ФГБОУ ВПО «Российский государственный
педагогический университет им. А.И. Герцена»

На правах рукописи

МЕРКУЛОВ АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ

Специальность 01.01.01 – вещественный, комплексный и
функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
доктор физико-математических наук, профессор
ШИРОКОВ Н.А.

Санкт-Петербург – 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Актуальность темы. Развитие теории функций побудило ввести и изучить важные сингулярные интегральные операторы несверточного типа. Первый пример подобных операторов рассмотрел Кальдерон в работе [2].Это сингулярный оператор следующего вида: если $a(x)$ – вещественная функция с компактным носителем на оси, удовлетворяющая условию Липшица, то для гладкой финитной функции f положим

$$MTf(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \frac{a(y)-a(x)}{y-x} \frac{f(y)}{y-x} dy \right| .$$

Кальдерон доказал, что оператор MTf действует из пространства $L^p(\mathbb{R})$ в пространство $L^p(\mathbb{R})$. Случай прямой оценки MTf в норме $L^p(\mathbb{R})$ рассматривался также в работе [1]. Затем Койфман и Мейер в [3], а также Койфман, Макинтош и Мейер в [4] обобщили определение оператора Кальдерона следующим образом:

$$MT_nf(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \left(\frac{a(y)-a(x)}{y-x}\right)^n \frac{f(y)}{y-x} dy \right| .$$

Ими было установлено, что все операторы MT_nf непрерывны в $L^p(\mathbb{R})$ и получены соответствующие оценки норм, которые впоследствии были уточнены Кальдероном.

Важность изучения операторов MT_nf связана в случае прямой и с одним из возможных подходов к оценке интеграла типа

Коши

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

для кривых Г, являющихся графиками функций, удовлетворяющих условию Липшица, хотя впервые такая оценка была получена Кальдероном [5] без применения коммутаторов.

Одним из аналогов преобразования Гильберта на прямой

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{y - x} dy$$

для комплексной плоскости является сингулярный интегральный оператор

$$Sf(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds d\tau, \quad \zeta = s + i\tau,$$

естественно в этой связи определить аналог коммутаторов Кальдерона для плоскости следующим образом: если комплекснозначная функция V удовлетворяет условиям $|V(z) - V(\zeta)| \leq \mathrm{w}|z - \zeta|$, то для гладкой финитной функции f положим

$$T_n f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta),$$

$$T_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|,$$

где $\sigma(\zeta)$ – плоская мера Лебега в $\mathbb{C}$. Эти операторы были определены в работе [6], в ней же была доказана ограниченность этих операторов в норме $L^p(\mathbb{C})$, $\quad 1 < p < \infty$. Во многом это удается сделать благодаря тому, что преобразование $z \to z + \lambda V(z)$ при соответствующих $\lambda \in \mathbb{C}$ является липшицевски гладким гомеоморфизмом $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$, при котором сингулярный интегральный оператор, из которого могут быть получены операторы T_n или T_n^*, переходит в сингулярный интегральный оператор S, ограниченный в $L^p(\mathbb{C})$. Оказывается, что операторы $T_n f$ и $T_n^* f$ ограничены и во всех весовых пространствах $L^p(\omega)$ с весом ω, удовлетворяющим на плоскости условию Макенхаупта A_p. Эти результаты можно использовать для оценки некоторых сингулярных интегральных операторов специального вида. В частности, вторая глава отвечает на вопрос об ограниченности оператора

$$P_F^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} F\left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right) \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|,$$

где F – целая функция, $F(w) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n w^n$.

Далее возникает возможность поставить вопрос о расширении понятия коммутатора Кальдерона на случай нескольких функций $V_1, V_2, ..., V_k$. В настоящей работе рассмотрены случаи $V_2 = \overline{V}_1$ для оператора

$$S_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{|V(\zeta) - V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|,$$

а также V_1, V_2, V_3, V_4 для

$$U_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \left(\frac{V_1(\zeta) - V_1(z)}{\zeta - z}\right)^n \left(\frac{V_2(\zeta) - V_2(z)}{\zeta - z}\right)^n \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{V_3(\zeta) - V_3(z)}{\zeta - z}\right)^n \left(\frac{V_4(\zeta) - V_4(z)}{\zeta - z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|.$$

Эти ситуации характерны наличием большого количества наглядных примеров и приложений.

Цель работы состоит в исследовании вопроса ограниченности сингулярных интегральных операторов, аналогичных коммутаторам Кальдерона, на комплексной плоскости в весовых пространствах $L^p(\omega)$ с весом ω, удовлетворяющим на плоскости условию Макенхаупта A_p, то есть для любого круга B справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega d\sigma\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega^{-\frac{1}{p-1}} d\sigma\right)^{p-1} \leq c_0,$$

где σ – плоская мера Лебега, $|B|$ – площадь B, $c_0 = c_0(\omega)$, $1 < p < \infty$.

Основные результаты.

– Теорема 1. Пусть $f \in L^p(\omega)$, $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению

$$|V(z) - V(\zeta)| \leq \mathrm{w}|z - \zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C},$$

тогда справедлива оценка

$$\left(\int\limits_{\mathbb{C}} (T_n^* f)^p \omega d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \leq b(p,n)\mathrm{w}^n \left(\int\limits_{\mathbb{C}} |f|^p \omega d\sigma\right)^{\frac{1}{p}},$$

где функция $b(p,n)$ имеет степенной рост по n.

– Теорема 2. Пусть $f \in L^p(\omega)$, $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению

$$|V(z) - V(\zeta)| \leq \mathrm{w}|z-\zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C},$$

F – целая функция, $F(w) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n w^n$, тогда справедлива оценка

$$\|P_F^* f\|_{p,\omega} \leq 2M(2\mathrm{w})C_1 A \|f\|_{p,\omega},$$

где $M(2\mathrm{w}) = \max\limits_{|z|=2\mathrm{w}} |F(z)|$.

– Следствие. Для оператора

$$P^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} e^{c\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

верно

$$\|P^* f\|_{p,\omega} \leq 2C_2 A \|f\|_{p,\omega}.$$

– Теорема 3. Пусть $f \in L^p(\omega)$, $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению

$$|V(z) - V(\zeta)| \leq |z-\zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C},$$

тогда справедлива оценка

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \le b_1 n^{\frac{3}{2}} \|f\|_{p,\omega},$$

где $b_1 \le \widetilde{b}(p, c_0) \log(n+1)$, причем постоянная $\widetilde{b}$ уже не зависит от n, c_0 – постоянная из условия Макенхаупта для веса ω.

– Теорема 4. Пусть $f \in L^p(\omega)$, $V_j(z)$ – комплекснозначные функции, определенные на комплексной плоскости и удовлетворяющие соотношению

$$|V_j(z) - V_j(\zeta)| \le |z - \zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C}, 1 \le j \le 4,$$

тогда справедлива оценка

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \le b_1(p, c_0) n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

где c_0 – постоянная из условия Макенхаупта для веса ω.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её методы могут использоваться в других задачах, связанных с оценкой сингулярных интегральных операторов, аналогичных коммутаторам Кальдерона, на комплексной плоскости.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре по теории операторов и комплексному анализу в ПОМИ РАН в 2013 году.

Публикации. По теме диссертации опубликованы 3 работы в журнале из списка ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и четырех глав, разбитых на 11 параграфов, изложена на 57 страницах. Список литературы включает 9 названий.

Содержание работы. Первая глава посвящена изучению коммутаторов Кальдерона на комплексной плоскости в весовом пространстве $L^p(\omega)$. Главной целью является обобщение результатов, полученных в [6] на случай веса, удовлетворяющего условию Макенхаупта.

В первом параграфе формулируется условие Макенхаупта, дается определение оператора T_n^* и вспомогательных операторов $T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}$ и $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}$. Основным результатом этого параграфа является оценка

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)\right|^p \omega(z) d\sigma(z) \leq \frac{b(p, c_0, |\lambda|)}{(1-|\lambda|\mathrm{w})^{2p}} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z).$$

Второй параграф содержит формулировку теоремы 1 и ее доказательство, основанное на связи между операторами $T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}$ и $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}$, которая позволяет оценить сначала $T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}$, а потом и T_n^* следующим образом:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{C}} (T_n^* f)^p \omega d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \leq b(p,n)\mathrm{w}^n \left(\int\limits_{\mathbb{C}} |f|^p \omega d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вторая глава содержит применение полученных результатов к оценке операторов специального вида.

В первом параграфе дается определение оператора P_F^* для целой функции $F(w) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ и его частного случая P^*, формулируется теорема 2 со следствием.

Второй параграф посвящен изучению вспомогательных операторов P_ε и $P_{F,\varepsilon}$ для оценки которых используются результаты первой главы.

Третий параграф завершает доказательство, показывая, что для операторов P_F^* и P^* верны оценки

$$\|P_F^* f\|_{p,\omega} \leq 2M(2\mathrm{w})C_1 A\|f\|_{p,\omega},$$

$$\|P^* f\|_{p,\omega} \leq 2C_2 A\|f\|_{p,\omega}.$$

В третьей главе происходит обобщение понятия коммутатора Кальдерона.

