ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Дружинин Андрей Эдуардович

Теоремы о гомотопической инвариантности и этальном вырезании для предпучков с $Witt$-трансферами

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
чл.-корр. РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор И.А. Панин

Санкт-Петербург — 2014 г.

Оглавление

Введение

Различные теории когомологий играют важную роль в алгебраической геометрии. Для их исследования используются категории мотивов, которые помогают вычислять и доказывать свойства известных теорий когомологий, а также конструировать новые.

Данная диссертация является частью решения задачи по построению триангулированной категории $DWM(k)$, называемой категорией $Witt$-мотивов, и доказательству ее основных свойств. Теории когомологий, строящиеся по ней, будут наделены действием кольца Витта основного поля. Роль и место этой категории видны из следующей гипотетической картинки. Стабильная мотивная гомотопическая категория Воеводского $SH(k)$ снабжена естественной инволюцией. Поэтому рационально она разбивается в прямую сумму двух категорий $SH(k)^+$ и $SH(k)^-$. Согласно теореме Мореля категория $SH(k)^+$ эквивалентна рациональной категории мотивов Воеводского $DM(k)_{\mathbb{Q}}$. Ожидается, что категория $SH(k)^-$ эквивалентна рациональной категории $Witt$-мотивов $DWM(k)_{\mathbb{Q}}$.

Это одна из причин, почему И.А. Паниным была поставлена задача построить категорию $Witt$-мотивов по образцу конструкции Воеводского для категории мотивов $DM(k)$. Построить и доказать ее основные свойства. Другая причина в том, что должен быть естественный функтор

$$R_W : SH(k) \to DWM(k),$$

который является алгебраическим аналогом функтора вещественной реализации. (Функтор $SH(k) \to DM(k)$ следует рассматривать как алгебраический аналог функтора комплексной реализации). Наконец, третья причина в том, что построение $Witt$-мотивов и решение связанных с этим задач – это отличный полигон для изучения оснащенных соответствий Воеводского (здесь многое упрощается, но не все, и возникает возможность нахождения правильных формулировок и методов работы с оснащенными соответствиями).

В июне 2014 года выяснилось, что в построении категории $Witt$-мотивов заинтересован М. Левин (один из главных экспертов по A^1-гомотопиям и их приложениям). Кроме того, родственной темой занялись П. Остваер (Норвегия), Ж. Фазель (Швейцария), М. Шлихтинг (Англия). Наконец, выяснилось, что имеется тесная гипотетическая связь $Witt$-мотивов с линейными оснащенными мотивами из работы Г. Гаркуши и И. Панина.

Забегая вперед, укажем на некоторые свойства предполагаемой категории $Witt$-мотивов $DWM(k)$. Это полезно сделать, чтобы пояснить, почему важны теоремы, доказываемые в диссертации. Прежде всего, в диссертации вводится категория $Wor(k)$. Ее объекты – это гладкие (аффинные) многообразия над полем k, а морфизмы $Wor(X,Y)$ – это группа Витта некоторой категории с двойственностью, строящейся по X и Y. Категория $Wor(k)$ снабжена функтором $Sm(k) \xrightarrow{i} Wor(k)$, который тождественен на объектах. Предпучки абелевых групп на категории $Wor(k)$ называются *предпучками с $Witt$-трансферами. Пучок Нисневича с $Witt$-трансферами — это такой предпучок $\mathcal{F}$ с $Witt$-трансферами, что ограничение $\mathcal{F}$ на категорию $Sm(k)$ является пучком Нисневича.*

Как легко вывести из теоремы A, сформулированной ниже во введении, категория $SN_{witt}Tr(k)$ пучков Нисневича с $Witt$-трансферами является *абелевой.* Эта категория лежит в основе определения категории $Witt$-мотивов $DWM(k)$, которое мы сейчас дадим. Сначала рассматривается производная категория $DSN_{witt}Tr(k)$ абелевой категории $SN_{witt}Tr(k)$, а затем в производной категории $DSN_{witt}Tr(k)$ рассматривается полная подкатегория $DWM(k)$, состоящая из таких комплексов $A^\bullet$, все пучковые когомологии которых $h^i(A^\bullet)$ являются гомотопически инвариантными пучками Нисневича (с $Witt$-трансферами). *Категория $DWM(k)$ и называется категорией $Witt$-мотивов поля k.* Объекты категории $DWM(k)$ называются *мотивными комплексами.*

Гладкому k-многообразию Y можно сопоставить его $Witt$-мотив $M^W(Y)$, ковариантно зависящий от Y. Одно из ключевых *гипотетических* свойств $Witt$-мотива $M^W(Y)$ следующее: для любого мотивного комплекса $A^\bullet$ должны иметь место естественные изоморфизмы

$$H^p_{Nis}(Y, A^\bullet) = Hom_{DWM(k)}(M(Y), A^\bullet[p]).$$

В частности, это свойство *гипотетически* должно быть выполнено для любого гомотопически инвариантного пучка Нисневича $\mathcal{F}$ с $Witt$-трансферами, рассмотренного как чистый комплекс с пучком $\mathcal{F}$ в позиции номер ноль. Т.е. должны быть справедливы равенства

$$H^p_{Nis}(Y, \mathcal{F}) = Hom_{DWM(k)}(M(Y), \mathcal{F}[p]).$$

Мотив $M^W(Y)$ *гипотетически* должен быть гомотопически инвариантен, т.е. $M^W(Y) = M^W(Y \times \mathbb{A}^1)$. Поэтому естественно ожидать, что для каждого p функтор когомологий $Y \mapsto H^p_{Nis}(Y, \mathcal{F})$ гомотопически инвариантен для таких пучков $\mathcal{F}$. Т.е. для таких пучков

$\mathcal{F}$ естественно ожидать равенство

$$H^p_{Nis}(Y, \mathcal{F}) = H^p_{Nis}(Y \times \mathbb{A}^1, \mathcal{F}).$$

Оказывается верно и обратное: если доказать, что для гомотопически инвариантного предпучка G с $Witt$-трансферами ассоциированный пучок Нисневича $G^{\sim}$ сам снабжён $Witt$-трансферами и, что предпучки когомологий $Y \mapsto H^p_{Nis}(Y, G^{\sim})$ гомотопически инвариантны, то можно доказать, что указанная выше категория $DWM(k)$ и ее объекты $M^W(Y)$ обладают всеми ожидаемыми общими свойствами. В частности, $Witt$-мотив $M^W(Y)$ действительно лежит в категории $DWM(k)$, является гомотопически инвариантным и удовлетворяет этальному вырезанию.

ЦЕЛЬ НАСТОЯЩЕЙ РАБОТЫ — пройти "половину расстояния" на пути к доказательству теоремы о том, что для гомотопически инвариантного предпучка G с $Witt$-трансферами ассоциированный пучок Нисневича $G^{\sim}$ сам снабжён $Witt$-трансферами и, что предпучки когомологий $Y \mapsto H^p_{Nis}(Y, G^{\sim})$ гомотопически инвариантны.

Перечислим основные результаты диссертации.

Теорема А. *Для произвольного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами существует единственная структура предпучка с $Witt$-трансферами на ассоциированном пучке в топологии Нисневича $\mathscr{F}_{Nis}$, такая, что канонический гомоморфизм $\varepsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_{Nis}$ является гомоморфизмом предпучков с $Witt$-трансферами.*

Эта теорема говорит, что категория пучков Нисневича с трансферами абелева. Согласно нумерации диссертации — это теорема 8.

Теорема Б. *Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами, ассоциированный пучок в топологии Нисневича $\mathscr{F}_{Nis}$ гомотопически инвариантен.*

Эта теорема говорит, в частности, что $Witt$-мотив $M^W(Y)$ любого гладкого многообразия Y действительно лежит в категории $DWM(k)$, т.е. является мотивным комплексом. Согласно нумерации диссертации — это теорема 6.

Доказательство теоремы Б основано, в свою очередь, на серии из нескольких теорем, каждая из которых интересна и важна сама по себе.

Теорема В. *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами, тогда для пары вложенных открытых по Зарисскому подмножеств $U \subset V$ аффинной прямой $\mathbb{A}^1_K$ над полем K, являющимся полем частных некоторого гладкого многообразия над k, гомоморфизм ограничения*

$$\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$$

инъективен.

Согласно нумерации диссертации — это теорема 2. Эта теорема даёт возможность, в частности, удобно сформулировать следующий результат.

Теорема Г. (вырезание на аффинной прямой). *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами, тогда для двух вложенных окрестностей по Зарисскому $U \subset V$ точки z в $\mathbb{A}^1_K$ над полем K, являющимся полем частных некоторого гладкого многообразия над k, ограничение*

$$i^*\colon \frac{\mathscr{F}(V-z)}{\mathscr{F}(V)} \to \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)}$$

является изоморфизмом (i обозначает вложение U в V).

Согласно нумерации диссертации — это теорема 3. Следствием теорем В и Г является то, что гомотопически инвариантный предпучок $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами при ограничении на аффинную прямую становится пучком Зарисского на ней.

Согласно теореме об инъективносити на локальных схемах доказанной в [10] для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами и точки x (не обязательно замкнутой) гладкого аффинного многообразия X гомоморфизм $\mathscr{F}(\mathcal{O}_{X,x}) \to \mathscr{F}(k(X))$ инъективен. Это позволяет в удобной форме сформулировать следующий результат.

Теорема Д. (этальное вырезание в размерности 1). *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами и $\pi\colon X' \to X$ — этальный морфизм гладких* *кривых над полем K, являющимся полем частных некоторого гладкого многообразия. Пусть $z \in X$ — замкнутая точка, такая, что $\pi^{-1}(z)$ состоит из одной точки, скажем z', и индуцированный на полях вычетов этих точек гомоморфизм является изоморфизмом. Тогда π индуцирует изоморфизм*

$$\pi^*\colon \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathscr{F}(U'-z')}{\mathscr{F}(U')},$$

где $U = Spec(\mathcal{O}_{X,z})$, $U' = Spec(\mathcal{O}_{X',z'})$

Согласно нумерации диссертации — это теорема 5. Следствием теорем В, Г и Д является то, что для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами ассоциированный пучок Нисневича $\mathscr{F}^{\sim}_{Nis}$ обладает следующим свойством: его значение на любом открытом по Зарисскому подмножестве U аффинной прямой равно значению на U исходного предпучка, т.е. $\mathscr{F}(U) = \mathscr{F}^{\sim}_{Nis}(U)$. Это свойство вместе с упомянутой выше теоремой об инъективносити на локальных схемах и приводит быстро к доказательству теоремы Б.

Имеется еще ряд результатов, которые понадобятся для доказательства в будущем теоремы о гомотопической инвариантности когомологий гомотопически инвариантного пучка с $Witt$-трансферами. Это теоремы Е и Ж. Теорема Е – это специальный случай вырезания по Зарисскому на аффинной прямой над локальной базой. Согласно нумерации диссертации — это теорема 7. Теорема Ж — это этальное вырезание в размерности n для любого n. Согласно нумерации диссертации — это теорема 9.

Теперь уместно сказать несколько слов о категории $Wor(k)$, с помощью которой было определено, что такое предпучок с $Witt$-трансферами и, что такое пучок Нисневича с $Witt$-трансферами. Напомним, что у Воеводского объекты категории Cor — это гладкие многообразия, а морфизмы $Cor(X,Y)$ — это свободная абелева группа, порожденная замкнутыми неприводимыми подмногообразиями $Z \subset X \times Y$, которые конечны и сюръективны над какой-либо неприводимой компонентой X. Объекты нашей категории $Wor(k)$ — это гладкие многообразия над k. Группа морфизмов $Wor(X,Y)$ определяется следующим образом (детали даны в пункте 1.2 текста диссертации). Рассматривается категория $P(X,Y)$ конечнопорожденных $k[X \times Y]$-модулей, которые конечнопорождены и проективны как $k[X]$-модули. На этой категории имеется инволюция $*$. А именно, если $P \in P(X,Y)$, то по определению $P^* = Hom_{k[X]}(P, k[X])$. Действие $k[Y]$ на P^* индуцировано действием $k[Y]$ на P.Квадратичное пространство в категории $P(X,Y)$ с инволюцией $*$ — это пара $(P, \phi : P \cong P^*)$, в которой ϕ — симметрический изоморфизм $k[X \times Y]$-модулей. *Группа $Wor(X,Y)$ — это по определению группа Витта классов изоморфизма квадратичных пространств в категории $P(X,Y)$ с инволюцией $*$.*

Композиция морфизмов $(P, \phi) \in Wor(X,Y)$ и $(Q, \psi) \in Wor(Y,Z)$ определяется как $(P \otimes_{k[Y]} Q, \phi \otimes \psi) \in Wor(X,Z)$. Тождественный морфизм X в себя — это пара $(k[X], id_{k[X]})$, где $k[X]$ рассматривается как $k[X \times X]$ естественным образом. Упомянутый выше функтор $i : SmAff/k \to Wor(k)$ определяется просто (с использованием графика; см. Замечание 3).

Таким образом, у нас в руках есть все исходные определения и можно начинать доказывать сформулированные выше теоремы А–Д, Е и Ж. Это и делается в основном тексте диссертации.

Опишем содержание глав диссертации. Глава 1 содержит описание используемых в дальнейшем понятий и утверждений, являющихся базовыми для дальнейшего текста диссертации. Параграф 1.1 содержит обзор используемых определений и утверждений о группах Витта и топологии Нисневича. В параграфе 1.2 даётся определение используемых $Witt$-соответствий, доказываются их базовые основные свойства и вводится основной объект исследования — предпучки с $Witt$-трансферами.

Глава 2 посвящена свойствам предпучков с $Witt$-трансферами по отношению к топологии Зарисского. В параграфе 2.1 доказана теорема В, в параграфе 2.2 — теорема Г, и в параграфе 2.3 — теорема о гомотопической инвариантности ассоциированного пучка в топологии Зарисского.

Глава 3 содержит теоремы связанные с топологией Нисневича, а именно: в параграфе 3.1 доказана теорема Д, и в параграфе 3.2 — теорема Б.

Наконец, глава 4 содержит доказательства теорем Е, А и Ж, в параграфах 4.1, 4.2 и 4.3 соответственно, а в параграфе 4.4 приведено описание плана построения категории $Witt$-мотивов, аналогично тому, как построена категория $DM^{-}(k)$.

Глава 1. Предварительная

1.1 Предварительные сведения

Исследуемые трансферы определяются как группы Витта некоторых категорий с двойственностью. Напомним определение категории с двойственностью.

Определение 1 *Двойственность на точной категории $\mathcal{C}$ — это контравариантный точный эндофунктор $D\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ вместе с естественным изоморфизмом $\varpi\colon Id_C \to D^2$.*

Определение 2 (Квадратичное пространство) *Симметрическое квадратичное пространство в точной категории с двойственностью $\mathcal{C}$ — это пара (P, q_P), состоящая из объекта P категории $\mathcal{C}$ и изоморфизма $q_P\colon P \to D(P)$, такого, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} D^2(P) \arrow[r, "D(\varpi)"] & D(P) \arrow[d, equal] \\ A \arrow[u, "\varpi"] \arrow[r, "\varpi"] & D(P) \end{tikzcd}$$

(это условие симметричности).

Определение 3 *Симметрическое квадратичное пространство (P, q_P) называется метаболическим, если существует подобъект подпространство L в P, такой, что последовательность*

$$L \overset{i}{\hookrightarrow} P \overset{D(i)\circ q_P}{\to} D(L)$$

является короткой точной последовательностью.

Определение 4 *Группа Витта $W(\mathcal{C}, D)$ категории с двойственностью — это факторгруппа $\frac{GW(\mathcal{C},D)}{N(\mathcal{C},D)}$ группы Гротендика группоида симметрических квадратичных пространств по подгруппе, порождённой метаболическими пространствами.*

Лемма 1.1.1 *Пусть (P, q_P) — квадратичное пространство и L — его подлагранжево подпространство, тогда квадратичное пространство (Q, q_Q), определяемое как когомологии последовательности $L \xrightarrow{i} P \xrightarrow{D(i)\circ q_P} D(L)$, задаёт тот же элемент в группе Витта, что и (P, q_P).*

Приведём также определение топологии Нисневича и некоторые используемые свойства.

