \leqslant \Delta \mid T\,) = \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi(\,T\sqrt{n}/\sigma\,)}\int\limits_{\max\{\,0, a-\Delta\,\}}^{a+\Delta}\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - T)^2\right\}d\theta = \\ &= \frac{\Phi\left(\,(a + \Delta - T)\sqrt{n}/\sigma\right) - \Phi\left(\,(\,\max\{\,0,\ a - \Delta\,\} - T\,)\sqrt{n}/\sigma\,\right)}{\Phi\left(\,T\sqrt{n}/\sigma\,\right)}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В соответствии с утверждением леммы 3.1 для построения оценки с равномерно минимальным d-риском необходимо для каждого $a > 0$ найти значение статистики T, при котором достигается максимум апостериорной надежности (3.5). К сожалению, в явном виде, аналитически это сделать не удалось. Можно заметить только, что для $a \leqslant \Delta$ выражение (3.5) есть убывающая функция T (см. лемму 3.2 далее), т.е. максимум апостериорной надежности таких решений «достигается» при $T = -\infty$. Поэтому оценка с равномерно минимальным d-риском, если она существует, никогда не будет принимать значений $a \leqslant \Delta$.

Лемма 3.2. I. *Отношение* $\Phi(x)/\phi(x)$ *есть возрастающая функция* $x \in \mathbb{R}$.

II. *Если* $a > 0$, *то отношение* $\Phi(x-a)/\Phi(x)$ *есть возрастающая функция* $x \in \mathbb{R}$.

III. *Если* $a > 0$, *то* $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x-a)/\Phi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x-a)/\Phi(x) = 1$.

Доказательство. Так как $\phi'(x) = -x\phi(x)$, то

$$\Big(\frac{\Phi(x)}{\phi(x)}\Big)' = 1 + \frac{\Phi(x)}{\phi(x)}x.$$

Эта производная, очевидно, положительна при $x \geqslant 0$. Для отрицательных x по неравенству (2.12)

$$\left|\frac{\Phi(x)}{\phi(x)}x\right| < 1,$$

т.е. искомая производная также положительна.

II. Производная

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\Phi(x-a)}{\Phi(x)}\Big)' &= \frac{\phi(x-a)}{\Phi(x)} - \frac{\Phi(x-a)\phi(x)}{\Phi^2(x)} = \\ &= \frac{\phi(x-a)\phi(x)}{\Phi^2(x)}\Big(\frac{\Phi(x)}{\phi(x)} - \frac{\Phi(x-a)}{\phi(x-a)}\Big) \ > \ 0\end{aligned}$$

в силу утверждения I леммы.

Часть III доказывается простым применением правила Лопиталя. ♠

Здесь можно найти байесовскую оценку, которая в дальнейшем будет использована для построения последовательной процедуры оценивания первого перескока.

Теорема 3.1. *Байесовская оценка* $\widehat{\theta}_B = \widehat{\theta}_B(T)$, *доставляющая максимум* *(по a) апостериорной вероятности* (3.5), *равна*

$$\widehat{\theta}_B = \max(\,\Delta,\, T\,).$$

Доказательство. Апостериорная вероятность (3.5) зависит от a через функцию $D(a) = \int_{\max\{\,0,\,a-\Delta\,\}}^{a+\Delta} \exp\{\,-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - T)^2\,\}\,d\theta, \quad a \in \mathcal{D}$. Способ вычисления функции $D(a)$ зависит от соотношений между a и Δ. В области $a \leqslant \Delta$ максимум функции

$$D(a) = \int\limits_0^{a+\Delta} \exp\{\,-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - T)^2\,\}\,d\theta,$$

очевидно, достигается при $a = \Delta$. В области $a > \Delta$

$$D(a) = \int\limits_{a-\Delta}^{a+\Delta} \exp\{\,-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - T)^2\,\}\,d\theta.$$

Производная этой функции

$$\begin{aligned} D'(a) \;&=\; \exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}(a + \Delta - T)^2\Big\} - \exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}(a - \Delta - T)^2\Big\} = \\ &= \exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}(a - \Delta - T)^2\Big\}\Big(\exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}2\Delta 2(a - T)\Big\} - 1\Big), \end{aligned}$$

принимает нулевое значение в единственной точке $a = T$, причем, при $a < T$ производная $D'(a) > 0$, и $D'(a) < 0$ при $a > T$. Следовательно, если $T \leqslant \Delta$, то функция $D(a)$ возрастает при $a < \Delta$ и убывает при $a > \Delta$. Если же $T \geqslant \Delta$, то функция $D(a)$ возрастает при $a < T$ и убывает при $a > T$. Стало быть, байесовская оценка равна $\max(\,\Delta,\, T\,)$. ♠

Обозначим через $H_n(T)$ апостериорную надежность (3.5) в точке, совпадающей с байесовским решением $a = \max\{\Delta, T\}$. Имеем:

$$H_n(T) = \frac{\Phi(\,(\,\max\{\Delta, T\} + \Delta - T\,)\sqrt{n}/\sigma\,) - \Phi(\,(\,\max\{0, T - \Delta\} - T\,)\sqrt{n}/\sigma\,)}{\Phi(\,T\sqrt{n}/\sigma\,)} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{\Phi\big((T - 2\Delta)\sqrt{n}/\sigma\big)}{\Phi(\,T\sqrt{n}/\sigma\,)}, & \text{если } \; T \leqslant \Delta, \\[2ex] \dfrac{2\Phi(\,\Delta\sqrt{n}/\sigma\,) - 1}{\Phi(\,T\sqrt{n}/\sigma\,)}, & \text{если } \; T \geqslant \Delta, \end{cases} \tag{3.6}$$

в силу симметрии стандартной нормальной функции распределения.

Теорема 3.2. I) *Функция надежности байесовской оценки* $\widehat{\theta}_B = \max\{\Delta, T\}$ *на фиксированном числе наблюдений* n *для* $d > \Delta$ *вычисляется как*

$$\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) = \frac{2\Phi(\,\Delta\sqrt{n}/\sigma\,) - 1}{\Phi(\,d\sqrt{n}/\sigma\,)}\,.$$

В точке $d = \Delta$ *надежность* $\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) > \big(2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma) - 1\big)/\Phi\big(\Delta\sqrt{n}/\sigma\big)$

II) *Наименьший объем выборки, при котором надежность* $\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) \geqslant (1-\beta)$ *для любых* d *из носителя распределения* $\widehat{\theta}_B$ $(d \geqslant \Delta)$*, есть наименьшее целое число* n *такое, что*

$$n \geqslant \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\beta/2)\sigma}{\Delta}\right)^2. \tag{3.7}$$

Доказательство. Каждое из решений (значений) $d > \Delta$ байесовская оценка принимает при одном значении статистики $T = d$. Поэтому для этих решений надежность байесовской оценки

$$\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) = \mathbf{E}\left[H_n(T)\,\middle|\,T = d\right] = \frac{2\Phi(\,\Delta\sqrt{n}/\sigma\,) - 1}{\Phi(\,d\sqrt{n}/\sigma\,)}\,.$$

Значение $d = \Delta$ принимается при $T \leqslant \Delta$, следовательно, надежность

$$\mathcal{Q}(\Delta\,;\,\widehat{\theta}_B) = \mathbf{E}\left[H_n(T)\,\middle|\,T \leqslant \Delta\right] \;>\; \frac{2\Phi(\,\Delta\sqrt{n}/\sigma\,) - 1}{\Phi(\,\Delta\sqrt{n}/\sigma\,)}\,,$$

так как по лемме 3.2 функция H_n — строго убывающая функция T.

Для доказательства второго утверждения заметим, функция $\mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B)$ убывает по параметру d, следовательно

$$\inf_d \mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) = \lim_{d\to\infty} \mathcal{Q}(d\,;\,\widehat{\theta}_B) = 2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma) - 1. \tag{3.8}$$

Неравенство $2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma) - 1 \geqslant 1 - \beta$ эквивалентно (3.7). ♠

Отметим как интересный факт, что формула (3.7) для необходимого объема выборки при ограничениях на d-риск имеет тот же самый вид, что и формула (3.3) для случая ограничений на θ-риск, хотя они получены при совершенно различных подходах к определению гарантийности статистического решения.