В первом параграфе рассматривается случай двух функций $V_1(z)$ и $V_2(z)$, таких, что $V_2 = \overline{V}_1$. Это приводит к рассмотрению нового оператора

$$S_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \frac{|V(\zeta) - V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|,$$

для которого формулируется теорема 3 с соответствующей оценкой

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1 n^{\frac{3}{2}} \|f\|_{p,\omega}.$$

Во втором параграфе определяются вспомогательные операторы $S_{n,\varepsilon}$ и $M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)$, а также доказывается оценка

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)(z)|^p \, \omega(z) d\sigma(z) \leq$$

$$\leq b(p, c_0, |\lambda|) n^{2p} 4^p \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z).$$

Третий параграф содержит завершение доказательства теоремы 3 основанное на связи между операторами $S_{n,\varepsilon}$ и $M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)$, которая используется для последовательного получения оценок для $S_{n,\varepsilon}$ и S_n^*.

В четвертой главе получает дальнейшее развитие идея обобщения коммутаторов Кальдерона на случай нескольких функций $V_j(z)$.

Первый параграф описывает ситуацию с четырьмя функциями, удовлетворяющими соотношению

$$|V_j(z) - V_j(\zeta)| \leq |z - \zeta|, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

Тогда соответствующий оператор будет иметь вид

$$U_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{V_1(\zeta) - V_1(z)}{\zeta - z} \right)^n \left(\frac{V_2(\zeta) - V_2(z)}{\zeta - z} \right)^n \times \right.$$

$$\times \left(\frac{V_3(\zeta)-V_3(z)}{\zeta-z}\right)^n \left(\frac{V_4(\zeta)-V_4(z)}{\zeta-z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta)\Bigg|.$$

В этом случае также удается получить оценки для нормы U_n^* с помощью рассмотрения дополнительных операторов $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ и $U_{n,\varepsilon}$ связанных с U_n^*. Если оценка для $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ с очевидностью следует из третьей главы, то соответствующие результаты для $U_{n,\varepsilon}$ сформулированы в качестве леммы, доказательство которой вынесено в отдельный параграф. Далее формулируется и доказывается теорема 4 для оператора U_n^* с оценкой

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1(p,c_0) n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}.$$

Второй параграф полностью посвящен доказательству леммы для $U_{n,\varepsilon}$. Основной результат имеет вид

$$\|U_{n,\varepsilon} f\|_{p,\omega} \leq \frac{b_1}{2} n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}$$

и получается при помощи связи между операторами $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ и $U_{n,\varepsilon}$.

В третьем параграфе описываются частные случаи для ранее изученных операторов. После нескольких тривиальных примеров рассматриваются более сложные ситуации для функций $V(z)=e^{i|z|}$ и $W(z)=e^{i|V(z)|}$, но наиболее интересным представляется случай $V_j(z)=r_{E_j}^{1+i}(z)$, где V_j определены на замкнутых множествах E_j меры ноль ($E_2 = E_1, E_4 = E_3$), $r_E(z) = dist(z; E)$. Тогда при условии

$$V_1(z) = r_{E_1}^{1+i}(z), V_2(z) = \overline{V}_1(z), V_3(z) = r_{E_3}^{1+i}(z), V_4(z) = \overline{V}_3(z)$$

оценки для операторов U_n^* и S_n^* выглядят следующим образом

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1(p, c_0) 3^{2n} n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_2(p, c_0) 3^n n^{\frac{3}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}.$$

Завершает работу рассмотрение случая

$$V(z) = r(z)^{1+i\varphi(r(z))},$$

где $r(z) = dist(z; E)$, E – замкнутое множество меры ноль, $\varphi(a)$ вещественнозначная функция, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(a)| \leq C_1, a|\varphi'(a) \log a| \leq C_2, a > 0.$$

В этой ситуации оценка для S_n^* примет вид

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_3(p, c_0) C_3^{2n} n^{\frac{3}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

где $C_3 = \sqrt{1 + (C_1 + C_2)^2}$.

Глава I

§1. Оценка оператора $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}$

Пусть $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению

$$|V(z) - V(\zeta)| \le \mathrm{w}|z - \zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Вес $\omega \geq 0$, определенный на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называют удовлетворяющим условию Макенхаупта A_p, $\quad 1 < p < \infty$, если для любого круга B справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega d\sigma\right)\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \omega^{-\frac{1}{p-1}} d\sigma\right)^{p-1} \le c_0, \tag{2}$$

где σ – плоская мера Лебега, $|B|$ – площадь B, $c_0 = c_0(\omega)$. Теория весовых оценок с условием A_p подробно изложена в [7], гл. 5. Рассмотрим оператор

$$T_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\quad \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \quad\right|, \tag{3}$$

где $\sigma(\zeta)$ – плоская мера Лебега в $\mathbb{C}$, $f \in L^p(\omega)$.

Как показали Койфман и Фефферман [8], а также Кордоба и Фефферман [9], оценки различных сингулярных интегралов могут быть перенесены со случая $L^p(\mathbb{R}^n)$ на случай весового $L^p(\mathbb{R}^n, \omega)$. В настоящей главе исследуется вопрос возможной ограниченности оператора (3) в весовом пространстве $L^p(\mathbb{C}, \omega)$

с весом, удовлетворяющем условию (2). Для ответа на этот вопрос нам понадобятся вспомогательные операторы, связанные с $T_n^* f(z)$.

Фиксируем $\delta > 0$ и обозначим через $\varepsilon(z)$ измеримую функцию на $\mathbb{C}$, для которой $\varepsilon(z) \geq \delta$. Определим оператор:

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta). \tag{4}$$

Свяжем с операторами (4) оператор $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}$ следующим образом. Пусть λ – комплексное число, $|\lambda| < \frac{1}{\mathrm{w}}$, где w взято из (1). Положим

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \lambda^n T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z). \tag{5}$$

Ответив на вопрос об ограниченности $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}$ мы сможем получить оценку для $T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}$, которая влечет оценку для $T_n^* f(z)$.

Для оператора $L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}$ получается выражение:

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) +$$

$$+ \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \lambda^n \left(\frac{V(z) - V(\zeta)}{z - \zeta} \right)^n \right] \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{1}{\left(1 - \lambda \frac{V(z) - V(\zeta)}{z - \zeta}\right)^2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{(z - \zeta - \lambda(V(z) - V(\zeta)))^2} d\sigma(\zeta). \tag{6}$$

Введем обозначение $A_\lambda(z) = z - \lambda V(z)$. Поскольку $|A_\lambda(z) - A_\lambda(\zeta)| \geq |z-\zeta| - |\lambda|\,|V(z)-V(\zeta)| \geq |z-\zeta|(1-|\lambda|\mathrm{w})$, то $A_\lambda(z)$ – обратимое отображение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя, удовлетворяющее условию Липшица.

Пусть α_λ – обратное к A_λ отображение. Обозначим $\tau = A_\lambda(z)$ и сделаем в интеграле (6) замену переменной $A_\lambda(\zeta) = t$,
$\zeta = \alpha_\lambda(t)$ и пусть $\mu_\lambda(t)$ – модуль якобиана при такой замене. Тогда мы находим, что

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}f(z) = \int\limits_{\{t\in\mathbb{C}:|\alpha_\lambda(t)-\alpha_\lambda(\tau)|>\varepsilon(z)\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\mu_\lambda(t)}{(\tau-t)^2}d\sigma(t). \qquad (7)$$

Будем поточечно оценивать интеграл в (7). Положим

$$S^*\varphi(\tau) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|t-\tau|>\varepsilon}\frac{\varphi(t)}{(t-\tau)^2}d\sigma(t)\right|,$$

$$M\varphi(\tau) = \sup_{\varepsilon>0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{|t-\tau|<\varepsilon}|\varphi(t)|d\sigma(t).$$

Тогда имеем

$$L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}f(z) = \int\limits_{\{t\in\mathbb{C}:|t-\tau|>(1-|\lambda|\mathrm{w})\varepsilon(z)\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\mu_\lambda(t)}{(\tau-t)^2}d\sigma(t) -$$

$$- \int\limits_{\{t\in\mathbb{C}:|t-\tau|>(1-|\lambda|\mathrm{w})\varepsilon(z)\}\setminus\{t\in\mathbb{C}:|\alpha_\lambda(t)-\alpha_\lambda(\tau)|>\varepsilon(z)\}} \frac{f(\alpha_\lambda(t))\mu_\lambda(t)}{(\tau-t)^2}d\sigma(t)$$

из чего следует оценка

$$|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}f(z)| \leq S^*(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau) +$$

$$+\int\limits_{(1-|\lambda|\mathrm{w})\varepsilon(z)<|t-\tau|<2\varepsilon(z)}\frac{|f(\alpha_\lambda(t))|\mu_\lambda(t)}{|\tau-t|^2}d\sigma(t). \tag{8}$$