Определение 5 *Топология Нисневича на категории гладких схем Sm — это топология Гротендика, в которой покрытиями являются этальные морфизмы $t\colon \mathfrak{U} \to X$, такие, что для любой точки $x \in X$ существует точка $u \in \mathfrak{U}$, для которой t задаёт изоморфизм $u \to x$.*

Определение 6 (Локальная гензелева схема) *Локальная схема U называется гензелевой в точке x, если для любого морфизма $u\colon U' \to U$, этального в точке x', такого, что $u(x') = x$ и $u^* : k(x) \to k(x')$ — изоморфизм, существует сечение $s\colon U \to U'$ такое, что $s(x) = x'$.*

Далее будет использоваться следующее утверждение, доказанное Гротендиком.

Теорема 1 *Пусть Y — локальная гензелева схема, и пусть X — конечная схема над Y, тогда $X = \coprod\limits_{i-1}^{n} X_i$ распадается в дизъюнктное объединение локальных гензелевых схем X_i.*

1.2 Предпучки с $Witt$-трансферами

В этом параграфе вводится понятие предпучков с $Witt$-трансферами через определение категории Wor, а также сопутствующих понятий. Приведено детальное обсуждение используемых в дальнейшем базовых свойств. Пусть Sm_k — категория аффинных гладких многообразий над произвольным полем k.

Определение 7 ($Proj(p)$) *Для морфизма аффинных схем $p\colon S \to U$ определим категорию $Proj(p)$ как полную подкатегорию в категории $k[S]$-модулей, состоящую из модулей, являющихся конечнопорождёнными проективными над $k[U]$, и снабдим $Proj(p)$ функтором двойственности $D_p\colon Proj(p) \to Proj(p)$*

$$D_p(M) = Hom_{k[U]}(M, k[U]).$$

Здесь $D_p(M)$ рассматривается как $k[S]$-модуль по следующему правилу: для $\rho \in D_p(M)$ и $f \in k[S]$ положим $(f \cdot \rho)(m) = \rho(f \cdot m)$.

Замечание 1 *Для двух морфизмов $S' \xrightarrow{f} S \xrightarrow{p} U$ определён согласованный с двойственностью функтор ограничения скаляров (или прямого образа) $f_*\colon Proj(p \circ f) \to Proj(p)$.*

Для двух морфизмов $p\colon S \to U$, $u\colon U' \to U$ определён согласованный с двойственностью функтор замены базы (или обратного образа) $u^*\colon Proj(p) \to Proj(p')$, где $p'\colon S \times_U U' \to U'$ — канонический морфизм.

Приведём определения аддитивной категории Wor_k и предпучков с $Witt$-трансферами.

Определение 8 **(**Wor_k**)**

- $Ob\,Wor_k = Ob\,Sm_k$ *(аффинные многообразия над полем k);*
- $Wor_k(X, Y) = W(Proj(pr), D_{pr})$, *где pr — проекция $Y \times X$ на X, а $W(Proj(pr), D_{pr})$ — группа Витта точной категории с двойственностью (Определения 4 и 7.) Типичный пример морфизма из X в Y — это квадратичное пространство $({}_{k[Y]}P_{k[X]}, \phi)$, где ${}_{k[Y]}P_{k[X]}$ — $k[Y \times X]$-модуль, конечнопорождённый как $k[X]$-модуль, и где*

$$\phi : {}_{k[Y]}P_{k[X]} \to Hom_{k[X]}(P, k[X])$$

— симметрический изоморфизм $k[Y \times X]$-модулей;

- *композиция морфизмов $\Phi \in Wor_k(X, Y)$ и $\Psi \in Wor_k(Y, Z)$ определяется как тензорное произведение над $k[Y]$ соответствующих квадратичных пространств;*
- *тождественный морфизм определяется диагональю, т.е. модулем ${}_{k[X]}k[X]_{k[X]}$ и каноническим изоморфизмом $k[X] \simeq Hom_{k[X]}(k[X], k[X])$.*

В следующем замечании подробно описано как устроена композиция в Wor_k.

Замечание 2 (о композиции) *Для определения композиции нужно рассмотреть тензорное произведение как функтор точных категорий с двойственностью, между произведением категорий $Proj(pr_{Z,Y}) \times Proj(pr_{Y,X})$ и категорией $Proj(pr_{Z,X})$, где произведение категорий рассматривается как категория с двойственностью с помощью композиции двух коммутирующих функторов, определяющих двойственности на сомножителях. Т.е. рассмотрим пару $(\otimes_{Z,Y,X}, \varepsilon_{Z,Y,X})$ из функтора $\otimes_Y\colon Proj(pr_{Z,Y}) \times Proj(pr_{Y,X}) \to Proj(pr_{Z,X})$ и естественного изоморфизма контравариантных функторов между этими категориями $\otimes_Y(D_{Z,Y} \times D_{Y,X}) \simeq D_{Z,X}(\otimes_Y)$, являющегося композицией естественных изоморфизмов*

$$D_Y({}_{k[Z]}Q_{k[Y]})\otimes_{k[Y]}D_X({}_{k[Y]}P_{k[X]}) \overset{def}{=} Hom_{k[Y]}({}_{k[Z]}Q_{k[Y]},k[Y])\otimes_{k[Y]}Hom_{k[X]}({}_{k[Y]}P_{k[X]},k[X]) \simeq$$
$$\simeq Hom_{k[Y]}({}_{k[Z]}Q_{k[Y]},Hom_{k[X]}({}_{k[Y]}P_{k[X]},k[X])) \simeq$$
$$\simeq Hom_{k[X]}({}_{k[Z]}Q_{k[Y]}\otimes_{k[Y]}{}_{k[Y]}P_{k[X]},k[X]) \overset{def}{=} D_X({}_{k[Z]}Q_{k[Y]}\otimes{}_{k[Y]}P_{k[X]})$$

Тогда пары $({}_{k[Z]}Q_{k[Y]},{}_{k[Y]}P_{k[X]})$, *содержащие метаболические пространства, переходят в силу точности функтора и сохранения двойственности в метаболические. Поэтому определён гомоморфизм* $\circ\colon W(Proj(pr_{Z,Y}))\times W(Proj(pr_{Y,X}))\to W(Proj(pr_{Z,X}))$.

Ассоциативность следует из того, что для четырёх схем Z, Y, X *и* W *определённые двумя способами функторы между произведением естественно изоморфны*

$$Proj(pr_{Z,Y})\times Proj(pr_{Y,X})\times Proj(pr_{X,W})\to Proj(pr_{Z,W}),$$

а именно, функторы, полученные композициями

$$\otimes_{Z,X,W}\circ(\otimes_{Z,Y,X}\times Proj(pr_{X,W}))\ and\ \otimes_{Z,Y,W}\circ(Proj(pr_{Z,Y,W})\times\otimes_{Y,X,W}).$$

Т.е., поскольку сами функторы тензорного произведения связаны естественным изоморфизмом, нужно проверить совпадение естественных изоморфизмов, обеспечивающих согласованность двойственностей

$$\varepsilon_{(Z,Y,X),W}=\varepsilon_{Z,(Y,X,W)}\colon\ \otimes_{Z,Y,X,W}\circ(D_Y\times D_X\times D_W)\to D_W\circ\otimes_{Z,Y,X,W},$$

где

$$\varepsilon_{(Z,Y,X),W}=(\varepsilon_{Z,Y,X}\times D_W)\cdot\varepsilon_{Z,X,W}$$

и

$$\varepsilon_{Z,(Y,X,W)}=(D_X\times\varepsilon_{Y,X,W})\cdot\varepsilon_{Z,Y,W}$$

(т.е., на самом деле, совпадение композиций $\mu\circ\varepsilon_{(Z,Y,X),W}=\varepsilon_{Z,(Y,X,W)}\circ\mu$*).*

Для этого достаточно проверить совпадение действия на разложимых тензорах. Описанный выше изоморфизм

$$\varepsilon_{{}_{k[Z]}Q_{k[Y]},{}_{k[Y]}P_{k[X]}}=\varepsilon_{Z,Y,X}({}_{k[Z]}Q_{k[Y]}\times{}_{k[Y]}P_{k[X]})\colon Hom({}_{k[Z]}Q_{k[Y]},k[Y])\otimes_{k[Y]}Hom({}_{k[Y]}P_{k[X]},k[X])\to$$

$$\to Hom({}_{k[Z]}Q_{k[Y]} \otimes {}_{k[Y]}P_{k[X]}, kX)$$

переводит разложимый тензор $u \otimes t$ в гомоморфизм

$$\varepsilon_{{}_{k[Z]}Q_{k[Y]},{}_{k[Y]}P_{k[X]}}(u \otimes t)\colon q \otimes p \mapsto t(u(q) \cdot p).$$

Поэтому для трёх элементов $r \in {}_{k[Z]}R_{k[Y]}$, $q \in {}_{k[Y]}Q_{k[X]}$, $p \in {}_{k[X]}P_{k[W]}$ и линейных гомоморфизмов

$$v \in Hom_{k[Y]}({}_{k[Z]}R_{k[Y]}, k[Y]), u \in Hom_{k[X]}({}_{k[Y]}Q_{k[X]}, k[X]), t \in Hom_{k[W]}({}_{k[X]}P_{k[W]}, k[W])$$

имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \varepsilon_{R\otimes Q,P}(\varepsilon_{R,Q}(v \otimes u) \otimes t)((r \otimes q) \otimes p) &= t(\varepsilon_{R,Q}(v \otimes u)(r \otimes q) \cdot p) = \\ &= t(u(v(r) \cdot q) \cdot p) = \\ &= \varepsilon_{Q\otimes P}(u \otimes t)(v(r) \cdot (q \otimes p)) = \varepsilon_{R,Q\otimes P}(v \otimes \varepsilon_{Q\otimes P}(u \otimes t))(r \otimes (q \otimes p)). \end{aligned}$$

Ассоциативность композиции проверена.

Замечание 3 *Определён функтор $i : Sm_k \to Wor_k$, переводящий регулярное отображение $f\colon X \to Y$ в морфизм, определяемый модулем ${}_{k[X]}k[X]_{k[Y]}$ и каноническим изоморфизмом $k[X]_{k[Y]} \simeq Hom_{k[X]}(k[X]_{k[Y]}, (k[X])$. При этом композиция морфизмов в Wor_k справа или слева с образом отображения f при этом вложении задаётся квадратичным пространством, получающимся с помощью прямого или обратного образа вдоль f соответственно, т.е.*

$$\begin{aligned} f \circ w &= red_{f\times W}(w), w \in Wor_k(W, X), \\ w \circ f &= ind_f(w), w \in Wor_k(Y, Z). \end{aligned}$$

Действительно, если $w = [(P, q_P)] \in Wor(W, X)$, то композиция

$$f \circ w = [({}_{k[Y]}k[X]_{k[X]} \otimes_{k[X]} {}_{k[X]}P_{k[W]}, \varepsilon_{k[X],P}(1 \otimes q_P)] = [({}_{k[Y]}P_{k[W]}, q_P)],$$

где ${}_{k[Y]}P_{k[W]}$ обозначает ограничение скаляров ${}_{k[X]}P_{k[W]}$ с помощью f, поскольку $\varepsilon_{k[X],P}$

отождествляет $Hom_{k[W]}({}_{k[X]}P_{k[W]}, k[W])$ *как бимодуль над* $k[X]$ *и* $k[W]$ *с*

$$Hom_{k[W]}({}_{k[Y]}P_{k[W]}, k[W]).$$

Если $w = [(P, q_P)] \in Wor(Y, Z)$, *то композиция*

$$w \circ f = [({}_{k[Z]}P_{k[Y]} \otimes_{k[Y]} {}_{k[Y]}k[X]_{k[X]}, \varepsilon_{P,k[X]}(q_P \otimes 1)] = [({}_{k[Z]}P_{k[Y]} \otimes_{k[Y]} k[X], q_P \otimes_{k[Y]} k[X])],$$

поскольку $\varepsilon_{P,k[X]}$ *отождествляет*

$$Hom({}_{k[Z]}P_{k[Y]}, k[Y]) \otimes_{k[Y]} k[X] \text{ с } Hom({}_{k[Z]}P_{k[Y]} \otimes_{k[Y]}, k[Y]).$$

Определение 9 (Предпучок и пучок с $Witt$-трансферами) *Предпучком абелевых групп с* $Witt$*-трансферами называется контравариантный функтор* $F\colon Wor_k \to Ab$, *удовлетворяющий условию аддитивности на дизъюнктных объединениях, т.е. такой, что* $\mathscr{F}(X_1 \coprod X_2) = \mathscr{F}(X_1) \oplus \mathscr{F}(X_2)$. *Пучком Нисневича с* $Witt$*-трансферами называется такой предпучок* F *с* $Witt$*-трансферами, что его ограничение на* Sm_k *является пучком Нисневича. Т.е.* $F \circ i : Sm_k \to Ab$ *— пучок Нисневича.*

Аналогично определяется пучок Зарисского с $Witt$*-трансферами.*

Рассмотрим некоторые используемые в дальнейшем расширения категории Wor_k (в леммах 2.2.1, 4.1.1, 3.1.1 и 4.3.1 используются одновременно оба приведённых ниже расширения).

Замечание 4 (расширения категории)

(существенно гладкие схемы) *Рассмотрим расширение категории* Wor_k *на существенно гладкие схемы над* k *как полную подкатегорию в категории прообъектов категории* Wor_k, *т.е. для двух существенно гладких схем* $X = \varprojlim_{i\to\infty} X_i$ *и* $Y = \varprojlim_{i\to\infty} Y_i$

$$Wor_k(X, Y) = \varprojlim_{j\to\infty} \varinjlim_{i\to\infty} Wor_k(X_i, Y_j).$$

Отметим также, что произвольный предпучок с $Witt$*-трансферами канонически продолжается на это расширение* Wor_k *так, что для* $X = \operatorname{proj}\lim_{i\to\infty} X_i$

$$\mathscr{F}(X) = \varinjlim_{i\to\infty} \mathscr{F}(X_i).$$

В частности, если $U_{x,X}$ и $U^h_{x,X}$ — локальная и гензелева окрестности гладкой точки x схемы X соответственно, то $\mathscr{F}(U_{x,X})$ и $\mathscr{F}(U^h_{x,X})$ — это ростки пучка $\mathscr{F}$ в точке x в топологиях Зарисского и Нисневича.

После такого расширения категории Wor_k категория Wor_K для $K = K(X)$, являющемся полем рациональных функций произвольной гладкой схемы над k, вкладывается в категорию Wor_k, поскольку любая гладкая схема над K является существенно гладкой над k, поэтому предпучок, определённый на Sm_k, можно считать определённым на гладких схемах над общей точкой некоторой гладкой схемы, что используется в доказательствах теорем 4 и 6.

(пары схем) *Для переформулировок и доказательства изоморфизмов вырезания используется расширение категории Wor_k на пары (X_1, X_2), где X_1 — гладкая схема (или существенно гладкая) над k и $X_2 \subset X_1$ — открытая подсхема как локализация подкатегории категории стрелок по тождественным стрелкам, т.е для двух пар (X_1, X_2) и (Y_1, Y_2) открытых вложений гладких схем (или существенно гладких схем)*

$$\begin{aligned} &Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) = \\ &\qquad = \operatorname{coker}(Wor_k(X_1, Y_2) \xrightarrow{(-\circ i_X, i_Y \circ -)} Wor_k^{\cdot\to\cdot}(X_2 \to X_1, Y_2 \to Y_1)), \end{aligned}$$

где $Wor_k^{\cdot\to\cdot}$ — категория стрелок. Или, другими словами, подкатегория гомотопической категории комплексов длины 2, т.е. морфизм $Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))$ определяется парой $\Phi_i \in Wor_k(X_i, Y_i)$, $i = 1, 2$, согласованной с вложениями (т.е. $\Phi_1 \circ i_X = i_Y \circ \Phi_2$), и пары вида $(i_Y \circ \Xi, \Xi \circ i_X)$ для $\Xi \in Wor_k(X_1, Y_2)$ считаются равными 0.