Замечание. Надежность байесовской оценки в точке $d = \Delta$ вычисляется через распределение статистики T с плотностью (3.4) по формуле

$$\mathcal{Q}(\Delta\,;\,\widehat{\theta}_B) = \frac{1}{F_n(\Delta)} \int_{-\infty}^{\Delta} \Big(1 - \frac{\Phi((t-2\Delta)\sqrt{n}/\sigma)}{\Phi(t\sqrt{n}/\sigma)}\Big)\, p_n(t)\, dt,$$

где $F_n(\Delta) = \mathbf{P}\{T \leqslant \Delta\} = \int_{-\infty}^{\Delta} p_n(t)\, dt$ — безусловная вероятность принятия решения $d = \Delta$.

На рис. 3.1 приведен график функции надежности байесовской оценки (сплошная линия) при объеме выборки $n = 4$ и параметрах модели $\Delta = 0.005, \sigma = 0.01$. Для сравнения здесь же дана огибающая (штрих-пунктирная линия) максимально возможных значений надежности (надежность оценки с равномерно минимальным d-риском), а также нижняя граница надежности байесовской оценки (пунктирная линия), которая в этой задаче совпадает с нижней границей надежности оценки с равномерно минимальным d-риском. Заметим, что для этих параметров модели наименьший объем выборки, позволяющий достичь уровня $1 - \beta = 0.95$ (формула (3.7)), равен $n^* = 16$. Надежность байесовской оценки в точке $d = \Delta$ равна 0.953 (отмечено “$*$”), а вероятность принятия этого решения $\mathbf{P}\{T \leqslant \Delta\} = 0.4505$.

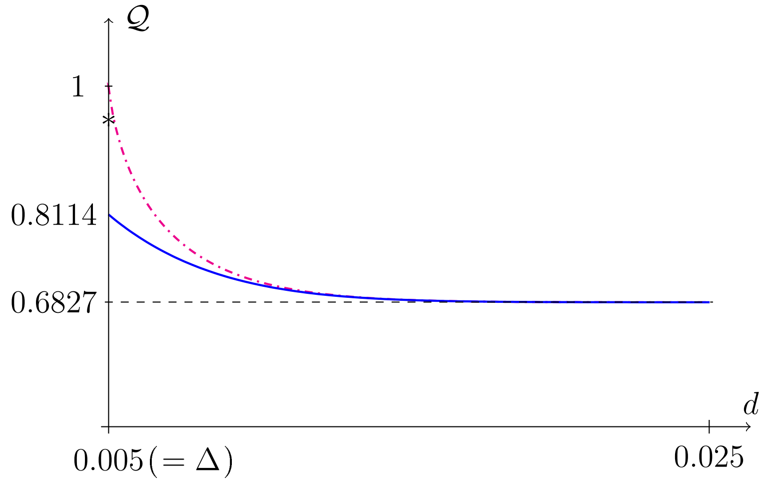


Рис. 3.1. Надежность байесовской оценки и максимальная граница надежности; $n = 4, \Delta = 0.005, \sigma = 0.01$.

3.1.2. Последовательная процедура первого перескока

Момент остановки последовательной процедуры первого перескока определяется как объем выборки n, при котором впервые апостериорная надежность байесовского решения превзойдет заданный уровень $1-\beta$ (см. (3.6)):

$$\nu = \min\{n : H_n(T) \geqslant 1-\beta\}.$$

После остановки эксперимента в момент $\nu = n$, оценка неизвестного значения θ выбирается равной байесовской оценке $\widehat{\theta}_B = \max(\Delta, T)$. Как легко показать, такая последовательная процедура имеет надежность оценивания, не меньше уровня $(1-\beta)$ для всех решений d (оценок параметра).

Важно отметить, что с вероятностью единица случайное значение объема выборки ν не превышает правую часть (3.7).

Лемма 3.3. *Момент остановки процедуры первого перескока*

$$\nu \leqslant \left(\frac{\Phi^{-1}(1-\beta/2)\sigma}{\Delta}\right)^2 + 1.$$

Доказательство. Из представления (3.6) апостериорной надежности байесовской оценки видно, что $H_n(T)$ есть неубывающая функция T и, кроме того, инфимум этой функции равен $2\Phi(\Delta\sqrt{n}/\sigma) - 1$. Поэтому если n больше указанной в лемме границы, то при любом T апостериорная надежность $H_n(T) > (1-\beta)$, т.е. процедура первого перескока должна здесь остановиться. ♠

Итак, существуют два вида остановки статистического эксперимента.

(i) Наблюдения останавливаются, когда дискретный случайный процесс $\{T_n = \overline{X} - \lambda\sigma^2/n,\ n \geqslant 1\}$ впервые пересекает кривую $W(n), n = 1, 2, \ldots,$ которая определяется решением (относительно переменной T) уравнения $H_n(T) = 1-\beta$.

(ii) Наблюдения останавливаются на шаге n, когда впервые выполняется (3.7), в то время как $T_k > W(k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

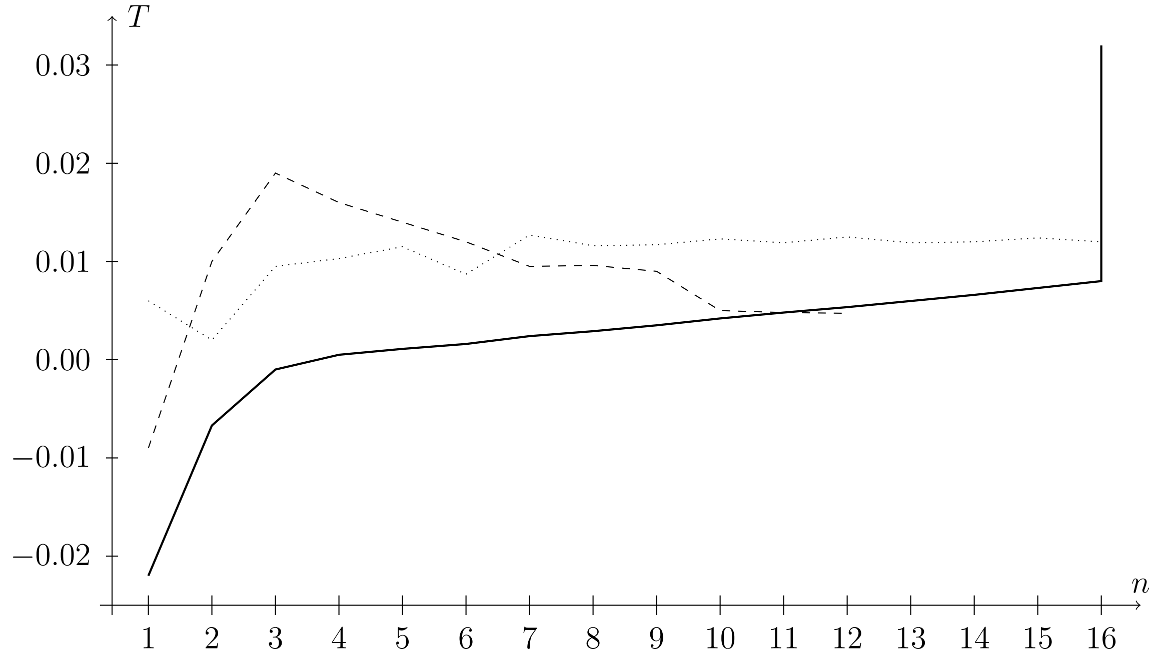


Рис. 3.2. Траектория случайного процесса для процедуры первого перескока

Эти два варианта остановки статистического эксперимента проиллюстрированы на Рис. 3.2. Утолщенная сплошная линия представляет собой график функции $T = W(n),\ n = 1, 2, \ldots$, которая разделяет области продолжения наблюдений (над кривой $W(\cdot)$) и остановки эксперимента (под кривой $W(\cdot)$). Линия расчитана при параметрах модели, описанных в следующем параграфе, т.е. выбраны $\lambda = 92.1, \sigma = 0.01, \Delta = \sigma/2$. Тонкая разрывная и точечная линии демонстрируют траектории случайного блуждания (при случайно выбранных значениях параметров), приведшие к окончанию эксперимента в момент $\nu = 12$ и, соответственно, в момент $\nu = n^* = 16$.