Положив для краткости $|f(\alpha_\lambda(t))|\mu_\lambda(t)=\psi(t)$, $(1-|\lambda|\mathrm{w})\varepsilon(z)=a$, $2\varepsilon(z)=b$, имеем

$$\int\limits_{a<|t-\tau|<b}\frac{\psi(t)}{|t-\tau|^2}d\sigma(t)=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_a^b\frac{\psi(\tau+re^{i\theta})}{r^2}rdr=$$

$$=\int\limits_a^b\frac{dr}{r^2}\int\limits_0^{2\pi}\psi(\tau+re^{i\theta})rd\theta=\int\limits_a^b\frac{dr}{r^2}\left(\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi}\psi(\tau+\rho e^{i\theta})\rho d\theta d\rho\right)'_r=$$

$$=\frac{1}{b^2}\int\limits_{|t-\tau|<b}\psi(t)d\sigma(t)-\frac{1}{a}\int\limits_{|t-\tau|<a}\psi(t)d\sigma(t)+$$

$$+2\int\limits_a^b\frac{1}{r^3}\left(\int\limits_{|\tau-t|<r}\psi(t)d\sigma(t)\right)dr\le$$

$$\le\pi M\psi(\tau)+2\pi\int\limits_a^b\frac{M\psi(\tau)}{r}dr=\pi\left(1+2\log\frac{b}{a}\right)M\psi(\tau),$$

поэтому (8) влечет оценку

$$|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}f(z)|\le S^*(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau)+$$

$$+\pi\left(1+2\log\frac{2}{1-|\lambda|\mathrm{w}}\right)M(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau). \tag{9}$$

Поточечная оценка (9) приводит к следующей интегральной оценке:

$$\int\limits_{\mathbb{C}}\left|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}f(z)\right|^p\omega(z)d\sigma(z)\le 2^{p-1}\int\limits_{\mathbb{C}}S^{*p}(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau)\omega(z)d\sigma(z)+$$

$$+2^{p-1}\pi^p\left(1+2\log\frac{2}{1-|\lambda|\mathrm{w}}\right)^p\int\limits_{\mathbb{C}} M^p(f(\alpha_\lambda)\mu_\lambda)(\tau)\omega(z)d\sigma(z). \quad (10)$$

Через $b_{S^*}(p,c_0)$ и $b_M(p,c_0)$ обозначим постоянные в следующих неравенствах:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} S^{*p}(f_0)(z)\omega(z)d\sigma(z) \le b_{S^*}(p,c_0)\int\limits_{\mathbb{C}} |f_0(z)|^p\omega(z)d\sigma(z), \quad (11)$$

$$\int\limits_{\mathbb{C}} M^p(f_0)(z)\omega(z)d\sigma(z) \le b_M(p,c_0)\int\limits_{\mathbb{C}} |f_0(z)|^p\omega(z)d\sigma(z), \quad (12)$$

где для веса $\omega(z)$ выполнено соотношение (2) с постоянной c_0. Обозначая через $b(p,c_0,|\lambda|)$ величину

$$b(p,c_0,|\lambda|) = 2^{p-1}b_{S^*}(p,c_0)+$$

$$+2^{p-1}\pi^p\left(1+2\log\frac{2}{1-|\lambda|\mathrm{w}}\right)^p b_M(p,c_0), \quad (13)$$

из (10)–(13) находим следующую оценку:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta}f(z)\right|^p\omega(z)d\sigma(z) \le$$

$$\le b(p,c_0,|\lambda|)\int\limits_{\mathbb{C}} |f(\alpha_\lambda(\tau))\mu_\lambda(\tau)|^p\omega(z)d\sigma(z), \quad (14)$$

где в (14) по-прежнему в правой части $\tau = A_\lambda(z)$, $z = \alpha_\lambda(\tau)$, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |f(\alpha_\lambda(\tau))\mu_\lambda(\tau)|^p\omega(z)d\sigma(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p\frac{1}{J^p_{A_\lambda}(z)}\omega(z)d\sigma(z). \quad (15)$$

Оценим модуль якобиана $J_{A_\lambda}(z)$ снизу. Для произвольной точки z положим $\overline{B_\delta}(z) = \{\zeta : |\zeta - z| \leq \delta\}$. Пусть $s(\delta)$ – площадь $A_\lambda(\overline{B_\delta}(z))$, тогда

$$J_{A_\lambda}(z) = \lim_{\delta \to 0} \frac{s(\delta)}{\pi \delta^2}. \tag{16}$$

Поскольку $|A_\lambda(z) - A_\lambda(\zeta)| \geq |z - \zeta|(1 - |\lambda|\mathrm{w})$, то в фигуру $A_\lambda(\overline{B_\delta}(z))$ можно поместить круг с центром в $A_\lambda(z)$ и радиусом не менее $(1 - |\lambda|\mathrm{w})\delta$, поэтому (16) влечет

$$J_{A_\lambda}(z) \geq (1 - |\lambda|\mathrm{w})^2. \tag{17}$$

Наконец, используя (14), (15), (17) получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)\right|^p \omega(z) d\sigma(z) \leq \frac{b(p, c_0, |\lambda|)}{(1 - |\lambda|\mathrm{w})^{2p}} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z). \tag{18}$$

§2. Формулировка теоремы и ее доказательство

Сформулируем теперь основной результат первой главы.

Теорема 1. *Пусть вес ω удовлетворяет на плоскости условию Макенхаупта, $f \in L^p(\omega)$, $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению*

$$|V(z) - V(\zeta)| \leq \mathrm{w}|z-\zeta|, \quad \text{\textit{где}} \quad z, \zeta \in \mathbb{C},$$

тогда справедлива оценка

$$\left(\int\limits_{\mathbb{C}} (T_n^* f)^p \omega d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \leq b(p,n)\mathrm{w}^n \left(\int\limits_{\mathbb{C}} |f|^p \omega d\sigma \right)^{\frac{1}{p}},$$

где функция $b(p,n)$ имеет степенной рост по n.

Для доказательства этого утверждения оценим сначала вспомогательный оператор $T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta}$. Пусть $0 < \rho < \frac{1}{\mathrm{w}}$. Определение (5) приводит к формуле

$$T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z) = \frac{1}{2\pi i(n+1)} \int\limits_{|\lambda|=\rho} \frac{L_{\lambda,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)}{\lambda^{n+1}} d\lambda,$$

которая дает следующую поточечную оценку:

$$|T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)| \leq \frac{1}{2\pi(n+1)\rho^n} \int\limits_0^{2\pi} |L_{\rho e^{i\theta},\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)| d\theta. \tag{19}$$

Выберем

$$\rho = \rho_n = (1 - \frac{1}{n})\frac{1}{\mathrm{w}}, n \geq 2,$$

тогда

$$\frac{1}{\rho_n^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n}\mathrm{w}^n, 1 - \rho_n \mathrm{w} = \frac{1}{n},$$

и (19) вместе с (18) влекут

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |T_{n,\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{\pi(n+1)}\mathrm{w}^n\right)^p \int\limits_{\mathbb{C}} \left(\int\limits_0^{2\pi} |L_{\rho_n e^{i\theta},\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)|^p d\theta\right) \omega(z) d\sigma(z) (2\pi)^{p-1} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi(n+1)}\mathrm{w}^n\right)^p (2\pi)^{p-1} \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_{\mathbb{C}} |L_{\rho_n e^{i\theta},\varepsilon(\cdot),\delta} f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z) \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{\pi(n+1)}\mathrm{w}^n\right)^p (2\pi)^p b(p, c_0, \rho_n) n^{2p} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z). \quad (20)$$

Отметим, что определение (13) позволяет оценивать рост постоянной в правой части (20) в зависимости от n:

$$4^p \left(\frac{n^2}{n+1}\right)^p \mathrm{w}^{np} b(p, c_0, \rho_n) < 4^p n^p \mathrm{w}^{np} (2^{p-1} b_{S^*}(p, c_0) +$$

$$+2^{p-1}\pi^p(1+2\log 2n)^p b_M(p,c_0)) \stackrel{\text{def}}{=} b_1(p,c_0,n)\mathrm{w}^{np}. \qquad (21)$$

Теперь осталось заметить, что в левой части соотношения (20) в качестве $\varepsilon(\cdot)$ можно выбирать любую измеримую на $\mathbb{C}$ функцию, удовлетворяющую условию $\varepsilon(z) \geq \delta$, а правая часть (20) от выбора $\varepsilon(\cdot)$ не зависит, поэтому (20) и (21) влекут

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left(\sup_{\varepsilon \geq \delta > 0} \left| \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right| \right)^p \omega(z) d\sigma(z) \leq$$

$$\leq b_1(p,c_0,n)\mathrm{w}^{np} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z). \qquad (22)$$

Наконец, поскольку правая часть в (22) не зависит от δ, то это соотношение влечет требуемую оценку, чем и завершает доказательство теоремы.

Глава II

§1. Операторы P_F^* и P^*

Основные результаты, полученные в первой главе, могут быть использованы для оценки некоторых операторов специального вида. Настоящая глава посвящена изучению одного из них.

Пусть ω – вес на плоскости, удовлетворяющий условию Макенхаупта (2), $V(z)$ – комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению (1), $f \in L^p(\omega)$. Для целой функции $F(z) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ рассмотрим оператор

$$P_F^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} F\left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right) \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

и его частный случай

$$P^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} e^{c\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta - z}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|.$$

Теорема 1 позволяет доказать следующие утверждения.