$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "\Phi_2"] & X_1 \arrow[d, "\Phi_1"] \\ Y_2 \arrow[r, hook, "i_Y"] & Y_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_2 \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, "\Xi\circ i_X"'] & X_1 \arrow[d, "i_Y\circ\Xi"] \arrow[dl, "\Xi"] \\ Y_2 \arrow[r, hook, "i_Y"] & Y_1, \end{tikzcd}$$

Категория Wor_k вкладывается в описанную расширенную категорию так, что схема X переходит в пару $(X, \emptyset)$.

Достаточным условием для задания морфизма пар $(X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2)$ является существование квадратичного пространства $(P, q_P) \in Proj(pr_{Y_1, X_1})$, такого, что

$$k[Y_2] \otimes_{k[Y_1]} P \otimes_{k[X_1]} k[X_2] = P \otimes_{k[X_1]} k[X_2], \tag{1.2.1}$$

поскольку тогда композиция $(P, q_P) \circ i_X$*, задаваемая пространством* $(P \otimes_{k[X_1]} k[X_2], q_P \otimes_{k[X_1]} k[X_2]) \in Proj(pr_{Y_1,X_2})$*, будет получаться композицией с* i_X *из морфизма, задаваемого пространством* $(k[Y_2] \otimes_{k[Y_1]} P \otimes_{k[X_1]} k[X_2], k[Y_2] \otimes_{k[Y_1]} q_P \otimes_{k[X_1]} k[X_2]) \in Proj(pr_{Y_2,X_2})$*, которое действительно является пространством, поскольку модуль* $k[Y_2] \otimes_{k[Y_1]} P \otimes_{k[X_1]} k[X_2]$ *проективен над* $k[X_2]$*, благодаря равенству 1.2.1. Отметим, что произвольный морфизм пар не обязательно должен представляться в таком виде, но во всех конструкциях будет использоваться такое представление. Для произвольного предпучка с* $Witt$*-трансферами определён предпучок с* $Witt$*-трансферами* $\mathscr{F}'$: *на расширенной в указанном смысле категории* Wor_k*, такой, что*

$$\mathscr{F}'(X_1, X_2) = \frac{\mathscr{F}(X_2)}{\mathscr{F}(X_1)}.$$

Отметим, что $\mathscr{F}'$ *не является продолжением предпучка* $\mathscr{F}$ *и более похож на первые когомологии* $\mathscr{F}$ *с носителем в* $X_1 \setminus X_2$ *(*$\mathscr{F}'(X_1, X_2) = H^1_{\mathscr{F}, X_1 \setminus X_2}$*, в частности, когда* X_1 *— локальная).*

Наконец, обсудим гомотопически инвариантные предпучки с $Witt$-трансферами и соответствующую категорию $\overline{Wor_k}$. Сначала дадим её определение.

Определение 10 ($\overline{Wor_k}$**)**

- $Ob\,\overline{Wor_k} = Ob\,Wor_k$;
- $\overline{Wor_k}(X, Y) = \operatorname{coker}(Wor_k(\mathbb{A}^1 \times X, Y) \xrightarrow{(-\circ i_0)-(-\circ i_1)} Wor_k(X, Y))$,
  где $i_0, i_1 \colon X \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times X$ *— нулевое и единичное сечения* $\mathbb{A}^1 \times X$.

Замечание 5 (Гомотопическая инвариантность)

1) Гомотопически инвариантным предпучком с $Witt$*-трансферами называется предпучок, который гомотопически инвариантен и имеет* $Witt$*-трансферы.*

Гомотопически инвариантные предпучки — это в точности те предпучки, которые пропускаются через канонический функтор в факторкатегорию $h \colon Wor_k \to \overline{Wor_k}$*. Т.е., если* $\mathscr{F} \colon Wor_k \to Ab$ *— гомотопически инвариантный предпучок с* $Witt$*-трансферами, то существует единственный функтор* $\overline{\mathscr{F}} \colon \overline{Wor_k} \to Ab$*, для которого коммута-*

тивна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \overline{Wor}_k \arrow[r, "\overline{\mathscr{F}}"] & Ab \\ Wor_k \arrow[u] \arrow[ur, "\mathscr{F}"'] & \end{tikzcd},$$

и обратно: для любого функтора $\overline{\mathscr{F}}\colon \overline{Wor}_k \to Ab$ его композиция с каноническим функтором $Wor_k \to \overline{Wor}_k$ является гомотопически инвариантной (это утверждение, очевидно, верно для функторов в любую аддитивную категорию и является универсальным свойством категории $\overline{Wor}_k$).

2) Категорию $\overline{Wor}_k$ можно аналогично определить для расширенной категории Wor_k в смысле пунктов замечания 4, и в этом случае она будет обладать таким же свойством.

3) Опишем используемые в дальнейшем явные описания пар гомотопных морфизмов: два морфизма $\Phi_0, \Phi_1\colon X \to Y$, задаваемые квадратичными пространствами (P_0, q_0) и (P_1, q_1), совпадают в $\overline{Wor}_k$, если существует пространство $(H, q) \in Proj(pr_{Y,\mathbb{A}^1\times X})$, такое, что

$$[ind_{j_0}(H, q_H)] = [(P_0, q_0)], \quad [ind_{j_1}(H, q_H)] = [(P_1, q_1)]$$

в $W(Proj(pr_{Y,X}))$. И для совпадения после перехода к $\overline{Wor}_k$ двух морфизмов в категории пар, заданных пространствами $(P_0, q_0), (P_1, q_1) \in Proj(pr_{Y_1,X_1})$, как описано в пункте 2 замечания 4, достаточно существования пространства $(H, q) \in Proj(pr_{Y,\mathbb{A}^1\times X})$, задающего морфизм пар, т.е. такой, что $k[Y_2] \otimes_{k[Y_1]} H \otimes_{k[X_1]} k[X_2] = H \otimes_{k[X_1]} k[X_2]$, и в $W(Proj(pr_{Y,X}))$

$$[ind_{j_0}(H, q)] = [(P_0, q_0) \oplus (G_0, {q'}_0)],$$
$$[ind_{j_1}(H, q)] = [(P_1, q_1) \oplus (G_1, {q'}_1)],$$

для некоторых $(G_0, {q'}_0), (G_1, {q'}_1) \in Proj(pr_{Y_1,X_1}))$, таких, что

$$k[Y_2] \otimes_{k[Y_1]} G_i = G_i, \quad i = 0, 1.$$

Глава 2. Ассоциированный пучок в топологии Зарисского

В этой главе рассматриваются свойства гомотопически инвариантных предпучков с $Witt$-трансферами по отношению к топологии Зарисского, и доказаны теоремы об инъективности и об изоморфизме вырезания по Зарисскому на аффинной прямой, а также, что пучок Зарисского, ассоциированный с гомотопически инвариантным предпучком с $Witt$-трансферами, гомотопически инвариантен.

2.1 Инъективность на аффинной прямой

Теорема 2 *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами, и пусть $U \subset V$ — пара вложенных открытых подмножеств $\mathbb{A}^1_K$, для $K = k(X)$ – поля частных некоторого гладкого многообразия X. Тогда гомоморфизм ограничения*

$$i^* \colon \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$$

инъективен.

Доказательство. Выведем её из леммы.

Лемма 2.1.1 *Пусть $U \subset V$ — пара вложенных открытых подмножеств $\mathbb{A}^1_K$, а i — вложение U в V, тогда существует морфизм $\Phi \in Wor(V, U)$, такой, что*

$$[i \circ \Phi] = [id_V]$$

в $\overline{Wor}(V, V)$.

Пусть $a \in \mathscr{F}(V)$, такое, что $i^*(a) = 0$. В соответствии с пунктом 2 замечания 4 предпучок $\mathscr{F}$, как функтор из Wor в Ab, пропускается через $\overline{Wor}$ и, поскольку $[i \circ \Phi] = [id_V]$, то $a = \Phi^*(i^*(a) = 0$. Таким образом, инъективность i^* доказана, осталось доказать лемму.

Утверждение леммы означает, что существует морфизм $\Theta \in Wor(V \times_K \mathbb{A}^1_K, V)$, задающий гомотопию между $i \circ \Phi$ и id_V, т.е. такой, что

$$\Theta \circ j_0 = i \circ \Phi, \, \Theta \circ j_1 = id_V$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "id_V"'] & V \times_K \mathbb{A}^1_K \arrow[d, "\Theta"] & V \arrow[l, "j_0"'] \arrow[d, "\Phi"] \\
& V & U \arrow[l, "i"]
\end{tikzcd} .$$

Далее все произведения схем и тензорные произведения модулей будем подразумевать производимыми над K. Для построения Φ и Θ нужно найти

1) конечнопорождённый $K[U \times V]$-модуль P (проективный над $K[V]$) и симметрический $K[U \times V]$-линейный изоморфизм $\phi : P \simeq Hom(P, K[V])$,

2) конечнопорождённый $K[V \times V \times \mathbb{A}^1]$-модуль H (проективный над $K[V \times \mathbb{A}^1]$) и симметрический $K[V \times V \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм $\psi : H \simeq Hom(H, K[V \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что в группе Витта категории $K[V \times V]$-модулей, конечнопорождённых, проективных над второй компонентой $K[V]$, с функтором двойственности $Hom_{K[V]}(-, K[V])$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
\big[(H, \psi) \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} K[V \times 0]\big] &= \big[\ {}_{K[V]}K[U] \otimes {}_{K[U]}(P, \phi)\big] \\
\big[(H, \psi) \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} K[V \times 1]\big] &= \big[E_{K[V]}\big].
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Для этого рассмотрим $U \times V$ как подмножество в $\mathbb{A}^1 \times V$ и найдём для некоторого достаточно большого нечётного n по интерполяционной теореме многочлен степени n и со старшим коэффициентом 1 по X (X — координата на сомножителе $\mathbb{A}^1$)

$$f \in K[\mathbb{A}^1 \times V] = K[X][V]: \quad f|_{T \times V} = (X - Y)^n,\ f|_{D \times V} = 1,$$

где $T = \mathbb{A}^1 \setminus V$, $D = \mathbb{A}^1 \setminus U$.

Определим также многочлен $h = f \cdot (1 - t) + (X - Y)^n \cdot t \in K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]$ и положим

$$P \triangleq K[U \times V]/(f), \quad H \triangleq K[V \times V \times \mathbb{A}^1]/(h).$$

Поскольку $f\big|_{T \times V} = (X - Y)^n$, $f\big|_{D \times V} = 1$ и $h\big|_{T \times V \times \mathbb{A}^1} = (X - Y)^n$ — обратимы, то $P = K[\mathbb{A}^1 \times \times V]/(f)$ и $H = K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]/(h)$. Далее, поскольку f и h имеют старший коэффициент 1 по X, то P и H — свободные модули над $K[V]$ и $K[V \times \mathbb{A}^1]$ соответственно.

Для определения форм ϕ и ψ рассмотрим отображение

$$F = (h, pr_{V\times\mathbb{A}^1})\colon \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1.$$

Поскольку h имеет старший коэффициент 1 по X, F — конечный сюръективный морфизм гладких схем, то с помощью изоморфизма $Hom_A(B,A) = \omega(F)$ из утверждения 2.1 из [4] и тривиализации канонического класса $\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1$ получим B-линейный изоморфизм (форму) $\theta\colon Hom_A(B,A) \simeq B$, который симметричен вследствие коммутативности алгебры B. С помощью двух последовательных замен базы вдоль вложений $0\times id_{V\times\mathbb{A}^1}\colon 0\times V\times\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^1\times V\times\mathbb{A}^1$ и $id_V\times 0\colon V \hookrightarrow$ определим симметрические $K[V\times V\times\mathbb{A}^1]/(h)$ и $K[V\times V]/(f)$-линейные формы ψ' и ϕ'. Теперь положим искомую форму ψ равной форме, получающейся из ψ' после ограничения скаляров до $K[V\times V\times\mathbb{A}^1]$, а ϕ — форме, получающейся из ϕ' после ограничения скаляров до $K[U\times V]$, которое корректно определено, поскольку, как отмечалось, в силу обратимости $f\big|_{D\times V}$ $K[V\times V]/(f) \simeq K[U\times V]/(f)$.

Таким образом, определены пространства (P,ϕ) и (H,ψ) и остаётся добиться выполнеия свойств 2.1.1, в действительности, первое из них уже выполнено даже в группе Гротендика-Витта, а для выполнения второго достаточно домножить обе квадратичные формы на некоторую обратимую функцию на V по второй координате.

Убедимся в этом. Поскольку

$${}_{K[V\times V\times\mathbb{A}^1]}K[V\times V\times\mathbb{A}^1]/(h)\otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V\times 0] = {}_{K[V\times V]}K[V\times V\times]/(f),$$

то, подставляя определения (P,ϕ), (H,ψ) и раскрывая скобки во второй строке, получим

$$\begin{aligned}&(H,\psi)\otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V\times 0] =\\ &= ({}_{K[V\times V\times\mathbb{A}^1]}K[V\times V\times\mathbb{A}^1]/(h)\otimes_{K[V\times V\times\mathbb{A}^1]/(h)}(K[V\times V\times\mathbb{A}^1]/(h),\psi'))\otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]}K[V\times 0]\simeq\\ &\simeq {}_{K[V\times V]}K[V\times V\times]/(f)\otimes{}_{K[V\times V\times]/(f)}(K[V\times V]/(f),\phi') = {}_{K[V]}K[U]\otimes{}_{K[U]}(P,\phi),\end{aligned}$$

что доказывает первое равенство. Перейдём ко второму. Обозначим (L,ν) — квадратичное пространство, получающееся в результате расширения скаляров $(H,\psi)\otimes{}_{K[V\times\mathbb{A}^1]}K[V\times 1]$, тогда $L \simeq K[V\times V]/(f\big|_{\mathbb{A}^1\times V\times 1}) \simeq K[V\times V]/(X-Y)^n$. Поскольку полученная квадратичная форма ν на L — $K[V\times V]$-линейна, то она $K[V\times V]/(X-Y)^n$-линейна. Пусть $n-2m+1$, и рассмотрим идеалы $I = (X-Y)^m$, $J = (X-Y)^{m+1} \subset K[V\times V]/(X-Y)^n$ как подпространства в L. По приведённой ниже подлемме, $I = J^{\perp}$. Значит, J — подлагранжево подпространство L, и по редукции по подлагранжевому подпространству (теорема 32 [2]), класс $[L]$ в группе Витта совпадает с классом пространства J/I. J/I — свободный модуль ранга 1 над $K[V]$, и квадратичная форма на нём определяется некоторой обратимой функцией $l \in K[V]^*$. Тогда домножим квадратичные формы, определённые на P и H, на l^{-1}, и класс $(H, \psi) \otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V \times 1]$ станет равен классу $E_{K[V]}$.

Подлемма 2.1.1.1 *Пусть B — A-алгебра, и $q\colon B \simeq Hom_A(B, A)$ — B-линейная невырожденная квадратичная форма на B. Тогда для любого идеала I в B ортогонал $I^{\perp}$ к I в B по отношению к q совпадает с аннулятором I в B.*

Доказательство. Поскольку q — B-линейна, $q(I \cdot I^{\perp}, B) = q(I, I^{\perp}) = 0$, следовательно $I \cdot I^{\perp} \subset L^{\perp}$, но q — не вырождена, и следовательно $I \cdot I^{\perp} = 0$. Таким образом, $I^{\perp} \subset Ann\, I$. С другой стороны, $q(I, Ann\, I) = q(I \cdot Ann\, I, B) = 0$, и следовательно $Ann\, I \subset I^{\perp}$.