Заметим, что с ростом n траектория процесса $\{T_n = \overline{X} - \lambda\sigma^2/n = \overline{X} - 0.00921/n, n \geqslant 1\}$ стабилизируется, медленно переходя в прямую линию $T_n = \theta$, где θ — реализация случайного параметра полученного из априорного показательного распределения. Следовательно, если истинное значение параметра достаточно велико, то мы не ожидаем, что статистический эксперимент закончится быстро. Замечания такого типа показывают важность процедур первого перескока, если мы рассматриваем проблему оценивания для θ в терминах аттестации пищевых продуктов для определения содержания вредных примесей (пример тестирования будет дан ниже). Хороший продукт с малым количеством примесей пройдет процедуру аттестации достаточно быстро и будет отправлен потребителю, в то время как тестирование продуктов плохого качества потребует значительного времени.

3.1.3. Эмпирический аналог байесовской оценки

Практические применения предложенных процедур возможны только тогда, когда значения параметров σ^2 и λ известны. Лаборатории, которые постоянно проводят оценивание θ для продуктов, обычно имеют архив наблюдений достаточно большого числа N выборок $X_{i1}, \ldots, X_{in_i}$, $i = 1, \ldots, N$. Имея такие данные, нетрудно оценить дисперсию σ^2 для наблюдаемой случайной величины. Более того, наиболее часто значение σ^2 дается в инструкциях для устройств измерения. Параметр λ априорного распределения может быть оценен по архиву данных, используя стандартные методы математической статистики, например, методом максимального правдоподобия или методом моментов.

Для того, чтобы применить эти методы, нам необходимо знать маргинальное распределение достаточной статистики S. Формула для функции плотности S была уже найдена раньше:

$$f_{\lambda,\sigma}(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \int_0^\infty \exp\Big\{ -\frac{(x - n\theta)^2}{2n\sigma^2} - \lambda\theta \Big\} d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{n} e^{\lambda^2\sigma^2/2n}\, \Phi\Big(\frac{x - \lambda\sigma^2}{\sigma\sqrt{n}}\Big)\, e^{-\lambda x/n}.$$

Очевидно, процедура нахождения максимума функции правдоподобия по λ при такой зависимости от этого параметра вычислительно сложна. Однако, значение λ достаточно легко оценить методом моментов, т.к.

$$\mathbf{E}\frac{1}{n}S = \lambda \int_0^\infty \theta \mathrm{e}^{-\lambda\theta} d\theta = \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, если архив данных содержит вектор выборочных средних $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_N$, вычисленных в каждом из N предыдущих экспериментов, то оценка по методу моментов принимает форму

$$\widehat{\lambda}_N = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{X}_i\right]^{-1}.$$

Другой способ нахождения значения λ без исследования архива данных основывается на некоторых нормализованных ограничениях на θ, скажем, оно не может превышать некоторого значения θ_0. Такого типа ограничения обычно представлены в ГОСТах на содержание вредных примесей в пищевых продуктах. Более того, мы знаем или имеем оценку для так называемоого «входного уровня качества» продукта или по-другому априорной вероятности $Q_{in} = \mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta_0\}$. Следовательно можно использовать в качестве значения λ корень уравнения $\exp\{-\lambda\theta_0\} = 1 - Q_{in}$. Рассмотрим метод выбора априорного параметра на следующем примере.

Тестирование содержания мышьяка в пищевых продуктах.

Санитарно-эпидемиологические правила РФ задают верхнюю границу $\theta_0 = 0.1$мг/кг для содержания мышьяка в пищевом продукте. Предполагая, что входной уровень качества $Q_{in} = \mathbf{P}\{\vartheta \leqslant \theta_0\} = 0.99$, мы получаем значение параметра $\lambda = 92.1$, соответствующее выбранным Q_{in} и θ_0. Дисперсия σ^2 наблюдаемой случайной величины для экспериментов по анализу содержания As существенно зависит от выбранных методов обнаружения As; мы положим $\sigma = 0.01$. Рассматривались два случая для значения точности $\Delta = \sigma = 0.01$ and $\Delta = \sigma/2 = 0.005$. Для этих значений параметров вероятностной модели и уровне надежности оценивания $1 - \beta = 0.95$ была исследована эффективность процедуры первого перескока методом статистического моделирования.

Результаты модельных испытаний (для каждого случая по 10^5 репликаций) представлены на рис. 3.3 (для случая $\Delta = \sigma = 0.01$) и рис. 3.4 (для случая $\Delta = \sigma/2 = 0.005$). На этих рисунках приведены гистограммы значений байесовской оценки. Если интерпретировать значение оценки, равное точности Δ, как решение об «отстутствии» мышьяка в продукте, то в первом случае таких решений было принято почти 80%; во втором случае эта доля равна 50%.

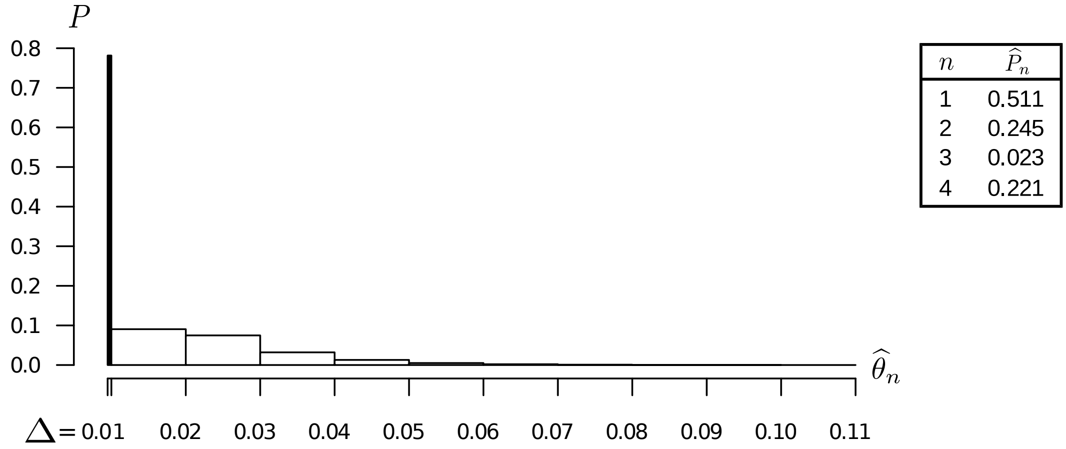


Рис. 3.3. Гистограмма значений $\widehat{\theta}_B$ и оценок вероятностей $\widehat{P}_n$ момента остановки на каждом шаге n $(\sigma = 0.01, \Delta = 0.01)$