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\|P_F^* f\|_{p,\omega} \le 2M(2\mathrm{w})C_1 A \|f\|_{p,\omega},$$

где $M(2\mathrm{w}) = \max\limits_{|z|=2\mathrm{w}} |F(z)|$.

Следствие. *Для оператора P^* верно*

$$\|P^* f\|_{p,\omega} \le 2C_2 A \|f\|_{p,\omega}.$$

§2. Оценки для P_ε и $P_{F,\varepsilon}$

Для доказательства теоремы 2 и следствия из нее нам понадобятся вспомогательные операторы.

Фиксируем $\delta > 0$ и обозначим через $\varepsilon(z)$ измеримую функцию на $\mathbb{C}$, для которой $\varepsilon(z) \geq \delta$. Определим следующие операторы:

$$P_{F,\varepsilon} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} F\left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right) \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta),$$

$$P_\varepsilon f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} e^{c\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta).$$

Получив оценки для этих операторов мы сможем установить справедливость соответствующих утверждений для P_F^* и P^*.

Так как структура рассуждений для $P_{F,\varepsilon}$ и P_ε идентична, то более подробно остановимся на операторе P_ε. Рассмотрим связанный с ним оператор

$$P_{n,\varepsilon} f(z) = \frac{c^n}{n!} \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \left(\frac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta).$$

Так как $e^X = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{X^n}{n!}$ и $X = c\dfrac{V(\zeta) - V(z)}{\zeta - z}$, то

$$P_\varepsilon f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{n,\varepsilon} f(z).$$

Из неравенства Минковского следует, что

$$\|P_\varepsilon f\|_{p,\omega} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|P_{n,\varepsilon} f\|_{p,\omega}. \tag{23}$$

Применим теорему 1 для оценки слагаемых в правой части (23):

$$\|P_{n,\varepsilon}f\|_{p,\omega} = \frac{|c|^n}{n!}\left\| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma(\zeta)\right\|_{p,\omega} \leq$$

$$\leq \frac{|c|^n}{n!}\|T_n^* f\|_{p,\omega} \leq \frac{|c|^n}{n!}b(p,n)\mathrm{w}^n\|f\|_{p,\omega}\text{, где}$$

$$b(p,n) = (4^p(n+1)^p(2^{p-1}b_{S^*}(p,c_0)+2^{p-1}\pi^p(1+2\log 2n)^p b_M(p,c_0)))^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 8(n+1)\left(\frac{1}{2}b_{S^*}(p,c_0)+\frac{1}{2}\pi^p(1+2\log 2n)^p b_M(p,c_0)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= A(n+1)(1+2\log 2n).$$

Таким образом

$$\|P_{n,\varepsilon}f\|_{p,\omega} \leq \frac{|c|^n}{n!}A(n+1)(1+2\log(2(n+2)))\mathrm{w}^n\|f\|_{p,\omega}. \qquad (24)$$

Подставляя (24) в (23) получаем

$$\|P_\varepsilon f\|_{p,\omega} \leq A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c|^n}{n!}(n+1)(1+2\log(2(n+2)))\mathrm{w}^n\right)\|f\|_{p,\omega} =$$

$$= A\Bigg((1+2\log 2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c|^n\mathrm{w}^n(n+1)}{n!}+$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c|^n\mathrm{w}^n(n+1)\log(n+2)}{n!}\Bigg)\|f\|_{p,\omega}. \qquad (25)$$

Обозначим $|c|^n\mathrm{w}^n = y^n$ и оценим ряды в (25). Для $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{|c|^n\mathrm{w}^n(n+1)}{n!}$ имеем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n(n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} =$$

$$= y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} = ye^y + e^y. \tag{26}$$

В случае $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|c|^n\mathrm{w}^n(n+1)\log(n+2)}{n!}$ получается оценка:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n(n+1)\log(n+2)}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n(n+1)^2}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n n^2}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n n}{(n-1)!} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{(n-1)!} + e^y =$$

$$= y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}(n-1+1)}{(n-1)!} + 2y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + e^y =$$

$$= y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}(n-1)}{(n-1)!} + y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + 2ye^y + e^y =$$

$$= y\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{(n-2)!} + ye^y + 2ye^y + e^y =$$

$$= y^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + 3ye^y + e^y = y^2e^y + 3ye^y + e^y. \tag{27}$$

Подставляя (26) и (27) в (25) получаем

$$\|P_\varepsilon f\|_{p,\omega} \le A\left((1+2\log 2)(ye^y+e^y) + 2(y^2e^y+3ye^y+e^y)\right)\|f\|_{p,\omega} =$$

$$= A\left(2y^2e^y + ye^y(2\log 2+7) + e^y(2\log 2+3)\right)\|f\|_{p,\omega}.$$

Учитывая, что $|c|\mathrm{w} = y$ окончательно имеем

$$\|P_\varepsilon f\|_{p,\omega} \le AC_2\|f\|_{p,\omega}, \text{где}$$

$$C_2 = 2|c|^2 \mathrm{w}^2 e^{|c|\mathrm{w}} + |c|\mathrm{w} e^{|c|\mathrm{w}}(2\log 2 + 7) + e^{|c|\mathrm{w}}(2\log 2 + 3).$$

Применяя подобные рассуждения к оператору $P_{F,\varepsilon}$ в итоге получим аналог неравенства (25)

$$\|P_{F,\varepsilon} f\|_{p,\omega} \le A\Bigg((1 + 2\log 2)\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \mathrm{w}^n (n+1) +$$

$$+2\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\mathrm{w}^n (n+1)\log(n+2)\Bigg)\|f\|_{p,\omega}, \qquad (28)$$

где вместо $\dfrac{|c^n|}{n!}$ используется $|a_n|$.

Оценим ряды в (28)с помощью неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\mathrm{w}^n(n+1) \le \left[|a_n| \le \frac{M(\rho)}{\rho^n}, \rho = 2\mathrm{w}\right] \le M(2\mathrm{w})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n} =$$

$$= M(2\mathrm{w})\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right) = 4M(2\mathrm{w}) \qquad (29)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\mathrm{w}^n(n+1)\log(n+2) \le$$

$$\le M(2\mathrm{w})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\log(n+2)}{2^n} < M(2\mathrm{w})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n} =$$

$$= M(2\mathrm{w})\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right) = 12M(2\mathrm{w}) \qquad (30)$$

Подставляя (29) и (30) в (28) получим

$$\|P_{F,\varepsilon} f\|_{p,\omega} \le M(2\mathrm{w})\,(8\log 2 + 28)\,A\|f\|_{p,\omega} = M(2\mathrm{w})C_1 A\|f\|_{p,\omega}.$$

§3. Окончание доказательства

Для завершения доказательства осталось заметить, что для каждого z_0 найдется функция $\varepsilon(z)$ такая, что

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z_0|>\varepsilon} F\left(\frac{V(\zeta)-V(z_0)}{\zeta-z_0}\right)\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\sigma(\zeta)\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\int\limits_{|\zeta-z_0|>\varepsilon(z_0)} F\left(\frac{V(\zeta)-V(z_0)}{\zeta-z_0}\right)\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\sigma(\zeta)\right|,$$

то есть $|P_F^* f(z_0)| \leq 2\left|P_{F,\varepsilon(z_0)} f(z_0)\right|$. Но так как оценка нормы $P_{F,\varepsilon} f(z)$ не зависит от выбора $\varepsilon(z)$, то для нормы $P_F^* f(z)$ верно

$$\|P_F^* f\|_{p,\omega} \leq 2M(2\mathrm{w})C_1 A\|f\|_{p,\omega} = M(2\mathrm{w})\left(16\log 2+56\right)A\|f\|_{p,\omega}.$$

Аналогично для оператора P^* получаем

$$\|P^* f\|_{p,\omega} \leq 2C_2 A\|f\|_{p,\omega},$$

что и требовалось доказать.

Глава III

§1. Операторы, аналогичные коммутаторам Кальдерона

Сингулярные интегральные операторы, относящиеся к коммутаторам Кальдерона имеют стандартный вид

$$T_n^* f(x) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|y-x|>\varepsilon} \left(\frac{a(y)-a(x)}{y-x} \right)^n \frac{f(y)}{y-x} dy \right|$$

для прямой и

$$T_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

для комплексной плоскости. Попытка дальнейшего обобщения полученных результатов приводит к рассмотрению оператора

$$S_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{|V(\zeta)-V(z)|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right|.$$

Несмотря на существенное отличие в виде $|V(\zeta) - V(z)|^{2n}$ этот оператор является естественным обобщением для

$$T_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

в случае двух функций $V_1(z)$ и $V_2(z)$, причем $V_2 = \overline{V}_1$. В этой ситуации также удается получить соответствующие оценки для нормы S_n^*.

Перейдем к формулировке основного результата этой главы.