2.2 Вырезание на $\mathbb{A}^1_K$

Теорема 3 *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с Witt-трансферами, тогда для поля K, являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия над k, и двух вложенных окрестностей по Зарисскому $U \subset V$ точки z в $\mathbb{A}^1_K$ ограничение*

$$i^*\colon \frac{\mathscr{F}(V - z)}{\mathscr{F}(V)} \to \frac{\mathscr{F}(U - z)}{\mathscr{F}(U)}$$

является изоморфизмом (i обозначает вложение U в V).

Замечание 6

1) *Предпучок $\mathscr{F}$ можно ограничить на схемы над K, и в терминах замечания 4.2 теорема 3 означает, что $i^*\colon \mathscr{F}'(V, V - z) \to \mathscr{F}'(U, U - z)$ — изоморфизм.*

2) *Поскольку гомотопически инвариантный предпучок с Witt-трансферами как функтор из Wor_k пропускается через $\overline{Wor_k}$, то теорема 3 следует из следующей леммы.*

3) *Наконец отметим, что без использования теоремы об инъективности из следующей леммы следует изоморфность ядер и коядер гомоморфизмов ограничения $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V - z)$ и $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U - z)$, т.е. декартовость и кодекартовость соответствующего квадрата, что можно считать формулировкой теоремы о вырезании не использующей теорему 2.*

Лемма 2.2.1 *$[i]\colon (U, U-z) \to (V, V-z)$ в $\overline{Wor_k}$ является изоморфизмом.*

Замечание 7

a) *Правый обратный к $[i]$ определяется элементом $\Phi \in Wor_K((V, V-z),(U, U-z))$ таким, что $[i \circ \Phi] = [id] \in \overline{Wor_K}((V, V-z),(V, V-z))$. Что означает существование $\Theta \in$ $\in Wor_K((V \times \mathbb{A}^1, (V-z) \times \mathbb{A}^1),(V, V-z))$ такого, что*

$$\Theta \circ j_0 = i \circ \Phi,\ \Theta \circ j_1 = id, \tag{2.2.1}$$

где j_0, j_1 — вложения нулевого и единичного сечений в $(V, V-z) \times \mathbb{A}^1$.

$$\begin{tikzcd}
 & & (V-z)\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\Theta'"] & V\times\mathbb{A}^1 \arrow[dd, "\Theta"] & & \\
V-z \arrow[r, hook] \arrow[urr, "j_0"'] \arrow[drr] & V \arrow[urr] \arrow[drr, "i\circ\Phi"'] & & & V-z \arrow[r, hook] \arrow[ull, "j_1"] \arrow[dll] & V \arrow[ull] \arrow[dll, "id"] \\
 & & V-z \arrow[r, hook] & V & &
\end{tikzcd}.$$

b) *Левый обратный к $[i]$ определяется элементом $\Psi \in Wor_K((V, V-z),(U, U-z))$ таким, что $[\Psi \circ i] = [id] \in \overline{Wor_K}((U, U-z),(U, U-z))$. Что означает существование $\Xi \in$ $\in Wor_K((U \times \mathbb{A}^1, (U-z) \times \mathbb{A}^1),(U, U-z))$ такого, что*

$$\Xi \circ j_0 = \Psi \circ i,\ \Xi \circ j_1 = id, \tag{2.2.2}$$

где j_0, j_1 — вложения нулевого и единичного сечений в $(U, U-z) \times \mathbb{A}^1$.

$$\begin{tikzcd}
 & & (U-z)\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\Xi'"] & U\times\mathbb{A}^1 \arrow[dd, "\Xi"] & & \\
U-z \arrow[r, hook] \arrow[urr, "j_0"'] \arrow[drr] & U \arrow[urr] \arrow[drr, "\Psi\circ i"'] & & & U-z \arrow[r, hook] \arrow[ull, "j_1"] \arrow[dll] & U \arrow[ull] \arrow[dll, "id"] \\
 & & U-z \arrow[r, hook] & U & &
\end{tikzcd}.$$

Доказательство леммы 2.2.1.

Перейдём к рассмотрению схем над K и будем строить искомые морфизмы в категории Wor_K, которая является подкатегорией в Wor_k.

a) Для построения правого обратного к $i \in \overline{Wor}((U, U-z), (V, V-z))$ нужно найти квадратичные пространства P и H, соответствующие элементам Φ и Θ, а именно:

1) $P \in K[U\times V]-mod$ — конечнопорождённый, проективный над $K[V]$ и $K[U\times V]$-линейный изоморфизм $q_P\colon P \simeq Hom(P, K[V])$,

2) $H \in K[V \times V \times \mathbb{A}^1] - mod$ — конечнопорождённый, проективный над $K[V \times \mathbb{A}^1]$ и $K[V \times \times V \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм $q_H\colon H \simeq Hom(H, K[V \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что:

3) канонические отображения

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[V]} K[V-z] \to K[U-z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V-z], \\ H \otimes_{K[V]} K[V-z] \to K[V-z] \otimes_{K[V]} H \otimes_{K[V]} K[V-z] \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

являются изоморфизмами (здесь одна из структур $K[V]$-модуля на H подразумевается правой, а другая — левой), что означает, что P и H задают морфизмы пар,

4) в группе Витта категории $K[V \times V]$-модулей, конечнопорождённых, проективных над второй компонентой $K[V]$, с функтором двойственности $Hom_{K[V]}(-, K[V])$, верны равенства

$$\begin{aligned} \big[(H, q_H) \otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V \times 0]\big] = \big[\ {}_{K[V]}K[U] \otimes {}_{K[U]}(P, q_P)\big], \\ \big[(H, q_H) \otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V \times 1]\big] = \big[E_{K[V]}\big], \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

что означает выполнение тождеств (2.2.1).

Обозначим $D = \mathbb{A}^1_K \setminus V$ и $D' = \mathbb{A}^1_K \setminus U$. Будем рассматривать $V \times V$ и $U \times V$ как подмножества в $\mathbb{A}^2_K$ и обозначим координаты соответственно X и Y.

Для достаточно большого нечётного n по интерполяционной теореме найдём многочлен $f_0 \in K[X, Y]$, по X имеющий степень n и старший коэффициент 1, такой, что

$$f_0\big|_{(z\cup D)\times V} = (X-Y)^n,\ f_0\big|_{(V\setminus U)\times V} = 1.$$

Определим $f = f_0 \cdot (1-t) + (X-Y)^n \cdot t$, тогда

$$f\big|_{(z\cup D)\times V\times\mathbb{A}^1} = (X-Y)^n,\ f\big|_{\mathbb{A}^1\times V\times 0} = f_0,\ f\big|_{\mathbb{A}^1\times V\times 1} = (X-Y)^n.$$

Положим модули P и H равными:

$$P \triangleq K[U \times V]/(f_0) \quad H \triangleq K[V \times \mathbb{A}^1 \times V]/(f)$$

Прежде чем определять структуры квадратичных пространств, проверим выполнение условия 2.2.3. Поскольку $f_0\big|_{z\times V} = (X-Y)^n$ — обратим на $z \times (V-z)$, то

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[V]} K[V-z] = K[U \times (V-z)]/(f_0) = \\ = K[(U-z) \times (V-z)]/(f_0) = K[U-z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V-z]. \end{aligned}$$

Аналогично, поскольку $f\big|_{z\times V\times\mathbb{A}^1} = (X-Y)^n$ — обратим на $z \times (V-z) \times \mathbb{A}^1$,

$$\begin{aligned} H \otimes_{K[V]} K[V-z] = K[V \times (V-z) \times \mathbb{A}^1]/(f) = \\ = K[(V-z) \times (V-z) \times \mathbb{A}^1]/(f) = K[V-z] \otimes_{K[V]} H \otimes_{K[V]} K[V-z]. \end{aligned}$$

Теперь убедимся, что P и H — свободные модули над $K[V]$ и $K[\mathbb{A}^1 \times V]$ соответственно. Поскольку старшие коэффициенты f_0 и f по Y равны 1, то $K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0)$ и $K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]/(f)$ — свободные модули ранга n над $K[V]$ и $K[\mathbb{A}^1 \times V]$ соответственно. А поскольку f_0 обратим на $D' \times V$, то $K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0)$ является $K[U \times V]$-модулем и изоморфен P, и аналогично, поскольку $f\big|_{D\times V\times\mathbb{A}^1}$ равен $(X-Y)^n$ и обратим, то $K[\mathbb{A}^1 \times \times V \times \mathbb{A}^1]/(f) \simeq H$.

Чтобы определить структуры квадратичных пространств на P и H, сначала определим некоторые $K[S]$-линейный и $K[S_0]$-линейный изоморфизмы

$$\begin{aligned} q_S \colon K[S] \simeq Hom(K[S], K[V \times \mathbb{A}^1]), \\ q_{S_0} \colon K[S_0] \simeq Hom(K[S_0], K[V]), \end{aligned}$$

где $S = div_0 f$ — замкнутая подсхема $V \times V \times \mathbb{A}^1$ и $S_0 = div_0 f_0$ — замкнутая подсхема $U \times V$. Затем ограничениями скаляров вдоль вложений $i_S \colon S \hookrightarrow V \times V \times \mathbb{A}^1$ и $i_{S_0} \colon S_0 \hookrightarrow U \times V$ получим искомые изоморфизмы $q_H \colon H \simeq Hom(H, K[V \times \mathbb{A}^1])$ и $q_P \colon P \simeq Hom(P, K[V])$.

Рассмотрим отображение

$$F = (f, pr_{V\times\mathbb{A}^1}) \colon \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1,$$

и обозначим через A кольцо $K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]$, а через B — A-алгебру соответсвующую отображению F. Поскольку старший коэффициент f по X равен 1, то B является свободным A-модулем ранга n. Значит, F — конечный сюръективный морфизм гладких неприводимых многообразий, а по утверждению 2.1 из [4] существует B-линейный изоморфизм $\omega(B/A) \simeq Hom(B, A)$. Поскольку канонический класс $\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1$ тривиален, то тривиален и относительный канонический класс $\omega(F) = \omega(B/A)$, и, выбрав некоторую тривиализацию, получим B-линейный изоморфизм $q_B \colon B \simeq Hom(B, A)$. Поскольку, как уже отмечалось, $f\big|_{D\times V\times\mathbb{A}^1}$ — обратим, то

$$K[S] = K[V \times V \times \mathbb{A}^1]/(f) \simeq K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]/(f) = B \otimes_A K[0 \times V \times \mathbb{A}^1];$$

поскольку $f_0\big|_{D\times V}$ — обратим и $f_{\mathbb{A}^1\times V\times 0} = f_0$, то

$$K[S_0] = K[U \times V]/(f_0) \simeq K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0) \simeq K[S] \otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V \times 0].$$

Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма, состоящая из декартовых квадратов

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "F"] & S \arrow[l, hook'] \arrow[d, "pr_{V\times\mathbb{A}^1}"] & S_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d, "pr_V"] \\
\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 & V \times \mathbb{A}^1 \arrow[l, hook', "0\times id_{V\times\mathbb{A}^1}"'] & V. \arrow[l, hook', "j_0"']
\end{tikzcd}$$

Теперь получим изоморфизм q_S из q_B заменой базы вдоль $0 \times id_{V\times\mathbb{A}^1}$, и последующей заменой базы вдоль j_0 получим изоморфизм q_{S_0}.

Для проверки первого равенства из 2.2.4 рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & S_0 \arrow[r] \arrow[dl, hook', "i_{S_0}"] \arrow[d, hook] & S \arrow[d, hook, "i_S"] \\
U \times V \arrow[r, "i\times id_V"'] & V \times V \arrow[r, "id_V\times j_0"'] \arrow[d, "pr_V"] & V \times V \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "pr_{V\times\mathbb{A}^1}"] \\
 & V \arrow[r, "j_0"'] & V \times \mathbb{A}^1,
\end{tikzcd}$$

в которой квадраты декартовы. Квадратичная форма на модуле ${}_{K[V]}K[U] \otimes_{K[U]} P$ получается из q_P ограничением скаляров вдоль $i \times id_V$, и, пользуясь определением q_P и q_{S_0}, получаем, что она получается из q_S последовательным применением замены базы $id_V \times 0$ и ограничения скаляров вдоль вложения i_{S_0}. Квадратичная форма на $H \otimes_{K[V\times\mathbb{A}^1]} K[V \times 0]$

получается из q_H заменой базы вдоль $id_V \times 0$, и значит, она получается из q_S последовательным ограничением скаляров вдоль вложения i_S и заменой базы вдоль $id_V \times 0$. Таким образом, поскольку ограничение скаляров коммутирует с заменой базы, эти квадратичные формы совпадают.

Осталось добиться выполнения второго равенства из 2.2.4, т.е. того, чтобы класс квадратичного пространства $(L, q_L) \triangleq K[V \times 1] \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} (H, q_H)$ совпадал с классом пространства $E_{K[V]}$. Поскольку

$$L \simeq K[V \times V]/(f\big|_{\mathbb{A}^1 \times V \times 1}) \simeq K[V \times V]/(X - Y)^n,$$

то аналогично тому как было показано в доказательстве инъективности на аффинной прямой, по подлемме 2.1.1.1 любая $K[\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \times U]$-линейная квадратичная форма на $K[\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \times U]/(\delta^{(2m+1)})$ обнуляется на подпространстве $(\delta)^m$, и по подлагранжевой редукции квадратичное пространство (L, q_L) совпадает в группе Гротендика-Витта с пространством ранга 1, квадратичная форма на котором определяеся обратимой функцией $l \in K[V]^*$. Тогда домножим квадратичные формы, определённые на P и H, на l^{-1}, и класс $K[V \times 0] \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} (H, q_H)$ станет равен классу $E_{K[V]}$.

b) Для построения левого обратного нужно найти квадратичные пространства P и H, соответствующие элементам Ψ и Ξ, а именно:

1) $P \in K[U \times V] - mod$ — конечнопорождённый, проективный над $K[V]$ и $K[U \times V]$-линейный изоморфизм $P \simeq Hom(P, K[V])$,

2) $H \in K[U \times U \times \mathbb{A}^1] - mod$ — конечнопорождённый, проективный над $K[U \times \mathbb{A}^1]$ и $K[U \times \times U \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм $H \simeq Hom(H, K[U \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что:

3) канонические отображения

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[V]} K[V - z] \to K[U - z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V - z], \\ H \otimes_{K[U]} K[U - z] \to K[U - z] \otimes_{K[U]} H \otimes_{K[U]} K[U - z] \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

являются изоморфизмами (здесь одна из структур $K[U]$-модуля на H подразумевается правой, а другая — левой), что означает, что P и H задают морфизмы пар, *4)* существуют изоморфизмы квадратичных пространств

$$\begin{aligned} (H, q_H) \otimes_{K[U\times\mathbb{A}^1]} K[U\times 0] \simeq (P, q_P) \otimes_{K[V]} K[U], \\ (H, q_H) \otimes_{K[U\times\mathbb{A}^1]} K[U\times 1] \simeq E_{K[U]} \oplus (G, q_G), \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

где G — $K[U\times U]$-модуль, конечнопорождённый проективный над второй компонентой $K[U]$ и такой, что $K[U-z]\otimes_{K[U]} G = G$ (здесь произведение берётся над первой компонентой), что обеспечивает выполнение тождеств (2.2.2).