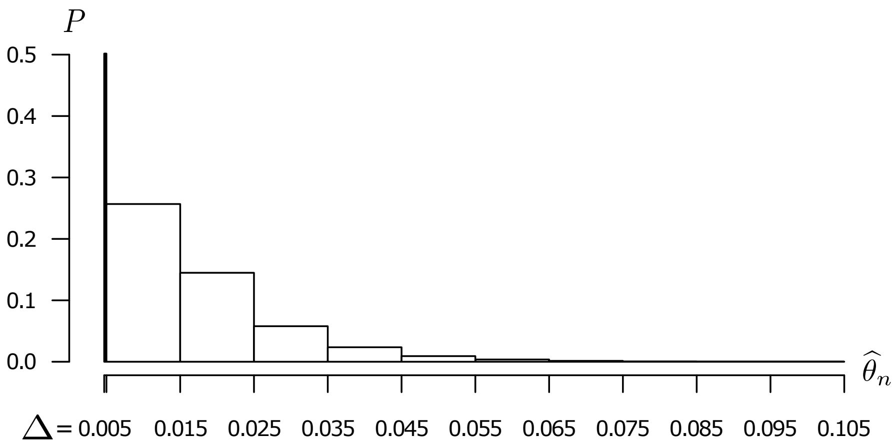
На рисунках приведены также таблицы относительных частот $\widehat{P}_n$ моментов остановки на соответствующих шагах $n = 1, 2, \ldots$ статистического эксперимента. Заметим, что для выбранных параметров модели минимальный объем испытаний, позволяющий оценить содержание мышьяка в продукте с заданной точностью Δ и надежностью $(1 - \beta) = 0.95$, в первом случае равен $n^* = 4$. Из таблицы видно, что в этом случае последовательной процедуре в 75% экспериментов потребовалось не более 2 наблюдений. Во втором случае при минимальном фиксированном объеме испытаний $n^* = 16$ последовательная процедура в 72% экспериментов останавливалась не позже, чем на третьем шаге.

Точное значение вероятности остановки на 1-ом шаге для случая $\Delta = \sigma/2$ равно 0.488 — при модельных испытаниях получена оценка $P_1 = 0.44$.

3.2. Оценка нормального среднего с ограничением на относительную ошибку

В этом параграфе решается задача построения оценки среднего значения θ нормального $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ распределения с априорной плотностью показательного закона общего вида

$$g(\theta) = \lambda \exp\{-\lambda\,(\theta - \theta_0)\}, \quad \theta > \theta_0, \lambda > 0,$$



n	$\widehat{P}_n$
1	0.440
2	0.220
3	0.055
4	0.044
5	0.035
6	0.029
7	0.022
8	0.018
9	0.014
10	0.012
11	0.010
12	0.009
13	0.010
14	0.011
15	0.025
16	0.046

Рис. 3.4. Гистограмма значений $\widehat{\theta}_B$ и оценок вероятностей $\widehat{P}_n$ момента остановки на каждом шаге n $(\sigma = 0.01, \Delta = 0.005)$

при функции потерь

$$L(\theta, d) = 0, \quad \text{если} \quad \frac{1}{1+\Delta} < \frac{\vartheta}{d} < 1 + \Delta,$$

и $L(\theta, d) = 1$ в противном случае. Таким образом, в отличии от ситуации, рассмотренной в предыдущем параграфе, предполагается, что истинное значение θ не может быть нулевым (примесь всегда присутствует в анализируемом продукте). Кроме того, здесь потери связаны не с абсолютной, а с относительной ошибкой, что в большей степени отвечает существу задачи оценивания малых значений параметра.

3.2.1. Байесовская оценка и оценка, равномерно минимизирующая функцию d-риска

Нормальная вероятностная модель распределения случайной выборки в предположении, что дисперсия σ^2 известна, обладает достаточной статистикой выборочного среднего $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, которая при фиксированном значении параметра θ также имеет нормальное $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2/n)$ распределение.

Априорное показательное распределение определим посредством функции плотности

$$g(\theta) = \lambda \exp\{-\lambda (\theta - \theta_0)\}, \qquad \theta \geqslant \theta_0.$$

Предполагается, что значения дисперсии σ^2 и параметров λ, θ_0 известны или оценены по архиву данных в рамках эмпирического байесовского подхода.

Задача состоит в построении процедуры $(\nu, \widehat{\theta}_\nu)$ с моментом остановки ν и оценочной функцией (оценкой) $\widehat{\theta}_\nu \in \mathbb{R}^1_+$. Процедура должна гарантировать заданное ограничение на d-риск, связанный с относительной ошибкой оценки:

$$\sup_{d \geqslant \theta_0} \mathbf{P}\Big\{ (1+\Delta)^{-1} \leqslant \frac{\vartheta}{d} < 1 + \Delta \;\Big|\; \widehat{\theta}_\nu = d \Big\} \geqslant 1 - \beta.$$

Подчеркнем, что мы рассматриваем только естественные оценки, которые не принимают значения, меньшие границы θ_0 носителя распределения ϑ.

Как и в предыдущем разделе, здесь нам будет удобнее перейти к статистике $T = \overline{X} - \lambda\sigma^2/n$. В данном случае, плотность $f_n(t)$ безусловного распределения T отличается от (3.4) только заменой аргумента $t \to t - \theta_0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} f_n(t) = & \int_{\theta_0}^{\infty} p_n(t \,|\, \theta) g(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} p_n(t \,|\, \theta + \theta_0) g(\theta - \theta_0) d\theta = \\ = & \int_0^{\infty} p_n(t - \theta_0 \,|\, \theta) \lambda e^{-\lambda \theta_n} d\theta = p_n(t - \theta_0) = \\ = & \lambda e^{\lambda\theta_0 - \lambda^2\sigma^2/2n}\, \Phi\big((t-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\big)\, e^{-\lambda t}, \quad t \in \mathbb{R}^1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Апостериорное распределение случайного параметра ϑ относительно статистики T имеет плотность (ср. с предыдущим разделом)

$$g_n(\theta \mid \overline{X}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma\, \Phi\left((T-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - T)^2\right\}, \qquad \theta > \theta_0,$$

т.е. представляет собой функцию плотности усеченного снизу в т. θ_0 нормального $\mathcal{N}(T, \sigma^2/n)$ распределения.

Как и в предыдущем разделе, выбор значения для оценки θ осуществляется на основе величины апостериорной надежности решения a ($\geqslant \theta_0$)

$$\mathcal{Q}_n(a\,;T) = \mathbf{P}\Big\{\frac{1}{1+\Delta} \leqslant \frac{\vartheta}{a} \leqslant 1+\Delta \,\Big|\, T\Big\} = \int\limits_{u_1(a)}^{u_2(a)} g_n(\theta \,|\, T)d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma\Phi\left((T-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)} \int\limits_{u_1(a)}^{u_2(a)} \exp\left\{-(\theta-T)^2\right\} d\theta =$$

$$= \frac{\Phi\left((u_2(a)-T)\sqrt{n}/\sigma\right) - \Phi\left((u_1(a)-T)\sqrt{n}/\sigma\right)}{\Phi\left((T-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)},$$

где $u_1(a) = \max\{\theta_0, \frac{a}{1+\Delta}\}$, $u_2(a) = \max\{\theta_0, a(1+\Delta)\} = a(1+\Delta)$, т.к. $a \geqslant \theta_0$.

Теорема 3.3. *Байесовская оценка*

$$\theta_B = \theta_B(T) = \max\{\,\theta_0(1+\Delta),\ \widehat{a}_n\,\}, \tag{3.10}$$

где

$$\widehat{a}_n = \widehat{a}_n(T) = \frac{T}{(1+\Delta)+(1+\Delta)^{-1}} + \sqrt{\frac{T^2}{[(1+\Delta)+(1+\Delta)^{-1}]^2} + \frac{4\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n[(1+\Delta)^2-(1+\Delta)^{-2}]}}, \tag{3.11}$$

При этом, $\theta_B = \theta_0(1+\Delta)$, *если*

$$T \leqslant \frac{1}{2}(1+(1+\Delta)^2)\theta_0 - \frac{2\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n\Delta(2+\Delta)\theta_0}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Отыскание максимума функции апостериорной надежности по a эквивалентно поиску максимума функции

$$D(a) = \Phi\left(\frac{a(1+\Delta)-T}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{u_1(a)-T}{\sigma}\sqrt{n}\right), \quad a \geqslant \theta_0.$$

Если $a/(1+\Delta) < \theta_0$, т.е. $a \in [\theta_0, \theta_0(1+\Delta)]$, то функция

$$D(a) = \Phi\left(\frac{a(1+\Delta)-T}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{\theta_0-T}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$

возрастает по a, и в этом случае максимум $D(a)$ достигается в точке $a = \hat{a} = \theta_0(1+\Delta)$. Величина максимума в этом случае равна $D\big(\theta_0(1+\Delta)\big)$.