Теорема 3. *Пусть* $f \in L^p(\omega)$, $V(z)$ *– комплекснозначная функция, определенная на комплексной плоскости и удовлетворяющая соотношению*

$$|V(z) - V(\zeta)| \leq |z - \zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C},$$

тогда справедлива оценка

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1 n^{\frac{3}{2}} \|f\|_{p,\omega},$$

где $b_1 \leq \widetilde{b}(p, c_0) \log(n+1)$, *причем постоянная* $\widetilde{b}$ *уже не зависит от* n, c_0 *– постоянная из условия Макенхаупта для веса* ω.

§2. Вспомогательный оператор

Для доказательства теоремы 3 нам понадобятся вспомогательные операторы, связанные с S_n^*. Фиксируем $\delta > 0$ и обозначим через $\varepsilon(z)$ измеримую функцию на $\mathbb{C}$, для которой $\varepsilon(z) \geq \delta$. Определим следующий оператор:

$$S_{n,\varepsilon} f(z) = \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{|V(\zeta) - V(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta). \tag{31}$$

Свяжем с оператором $S_{n,\varepsilon}$, определенным в (31), оператор $M_{f,\varepsilon}(\lambda, \mu)$ следующим образом. Пусть λ, μ – комплексные числа, $|\lambda| = |\mu| = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$. Положим

$$M_{f,\varepsilon}(\lambda, \mu)(z) =$$

$$= \int\limits_{|\zeta - z| > \varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{\big((\zeta + \lambda V(\zeta) + \mu \overline{V}(\zeta)) - (z + \lambda V(z) + \mu \overline{V}(z))\big)^2}. \tag{32}$$

Идея доказательства заключается в последовательном получении оценок для соответствующих операторов. Использование результатов первой главы позволяет оценить оператор $M_{f,\varepsilon}$. Связь между операторами $M_{f,\varepsilon}$ и $S_{n,\varepsilon}$ дает нам оценки для $S_{n,\varepsilon}$, которые, в свою очередь, влекут результаты для S_n^*.

Перейдем к изучению оператора $M_{f,\varepsilon}$. Для этого введем обозначение

$$A_{\lambda,\mu}(z) = z + \lambda V(z) + \mu \overline{V}(z).$$

Поскольку

$$|A_{\lambda,\mu}(z)-A_{\lambda,\mu}(\zeta)|\geq$$

$$\geq|z-\zeta|-|\lambda||V(z)-V(\zeta)|-|\mu||\overline{V}(z)-\overline{V}(\zeta)|\geq$$

$$\geq|z-\zeta|(1-|\lambda|-|\mu|)=\frac{1}{2n}|z-\zeta|,$$

то $A_{\lambda,\mu}(z)$ – обратимое отображение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя, удовлетворяющее условию Липшица.

Оценим модуль якобиана $J_{A_{\lambda,\mu}}(z)$ снизу. Для произвольной точки z положим $\overline{B_\delta}(z)=\{\zeta:|\zeta-z|\leq\delta\}$, пусть $s(\delta)$ – площадь $A_{\lambda,\mu}(\overline{B_\delta}(z))$. Тогда

$$J_{A_{\lambda,\mu}}(z)=\lim_{\delta\to 0}\frac{s(\delta)}{\pi\delta^2}. \tag{33}$$

Поскольку

$$|A_{\lambda,\mu}(z)-A_{\lambda,\mu}(\zeta)|\geq\frac{1}{2n}|z-\zeta|,$$

то в фигуру $A_{\lambda,\mu}(\overline{B_\delta}(z))$ можно поместить круг с центром в $A_{\lambda,\mu}(z)$ и радиусом не менее $\frac{1}{2n}\delta$, поэтому (33) влечет

$$J_{A_{\lambda,\mu}}(z)\geq\frac{1}{4n^2}.$$

Тогда используя результаты первой главы получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)(z)|^p\,\omega(z)d\sigma(z)\leq$$

$$\leq b(p,c_0,|\lambda|)n^{2p}4^p\int\limits_{\mathbb{C}}|f(z)|^p\omega(z)d\sigma(z). \tag{34}$$

§3. Оценки для $S_{n,\varepsilon}$ и S_n^*

Заметим, что оператор $M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)(z)$, определенный в (32), может быть записан в виде

$$M_{f,\varepsilon}(\lambda,\mu)(z) = \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2(1+q)^2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} q^k \frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}, \tag{35}$$

где

$$q = \lambda\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z} + \mu\frac{\overline{V}(\zeta)-\overline{V}(z)}{\zeta-z}$$

и

$$|q| \leq |\lambda| + |\mu| = 1 - \frac{1}{2n} < 1.$$

Введем обозначения

$$\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z} = A, \frac{\overline{V}(\zeta)-\overline{V}(z)}{\zeta-z} = B,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} = t, \lambda = te^{i\theta_1}, \mu = te^{i\theta_2}.$$

Используя равенства (35) имеем следующее

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} M_{f,\varepsilon}(te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})(z)e^{-in(\theta_1+\theta_2)}d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} q^k \frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}e^{-in(\theta_1+\theta_2)}d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(te^{i\theta_1}A+te^{i\theta_2}B)^k e^{-in(\theta_1+\theta_2)}d\theta_1 d\theta_2\right)=$$

$$= (2n+1)t^{2n}C_{2n}^n \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \frac{|V(\zeta)-V(z)|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma(\zeta), \qquad (36)$$

так как интеграл

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(e^{i\theta_1}A+e^{i\theta_2}B)^k e^{-in(\theta_1+\theta_2)}d\theta_1 d\theta_2$$

не равен нулю только в случае $k=2n$ для слагаемого $C_{2n}^n A^n B^n$,

где

$$A^nB^n = \left(\frac{V(\zeta)-V(z)}{\zeta-z}\right)^n\left(\frac{\overline{V}(\zeta)-\overline{V}(z)}{\zeta-z}\right)^n = \frac{|V(\zeta)-V(z)|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}},$$

$$t^{2n} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}.$$

Обозначив

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}C_{2n}^n = C, \frac{1}{C}=\tilde{C}$$

получим из (36)

$$S_{n,\varepsilon}f(z) = \frac{\tilde{C}}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}M_{f,\varepsilon}(te^{i\theta_1},te^{i\theta_2})(z)e^{-in(\theta_1+\theta_2)}d\theta_1 d\theta_2.$$

Далее из неравенства Гельдера имеем

$$|S_{n,\varepsilon}f(z)|^p \le \left(\frac{\tilde{C}}{4\pi^2}\right)^p(4\pi^2)^{p-1}\times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|M_{f,\varepsilon}(te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})(z)\right|^p d\theta_1 d\theta_2$$

и (34) влечет оценку

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |S_{n,\varepsilon}f(z)|^p \omega(z)d\sigma(z) \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{C}^p}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{C}}\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|M_{f,\varepsilon}(te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})(z)\right|^p d\theta_1 d\theta_2\right)\omega(z)d\sigma(z) =$$

$$= \frac{\tilde{C}^p}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 \int\limits_{\mathbb{C}} \left|M_{f,\varepsilon}(te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2})(z)\right|^p \omega(z)d\sigma(z) \leq$$

$$\leq \tilde{C}^p b(p, c_0, |\lambda|) n^{2p} 4^p \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z), \tag{37}$$

где

$$\tilde{C} = \frac{2^{2n}}{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{-2n}\frac{1}{C_{2n}^n} = \frac{2^{2n}}{2n+1}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{2n}\frac{n!n!}{(2n)!} =$$

$$= \frac{2^{2n}}{2n+1}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{2n}\frac{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}}\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}}}{\sqrt{2\pi 2n}(\frac{2n}{e})^{2n} e^{\frac{\theta(2n)}{24n}}} \leq \frac{4e^{\frac{1}{6}}\sqrt{\pi n}}{2n+1}.$$

Обозначим

$$\left((4e^{\frac{1}{6}}\sqrt{\pi})^p b(p, c_0, |\lambda|) 4^p\right)^{\frac{1}{p}} = b_1,$$

тогда из (37) окончательно имеем

$$\|S_{n,\varepsilon}f\|_{p,\omega} \leq b_1 \frac{n^{\frac{5}{2}}}{2n+1}\|f\|_{p,\omega} \leq \frac{b_1}{2} n^{\frac{3}{2}}\|f\|_{p,\omega}.$$

Для завершения доказательства достаточно заметить, что для каждого z_0 найдется функция $\varepsilon(z)$ такая, что

$$\sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z_0|>\varepsilon}\frac{|V(\zeta)-V(z_0)|^{2n}}{(\zeta-z_0)^{2n}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\sigma(\zeta)\right|\leq$$

$$\leq 2\left|\int\limits_{|\zeta-z_0|>\varepsilon(z_0)}\frac{|V(\zeta)-V(z_0)|^{2n}}{(\zeta-z_0)^{2n}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2}d\sigma(\zeta)\right|,$$

то есть

$$|S_n^*f(z_0)|\leq 2|S_{n,\varepsilon(z_0)}f(z_0)|.$$

Но так как оценка нормы $S_{n,\varepsilon}f(z)$ не зависит от выбора $\varepsilon(z)$, то для нормы $S_n^*f(z)$ верно

$$\|S_n^*f\|_{p,\omega}\leq b_1 n^{\frac{3}{2}}\|f\|_{p,\omega},$$

что и требовалость доказать.