Обозначим Δ — график вложения $U \hookrightarrow \mathbb{A}^1$, т.е. *Spec* $K[\mathbb{A}^1\times U]/(X-Y)$. Для некоторого достаточно большого n по интерполяционной теореме найдём многочлены $f_0 \in K[\mathbb{A}^1\times V]$, $g\in K[\mathbb{A}^1\times U]$, по X имеющие степень n и $n-1$ соответственно и старший коэффициент 1, такие, что

$$\begin{aligned} &f_0\big|_{D'\times V} = 1, && f_0\big|_{z\times V} = X-Y, \\ &g\big|_{D'\times U} = (X-Y)^{-1}, && g\big|_{z\times U} = 1, \qquad g\big|_{\Delta} = 1, \end{aligned}$$

поскольку $D'\cap U = \emptyset$ и $X-Y$ обратим на $D'\times U$.

Определим

$$\begin{aligned} f_1 &= g\cdot(X-Y) \in K[X][U] = K[\mathbb{A}^1\times U] \\ f &= f_0\cdot(1-t) + f_1\cdot t \in K[X][U][t] = K[\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1], \end{aligned}$$

тогда

$$f\big|_{z\times U\times\mathbb{A}^1} = (X-Y),\ f\big|_{D'\times U\times\mathbb{A}^1} = 1,\ f\big|_{\mathbb{A}^1\times U\times 0} = f_0\big|_{\mathbb{A}^1\times U},\ f\big|_{\mathbb{A}^1\times U\times 1} = f_1.$$

Определим модули P и H:

$$P \triangleq K[U\times V]/(f_0), \quad H \triangleq K[U\times V]/(f_0).$$

Поскольку $f_0\big|_{D'\times V} = 1$, $K[U\times V]/(f_0) \simeq K[\mathbb{A}^1\times V]/(f_0)$, а старший коэффициент f_0 по X равен 1, то $K[\mathbb{A}^1\times V]/(f_0)$ — свободный модуль ранга n над $K[V]$. Значит, P — свободный модуль ранга n над $K[V]$. Аналогично, поскольку $f\big|_{D'\times V\times\mathbb{A}^1} = 1$ и старший коэффициент f по X равен 1, то H — свободный модуль ранга n над $K[U\times\mathbb{A}^1]$.

Проверим свойство 2.2.5. Поскольку $f_0\big|_{z\times V} = X - Y$ обратим на $z \times (V - z)$,

$$P \otimes_{K[V]} K[V - z] = K[U \times (V - z)]\big/(f_0) =$$
$$= K[(U - z) \times (V - z)]\big/(f_0) = K[U - z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V - z].$$

И аналогично, поскольку $f\big|_{z\times U\times\mathbb{A}^1} = X - Y$ обратим на $z \times (U - z) \times \mathbb{A}^1$,

$$H \otimes_{K[U]} K[U - z] = K[u \times (U - z) \times \mathbb{A}^1]\big/(f) =$$
$$= K[(U - z) \times (U - z) \times \mathbb{A}^1]\big/(f) = K[U - z] \otimes_{K[U]} H \otimes_{K[U]} K[U - z].$$

Нужно определить структуры квадратичных пространств на P и H, совпадающие после замен баз $U \hookrightarrow V$ и $V \times 0 \to V \times \mathbb{A}^1$ соответственно, в силу первого изоморфизма из (2.2.6). Сделаем это с помощью отображений

$$F_0 = (f_0, pr_V)\colon \mathbb{A}^1 \times V \to \mathbb{A}^1 \times V$$
$$F = (f, pr_{U\times\mathbb{A}^1})\colon \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1.$$

Обозначим $f_0' = f_0\big|_{\mathbb{A}^1\times U}$, тогда, поскольку $f_0\big|_{\mathbb{A}^1\times U} = f\big|_{\mathbb{A}^1\times U\times 0}$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & div_0 f_0 \arrow[dl] \arrow[dd] & & div_0 f_0' \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & div_0 f \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathbb{A}^1 \times V \arrow[dd, "F_0"] & & \mathbb{A}^1 \times U \arrow[ll] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \arrow[dd, "F"] & \\
 & V \arrow[dl] & & U \arrow[ll] \arrow[rr, "id_U \times 0"] \arrow[dl] & & U \times \mathbb{A}^1 \arrow[dl] \\
\mathbb{A}^1 \times V & & \mathbb{A}^1 \times U \arrow[ll] \arrow[rr, "id_{\mathbb{A}^1\times U} \times 0"] & & \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 & .
\end{tikzcd}$$

Поскольку старшие коэффициенты по X многочленов f_0 и f равны 1, то F_0 и F — конечные сюръективные морфизмы относительных аффинных прямых $\mathbb{A}^1_V$ и $\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}$ соответственно. Пусть $A_0 = K[\mathbb{A}^1 \times V]$, $A = K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$, B_0 — A_0-алгебра, соответствующая отображению F_0, и B — A-алгебра, соответствующая отображению F. Поскольку изоморфизм из утверждения 2.1 из [4] согласован с заменой базы, существуют согласованные

B_0-линейный и B-линейный, соответственно, изоморфизмы

$$\begin{aligned} \omega(\mathbb{A}^1_U)F_0^*(\omega(\mathbb{A}^1_U))^{-1} &\simeq \omega(F_0) \simeq Hom(B_0, A_0),\\ \omega(\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1})F^*(\omega(\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}))^{-1} &\simeq \omega(F) \simeq Hom(B, A). \end{aligned}$$

Выбрав некоторую тривиализацию канонического класса $\mathbb{A}^1$, получим согласованные тривиализации $\mathbb{A}^1_V$ и $\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}$, и в результате согласованные B_0-линейный и B-линейный, соответственно, изоморфизмы

$$\begin{aligned} q_{B_0}\colon B_0 &\simeq Hom_{A_0}(B_0, A_0),\\ q_B\colon B &\simeq Hom_A(B, A). \end{aligned}$$

Заменами баз вдоль $0\times id_V\colon V\to\mathbb{A}^1\times V$ и $0\times id_{U\times\mathbb{A}^1}\colon U\times\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1$ и последующими ограничениями скаляров вдоль $K[U\times V]\to K[U\times V]/(f_0)$ и $K[U\times U\times\mathbb{A}^1]\to K[U\times\times U\times\mathbb{A}^1]/(f)$ соответственно из q_{B_0} и q_B получим согласованные $q_P\colon P\simeq Hom(P, K[V])$ и $q_H\colon H\simeq Hom(H, K[U\times\mathbb{A}^1])$.

Для завершения доказательства нужно добиться выполнения второго равенства из (2.2.6). Поскольку $g\equiv 1(mod(X-Y))$, кольцо $K[U\times U]/(f_1)$ раскладывается в произведение $K[U]\simeq K[U\times U]/(X-Y)$ и $G=K[U\times U]/(g)$, и т.к. q_H — $K[U\times U\times\mathbb{A}^1]$-линейный, то имеет место разложение в прямую сумму для квадратичного пространства

$$K[U\times 1]\otimes_{K[U\times\mathbb{A}^1]}H\simeq K[U\times U]/(f_1)\simeq K[U]\oplus G,$$

и поскольку $g\big|_{z\times U}$ — обратима, то $K[U-z]\otimes_{K[U]}G\simeq G$. Квадратичная форма, получающаяся из квадратичной формы на $K[U\times 1]\otimes_{K[U\times\mathbb{A}^1]}H$ ограничением на слагаемое $K[U]$, может оказаться не единичной. Как квадратичная форма на свободном $K[U]$-модуле ранга 1, она определяется обратимой функцией ε. Поскольку на $K[U\times V]$-модуле P и на $K[U\times U\times\mathbb{A}^1]$-модуле H есть согласованные структуры $K[U]$-модулей (по координате X), можно домножить квадратичные формы на ε^{-1}. И тогда квадратичное пространство $K[U\times 1]\otimes_{K[U\times\mathbb{A}^1]}H$ будет суммой единичного пространства $K[U]$ и G, задающего морфизм из U в $U-z$.

2.3 Гомотопическая инвариантность ассоциированного пучка

Теорема 4 *Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами, ассоциированный пучок в топологии Зарисского $\mathscr{F}_{Zar}$ гомотопически инвариантен.*

Доказательство. Выведем её из следующей леммы, с помощью стандартного рассуждения:

Лемма 2.3.1 *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный пучок с $Witt$-трансферами. Тогда каноническое отображение $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_{Zar}(U)$ сюръективно для любого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset \mathbb{A}^1_K$ для произвольного поля K, являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия.*

Пусть X — k-гладкое неприводимое многообразие и K — его поле частных. Достаточно доказать, что гомоморфизм $\mathscr{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_X) \to \mathscr{F}_{Zar}(X)$, индуцированный вложением $i_{0,X}$: $X \to \mathbb{A}^1_X$, инъективен.

Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_X) \arrow[r, hook, "J^*"] \arrow[d, "i^*_{0,X}"] & \mathscr{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \arrow[d, "i^*_{0,k(X)}"] \\
\mathscr{F}_{Zar}(X) \arrow[r, hook, "j^*"] & \mathscr{F}_{Zar}(k(X))
\end{tikzcd}$$

Согласно теореме, доказанной в работе [10], для произвольного неприводимого многобазия Y гомоморфизм $\mathscr{F}_{Zar}(Y) \to \mathscr{F}_{Zar}(k(Y))$ инъективен. Поэтому J^* — мономорфизм. Согласно лемме 2.3.1 отображение $\mathscr{F}(\mathbb{A}^1_X) \to \mathscr{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_X)$ — эпиморфизм. Кроме того, оно — и мономорфизм, так как предпучок $\mathscr{F}$ гомотопически инвариантен. Итак, $\mathscr{F}(\mathbb{A}^1_X) \to \mathscr{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_X)$ — изоморфизм. Поскольку и $\mathscr{F}(k(X)) = \mathscr{F}_{Zar}(k(X))$, то $i^*_{0,k(X)}$ — изоморфизм. Теперь мономорфность J^* влечет мономорфность $i^*_{0,X}$. Так как $i^*_{0,X}$ — эпиморфизм, то он — изоморфизм. Для доказательства теоремы осталось доказать лемму.

*Доказательство леммы.*Пусть $s \in F_{Zar}(U)$. Пусть $c\colon \mathfrak{U} \to U$ — покрытие по Зарисскому, для которого существует $s_{\mathfrak{U}}$, такое, что $c^*(s) = \varepsilon(s_{\mathfrak{U}})$, где ε — естественное преобразование $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{Zar}$. Обозначим через V одно открытое подмножество U, входящее в $\mathfrak{U}$, и для каждой точки $z \in U \setminus V \quad U_z$ — открытое подмножество, входящее в $s_{\mathfrak{U}}$ и содержащее z.

Выберем некоторую точку $z \in U \setminus V$. Обозначим через V_1 наименьшее открытое подмножество $\mathbb{A}^1_K$, содержащее V и z. Рассмотрим элемент $s_V \in \mathscr{F}(V)$ — ограничение $s_{\mathfrak{U}}$ на V и его образ $r_z \in \frac{\mathscr{F}(V)}{\mathscr{F}(V_1)}$. По теореме 3

$$\frac{\mathscr{F}(V)}{\mathscr{F}(V_1)} \simeq \lim_{z \in W \subset \mathbb{A}^1_K} \frac{\mathscr{F}(W - z)}{\mathscr{F}(W)}.$$

Поскольку существует $s_z \in \mathscr{F}(V_z)$ (ограничение $s_{\mathfrak{U}}$ на V_z), согласованное с s_V на $V_z - z$, то $r_z = 0$, и значит, существует $s_{V_1} \in \mathscr{F}(V_1)$, совпадающее с s_V при ограничении на V. По индукции, присоединяя точки $U \setminus V$, найдём элемент $s_U \in \mathscr{F}(U)$, совпадающий с s_V в общей точке, и по теореме об инъективности на локальных схемах для гомотопически инвариантных предпучков с $Witt$-трансферами из [10] он будет согласован с s и в других точках.

Замечание 8 *Заметим, с помощью теоремы 2 лемма 2.3.1 может быть усилена до утверждения о том, что канонический гомоморфизм $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_{Zar}(U)$ является изоморфизмом, т.е. что любой предпучок с $Witt$-транфсерами является пучком при ограничении на $\mathbb{A}_K$, поскольку из того, что гомоморфизм ограничения $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(W)$ инъективен для любой пары открытых подмножеств $W \subset U \subset \mathbb{A}^1_K$, следует что гомоморфизм ограничния в общую точку $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(\eta)$ инъективен для любого открытого $U \subset \mathbb{A}^1$, и наконец, что $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_{Zar}(U)$ инъективен для любого открытого U. Однако для доказательства гомотопической инвариантности ассоциированного пучка, т.е. теоремы 4, это не требуется.*

Также заметим, что при доказательстве леммы 2.3.1 не использовалась сюръективность гомоморфизма вырезания, однако из этой сюръктивности следует, что группы когомологии $H^i_{Zar}|\mathbb{A}^1_K = 0$, для $i \geqslant 1$ и гомотопически инвариантного предпучка с $Witt$-трансфераими $\mathscr{F}$ (что важно для доказательства гомотопической инвариантности когомологий — теорема 10)

Действительно, рассмотрим последовательность

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{i} \mathscr{F}(\eta) \xrightarrow{d^1} \sum_{z \in MaxSp(U)} \frac{\mathscr{F}(U_z - z)}{\mathscr{F}(U_z)}, \tag{2.3.1}$$

в которой суммирование ведётся по всем замкнутым точкам $z \in U$, и U_z обозначает локальную окрестность z. Эта последовательность является короткой точной после-

довательностью. Действительно, первая стрелка инъективна по теореме 2 об инъективности на $\mathbb{A}^1$*, точность в среднем члене следует из инъективности гомоморфизмов вырезания (с учётом дальнейшего пояснения, что это последовательность глобальных сечений предпучка вместе с его резольвентой, ясно, что это и есть утверждение леммы 2.3.1), а сюръективность второй стрелки следует из сюръективности гомоморфизмов вырезания.*

Данная последовательность является последовательностью сечений предпучка $\mathscr{F}\big|_{\mathbb{A}^1_K}$ *и следующей его вялой резольвенты (на* $\mathbb{A}^1_K$*)*

$$\mathscr{F} \to \eta_*(\mathscr{F}(\eta)) \xrightarrow{d} \sum_{z\in MaxSp(\mathbb{A}^1)} z_*(\frac{\mathscr{F}(U_z - z)}{\mathscr{F}(U_z)}),$$

где в первом члене η *— общая точка и* η_* *— прямой образ вдоль вложения* $\eta \to \mathbb{A}^1$*, а во втором суммирование ведётся по всем замкнутым точкам* $z \in \mathbb{A}^1$ *и* z_* *— прямой образ вдоль вложения* $z \to \mathbb{A}^1$*. То, что эта последовательность пучков точна, следует из теоремы об инъективности на локальных схемах. Таким образом, это резольвента длины 2, и поэтому* $H^0_{Zar}(U) = \ker(d(U))$*,* $H^1_{Zar}(U) = \mathrm{coker}(d(U))$*, а старшие когомологии равны 0. Но из точности последовательности 2.3.1, следует что* $H^0_{Zar}(U) = \mathscr{F}(U)$ *(что вновь означает, что* $\mathscr{F}$ *— пучок) и* $H^1_{Zar}(U) = 0$*.*

Глава 3. Ассоциированный пучок в топологии Нисневича

В этой главе рассматриваются свойства гомотопически инвариантных предпучков с $Witt$-трансферами по отношению к топологии Нисневича, и доказана теорема об изоморфизме этального вырезания для кривых, что позволяет усилить результат предыдущей главы для топологии Нисневича, т.е. доказать что пучок Нисневича, ассоциированный с гомотопически инвариантным предпучком с $Witt$-трансферами, гомотопически инвариантен (теорема Б из введения).

3.1 Этальное вырезание в размерности 1

Теорема 5 *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами и $\pi\colon X' \to X$ — этальный морфизм гладких кривых над полем K, являющимся полем частных некоторого гладкого аффинного многообразия. Пусть $z \in X$ — замкнутая точка, такая, что $\pi^{-1}(z)$ состоит из одной точки, скажем z', и индуцированный на полях вычетов этих точек гомоморфизм является изоморфизмом. Тогда π индуцирует изоморфизм*

$$\pi^*\colon \frac{\mathscr{F}(U-z)}{\mathscr{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathscr{F}(U'-z')}{\mathscr{F}(U')},$$

где $U = Spec(\mathcal{O}_{X,z})$, $U' = Spec(\mathcal{O}_{X',z'})$.