Если же $\theta_0 < a(1+\Delta)^{-1}$, т.е. $a > \theta_0(1+\Delta)$, то, очевидно, производная функции

$$D(a) = \Phi\left(\frac{a(1+\Delta)-T}{\sigma}\sqrt{n}\right) - \Phi\left(\frac{a(1+\Delta)^{-1}-T}{\sigma}\sqrt{n}\right),$$

принимает положительные значения, если выполняется неравенство

$$(1+\Delta)\exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}\big(a(1+\Delta)-T\big)^2\Big\} \geqslant \frac{1}{1+\Delta}\exp\Big\{-\frac{n}{2\sigma^2}\left(\frac{a}{1+\Delta}-T\right)^2\Big\}.$$

Элементарные выкладки приводят это неравенство к виду

$$a^2\left((1+\Delta)^2 - \frac{1}{(1+\Delta)^2}\right) - 2aT\left((1+\Delta) - \frac{1}{1+\Delta}\right) - \frac{4\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n} \leqslant 0, \tag{3.13}$$

которое, как легко видеть, справедливо при $\widetilde{a}_n \leqslant a \leqslant \widehat{a}_n$, с левым краем $\widetilde{a}_n < 0$ и правым краем $\widehat{a}_n$ (> 0), вычисляемым по формуле (3.11).

Следовательно, если $\widehat{a}_n > \theta_0(1+\Delta)$, то $\widehat{a}_n$ есть точка локального максимума функции D, т.к. $D'(a) > 0$ при $a < \widehat{a}_n$, при этом, $D(\widehat{a}_n) > D(\theta_0(1+\Delta))$, т.е. глобальный максимум функции D достигается в точке $a = \widehat{a}_n$, в противном случае функция $D(a)$ убывает при $a > \theta_0(1+\Delta)$, поэтому максимум функции D достигается в точке $a = \theta_0(1+\Delta)$.

Справедливость (3.12) следует из того, что в точке $a = \widehat{a}_n$ в (3.13) достигается знак равенства. При этом, $\widehat{a}_n$ как решение квадратного уравнения будет меньше некоторого значения, скажем, $\theta_0(1+\Delta)$, если при $a = \theta_0(1+\Delta)$ справедливо неравенство, противоположное (3.13). Простыми арифметическими выкладками отсюда приходим к (3.12). ♠

Оценка с равномерно минимальным d-риском. Опишем сначала алгоритм построения оценки с равномерно минимальным d-риском (равномерно максимальной надежностью, см. [40]).

Рассмотрим апостериорную надежность как функцию значения t статистики $T = T(\overline{X})$ и некоторого решения a:

$$\mathcal{Q}_n(a\,;\,t) = \frac{\Phi\left[(a(1+\Delta)-t)\sqrt{n}/\sigma\right] - \Phi\left[u_1(a)-t)\sqrt{n}/\sigma\right]}{\Phi\left((t-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)}.$$

Для каждого фиксированного значения $a \geqslant \theta_0$ необходимо найти точку $t(a)$ достижения максимума функции надежности по переменной t. Если множество всех значений $t(a), a \geqslant \theta_0$, совпадает с множеством возможных значений статистики T, то решение уравнения $t(a) = T$ относительно a и даст оценку с равномерно максимальной надежностью.

Во-первых, заметим, что для $a \leqslant \theta_0(1+\Delta)$ с $u_1(a) = \theta_0$ функция надежности

$$\mathcal{Q}_n(a\,;\,t) = 1 - \frac{\Phi\left((t - a(1+\Delta))\sqrt{n}/\sigma\right)}{\Phi\left((t-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)}.$$

В силу леммы 3.2 эта функция убывает по t (напомним, что $a(1+\Delta) > \theta_0$), т.е. максимум ее не достижим. Поэтому для любой оценочной функции $\widetilde{\theta}$, которая может принять решение $\widetilde{\theta} = a \leqslant \theta_0(1+\Delta)$, можно построить другую оценочную функцию с большей надежностью в точке a.

Для сравнения байесовской оценки с наилучшей ожидаемой оценкой найдем сначала ее функцию надежности.

Лемма 3.4. *Функция надежности байесовской оценки для всех $d > \theta_0(1+\Delta)$ вычисляется по формуле*

$$\mathcal{Q}(a\,;\,\theta_B) = \frac{\Phi\left(\left((1+\Delta)a - \frac{a^2-U}{2aV}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\left(\frac{a}{1+\Delta} - \frac{a^2-U}{2aV}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\left(\frac{a^2-U}{2aV} - \theta_0\right)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)},$$

где

$$V = \left[\,(1+\Delta) + (1+\Delta)^{-1}\,\right]^{-1}, \qquad U = \frac{4\sigma^2\ln(1+\Delta)}{n\big((1+\Delta)^2 - (1+\Delta)^{-2}\big)}.$$

Доказательство. В силу телескопического свойства условного математического ожидания надежность оценки вычисляется как условное математической ожидание апостериорной надежности:

$$\mathcal{Q}(a\,;\,\theta_B) = \mathbf{E}\left[\mathcal{Q}_n(a\,;\,T)\,\middle|\,\theta_B(T) = a\right].$$

Так как значения $a > \theta_0(1+\Delta)$ байесовской оценкой принимаются при единственном значении статистики $T = t(a)$, то для вычисления ее функции надежности достаточно подставить в функцию апостериорной надежности то значение статистики, при котором это решение принимается:

$$\mathcal{Q}(a\,;\,\theta_B) = \mathcal{Q}_n(a\,;\,t(a)).$$

Уравнение, определяющее байесовское решение (см. (3.13)), с введенными в лемме обозначениями можно записать в виде

$$a^2 - 2aVT - U = 0,$$

т.е. решение a принимается при $T = t(a) = (a^2 - U)/2aV$. ♠

На Рис. 3.5 для параметров нижеследующего примера представлены графики функции надежности байесовской оценки (пунктирная линия) и оценки $\theta_n = T$ (штрих-пунктирная линия). Для сравнения здесь приведена также линия огибающей функций надежности.

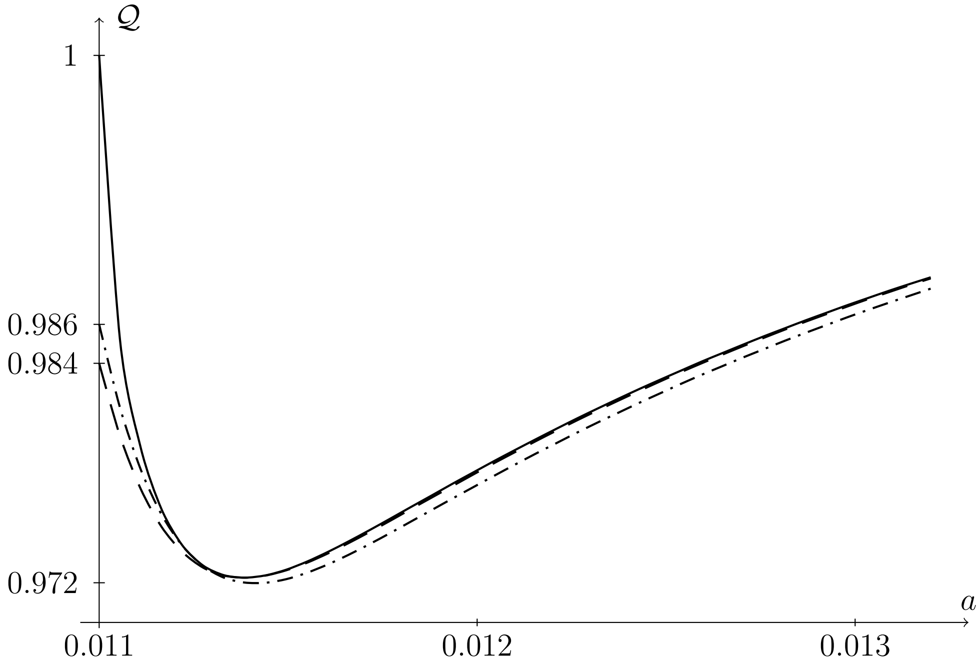


Рис. 3.5. Функции надежности байесовской оценки, оценки $\widehat{\theta} = T$ и максимальная граница надежности; $\theta_0 = 0.01, \Delta = 0.1, \sigma = 0.001, n = 4$.