Глава IV

§1. Случай четырех множителей

Дальнейшее развитие идей, изложенных в третьей главе, приводит к рассмотрению оператора

$$U_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{V_1(\zeta)-V_1(z)}{\zeta-z}\right)^n \left(\frac{V_2(\zeta)-V_2(z)}{\zeta-z}\right)^n \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{V_3(\zeta)-V_3(z)}{\zeta-z}\right)^n \left(\frac{V_4(\zeta)-V_4(z)}{\zeta-z}\right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right|,$$

где $f \in L^p(\omega)$, $V_j(z)$ – комплекснозначные функции, определенные на комплексной плоскости и удовлетворяющие соотношению

$$|V_j(z) - V_j(\zeta)| \leq |z-\zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq 4.$$

Получение соответствующих оценок для оператора U_n^* требует проведения рассуждений, аналогичных тем, что были предприняты для оператора S_n^*. Для этого нам понадобятся вспомогательные операторы, связанные с U_n^*.

Фиксируем $\delta > 0$ и обозначим через $\varepsilon(z)$ измеримую функцию на $\mathbb{C}$, для которой $\varepsilon(z) \geq \delta$. Определим оператор

$$U_{n,\varepsilon} f(z) = \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} \left(\frac{V_1(\zeta)-V_1(z)}{\zeta-z}\right)^n \left(\frac{V_2(\zeta)-V_2(z)}{\zeta-z}\right)^n \times$$

$$\times\left(\frac{V_3(\zeta)-V_3(z)}{\zeta-z}\right)^n\left(\frac{V_4(\zeta)-V_4(z)}{\zeta-z}\right)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\sigma(\zeta). \qquad (38)$$

Введем обозначение

$$A(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=z+\lambda_1V_1(z)+\lambda_2V_2(z)+\lambda_3V_3(z)+\lambda_4V_4(z),$$

где $|\lambda_j|=\frac{1}{4}-\frac{1}{8n}$ и свяжем с оператором $U_{n,\varepsilon}$, определенным в (38), оператор $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ следующим образом:

$$S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=$$

$$=\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)}\frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{\Big(A(\zeta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)-A(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\Big)^2}. \qquad (39)$$

Поскольку

$$|A(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)-A(\zeta,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)|\geq$$

$$\geq|z-\zeta|-|\lambda_1|\cdot|V_1(z)-V_1(\zeta)|-|\lambda_2|\cdot|V_2(z)-V_2(\zeta)|-$$

$$-|\lambda_3|\cdot|V_3(z)-V_3(\zeta)|-|\lambda_4|\cdot|V_4(z)-V_4(\zeta)|=$$

$$=|z-\zeta|\cdot\Bigg(1-|\lambda_1|\frac{|V_1(z)-V_1(\zeta)|}{|z-\zeta|}-|\lambda_2|\frac{|V_2(z)-V_2(\zeta)|}{|z-\zeta|}-$$

$$-|\lambda_3|\frac{|V_3(z)-V_3(\zeta)|}{|z-\zeta|}-|\lambda_4|\frac{|V_4(z)-V_4(\zeta)|}{|z-\zeta|}\Bigg)\geq$$

$$\geq |z-\zeta| \cdot (1-|\lambda_1|-|\lambda_2|-|\lambda_3|-|\lambda_4|) = \frac{1}{2n}|z-\zeta|,$$

то $A(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ - обратимое отображение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на себя, удовлетворяющее условию Липшица.

Рассуждая по аналогии с оператором $M_{f,\varepsilon}$ из третьей главы, получаем оценку

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)|^p \, \omega(z) d\sigma(z) \leq$$

$$\leq b(p,c_0,|\lambda|) n^{2p} 4^p \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z).$$

В данных условиях можно сформулировать и доказать основной результат этой главы.

Теорема 4. *Справедлива оценка*

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1(p,c_0) n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

где c_0 – постоянная из условия Макенхаупта для веса ω.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится вспомогательное утверждение, которое для удобства восприятия будет доказано отдельно в следующем параграфе.

Лемма. *Для оператора $U_{n,\varepsilon}$ справедлива оценка*

$$\|U_{n,\varepsilon} f\|_{p,\omega} \leq \frac{b_1}{2} n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

где

$$\frac{b_1}{2} = \left(\widetilde{b}(p, c_0,) \left(\frac{32\pi^2 e^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2\pi}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

c_0 – постоянная из условия Макенхаупта для веса ω.

Теперь для доказательства теоремы остается заметить, что для каждого z_0 найдется функция $\varepsilon(z)$ такая, что

$$|U_n^* f(z_0)| \leq 2|U_{n,\varepsilon(z_0)} f(z_0)|.$$

Но так как оценка нормы $U_{n,\varepsilon} f(z)$ не зависит от выбора $\varepsilon(z)$, то для нормы $U_n^* f(z)$ верно

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1 n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

что и требовалость доказать.

§2. Доказательство леммы

Для доказательства леммы нам понадобится связь между операторами $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ и $U_{n,\varepsilon}$. Заметим, что оператор $S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$, определенный в (39), может быть записан в виде

$$S_{f,\varepsilon}(z,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)}\frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2(1+q)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)}q^k\frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2},\tag{40}$$

где

$$q=\lambda_1\frac{V_1(\zeta)-V_1(z)}{\zeta-z}+\lambda_2\frac{V_2(\zeta)-V_2(z)}{\zeta-z}+$$

$$+\lambda_3\frac{V_3(\zeta)-V_3(z)}{\zeta-z}+\lambda_4\frac{V_4(\zeta)-V_4(z)}{\zeta-z}$$

и

$$|q|\le|\lambda_1|+|\lambda_2|+|\lambda_3|+|\lambda_4|=1-\frac{1}{2n}<1.$$

Обозначим

$$\frac{V_1(\zeta)-V_1(z)}{\zeta-z}=A,\frac{V_2(\zeta)-V_2(z)}{\zeta-z}=B,$$

$$\frac{V_3(\zeta)-V_3(z)}{\zeta-z}=C,\frac{V_4(\zeta)-V_4(z)}{\zeta-z}=D,$$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{8n}=t,\lambda_1=te^{i\theta_1},\lambda_2=te^{i\theta_2},\lambda_3=te^{i\theta_3},\lambda_4=te^{i\theta_4},$$

тогда из (40) имеем:

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S_{f,\varepsilon}(z, te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2}, te^{i\theta_3}, te^{i\theta_4})\times$$

$$\times e^{-in(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)}d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 =$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\times$$

$$\times \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} q^k \frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2} e^{-in(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)}d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)}\frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} q^k e^{-in(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)}d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4\right) =$$

$$=(4n+1)t^{4n}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon(z)} A^n B^n C^n D^n \frac{f(\zeta)d\sigma(\zeta)}{(\zeta-z)^2},$$

так как

$$q^k = \left(te^{i\theta_1}A + te^{i\theta_2}B + te^{i\theta_3}C + te^{i\theta_4}D\right)^k =$$

$$= t^k\left(e^{i\theta_1}A + e^{i\theta_2}B + e^{i\theta_3}C + e^{i\theta_4}D\right)^k =$$

$$= t^k \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\geq 0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!} e^{i\theta_1\alpha_1}A^{\alpha_1}e^{i\theta_2\alpha_2}B^{\alpha_2}e^{i\theta_3\alpha_3}C^{\alpha_3}e^{i\theta_4\alpha_4}D^{\alpha_4} =$$

$$= t^k \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\geq 0\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\alpha_4!} e^{i(\theta_1\alpha_1+\theta_2\alpha_2+\theta_3\alpha_3+\theta_4\alpha_4)}A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}C^{\alpha_3}D^{\alpha_4}$$

и интеграл не равен нулю в случае $k = 4n$ для слагаемого

$$\frac{(4n)!}{n!n!n!n!}A^nB^nC^nD^n.$$

Обозначим

$$(4n+1)t^{4n}\frac{(4n)!}{(n!)^4} = C, \frac{1}{C} = \widetilde{C},$$

тогда

$$U_{n,\varepsilon}f(z) = \frac{\widetilde{C}}{(2\pi)^4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} S_{f,\varepsilon}(z, te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2}, te^{i\theta_3}, te^{i\theta_4})\times$$

$$\times e^{-in(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)}d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4.$$

Используем эту связь для оценки оператора $U_{n,\varepsilon}$. Из неравенства Гельдера имеем

$$|U_{n,\varepsilon}f(z)|^p \leq \left(\frac{\widetilde{C}}{(2\pi)^4}\right)^p \left((2\pi)^4\right)^{p-1}\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left|S_{f,\varepsilon}(z, te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2}, te^{i\theta_3}, te^{i\theta_4})\right|^p d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4,$$