Замечание 9 *В терминах пункта 2 замечания 4 теорема 5 означает, что $i^*\colon \mathscr{F}'(U, U-$ $-z) \to \mathscr{F}'(U', U'-z)$ — изоморфизм.*

Лемма 3.1.1 *Пусть $\pi\colon X \to X'$ — этальный морфизм гладких кривых с тривиальными каноническими классами, z и z' — точки X и X' такие, что $\pi(z') = z$ и поля вычетов z и z' изоморфны, $U = \varprojlim_{z\in V\subset X} V$, $U' = \varprojlim_{z'\in V'\subset X'} V'$, тогда:*

a) существует $\Phi \in Wor_K((U, U-z), (X', X'-z'))$ такой, что $[\pi\circ\Phi] = [i]$ в $\overline{Wor_K}((U, U-$ $-z), (X, X-z))$;

b) существует $\Psi \in Wor_K((U, U-z), (X', X'-z'))$ такой, что $[\Psi\circ\pi] = [i']$ в $\overline{Wor_K}((U', U'-$ $-z'), (X', X'-z'))$.

Замечание 10 *Утверждение Леммы 3.1.1 означает, что в* $\overline{Wor_K}((U, U-z),(X, X-z'))$

$$[\pi \circ \Phi] = [i] + [\Omega],\ \textit{где}\, \Omega \in Wor_K(U, X-z) \quad \textit{и}$$

$$[\Psi \circ \pi] = [i'] + [\Omega'],\ \textit{где}\, \Omega' \in Wor_k(U', X'-z').$$

Это может быть обеспечено следующими коммутативными диаграммами в Wor_K*:*

$$\begin{tikzcd}
 & & (U-z)\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\Theta'"] & U\times\mathbb{A}^1 \arrow[dd, "\Theta"] & & \\
(U-z) \arrow[r, hook] \arrow[urr, "j_0"] \arrow[drr] & U \arrow[urr] \arrow[drr, "\pi\circ\Phi"] & & & (U-z) \arrow[r, hook] \arrow[ull] \arrow[dll] & U \arrow[ull, "j_1"'] \arrow[dll, "i+\Omega"'] \\
 & & X-z \arrow[r, hook] & X & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (U'-z')\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\Xi'"] & U\times\mathbb{A}^1 \arrow[dd, "\Xi"] & & \\
(U'-z') \arrow[r, hook] \arrow[urr, "j_0"] \arrow[drr] & U' \arrow[urr] \arrow[drr, "\Psi\circ\pi"] & & & (U'-z') \arrow[r, hook] \arrow[ull] \arrow[dll] & U \arrow[ull, "j_1"'] \arrow[dll, "i'+\Omega'"'] \\
 & & X'-z \arrow[r, hook] & X' & &
\end{tikzcd},$$

где j_0 *и* j_1 *— нулевое и единичное сечения.*

Вывод теоремы 5 из леммы.

Покажем, что из леммы 3.1.1$a)$ следует инъективность π^*. Пусть $a \in \mathscr{F}'(U-z, U)$ и $\pi^*(a) = 0$. Поскольку $\mathscr{F}'(U-z, U) = \varinjlim_{z' \in V' \subset X'} \mathscr{F}'(V-z, V)$, уменьшив X и X' можно добиться, чтобы $a = j^*(a_X)$, $a_X \in \mathscr{F}'(X-z, X)$, где $j\colon U \to X$, а также, чтобы канонические классы X и X' были тривиальными. Тогда по лемме 3.1.1$a)$, применённой к новым X и X', $j^*(a_X) = \Phi^*(\pi^*(a_X)) = 0$. Значит, ядро π^* равно 0.

Теперь покажем, что из леммы 3.1.1$b)$ следует сюръективность π^*. Пусть $a \in \mathscr{F}'(U' - z, U')$. Аналогично сказанному выше, уменьшив X и X', можно добиться, чтобы $a = i'^*(a'_X)$, $a'_X \in \mathscr{F}'(X'-z, X')$. Тогда по лемме 3.1.1$b)$, применённой к X и X', $i'^*(a'_X) = \pi^*(\Phi^*(a'_X))$. Значит π^* сюръективно.

Доказательство леммы 3.1.1.

Пусть $\overline{X}, \overline{X}'$ — проективные замыкания X и X'. Продолжим π до морфизма $\overline{\pi}\colon \overline{X}' \to \overline{X}$. Обозначим $D = \overline{X} \setminus X$, $D' = \overline{X}' \setminus X'$, $D'' = \overline{\pi}^{-1}(D) \subset \overline{X}'$, и $\Delta \subset X \times U$ — график вложения $i\colon U \hookrightarrow X$.

Для построения искомых морфизмов Φ, Θ и Ω достаточно построить:

1) P — квадратичное пространство в $Proj(pr_U)$, где $pr_U\colon X' \times U \to U$ — каноническая проекция. Т.е. $P \in K[X' \times U] - mod$ — конечнопорождённый над $K[U]$ и $K[X' \times U]$-линейный изоморфизм $q_P\colon P \simeq Hom(P, K[U])$,

2) H — квадратичное пространство в $Proj(pr_{\mathbb{A}^1 \times U})$, где $pr_{\mathbb{A}^1\times U}\colon X' \times \mathbb{A}^1 \times U \to \mathbb{A}^1 \times U$ — каноническая проекция. Т.е. $H \in K[X \times \mathbb{A}^1 \times U] - mod$ — конечнопорождённый над $K[\mathbb{A}^1 \times U]$ и $K[X \times \mathbb{A}^1 \times U]$-линейный изоморфизм $q_H\colon H \simeq Hom(H, K[\mathbb{A}^1 \times U])$,

такие, что:

3) канонические отображения:

$$\begin{gathered} P \otimes_{K[U]} K[U - z] \to K[X' - z'] \otimes_{K[X']} P \otimes_{K[U]} K[U - z], \\ H \otimes_{K[U]} K[U - z] \to K[X - z] \otimes_{K[X]} H \otimes_{K[U]} K[U - z] \end{gathered} \tag{3.1.1}$$

являются изоморфизмами,

4) существуют изоморфизмы квадратичных пространств:

$$\begin{aligned} {j_0}^*(H, q_H) &\simeq \pi_{U*}(P, q_P), \\ {j_1}^*(H, q_H) &\simeq (K[\Delta], q_{K[\Delta]}) \oplus (G, q_G), \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

где q_Δ — единичная квадратичная форма на $K[\Delta]$ (т.е. форма, получаемая из единичной при помощи изоморфизма $K[\Delta] \simeq K[U]$), и $K[X \times U]$-модуль G, на котором определена квадратичная форма q_G, обладает свойством $G \simeq K[X - z] \otimes_{K[X]} G$.

Будем строить эти модули с помощью специально выбранных глобальных сечений пучков $s' \in \mathscr{L}(nD''_U)$ на $\overline{X}'_U$, $s \in \mathscr{L}(lnD_{U\times\mathbb{A}^1})$ на $\overline{X}_{U\times\mathbb{A}^1}$ и $s_0, s_1 \in \mathscr{L}(lnD_U)$ на $\overline{X}_U$ (нижними индексами здесь обозначены замены базы), которые будем находить с помощью следующей подлеммы, являющейся следствием теоремы Серра (теорема 5.2, гл. 3 из [3]):

Подлемма 3.1.1.1 *Пусть X — проективная схема над спектром некоторого нётерового кольца, Z — замкнутая подсхема, $\mathscr{F}$ — когерентный пучок и $\mathscr{L}$ — очень обильное линейное расслоение на X. Для всех n, больших некоторого k, ограничение $\Gamma(\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}) \to \Gamma((\mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n})\big|_Z)$ — сюрьективно.*

Введём дополнительные обозначения: $\mathbf{z}$ — диагональ в $z \times z$, $\mathbf{z}'$ — график $\pi\colon z' \to z$, который фактически тоже является диагональю, поскольку π задаёт изоморфизм z и z', W — локальная окрестность $\mathbf{z}$ в $z \times U$, W' — локальная окрестность $\mathbf{z}$ в $z' \times U$, δ' — локальный параметр в $K[W']$, $N' = SpecK[W']/\delta'^2$ — замкнутая подсхема в W'.

Сначала построим искомое сечение на $\overline{X}'_z$, для этого докажем следующее утверждение:

Подлемма 3.1.1.2 *Пусть $\pi\colon X' \to X$ — конечный морфизм проективных кривых над бесконечным полем, z — замкнутая точка X', Y — замкнутая подсхема X', не содержащая z, и $\mathscr{L}$ — очень обильный локально свободный пучок ранга 1 на X'. Тогда для всех n, больших некоторого n_0, существует глобальное сечение s пучка $\mathscr{L}^{\otimes n}$, обращающееся в 0 в z, не обращающееся в 0 на Y и такое, что ограничение π на $div\, s$ является замкнутым вложением (точнее, имеется в виду ограничение π на подсхему в X', определяемую пучком идеалов в $\mathscr{O}(X')$, состоящим из функций $f:\ divf \geqslant divs$).*

Доказательство подлеммы 3.1.1.2.

То, что $\pi\colon divs \to X$ — замкнутое вложение, означает, что $\varepsilon_\pi\colon \mathscr{O}(X)) \to \pi_*(\mathscr{O}(divs))$, индуцированное π, сюръективно. Обозначим через Γ аффинное пространство глобальных сечений $\mathscr{L}^{\otimes n}$, состоящее из сечений обращающихся в 0 в z. По подлемме 3.1.1.1 для достаточно больших n Γ не пусто. Покажем, что несюръективность ε_π — замкнутое условие в Γ. Для этого рассмотрим отображение $\mu = \pi_\Gamma\colon X' \times \Gamma \to X \times \Gamma$ и универсальное сечение $s_\Gamma \in \Gamma(pr^*_{X'}(\mathscr{L}^{\otimes n}))$, где $pr\colon X' \times \Gamma \to X'$ — проекция вдоль Γ. Пусть $Z_i \subset X' \times \Gamma$ — носитель коядра $\varepsilon_\mu\colon \mathscr{O}(X \times \Gamma) \to \mu_*\left(\mathscr{O}(divs_\Gamma)\right)$ и $Z_n \subset \Gamma$ — объединение подпространств сечений, обращающихся в 0 в какой-либо из точек Y. Тогда искомое сечение s — рациональная точка Γ, лежащая вне $pr_\Gamma(Z_i)$ (где pr_Γ — проекция вдоль X') и вне Z_n. Наличие рациональных точек Γ вне $pr_\Gamma(Z_i) \cup Z_n$ равносильно тому, что $\Gamma \neq pr_\Gamma(Z_i) \cup Z_n$, как схемы над базовым полем.

Поскольку Y не содержит z, по подлемме 3.1.1.1, для достаточно больших n существует сечение, обращающееся в 0 в z и не обращающееся в 0 на Y, поэтому $\Gamma \neq Z_n$, и, поскольку Γ неприводимо, достаточно доказать, что $\Gamma \neq pr_\Gamma(Z_i)$.

Поскольку после расширения скаляров равенство бы не нарушилось, достаточно доказывать утверждение над алгебраически замкнутым полем F. Если $\pi\colon divs \to X$ не является вложением, то $divs \geqslant p_1 + p_2$ для некоторых $p_1, p_2 \in X'$, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ (p_1 и p_2 могут совпадать). Для того, чтобы оценить размерность Z_i, определим коразмернось подпространства. Обозначим через $S(D)$ замкнутую подсхему в X', определяемую пучком идеалов в $\mathscr{O}(X)$, состоящих из функций $f:\ div f \geqslant D$ для дивизора D в X'. Заметим, что для достаточно больших n для любой пары точек $p_1, p_2 \in X'$ отображение ограничения

$$r_{p_1,p_2,n}\colon \Gamma(\mathscr{L}^{\otimes n}) \to \Gamma(\mathscr{L}^{\otimes n})\big|_{S(p_1+p_2+z)}) = F^2$$

сюръективно, поскольку при фиксированном n сюръективность $r_{p_1,p_2,n}$ является открытым условием на пару (p_1, p_2), а для каждой пары p_1, p_2 по подлемме 3.1.1.1 для достаточно больших n $r_{p_1,p_2,n}$ сюръективно. Следовательно, коразмерность подпространства в Γ_0, состоящего из сечений $div\, s \geqslant p_1 + p_2$, совпадает с коразмерностью подпространства функций $\{f \in F[S(p_1 + p_2 + z)] :\ div f \geqslant p_1 + p_2, div f \geqslant z\}$ в пространстве функций, обращающихся в 0 в z, т.е. равна 2, когда $p_1, p_2 \neq z$, и равна 1, когда хотя бы одна из точек совпадает с z.

Для произвольной точки $p \in X$ существует конечное множество пар $p_1, p_2 \in X$: $\pi(p_1) = \pi(p_2) = p$. Поскольку для $p \neq \pi(z)$ для каждой такой пары условие $div\, s \geqslant p_1 + p_2$ определяет подмножество в Γ коразмерности 2, то $\dim(Z \cap (p \times \Gamma)) \leqslant \dim \Gamma - 2$. Для $p = \pi(z)$ эти условия имеют коразмерность хотя бы 1, значит, $\dim(Z \cap (\pi(z) \times \Gamma)) \leqslant \dim \Gamma - 1$. Таким образом, $\dim Z \leqslant \dim \Gamma - 1$, и значит, $\Gamma \neq pr_\Gamma(Z_i)$.

По подлемме 3.1.1.2, применённой к $\pi_z\colon \overline{X}' \to \overline{X}$ и пучку $\mathscr{L}(D'' \times z)$, для n, больших некоторого $\overline{k}$, существует сечение $\overline{s} \in L(nD'' \times z)$ на $\overline{X}'_z$, такое, что ограничение $\overline{\pi}_z$ на $div\overline{s}$ является замкнутым вложением, $\overline{s}$ обращается в ноль в $\mathbf{z}'$ и не обращается в ноль на $\overline{\pi}^{-1}(z) \times z - \mathbf{z}'$ и на $D'' \times U$. По подлемме 3.1.1.1, применённой к многообразиям $X' \times U, X \times U$, пучкам $\mathscr{O}(X' \times U), \mathscr{O}(X \times U)$ и линейным расслоениям $\mathscr{L}(D'' \times U)$ и $\mathscr{L}(D'' \times U)$, для всех n, больших некоторого k, отображения ограничения

$$\Gamma(X' \times U, \mathscr{L}(nD'' \times U)) \to \Gamma(\mathscr{L}(nD'' \times U)\big|_{z' \times U \cup D' \times U \cup \overline{X}' \times z}),$$
$$\Gamma(X \times U, \mathscr{L}(lnD \times U)) \to \Gamma(\mathscr{L}(lnD \times U)\big|_{z \times U \cup D \times U \cup \Delta})$$

сюръективны. Выберем n больше $\overline{k}$ и k, и выберем $\overline{s}$, удовлетворяющее описанным выше условиям.

Выберем s' — глобальное сечение $\mathscr{L}(nD'' \times U)$, такое, что $s'\big|_{X' \times z} = \overline{s}$, s' — не обращается в ноль на $D' \times U$, $s'\big|_{N'} = \delta$ (здесь используется некоторая тривиализация

$\mathscr{L}(nD'' \times U)\big|_N')$. Тогда

$$s'.(\overline{\pi}^{-1}(z') \times U) = \mathbf{z}', \quad div\, s'.(D' \times U) = 0. \tag{3.1.3}$$

Первое равенство следует из того, что s' не обращается в ноль на $(\overline{\pi}^{-1}(z') \times U) - \mathbf{z}'$, поскольку $\overline{s}$ не обращается в ноль на $\overline{\pi}^{-1}(z) \times z - \mathbf{z}'$, и того, что $s'\big|_{N'} = \delta'$, а второе — переформулировка не обращения в ноль.