3.2.2. Объем выборки, гарантирующий заданные ограничения на d-риск оценки

Планирование объема испытаний обычно связывают с риском конкретной оценки, рассматривая его как функцию объема выборки n. Минимальный объем наблюдений, гарантирующий заданную точность и надежность оценки определяется как наименьшее n, при котором риск используемой оценки не превосходит заданного на него ограничения. Существует огромное количество публикаций на эту тему, включая монографии. Мы сошлемся на одну из последних монографий [35], в которой рассматриваются всевозможные процедуры статистического вывода и предлагаются методы определения требуемого объема выборки с помощью нормальных аппроксимаций для распределения оценок или тестовых статистик, не затрагивая математических аспектов в правомерности использования таких аппроксимаций. Количество цитируемых в монографии публикаций нельзя назвать полным, но оно близко к тысяче.

Однако существует другой аспект в проблеме планирования объема испытаний. Он связан с определением *необходимого объема выборки*, как наименьшего n, при котором существует гарантийная процедура статистического вывода. В d-апостериорном подходе сравнение оценочных функций затрудняется тем обстоятельством, что эти оценки могут иметь различные носители. Чтобы избежать этого затруднения, будем рассматривать только те оценочные функции, у которых носитель распределения не у́же носителя оценки с равномерно максимальной надежностью; в данном случае — не у́же области $a > \theta_0(1+\Delta)$.

Таким образом, объем выборки $n^* = n^*(\Delta,\, \beta)$, необходимый для оценки θ с заданным интервальным ограничением $\left(\, 1/(1+\Delta),\; 1+\Delta \,\right)$ на относительную ошибку оценки и ограничением $1-\beta$ на функцию надежности, определяется как наименьшее целое n, удовлетворяющее неравенству

$$\inf_{a>\theta_0(1+\Delta)} \sup_t \frac{\Phi\left[(a(1+\Delta)-t)\sqrt{n}/\sigma\right] - \Phi\left[(a/(1+\Delta)-t)\sqrt{n}/\sigma\right]}{\Phi\left((t-\theta_0)\sqrt{n}/\sigma\right)} \geqslant 1-\beta.$$

Следующие нестрогие и чисто эвристические рассуждения приводят к удивительно точной явной формуле для n^*.

В выражении, стоящем в левой части предыдущего неравенства, заменим знаменатель на 1, уменьшив тем функцию, и $a/(1+\Delta)$ на меньшее $a(1-\Delta)$, увеличив эту функцию. Кроме того, как показали численные иллюстрации, мы не сильно ошибемся, если будем считать, что супремум по t достигается при

Таблица 3.1. Сравнение приближенного и точного значений НОВ

Δ	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.16	0.17
n^*	14	10	7	6	4	4	3	3	2	2	1
$\widetilde{n}$	14	10	7	6	4	4	3	3	2	2	1

$t = a$. Таким образом, предыдущее неравенство примет вид

$$\inf_{a>\theta_0(1+\Delta)} \Big(2\Phi\left(a\Delta\sqrt{n}/\sigma\right) - 1\Big) \geqslant 1-\beta,$$

т.е. необходимый объем выборки

$$n^* \approx \widetilde{n} = \left(\frac{\Phi^{-1}(\,1-\beta/2\,)\sigma}{\theta_0\,\Delta(1+\Delta)}\right)^2.$$

Насколько точно $\widetilde{n}$ служит приближением для n^* можно судить по данным, приведенным в таблице 3.1, сосчитанной для параметров модели $\theta_0 = 0.01, \sigma = 0.001$.

Эта формула имеет тот же вид, что и ее аналог в статье [5], где ограничения накладывались на классическую функцию риска по параметру θ, и находилась классическая минимаксная оценка θ. Как и в этой статье, обращаем внимание на быстрое увеличение требуемого объема наблюдений при приближении θ_0 к нулевому значению.

3.2.3. Последовательная процедура оценки θ

Для нашей задачи оценки θ последовательная процедура первого перескока определяется моментом остановки

$$\nu = \min\{n:\ \mathcal{Q}_n(\widehat{a}_n(T)\,;\,T) \geqslant 1-\alpha\}.$$

с последующим принятием решения о значении этого параметра с помощью байесовской оценки (см. формулу (3.10)): $\theta_{B\nu} = \theta_{B\nu}(T) = \max\{\,\theta_0(1+\Delta),\ \widehat{a}_\nu\,\}$. Таким образом, наблюдения прекращаются, когда случайный процесс

$$\left\{T_n = \overline{X} - \lambda\sigma^2/n,\ n \geqslant 1\right\}$$

достигает границы области $\{ W(n),\ n \geqslant 1 \}$, которая определяется решением уравнения $\mathrm{H}_n(T) = 1 - \alpha$ относительно T. После остановки эксперимента на шаге $\nu = n$ вычисляется байесовская оценка $\theta_{Bn} = \max\{ \theta_0(1 + \Delta),\ \widehat{a}_n \}$.

Для значений параметров вероятностной модели, соответствующих рассмотренному в следующем разделе примере, были исследованы свойства процедуры первого перескока с помощью метода статистического моделирования. Осуществлялось 10^5 итераций и в завершении каждой итерации фиксировался момент остановки ν и вычислялось значение байесовской оценки. Результаты моделирования представлены на рисунках 3.6 и 3.7 в виде таблицы относительных частот остановки эксперимента на соответствующих шагах.

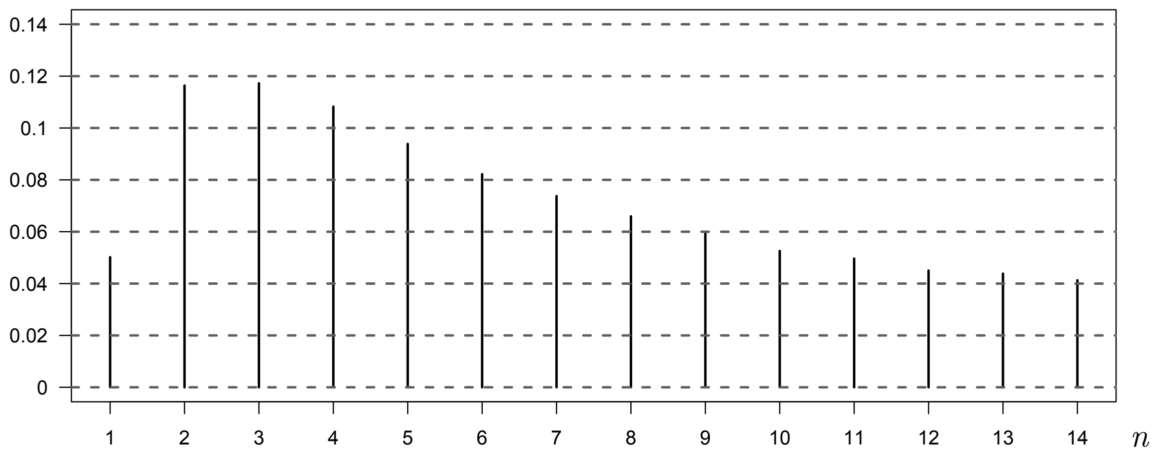


Рис. 3.6. Относительные частоты момента остановки при $\Delta = 0.05$

3.2.4. Эмпирический аналог байесовской оценки

Практическая реализация предложенных процедур оценивания возможна лишь при известных значениях параметров σ^2, λ и θ_0. Однако лаборатории, производящие систематическую оценку θ для каждого поступающего на анализ продукта, обычно располагают архивом, состоящим из наблюдений достаточно большого числа N выборок $X_{i1}, \ldots, X_{in},\ i = 1, \ldots, N$. Имея такого рода данным, можно достаточно точно оценить дисперсию σ^2 наблюдаемой случайной