откуда следует оценка

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |U_{n,\varepsilon} f(z)|^p \, \omega(z) d\sigma(z) \leq \frac{\widetilde{C}^p}{(2\pi)^4} \int\limits_{\mathbb{C}} \Bigg(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi}$$

$$\left| S_{f,\varepsilon}(z, te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2}, te^{i\theta_3}, te^{i\theta_4}) \right|^p d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \Bigg) \omega(z) d\sigma(z) =$$

$$= \frac{\widetilde{C}^p}{(2\pi)^4} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{C}} \left| S_{f,\varepsilon}(z, te^{i\theta_1}, te^{i\theta_2}, te^{i\theta_3}, te^{i\theta_4}) \right|^p \omega(z) d\sigma(z) \leq$$

$$\leq \widetilde{C}^p b(p, c_0, |\lambda|) n^{2p} 4^p \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z) \leq$$

$$\leq \widetilde{C}^p \widetilde{b}(p, c_0,) \log^p(n+1) n^{2p} 4^p \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^p \omega(z) d\sigma(z). \tag{41}$$

Оценим $\widetilde{C}$

$$t^{4n} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8n} \right)^{4n} = \frac{1}{4^{4n}} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{4n} = \frac{1}{4^{4n}} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{4n},$$

$$\widetilde{C} = \frac{4^{4n}}{4n+1} \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{4n} \frac{(n!)^4}{(4n)!}. \tag{42}$$

Используя формулу Стирлинга имеем

$$\frac{(n!)^4}{(4n)!} = \frac{\left(\sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}} \right)^4}{\sqrt{2\pi 4n} (\frac{4n}{e})^{4n} e^{\frac{\theta(4n)}{48n}}} =$$

$$= \frac{(2\pi n)^2(\frac{n}{e})^{4n}e^{\frac{\theta(n)}{3n}}}{2\sqrt{2\pi n}(\frac{4n}{e})^{4n}e^{\frac{\theta(4n)}{48n}}} \leq \frac{2\pi^2 e^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{4^{4n}}. \tag{43}$$

Тогда (42) с учетом (43) влечет оценку

$$\widetilde{C} \leq \frac{4^{4n}}{4n+1}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{4n}\frac{2\pi^2 e^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{4^{4n}} \leq$$

$$\leq \frac{16 \cdot 2\pi^2 \cdot e^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{\frac{3}{2}}}{4n+1} \leq \frac{32\pi^2 e^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}}}{4} = \frac{8\pi^2 e^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot n^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

Обозначим

$$\left(\widetilde{b}(p, c_0,)\left(\frac{32\pi^2 e^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2\pi}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{b_1}{2},$$

тогда из (41) и (44) имеем

$$\|U_{n,\varepsilon} f\|_{p,\omega} \leq \frac{b_1}{2} n^{\frac{5}{2}} \log(n+1)\|f\|_{p,\omega},$$

что и требовалось доказать.

§3. Частные случаи

Полученные результаты позволяют оценивать операторы специального вида для различных случаев выбора V_j. Пусть

$$|V_j(z) - V_j(\zeta)| \le |z - \zeta|, \quad \text{где} \quad z, \zeta \in \mathbb{C}, 1 \le j \le 4. \qquad (*)$$

Рассмотрим некоторые примеры:

1)$V_2 = \overline{V}_1, V_3 = z, V_4 = \overline{z}$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{|V_1(\zeta) - V_1(z)|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}} \left(\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right| \right\|_{p,\omega} \le$$

$$\le b_1 n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

2)$V_2 = \overline{V}_1, V_3 = x, V_4 = y \quad (z = x + iy, \zeta = \sigma + i\tau)$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \right| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{|V_1(\zeta) - V_1(z)|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}} \times$$

$$\times \left(\frac{\sigma - x}{\zeta - z} \right)^n \left(\frac{\tau - y}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} dm_2 \left| \right\|_{p,\omega} \le$$

$$\le b_1 n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

3) $V_2 = \overline{V}_1, V_3 = z, V_4 = x$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{|V_1(\zeta) - V_1(z)|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}} \left(\frac{\sigma - x}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} dm_2 \right| \right\|_{p,\omega} \le$$

$$\leq b_1 n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega},$$

4) $V_2 = \overline{V}_1, V_3 = z, V_4 = y$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{|V_1(\zeta) - V_1(z)|^{2n}}{(\zeta - z)^{2n}} \left(\frac{\tau - y}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} dm_2 \right| \right\|_{p,\omega} \leq$$

$$\leq b_1 n^{\frac{5}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}.$$

В частности, при $n = 1$ случаи 3) и 4) примут вид

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{|V_1(\zeta) - V_1(z)|^2 (\sigma - x) f(\zeta)}{(\zeta - z)^5} dm_2 \right| \right\|_{p,\omega} \leq b_1 \log 2 \|f\|_{p,\omega},$$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta - z|>\varepsilon} \frac{|V_1(\zeta) - V_1(z)|^2 (\tau - y) f(\zeta)}{(\zeta - z)^5} dm_2 \right| \right\|_{p,\omega} \leq b_1 \log 2 \|f\|_{p,\omega}.$$

В более сложных случаях требуется проверка условия $(*)$. Для функции $V(z) = e^{i|z|}$ воспользуемся известным неравенством

$$\left| e^{i\alpha} - 1 \right| \leq |\alpha|, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$|V(z) - V(\zeta)| = \left| e^{i|z|} - e^{i|\zeta|} \right| =$$

$$= \left| e^{i|\zeta|} \right| \cdot \left| e^{i(|z| - |\zeta|)} - 1 \right| \leq \big| |z| - |\zeta| \big| \leq |z - \zeta|$$

и результаты первой и третьей главы дают соответствующие оценки:

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{e^{i|\zeta|} - e^{i|z|}}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right| \right\|_{p,\omega} \le b(p,n)\|f\|_{p,\omega},$$

где функция $b(p,n)$ имеет степенной рост по n,

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{\left|e^{i|\zeta|} - e^{i|z|}\right|^{2n}}{(\zeta-z)^{2n}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right| \right\|_{p,\omega} \le$$

$$\le b(p,c_0) n^{\frac{3}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}.$$

Кроме того, если для функции $V(z)$ выполняется условие $(*)$, то оно также верно и для $W(z) = e^{i|V(z)|}$, так как

$$|W(z) - W(\zeta)| = \left| e^{i|V(z)|} - e^{i|V(\zeta)|} \right| =$$

$$= \left| e^{i|V(\zeta)|} \right| \cdot \left| e^{i(|V(z)| - |V(\zeta)|)} - 1 \right| \le$$

$$\le \big| |V(z)| - |V(\zeta)| \big| \le |V(z) - V(\zeta)| \le |z - \zeta|.$$

В этом случае для оператора из первой главы имеем

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{e^{i|V(\zeta)|} - e^{i|V(z)|}}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\sigma(\zeta) \right| \right\|_{p,\omega} \le b(p,n)\|f\|_{p,\omega},$$

и в частности для $V(z) = x$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{e^{i|\sigma|} - e^{i|x|}}{\zeta - z} \right)^n \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} dm_2 \right| \right\|_{p,\omega} \leq b(p,n) \|f\|_{p,\omega},$$

где функция $b(p,n)$ имеет степенной рост по n.

Пусть теперь

$$V(z) = p_1|z| + p_2|x| + p_3|y|,$$

тогда

$$\big|V(z) - V(\zeta)\big| = \big|p_1(|z| - |\zeta|) + p_2(|x| - |\sigma|) + p_3(|y| - |\tau|)\big| \leq$$

$$\leq |p_1| \cdot \big||z| - |\zeta|\big| + |p_2| \cdot \big||x| - |\sigma|\big| + |p_3| \cdot \big||y| - |\tau|\big| \leq$$

$$\leq |p_1| \cdot |z - \zeta| + |p_2| \cdot |x - \sigma| + |p_3| \cdot |y - \tau| \leq (|p_1| + |p_2| + |p_3|) \cdot |z - \zeta|,$$

то есть в условии теоремы 1

$$\mathrm{w} = |p_1| + |p_2| + |p_3|$$

и для оператора

$$T_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \left(\frac{e^{i(p_1|\zeta| + p_2|\sigma| + p_3|\tau|)} - e^{i(p_1|z| + p_2|x| + p_3|y|)}}{\zeta - z} \right)^n \times \right.$$

$$\left. \times \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma(\zeta) \right|$$

верна оценка

$$\|T_n^* f\|_{p,\omega} \le b(p,n)\cdot(|p_1|+|p_2|+|p_3|)^n\|f\|_{p,\omega}.$$

Пусть теперь для $V_j(z)$ верно

$$|V_j(z)-V_j(\zeta)| \le A_j|z-\zeta|,$$

тогда рассмотрим функции

$$\widetilde{V}_j(z)=\frac{1}{A_j}V_j(z)$$

для которых верно условие $(*)$. Так как в этом случае

$$V_j(z)=A_j\widetilde{V}_j(z),$$

то оценка оператора изменится на множитель $(A_1A_2A_3A_4)^n$.