Пусть s_0 — некоторое сечение $\mathscr{L}(lnD_U)$, такое, что $div\, s_0 = \overline{\pi}_{U*}(div\, s')$. Тогда из 3.1.3 следует:

$$div\, s_0.(z' \times U) = \mathbf{z}, \quad div\, s_0.(D \times U) = 0. \tag{3.1.4}$$

Теперь выберем сечение s_1 пучка $\mathscr{L}(lnD \times U)$:

$$s_1\big|_{\Delta} = 0,\ s_1\big|_{(z \cup D) \times U} = s_0\big|_{(z \cup D) \times U}$$

(согласованность условий на пересечениях обеспечивается тем, что $\Delta \cap (z \times U) = \mathbf{z}$ и s_0 обращается в ноль в $\mathbf{z}$). И пусть $s = s_0 \cdot (1 - t) + s_1 \cdot t$ — сечение $\mathscr{L}(lnD \times U \times \mathbb{A}^1)$. Тогда из 3.1.4 получим:

$$div\, s.(z \times U \times \mathbb{A}^1) = \mathbf{z} \times \mathbb{A}^1, \quad div\, s.(D \times U \times \mathbb{A}^1) = 0, \tag{3.1.5}$$

поскольку $s\big|_{(z \cup D) \times U \times \mathbb{A}^1} = s_0\big|_{(z \cup D) \times U}$.

Пусть $S' = div\, s'$, $S = div\, s$, $S_0 = div\, s_0$, $S_1 = div\, s_1$. Ограничение $\overline{\pi}_U$ на подсхему S' является замкнутым вложением, поскольку над замкнутой точкой U (т.е. z) оно совпадает с ограничением $\overline{\pi}_z$ на $div\, \overline{s}$ и является замкнутым вложением. Следовательно, $\overline{\pi}_U$ задаёт изоморфизм $S' \xrightarrow{\sim} S_0$. Заметим, что $S' \subset X' \times U$ и $S \subset X \times U \times \mathbb{A}^1$ по вторым равенствам из 3.1.3 и 3.1.5, и с учётом того, что $s\big|_{\overline{X} \times U \times 0} = s_0$, $s\big|_{\overline{X} \times U \times 1} = s_1$ получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "i_{S_1}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & S \arrow[d, hook, "i_S"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & S_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d, hook, "i_{S_0}"] \arrow[dr, phantom, "(5)"] & S' \arrow[l, "\backsimeq"'] \arrow[d, hook, "i_{S'}"] \\
X_U \arrow[r, hook, "id_X \times j_1"] \arrow[d, "pr_U"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & X_{\mathbb{A}^1 \times U} \arrow[d, "pr_{U \times \mathbb{A}^1}"] \arrow[dr, phantom, "(4)"] & X_U \arrow[l, hook', "id_X \times j_0"'] \arrow[d, "pr_U"] & X'_U \arrow[l, "\pi_U"'] \arrow[d, "pr_U"] \\
U \arrow[r, hook, "j_1"] & U \times \mathbb{A}^1 & U \arrow[l, hook', "j_0"'] \arrow[r, equal] & U,
\end{tikzcd} \tag{3.1.6}$$

в которой квадраты (1-4) декартовы.

И теперь определим модули

$$P = K[S']_{K[X'\times U]},\ H = K[S]_{K[X\times U\times \mathbb{A}^1]}.$$

Для проверки условия 3.1.1, которое не зависит от выбора изоморфизмов q_P и q_H, воспользуемся тем, что s не обращается в ноль на $z \times (U-z) \times \mathbb{A}^1$ и s' не обращается в ноль на $z' \times (U-z)$, и следовательно,

$$S \cap (z \times U \times \mathbb{A}^1) \subset z \times z \times \mathbb{A}^1 \subset S \cap (\overline{X} \times z \times \mathbb{A}^1),$$
$$S' \cap (z' \times U) \subset z' \times z \subset S' \cap (\overline{X}' \times z).$$

Значит,

$$K[X-z] \otimes_{K[X]} K[S] \otimes_{K[U]} K[U-z] \simeq K[S] \otimes_{K[U]} K[U-z],$$
$$K[X'-z'] \otimes_{K[X']} K[S'] \otimes_{K[U]} K[U-z] \simeq K[S'] \otimes_{K[U]} K[U-z].$$

Теперь убедимся что P и H — конечнопорождённые проективные $K[U]$ и $K[U \times \mathbb{A}^1]$ соответственно модули, и зададим на них структуры квадратичных пространств. Для этого покажем, что морфизмы схем $p_{S'} = pr_U \circ i_{S'} \colon S' \to U$ и $p_S = pr_U \circ i_S \colon S \to U$ являются конечными и плоскими. Определим некоторые $K[S']$-линейный и $K[S]$-линейный изоморфизмы

$$q_{S'} \colon K[S'] \simeq Hom(K[S'], K[U]),$$
$$q_S \colon K[S] \simeq Hom(K[S], K[U \times \mathbb{A}^1]),$$

которые определяют квадратичные пространства в $Proj(p_{S'})$ и $Proj(p_S)$, и ограничениями скаляров вдоль вложений $i_{S'}$ и i_S получим искомые изоморфизмы q_P и q_H.

Пусть $d \in \mathscr{L}(lnD \times U \times \mathbb{A}^1)$ — сечение, которое задаёт дивизор $lnD \times U \times \mathbb{A}^1$, тогда $f = \frac{s}{d}$ — рациональная функция на $\overline{X} \times U \times \mathbb{A}^1$, которая регулярна на $X \times U \times \mathbb{A}^1$. Рассмотрим отображение

$$F = (f, pr_{U\times\mathbb{A}^1}) \colon X \times U \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1,$$

и обозначим $B \in K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1] - mod$ — кольцо $K[X \times U \times \mathbb{A}^1]$, рассмотренное как $K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$-модуль посредством F.

Покажем, что B — конечнопорождённый проективный $K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$-модуль. Для этого заметим, что F получается при помощи замены базы $\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ из проективного морфизма

$$\overline{F} = ([s : d], id_{U\times\mathbb{A}^1})\colon \overline{X} \times U \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{P}^1 \times U \times \mathbb{A}^1.$$

$\overline{F}$ — морфизм относительной проективной кривой $\overline{X} \times U \times \mathbb{A}^1$ в относительную проективную прямую $\mathbb{P}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$, заданный двумя непропорциональными сечениями, поскольку s не обращается в ноль на $D_{U\times\mathbb{A}^1}$. По приведённой ниже подлемме $\overline{F}$ — конечный, сюръективный, плоский, значит F — конечное, сюръективное, плоское, и, поскольку конечнопорождённый плоский модуль — проективный, то B — конечнопорождённый проективный $K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$-модуль.

Подлемма 3.1.1.3 *Пусть $F\colon X_T \to \mathbb{P}^1_T$ — морфизм гладкой относительной проективной кривой X_T в относительную проективную прямую $\mathbb{P}^1_T$ над некоторой существенно гладкой схемой T, заданный двумя непропорциональными сечениями s, d некоторого линейного расслоения на X_T. Тогда F — конечный, сюръективный, плоский.*

Доказательство. Прообраз $F^{-1}(t) \subset X_T$ произвольной точки $t \in \mathbb{P}^1_T$ изоморфен $div(s \cdot t_1 - d \cdot t_2) \subset \overline{X}_t$, где t_1, t_2 — непропорциональные сечения $\mathscr{O}(1)$ на $\mathbb{P}^1_T$. Поскольку s непропорционально d, то $s \cdot t_1 - d \cdot t_2 \not\equiv 0$, и значит, $div(s \cdot t_1 - d \cdot t_2)$ — непустое собственное замкнутое подножество в X_t, и значит, $\dim F^{-1}(t) = 0$ для любой точки t. Таким образом, F — сюръективный и квазиконечный. А поскольку квазиконечный проективный морфизм — конечный, то F — конечный. Теперь заметим, что поскольку X_T и $\mathbb{P}^1_T$ — существенно гладкие и их размерности совпадают, то F — плоский (см. следствие V.3.9. и теорему II.4.7 [5]).

Поскольку канонические классы $X \times U \times \mathbb{A}^1$ и $\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ тривиальны, по утверждению 2.1 из [4] существует $K[X \times U \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм

$$q\colon B \simeq Hom(B, K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]).$$

Поскольку $S = div_0 s = div_0 f$, имеет место коммутативная диаграмма, в которой квадраты декартовы:

$$\begin{tikzcd}
X \times U \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, "F"'] & S \arrow[l, hook'] \arrow[d, "pr_{U\times\mathbb{A}^1}"'] & S_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d, "pr_U"'] & S' \arrow[l, "\overset{\pi_U|_{S'}}{\simeq}"'] \arrow[dl] \\
\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1 & U \times \mathbb{A}^1 \arrow[l, hook', "0\times id_{U\times\mathbb{A}^1}"'] & U \arrow[l, hook', "j_0"'] &
\end{tikzcd},$$

и определим изоморфизмы

$$q_S = (0 \times id_{U\times\mathbb{A}^1})^*(q),\ q_{S_0} = {j_0}^*(q_S),\ q_{S'} = \pi_U\big|_{S'}{}^*(q_{S_0}).$$

Теперь определим искомые изоморфизмы q_P и q_H:

$$q_H = i_{S*}(q_S), \quad q_P = i_{S'*}(q_{S'}).$$

Тогда первый изоморфизм из 3.1.2 устанавливается следующей последовательностью изоморфизмов:

$$\pi_{U*}(q_P) \ \simeq \ (\pi_U \circ i_{S'})_*(q_{S'}) \ \overset{1}{\simeq} \ i_{S_0*}(q_{S_0}) \ \simeq \ i_{S_0*}{j_0}^*(q_S) \ \overset{2}{\simeq} \ {j_0}^* i_{S*}(q_S) \ \simeq \ {j_0}^*(q_H),$$

в которой изоморфизм 1 следует из коммутативности квадрата (5) диаграммы 3.1.6 и того, что композиция ограничений скаляров совпадает с ограничением скаляров вдоль композиции, изоморфизм 2 — из декартовости квадратов (3-4) диаграммы 3.1.6 и того, что ограничение скаляров коммутирует с заменой базы, а остальные — из определений q_P, q_{S_0} и q_H.

Остаётся добиться выполнения второго изоморфизма из 3.1.2. Аналогично q_{S_0} определим $q_{S_1} = {j_1}^*(q_S)$. Поскольку квадраты (1-2) диаграммы 3.1.6 декартовы,

$${j_1}^*(q_H) = {j_1}^* i_{S*}(q_S) \simeq i_{S_1*}{j_1}^*(q_S) = i_{S_1*}(q_{S_1}).$$

Так как $s_1\big|_\Delta = 0$, то $div\, s_1 = \Delta + R$.

$$R \cap (z \times U) = div\, s_1.(z \times U) - \Delta.(z \times U) = div\, s_0.(z \times U) - \mathbf{z} = 0,$$

т.е. $R \cap (z \times U) = \emptyset$, и поскольку $\mathbf{z}$ — единственная замкнутая точка Δ, то $R \cap \Delta = \emptyset$. Следовательно, S_1 распадается в дизъюнктное объединение Δ и R. Значит, $K[S_1]$ раскладывается в произведение колец $K[\Delta]$ и $K[R]$, и $K[S_1]$-линейная квадратичная форма q_{S_1} раскладывается в прямую сумму форм на $K[\Delta]$ и на $G = K[R]$. И, поскольку $R \cap (z \times U) = \emptyset$, $G \simeq K[X - z] \otimes_{K[X]} G$. Остаётся удовлетворить условие, чтобы квадратичная форма на $K[\Delta]$ являлась единичной. В действительности она может оказаться заданной некоторой обратимой в $K[U]$ функцией l. Тогда домножим квадратичные формы на H, P и G

на l^{-1}, при этом их согласованность не нарушится, а новое ограничение на $K[\Delta]$ будет задано единичной формой.

b) Для построения искомых морфизмов достаточно построить:

1) P — квадратичное пространство в $Proj(pr_U)$, где $pr_U\colon X' \times U \to U$ — каноническая проекция. Т.е. $P \in K[X' \times U] - mod$ — конечнопорождённый над $K[U]$ и $K[X' \times U]$-линейный изоморфизм $P \simeq Hom(P, K[U])$,

2) H — квадратичное пространство в $Proj(pr_{\mathbb{A}^1 \times U'})$, где $pr_U\colon X' \times \mathbb{A}^1 \times U' \to \mathbb{A}^1 \times U'$ — каноническая проекция. Т.е. $H \in K[X' \times \mathbb{A}^1 \times U'] - mod$ — конечнопорождённый над $K[\mathbb{A}^1 \times U']$ и $K[X' \times \mathbb{A}^1 \times U']$-линейный изоморфизм $H \simeq Hom(H, K[\mathbb{A}^1 \times U'])$,

такие, что:

3) канонические отображения:

$$\begin{gathered} P \otimes_{K[U]} K[U - z] \to K[X' - z'] \otimes_{K[X]} P \otimes_{K[U]} K[U - z], \\ H \otimes_{K[U']} K[U' - z'] \to K[X' - z'] \otimes_{K[X']} H \otimes_{K[U']} K[U' - z'] \end{gathered} \tag{3.1.7}$$

являются изоморфизмами,

4) существуют изоморфизмы квадратичных пространств:

$$\begin{gathered} {j_0}^*(H, q_H) \simeq (id(X) \times \pi)^*(P, q_P), \\ {j_1}^*(H, q_H) \simeq (K[\Delta'], q_{\Delta'}) \oplus (G, q_G), \end{gathered} \tag{3.1.8}$$

где $q_{\Delta'}$ — единичная квадратичная форма на $K[\Delta']$, Δ' — график вложения $U' \hookrightarrow X'$ (т.е. имеется в виду форма, получаемая из единичной при помощи изоморфизма $K[\Delta'] \simeq$ $\simeq K[U']$) и $K[X' \times U']$-модуль G, на котором определена квадратичная форма q_G, обладает свойством $G \simeq K[X' - z'] \otimes_{K[X']} G$.

Будем строить эти модули с помощью специально выбранных глобальных сечений пучков $\mathscr{L}(nD'_U)$ на $\overline{X}'_U$, $\mathscr{L}(nD'_{U' \times \mathbb{A}^1})$ на $\overline{X}'_{U' \times \mathbb{A}^1}$ и $\mathscr{L}(nD'_{U'})$ на $\overline{X}'_{U'}$ для достаточно большого n (условия на эти сечения приведены ниже).

Обозначим: $\mathbf{z}''$ — диагональ в $z' \times z'$, W'' — локальная окрестность $\mathbf{z}''$ в $z' \times U'$, а $N'' = Spec K[W'']/(\delta''^2)$.

По подлемме 3.1.1.1 для любого n, большего некоторого k, существует сечение s' пучка $\mathscr{L}(nD'_U)$, такое, что s' не обращается в ноль на $D' \times U$ и в точках $z' \times U$, отличных от $\mathbf{z}'$, и $s'\big|_{N'} = \delta'$ (здесь используется некоторая тривиализация $\mathscr{L}(nD'_U)$ на N'). Пусть теперь $s_0 = (id_{\overline{X}'} \times \pi)^*(s')$ — сечение $\mathscr{L}(nD'_{U'})$, являющееся обратным образом s' вдоль $id_{\overline{X}'} \times \pi$. Тогда s_0 не обращается в ноль на $D' \times U'$ и в точках $z' \times U'$, отличных от $\mathbf{z}''$, и $s_0\big|_{N''} = \delta''$, где δ'' — обратный образ δ вдоль $id_{\overline{X}'} \times \pi$.