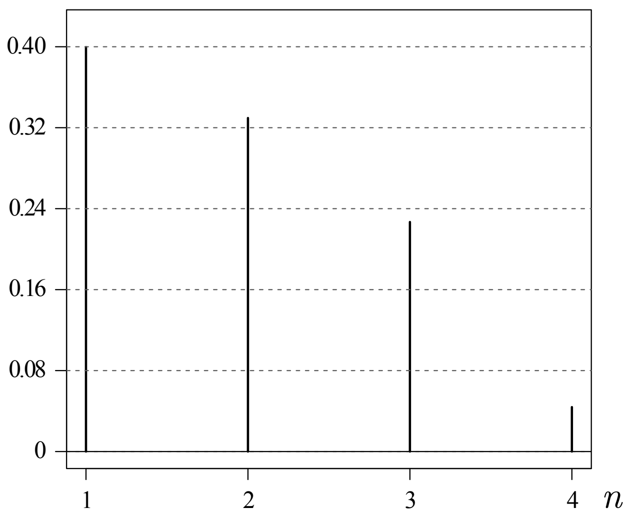


Рис. 3.7. Относительные частоты момента остановки при $\Delta = 0.1$

величины и значение θ_0. Что же касается параметра λ априорного распределения, то его значение оценивается по данным архива посредством стандартных методов математической статистики – методом максимального правдоподобия или по методу моментов.

Плотность безусловного распределения $\overline{X}$ (см. (3.9)) равна

$$p(x) = \lambda \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(x^2 - t^2) + \lambda\theta_0\right\} \cdot \left[1 - \Phi\left((\theta_0 - t)\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Естественно, отыскание точки достижения максимума по λ функции правдоподобия с такой сложной зависимостью от этого параметра сопряжено с большими вычислительными сложностями. Однако значение λ легко оценивается с помощью метода моментов, поскольку

$$\mathbf{E}\overline{X} = \lambda \int_{\theta_0}^{\infty} \theta \exp\{-\lambda\,(\,\theta - \theta_0\,)\,\}d\theta = \frac{1}{\lambda} + \theta_0.$$

Следовательно, оценка θ_0 и λ по редуцированному к выборочным средним $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_N$ архиву данных, имеют вид

$$\widehat{\theta}_{0,N} = \min_{1 \leqslant i \leqslant N} \overline{X}_i, \qquad \widehat{\lambda}_N = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \overline{X}_i\right]^{-1} + \widehat{\theta}_{0,N}.$$

Тем не менее, оценить параметры θ_0 и λ можно не только используя архив данных, что будет показано на примере.

3.2.5. Применение d-гарантийной процедуры к реальному объекту

Рассмотрим описанную процедуру применительно к задаче оценки концентрации элемента мышьяка в питьевой воде.

Нормативные документы, используемые при ежедневной поверки качества питьевой воды, государственные стандарты, экологические нормы и правила устанавливают обязательные требования к качеству воды (см. [26] и [27]).

Обширные архивные материалы по ежедневным замерам содержания мышьяка показывают, что с большой надежностью (не менее 0.99) значения концентрации (мг/литр) мышьяка лежат в пределах 0.01-0.05 с явной тенденцией скошенности распределения данных в сторону их малых значений. Значение 0.05 является ПДК (Предельной Допустимой Концентрацией) мышьяка, значение $\theta_0 = 0.01$ определялось как нижний 99% толерантный предел, причем это значение практически совпадает с наименьшим значением во всех выборочных данных архива. Стандартное отклонение $\sigma = 0.001$ определялось по [26]: 20% от наименьшей концентрации 0.01 равно 2σ. Предполагая, что входной уровень качества питьевой воды не меньше, чем $Q_{in} = 0.99$, определим значение параметра λ априорного распределения из уравнения $\exp\{\,-\lambda(0.05-0.01)\,\} = 0.99$. В нашем случае получаем $\lambda \approx 100$. Иллюстрация точностных свойств предлагаемых процедур оценки и значения объемов наблюдений проводились для значений надежности $1-\beta = 0.95$ и двух значений $\Delta = 0.1$ и 0.2.

Замечание. Следует особо отметить, что для данной задачи следовало бы использовать ограничения на относительную точность в “не симметричном” виде:

$$\frac{1}{1+\Delta_1} < \frac{\vartheta}{d} < 1+\Delta_2$$

с $\Delta_1 \ll \Delta_2$, поскольку принятие решения о малой (допустимой) концентрации мышьяка, когда в действительности мышьяка в питьевой воде значительно больше, влечет более тяжкие последствия, чем принятие решения, превышающего истинное значение θ. Все построения, проведенные в нашей статье, просто переносятся на случай задания такой функции потерь.

Заключение

В диссертации решены основополагающие задачи интервального статистического вывода в классических проблемах проверки гипотез, точечного и доверительного оценивания. Задача d-гарантийного тестирования интервальной гипотезы решается в первой главе с выводом асимптотики необходимого объема выборки, когда ограничения β_0 и β_1 на d-риски стремятся к 0.

Разработаны явные схемы построения для доверительных интервалов в рамках нормальной модели случайной выборки при априорном нормальном распределения. Найдены асимптотические формулы для наиболее точных доверительных интервалов, на основе которых построены приближенные асимптотически эквивалентные доверительные интервалы.

Построены d-гарантийные оценки среднего значения нормального распределения при априорных сведениях о положительности и малости оцениваемого параметра. Для процедуры оценки с фиксированным объемом наблюдений устанавливаются формулы для необходимого объема выборки. Для последовательной процедуры первого перескока показывается, что ее момент остановки с вероятностью 1 не превосходит необходимого объема выборки.

Разработанные в диссертации методы построения процедур статистического вывода и методы анализа их функции d-риска с выводом формул для необходимого объема выборки представляют теоретический интерес для дальнейшего развития теории d-апостериорного подхода к проблем гарантийности статистического вывода и указывают путь для решения аналогичных задач в рамках других вероятностных моделей.

Список литературы

[1] Бернштейн С. Н. О "доверительных" вероятностях Фишера // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* — 1941. — Т. 5, № 2. — С. 85–94

[2] Беляев Ю. К. *Вероятностные методы выборочного контроля* — Москва: Наука, 1975. — 408 с.

[3] Вайткус П. Исследования по математической статистике и ее приложениям // *Литовский Математический Сборник* — 1980. — Т. XX, № 3. — С. 117–128.

[4] Вальд А. *Последовательный анализ* — М.: Физматгиз, 1960. — 328 с.

[5] Володин И. Н. Оптимальный объем выборки в процедурах статистического вывода // *Известия ВУЗов. Математика* — 1978. — № 12. — С. 33–45.

[6] Володин И. Н. Гарантийные процедуры статистического вывода (определение объема выборки) // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 1984. — Т. 10. — С. 13–53.

[7] Володин И. Н., Новиков А. А. Асимптотика необходимого объема выборки при d-гарантийном различении двух близких гипотез // *Известия ВУЗов. Математика* — 1983. — Т. 11. — С. 59–66.

[8] Володин И. Н., Новиков Ан. А. Статистические оценки с асимптотически минимальным d-риском // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1993. — Т. 38, вып. 1, — С. 20–32.

[9] Володин И. Н., Новиков Ан. А. Локальная асимптотическая эффективность последовательного критерия отношения вероятностей при d-гарантийном различении сложных гипотез // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1998. — Т. 43, вып. 2. — С. 209–225

[10] Володин И. Н., Новиков Ан. А. Асимптотика необходимого объема выборки при гарантийном различении параметрических гипотез // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 1999. — Т. 21. — С. 3–41.