Если $V_2=\overline{V}_1$, $V_4=\overline{V}_3$, то оператор U_n^* примет вид

$$U_n^* f(z)=\sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon}\frac{|V_1(\zeta)-V_1(z)|^{2n}|V_3(\zeta)-V_3(z)|^{2n}}{(\zeta-z)^{4n+2}}f(\zeta)d\sigma(\zeta)\right|.$$

Рассмотрим случай, когда V_j определены на замкнутых множествах E_j меры ноль ($E_2=E_1, E_4=E_3$). Обозначим

$$r_E(z)=dist(z;E),$$

тогда ясно, что

$$|r_{E_j}(z)-r_{E_j}(\zeta)| \le |z-\zeta|$$

и в качестве V_j можно взять r_{E_j}, однако более интересным является случай

$$V_j(z) = r_{E_j}^{1+i}(z).$$

Для его рассмотрения нам понадобится доказать неравенство

$$\left|a^{1+i} - b^{1+i}\right| \leq \sqrt{3}|a-b|, \text{где } a \geq b > 0.$$

Вместо этого докажем

$$\left|t^{1+i} - 1\right| \leq \sqrt{3}|t-1|, \text{где } t = \frac{a}{b} \geq 1.$$

Эти неравенства равносильны, так как

$$\left|a^{1+i} - b^{1+i}\right| = \left|b^{1+i}\right| \cdot \left|\left(\frac{a}{b}\right)^{1+i} - 1\right| =$$

$$= |b| \cdot \left|e^{ilogb}\right| \cdot \left|\left(\frac{a}{b}\right)^{1+i} - 1\right| = |b| \cdot \left|\left(\frac{a}{b}\right)^{1+i} - 1\right|.$$

После возведения в квадрат имеем

$$\left|t^{1+i} - 1\right|^2 \leq 3(t-1)^2.$$

Так как

$$t^{1+i} = t \cdot e^{ilogt} = t(\cos\log t + i\sin\log t),$$

то обозначив $\log t = \varphi$ получим

$$\left|t^{1+i} - 1\right|^2 = (t\cos\varphi - 1)^2 + (t\sin\varphi)^2 = t^2 - 2t\cos\varphi + 1 =$$

$$= t^2 - 2t + 1 + 2t(1-\cos\varphi) = (t-1)^2 + 4t\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

После этого осталось показать, что

$$4t\sin^2\frac{\varphi}{2} \le 2(t-1)^2.$$

Так как

$$4t\sin^2\frac{\varphi}{2} \le 4t,$$

то для $t \ge 4$ неравенство очевидно. При $1 \le t < 4$ имеем

$$\sin\left(\frac{\log t}{2}\right) \ge 0,$$

поэтому докажем

$$\sqrt{2t}\sin\frac{\varphi}{2} \le t-1.$$

Для этого рассмотрим функцию

$$f(t) = \sqrt{2t}\sin\frac{\varphi}{2} - t + 1,$$

для которой

$$f'(t) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\frac{\varphi}{2}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right) - 1 \le \frac{1}{\sqrt{t}} - 1.$$

Так как $f(1) = 0$ и $f'(t) < 0$ при $t > 1$, то справедливость неравенства доказана.

Пусть теперь

$$V_1(z) = r_{E_1}^{1+i}(z), V_2(z) = \overline{V}_1(z),$$

$$V_3(z) = r_{E_3}^{1+i}(z), V_4(z) = \overline{V}_3(z),$$

тогда например

$$|V_1(z)-V_1(\zeta)| = \left|r_{E_1}^{1+i}(z)-r_{E_1}^{1+i}(\zeta)\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{3}\,|r_{E_1}(z)-r_{E_1}(\zeta)| \leq \sqrt{3}|z-\zeta|$$

и для оператора U_n^* верна оценка

$$\|U_n^* f\|_{p,\omega} \leq b_1(p,c_0)3^{2n}n^{\frac{5}{2}}\log(n+1)\|f\|_{p,\omega}.$$

При этом сам оператор может быть записан в виде

$$U_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{q_{E_1}^n(z,\zeta)q_{E_3}^n(z,\zeta)}{(\zeta-z)^{4n+2}}f(\zeta)d\sigma(\zeta)\right|,$$

где

$$q_{E_j}(z,\zeta) = r_{E_j}^2(z) - 2r_{E_j}(z)r_{E_j}(\zeta)\cos\left(\log\frac{r_{E_j}(z)}{r_{E_j}(\zeta)}\right) + r_{E_j}^2(\zeta),$$

так как после обозначения

$$\log r_{E_j}(z) = \alpha,\ \log r_{E_j}(\zeta) = \beta$$

имеем

$$\left|r_{E_j}^{1+i}(z)-r_{E_j}^{1+i}(\zeta)\right|^2 = \left|r_{E_j}(z)e^{i\alpha}-r_{E_j}(\zeta)e^{i\beta}\right|^2 =$$

$$= \left|r_{E_j}(z)e^{i(\alpha-\beta)}-r_{E_j}(\zeta)\right|^2 =$$

$$= r_{E_j}^2(z) - 2r_{E_j}(z)r_{E_j}(\zeta)\cos(\alpha-\beta) + r_{E_j}^2(\zeta).$$

Применяя подобные рассуждения к оператору S_n^* получим

$$S_n^* f(z) = \sup_{\varepsilon>0}\left|\int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{q_E^n(z,\zeta)}{(\zeta-z)^{2n+2}}f(\zeta)d\sigma(\zeta)\right|$$

с соответствующей оценкой

$$\|S_n^* f\|_{p,\omega} \le b_2(p, c_0) 3^n n^{\frac{3}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}.$$

Рассмотрим еще один пример сингулярного интеграла. Пусть $\varphi(a)$ – вещественная непрерывная функция на $[0;\infty)$ со свойствами

$$|\varphi(a)| \le C_1, a|\varphi'(a)\log a| \le C_2, a > 0.$$

Тогда для функции

$$W(a) = a^{1+i\varphi(a)}$$

верно следующее

$$W'(a) = a^{i\varphi(a)} + i\varphi(a)a^{i\varphi(a)} + ia\varphi'(a)a^{i\varphi(a)}\log a,$$

$$|W'(a)| \le \sqrt{1 + (C_1 + C_2)^2} \stackrel{\text{def}}{=} C_3,$$

что влечет неравенство

$$|W(a) - W(b)| = \left| \int\limits_a^b \left(t^{1+i\varphi(t)}\right)' dt \right| \le C_3 |a - b|.$$

В качестве примера можно рассматривать

$$\varphi(a) = C_0 + C\frac{a^\beta}{a^\beta + 1}, \beta > 0.$$

Далее пусть E – замкнутое множество меры ноль. Обозначим

$$r(z) = dist(z; E),$$

тогда для функции

$$V(z) = r(z)^{1+i\varphi(r(z))}$$

справедливо неравенство

$$|V(z) - V(\zeta)| \le C_3 |r(z) - r(\zeta)| \le C_3 |z - \zeta|.$$

В этом случае с учетом того, что

$$|V(z) - V(\zeta)|^2 = r^2(z) + r^2(\zeta) -$$

$$-2r(z)r(\zeta)\cos\Big(\varphi(r(z))\log r(z) - \varphi(r(\zeta))\log r(\zeta)\Big) \stackrel{\text{def}}{=} q(z;\zeta)$$

теорема 3 влечет оценку

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{q^n(z;\zeta)}{(\zeta-z)^{2n+2}} f(\zeta) d\sigma(\zeta) \right| \right\|_{p,\omega} \le$$

$$\le b_3(p, c_0) C_3^{2n} n^{\frac{3}{2}} \log(n+1) \|f\|_{p,\omega}$$

и в частности при $n = 1$

$$\left\| \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|\zeta-z|>\varepsilon} \frac{q(z;\zeta)}{(\zeta-z)^{4}} f(\zeta) d\sigma(\zeta) \right| \right\|_{p,\omega} \le$$

$$\le b_4(p, c_0) C_3^{2} \log 2 \|f\|_{p,\omega}.$$

Список литературы

1. Benedek A., Panzone R., Continuity properties of the Hilbert transform, J. Func. Anal., 7, N2, 217–234, 1971

2. Calderon A.P., Commutators of singular integral operators, Proc. Mat. Acad. Sei., 53, 1092–1099, 1965

3. Coifman R.R., Meyer Y., Le double commutateur, Anal. Harm. D'Orsay, N180, 1976

4. Coifman R.R., McIntosh A., Meyer Y., L'integrale de Cauchy definit un operateur borne sur L^2 pour les courbes lipschitziennes, Ann. of Math., 116, 361–387, 1982

5. Calderon A.P., Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators, Proc. Nat. Acad. Sei., USA, 74, 1324–1327, 1977

6. Широков Н.А., Оценки в $L^p(\mathbb{C})$ некоторых сингулярных интегральных операторов, Изв. АН Арм. ССР, XV, N1, 63–76, 1980

7. Stein E.M., Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993

8. Coifman R.R., Fefferman C., Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Math., 51, 241–250, 1974

9. Cordoba A., Fefferman C., A weighted norm inequality for singular integrals, Studia Math., 57, 97–101, 1976

Работы автора по теме диссертации

1. Меркулов А.С., Широков Н.А., Весовые оценки коммутаторов Кальдерона на комплексной плоскости, Вестник СПбГУ, 1, N3, 48–54, 2010

2. Меркулов А.С., Широков Н.А., Применение весовых оценок коммутаторов Кальдерона, Вестник СПбГУ, 1, N2, 52–57, 2012

3. Меркулов А.С., Сингулярные интегральные операторы, аналогичные коммутаторам Кальдерона, Вестник СПбГУ, 1, N1, 91–96, 2013