[11] Володин И. Н., Новиков Ан. А., Tec-Canche M.J. Асимптотика необходимого объема выборки для локально асимптотически нормальных экспериментов // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 2001. — Т. 23. — С. 44–54.

[12] Володин И. Н., Новиков А. А., Симушкин С. В. Гарантийный статистический контроль качества: апостериорный подход // *Обозрение прикладной и промышленной математики* — 1994. — Т. 1, № 2. — С. 148–178.

[13] Володин И. Н., Симушкин С. В. О d-апостериорном подходе к проблеме статистического вывода // *3-я Вильнюсская Международная Конференция по Теории Вероятностей и Математической Статистике, Тезисы докладов* — 1981. — Т. 1. — С. 100–101.

[14] Володин И. Н., Симушкин С. В. Статистический вывод с минимальным d-риском // *Исслед. прикл. матем. и информ.* — 1984. — Т. 11, №. 2. — С. 25–39.

[15] Володин И. Н., Симушкин С. В. Несмещенность и байесовость // *Известия ВУЗов. Математика* — 1987. — № 1. — С. 3–7.

[16] Володин И. Н., Симушкин С. В. Доверительное оценивание в d-апостериорном подходе // *Теор.вероятн. и ее примен.* — 1990. — Т. 35., вып. 2. — С. 242–254.

[17] Закс Ш. *Теория статистических выводов* — Москва: Мир, 1975. — 776 с.

[18] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. *Асимптотическая теория оценивания* — Москва: Наука, 1979. — 528 с.

[19] Круопис Ю. И. Минимизация целевых функций некоторых систем контроля качества // *Оптимизация систем контроля* — Вильнюс — 1981. — С. 12–27.

[20] Леман Э. *Проверка статистических гипотез* — Москва: Наука, 1979. — 408 с.

[21] Новиков Ан. А. Асимптотическая оптимальность последовательного d-гарантийного критерия // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1987. — Т. 32, вып. 2. — С. 387–391.

[22] Симушкин С. В. Оптимальные d-гарантийные процедуры различения двух гипотез // Рукопись деп. ВИНИТИ. — 1981. — № 5547-81. — 47 с.

[23] Симушкин С. В. Оптимальный объем выборки при d-гарантийном различении гипотез // *Известия ВУЗов. Математика* — 1982. — № 5. — С. 47–52.

[24] Симушкин С. В. Эмпирический d-апостериорный подход к проблеме гарантийности статистического вывода // *Известия ВУЗов. Математика* — 1983. — № 11. — С. 42–58.

[25] Шерман Е. Д. Эмпирические оценки с минимальным d-риском для дискретных экспоненциальных семейств // *Известия ВУЗов. Математика* — 2010. — № 8. — С. 89–98.

[26] ГОСТ Р ИСО 5725-6-2002 Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 6. Использование значений точности на практике — Москва: Стандартинформ, 2009. — 42 с.

[27] Питьевая вода. Гигиенические требования к качеству воды централизованных систем питьевого водоснабжения. Контроль качества. Санитарно-

эпидемиологические правила и нормативы — М.: Федеральный центр госсанэпиднадзора Минздрава России, 2002. — 103 с.

[28] Efron B. Large-Scale Inference. Empirical Bayes methods for estimation, testing, and prediction —- Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2010. — 321 p.

[29] Genovese C., Wasserman L. Operating chatacteristics and extensions of the false discovery rate procedure // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B* — 2002 — Vol. 64, № 3. — P. 499–517.

[30] Lai T.L. Asymptotical optimality of invariant sequential probability ratio tests // *The Annals of Statistics* — 1981 — Vol. 9, № 2. — P. 318–333.

[31] Novikov An. A., Volodin I. N. Asymptotics of the necessary sample size in testing parametric hypothesis: d-posterior approach // *Math. Methods Statist.* — 1998. — Vol. 7, № 1 — P. 111–121.

[32] Rao C. R. *Advanced statistical methods in biometric research* — John Wiley and Sons, New York, 1952. — 390 p.

[33] Robbins H. An empirical Bayes approach to statistics // *Proceedings Third Berkeley Simp. on Math. Statist. and Probab.* — Univ. California Press, Berkeley and Los Angeles — 1956 — Vol. 1. — P. 157–163.

[34] Robbins H. The empirical Bayes approach to statistical decision problems // *The Annals of Mathematical Statistics* — 1964. — Vol. 35, № 1. — P. 1–20.

[35] Ryan T. P. *Sample size determination and power* — Wiley Series in Probab. and Statist. John Wiley and Sons, Hobeken, NJ. — 2013.— 374 p.

[36] Simushkin D. S., Simushkin S. V., Volodin I. N. D-guaranteed discrimination of statistical hypotheses: review of results and unsolved problems // *Journal of Mathematical Sciences.* New York. — 2017. — Vol. 228, № 5. — P. 543–565.

[37] Simushkin D. S., Simushkin S. V., Volodin I. N. On the d-posterior approach to the multiple testing problem // *Journal of Statistical Computation and Simulation* — 2020. DOI: 10.1080/00949655.2020.1825717.

[38] Simushkin S. V. Confidence bounds and narrowest reliable intervals in d-posterior approach // *Lobachevskii J. Math.* — 2018 — Vol. 39, № 3. — P. 388–397.

[39] Simushkin S. V., Volodin I. N. D-posterior concept of p-value // *Math. Methods Statist.* — 2004. — Vol. 13, № 1. — P. 108–121.

[40] Simushkin S. V., Volodin I. N. Statistical inference with a minimal d-risk // *Probab. theory and math. statist., Lecture Notes in Math.* — 1983. — Vol. 1021. — P. 629–636.

[41] Sherman E. D., Volodin I. N. Empirical estimate with uniformly minimal d-risk for Bernoulli trials success probability // *Mathematical and Statistical Models and Methods in Reliability* — 2010 — Birkhauser Boston. — P. 297–306.

[42] Storey J. D. The positive false discovery rate: a Bayesian interpretation and the q-value // *The Annals of Statistics* — 2003, Vol. 31, № 6. — P. 2013–2035.

[43] Vaart A.W. *Asymptotic statistics* — Cambridge: Cambridge University Press, 1998. — 443 p.

Публикации автора по теме диссертации

[44] Салимов Р. Ф., Симушкин С. В. Асимптотически наиболее точные двусторонние доверительные интервалы для среднего в нормально-нормальной модели // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки* — 2010. — Т. 152, № 1 — С. 205–218.

[45] Салимов Р. Ф., Симушкин С. В. Асимптотика минимального достаточного числа наблюдений при d-гарантийном различении двусторонних гипотез // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2020. — Т. 65, вып. 1 — С. 63–78.

[46] Салимов Р. Ф. Асимптотика необходимого объема выборки при d-гарантийном различении двусторонних гипотез // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2011. — Т. 18, вып. 1. — С. 91.

[47] Салимов Р. Ф. Асимптотически оптимальные процедуры при различении двусторонних гипотез // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2013. — Т. 20, вып. 2. — С. 152–153.

[48] Салимов Р. Ф. Об асимптотически d-гарантийных процедурах при различении двусторонних гипотез // *Материалы межд.конф. по алгебре, анализу и геометрии.* — Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2016. — С. 303–304.

[49] Salimov R. A sequential d-guaranteed test for distinguishing two interval hypotheses // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* — 2016. — Vol. 37, № 4. — P. 500–503.

[50] Salimov R. F., Yang Su-Fen, Turilova E. A., and Volodin I. N. Estimation of the mean value for the normal distribution with constraints on d-risk // *Lobachevskii Journal of Mathematics.* — 2018. — Vol. 39, № 3. — P. 377–387.

[51] Salimov R., Yang S.-F., Volodin A., and Volodin I. Estimation of mean value of a normal distribution with constraints on the relative error and d-risk// *Journal of Statistical Computation and Simulation.* — 2020. — Vol. 90, Is. 7. — P. 1286–1300.