Теперь выберем сечение s_1 пучка $\mathscr{L}(nD' \times U')$ на $\overline{X}' \times U'$ такое, что

$$s_1\big|_{(z' \cup D') \times U'} = s_0\big|_{(z' \cup D') \times U'},\ s_1\big|_{\Delta'} = 0,$$

условия согласованны, поскольку s_0 обращается в ноль на $\Delta' \cap ((z' \cup D') \times U) = \mathbf{z}''$. Пусть $s = s_0 \cdot (1-t) + s_1 \cdot t$ — сечение $\mathscr{L}(nD' \times U' \times \mathbb{A}^1)$ на $\overline{X}' \times U' \times \mathbb{A}^1$, тогда s не обращается в ноль на $D' \times U' \times \mathbb{A}^1$ и на $(z' \times U' - \mathbf{z}') \times \mathbb{A}^1$, $s\big|_{W' \times \mathbb{A}^1} = \delta'$ (здесь подразумевается тривиализация $\mathscr{L}(lnD_{U' \times \mathbb{A}^1})\big|_{W' \times \mathbb{A}^1} = \mathscr{O}(W' \times \mathbb{A}^1)$), $s\big|_{\overline{X}' \times U' \times 0} = s_0$, $s\big|_{\overline{X}' \times U' \times 1} = s_1$).

Рассмотрим замкнутые подсхемы $S' = divs'$, $S = divs$, $S_1 = divs_1$, $S_0 = divs_0$ в $X' \times U$, $X' \times U' \times \mathbb{A}^1$ и $X' \times U'$.

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & S \arrow[d, hook] & S_0 \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\simeq"'] \arrow[d, hook] & S' \arrow[d, hook] \\
X'_{U'} \arrow[r, hook, "id_X \times j_1"] \arrow[d] & X'_{\mathbb{A}^1 \times U'} \arrow[d] & X'_{U'} \arrow[l, hook', "id_{X'} \times j_0"'] \arrow[r, "id_{X'} \times \pi"'] \arrow[d] & X'_U \arrow[d] \\
U' \arrow[r, hook, "j_1"] & U' \times \mathbb{A}^1 & U' \arrow[l, hook', "j_0"'] \arrow[r, "\pi"] & U.
\end{tikzcd}$$

$S' \subset X' \times U$, поскольку s' не обращается в ноль на $D' \times U$, и $S \subset X' \times U' \times \mathbb{A}^1$, поскольку s не обращается в ноль на $D' \times U'$.

Положим $P = K[S']_{K[X' \times U]}$, $H = K[S]_{K[X' \times U']}$.

Проверим условие 3.1.7. Поскольку s не обращается в ноль на $z' \times (U' - z') \times \mathbb{A}^1$ и s' не обращается в ноль на $z' \times (U - z)$, то

$$S \cap (z' \times U' \times \mathbb{A}^1) \subset z' \times z' \times \mathbb{A}^1 \subset S \cap (\overline{X'} \times z' \times \mathbb{A}^1),$$
$$S' \cap (z' \times U) \subset z' \times z \subset S' \cap (\overline{X}' \times z)$$

и

$$K[S] \otimes_{K[U']} K[U' - z'] \simeq K[X' - z'] \otimes_{K[X']} K[S] \otimes_{K[U']} K[U' - z'],$$
$$K[S'] \otimes_{K[U]} K[U - z] \simeq K[X' - z'] \otimes_{K[X']} K[S'] \otimes_{K[U]} K[U - z].$$

Теперь нужно задать структуры квадратичных пространств на P и H. Сделаем это с помощью отображений

$$
\begin{aligned}
F &= (\frac{s}{d}, pr_{U' \times \mathbb{A}^1})\colon X' \times U' \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1,\\
F_0 &= (\frac{s_0}{d}, pr_{U'})\colon X' \times U' \to \mathbb{A}^1 \times U',\\
F' &= (\frac{s'}{d}, pr_{U})\colon X' \times U \to \mathbb{A}^1 \times U,
\end{aligned}
$$

где $d \in \mathscr{L}(nD')$ — сечение, задающее дивизор nD' на $\overline{X'}$ (точнее, подразумеваются его обратные образы в $\mathscr{L}(nD' \times U' \times \mathbb{A}^1), \mathscr{L}(nD' \times U')$ и $\mathscr{L}(nD' \times U)$). Благодаря согласованности s, s_0 и s' на $X' \times U'$, коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, hook] \arrow[dd] & & S_0 \arrow[ll, hook'] \arrow[rr, hook] \arrow[dl, hook] \arrow[dd] & & S' \arrow[dl, hook] \arrow[dd] \\
X' \times U' \times \mathbb{A}^1 \arrow[dd, "F"] & & X' \times U' \arrow[ll, hook'] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "F_0"] & & X' \times U \arrow[dd, "F'"] & \\
 & U' \times \mathbb{A}^1 \arrow[dl, "0 \times id_{U' \times \mathbb{A}^1}"] & & U' \arrow[ll, hook', "id_{U'} \times 0"] \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dl, hook, "0 \times id_{U'}"] & & U \arrow[dl, hook, "0 \times id_U"] \\
\mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1 & & \mathbb{A}^1 \times U' \arrow[ll, hook', "id_{\mathbb{A}^1} \times id_{U'} \times 0"] \arrow[rr, "id_{\mathbb{A}^1} \times \pi"] & & \mathbb{A}^1 \times U & .
\end{tikzcd}
$$

Из соображений, аналогичных приведённым в доказательстве пункта *a)*, морфизмы F, F_0 и F' являются конечными сюръективными и плоскими, а $K[X' \times U' \times \mathbb{A}^1]$, $K[X' \times U']$ и $K[X' \times U]$ — конечнопорождёнными проективными модулями над $K[\mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1]$, $K[\mathbb{A}^1 \times U']$ и $K[\mathbb{A}^1 \times U]$ соответственно.

Поскольку F, F_0 и F' — морфизмы относительных кривых $X'_{U' \times \mathbb{A}^1}$, $X'_{U'}$ и X'_U в относительные аффинные прямые $\mathbb{A}^1_{U' \times \mathbb{A}^1}$, $\mathbb{A}^1_{U'}$ и $\mathbb{A}^1_U$, относительные канонические классы $\omega(F)$, $\omega(F_0)$, $\omega(F')$ согласованно изоморфны $\omega(X')F^*(\omega(\mathbb{A}^1))^{-1}$, $\omega(X')F_0{}^*(\omega(\mathbb{A}^1))^{-1}$, $\omega(X')F'^*(\omega(\mathbb{A}^1))^{-1}$ соответственно. Канонические классы X' и $\mathbb{A}^1$ тривиальны, значит, существует согласованная тривиализация $\omega(F)$, $\omega(F_0)$ и $\omega(F')$. По утверждению 2.1 из [4] $Hom(B, A)$ естественно изоморфен $\omega(B/A)$ для гомоморфизма $A \to B$, такого, что B — конечнопорождённый проективный A-модуль. Значит, тривиализация канонических классов X' и $\mathbb{A}^1$ даёт согласованные изоморфизмы

$$q_B\colon B_B \simeq Hom_A(B_B, A),\ q_{B_0}\colon B_{0B_0} \simeq Hom_{A_0}(B_{0B_0}, A_0),$$
$$q_{B'}\colon B'_{B'} \simeq Hom_{A'}(B'_{B'}, A'),$$

где $B = K[X' \times U' \times \mathbb{A}^1]$, $A = K[\mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1]$, $B_0 = K[X' \times U']$, $A_0 = K[\mathbb{A}^1 \times U']$,$B' = K[X' \times U]$, $A' = K[\mathbb{A}^1 \times U]$. Из изоморфизмов $q_B, q_{B_0}, q_{B'}$ заменой базы $0 \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ получим изоморфизмы

$$q_S\colon K[S] \simeq Hom(K[S], K[U' \times \mathbb{A}^1]),\ q_{S_0}\colon K[S_0] \simeq Hom(K[S_0], K[U']),$$
$$q_{S'}\colon K[S'] \simeq Hom(K[S'], K[U]).$$

Это изоморфизмы над кольцами $K[S]$, $K[S_0]$ и $K[S']$ соответственно, и, ограничивая скаляры до $K[X' \times U' \times \mathbb{A}^1]$, $K[X' \times U']$ и $K[X' \times U]$, получим изоморфизмы

$$q_H\colon H \simeq Hom(H, K[U' \times \mathbb{A}^1]),\ q_0\colon K[S_0] \simeq Hom_{K[X' \times U']}(K[S_0], K[U']),$$
$$q_P\colon P \simeq Hom(P, K[U]),$$

поскольку $H \simeq K[S]$, $P \simeq K[S']$. Наличие изоморфизма q_0, получающегося заменами баз из q_H и q_P, означает их согласованность в смысле первого изоморфизма из 3.1.8.

Для того, чтобы добиться выполнения второго изоморфизма из 3.1.8, заметим, что поскольку $s_1\big|_{\Delta'} = 0$, $s_1\big|_{N''} = \delta''$, s_1 не обращается в ноль на $(z' \times U) - \mathbf{z}''$, а δ'' — локальный параметр на W'', то $div\, s_1 \cap (z' \times U') = \mathbf{z}'' = \Delta \cap (z' \times U')$, и аналогично тому, как было показано в доказательстве пункта *a)*, $K[S_1]$ раскладывается в произведение колец $K[\Delta']$ и $K[R']$ для некоторого $R' \subset (X' - z) \times U'$.

Квадратичная форма, получающаяся из q_H в результате замены базы $U' \times 1\colon U' \hookrightarrow U' \times \mathbb{A}^1$ и ограничения на слагаемое $K[\Delta']$, может оказаться не единичной, а заданной некоторой обратимой функцией в $l \in K[U']^*$. Домножив все полученные квадратичные формы на некоторую обратимую функцию $l' \in K[U]^*$, такую, что $l'(z) = l(z)^{-1}$, можно добиться того, чтобы $l(z) = 1$. По следующей подлемме, соответствующее квадратичное пространство определяет элемент, равный вложению i' в $\overline{Wor}((U', U' - z'), (X', X' - z'))$, что влечёт второй изоморфизм из 3.1.8.

Подлемма 3.1.1.4 *X — гладкая схема, U — локальная подсхема в точке z, i — вложение $U \hookrightarrow X$. Пусть морфизм $\varepsilon \in Wor((U, U-z),(X, X-z))$ определяется $K[X \times U]$-модулем $K[\Delta]$ (Δ — график вложения i) и квадратичной формой, заданной обратимой функцией $e \in K[U]^*$. Пусть $e(z) = 1$, тогда $[\varepsilon] = [i]$ в $\overline{Wor}((U, U-z),(X, X-z))$.*

Доказательство подлеммы. Пусть V — окрестность по Зарисскому z в X, для которой определён морфизм $\varepsilon_V \in Wor((V, V-z),(X, X-z))$, такой, что $\varepsilon_V \circ i^V$, где i^V — вложение $U \hookrightarrow V$.

Рассмотрим накрытие $p\colon V' = Spec\, K[V][b]/(b^2 = e) \to V$. Отображение p — этально над z, поскольку $e(z) = 1$. Пусть z' — прообраз z, в котором $b(z') = 1$. Уменьшив V и V', можно добиться того, чтобы p было этальным и чтобы $p^{-1}(z) = z'$.

Обозначим i_V — вложение $V \hookrightarrow X$ и соответствующий морфизм в $Wor((V, V-z),(X, X-z))$. Поскольку $p^{-1}(z) = z'$, p задаёт морфизм в $Wor((V', V'-z'),(V, V-z))$.

Рассмотрим морфизмы $i_{V'} = i_V \circ p$ и $\varepsilon_{V'} = \varepsilon_V \circ p$ в $Wor((V', V'-z'),(X, X-z))$. Морфизм $i_{V'}$ определяется модулем $K[\Delta']$ (где Δ' — график отображения $p \circ i_V\colon V' \to X$) и единичной функцией. Морфизм $\varepsilon \circ p$ определяется тем же модулем $K[\Delta']$ и функцией $p^*(e)$. Поскольку в $K[V']$ $p^*(e) = b^2$, т.е. $p^*(e)$ является квадратом, то квадратичная форма, определяемая e, изоморфна единичной и в $Wor((V', V'-z'),(X, X-z))$ $\quad \varepsilon \circ p = i'_V$.

$$
\begin{tikzcd}
& (V', V'-z') \arrow[dd, "p"] \arrow[dr, shift left, "i_{V'}"] \arrow[dr, shift right, "\varepsilon_{V'}"'] & \\
(U, U-z) \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[dr, hook, "i^V"'] \arrow[rr, shift left, "i"] \arrow[rr, shift right, "\varepsilon"'] & & (X, X-z) \\
& (V, V-z) \arrow[ur, hook, shift left, "i_V"] \arrow[ur, shift right, "\varepsilon_V"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

Теперь заметим, что по уже доказанному пункту a) леммы, применённому к $p\colon V' \to V$, существует $\Psi \in Wor((U, U-z),(V', V'-z'))$: $[\Psi \circ p] = [i^V]$ в $\overline{Wor}((U, U-z),(V, V-z))$. И получим

$$[i^V \circ \varepsilon] = [\Psi] \circ [p \circ \varepsilon] = [\Psi] \circ [p \circ i_V] = [i].$$

3.2 Гомотопическая инвариантность ассоциированного пучка

Теорема 6 *Для гомотопически инвариантного предпучка $\mathscr{F}$ с Witt-трансферами, ассоциированный пучок в топологии Нисневича $\mathscr{F}_{Nis}$ гомотопически инвариантен.*

Доказательство. Выведем её из следующей леммы:

Лемма 3.2.1 *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный пучок с $Witt$-трансферами. Тогда пучки $\mathscr{F}_{Zar}$ и $\mathscr{F}_{Nis}$ совпадают при ограничении на $\mathbb{A}^1_K$ для произвольного поля K, являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия.*

Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_{Nis}(\mathbb{A}^1_X) \arrow[r, hook, "J^*"] \arrow[d, "i^*_{0,X}"] & \mathscr{F}_{Nis}(\mathbb{A}^1_{k(X)}) \arrow[d, "i^*_{0,k(X)}"] \\ \mathscr{F}_{Nis}(X) \arrow[r, hook, "j^*"] & \mathscr{F}_{Nis}(k(X)) \end{tikzcd}$$

Согласно лемме 3.2.1 пучки $\mathscr{F}_{Zar}$ и $\mathscr{F}_{Nis}$ совпадают при ограничении на $\mathbb{A}^1_{k(X)}$. Выше доказано, что для пучка Зарисского $\mathscr{F}_{Zar}$ отображение $i^*_{0,k(X)}$ — изоморфизм. Поэтому $i^*_{0,k(X)}$ — изоморфизм и для пучка Нисневича. Согласно теореме, доказанной в работе [10], для произвольного неприводимого многообразия Y гомоморфизм $\mathscr{F}_{Nis}(Y) \to \mathscr{F}_{Nis}(k(Y))$ инъективен. Поэтому J^* — мономорфизм. Поэтому и композиция $i^*_{0,k(X)} \circ J^*$ для пучка Нисневича — это мономорфизм. Следовательно, $i^*_{0,X}$ — это мономорфизм. Так как $i^*_{0,X}$ — эпиморфизм, то он — изоморфизм. Для доказательства теоремы осталось доказать лемму.

Доказательство леммы. Сечения пучков $\mathscr{F}_{Zar}$ и $\mathscr{F}_{Nis}$ определяются своими ростками на соответствующих локальных схемах и, вследствие теоремы об инъективности на локальных схемах для гомотопически инвариантных предпучков с $Witt$-трансферами из [10] гомоморфизмы ограничения вдоль вложения общей точки $\eta \hookrightarrow \mathbb{A}^1_K$ $\mathscr{F}_{Zar}(U) \to \mathscr{F}(\eta)$ и $\mathscr{F}_{Nis}(U) \to \mathscr{F}(\eta)$ — инъективны, и, следовательно, каноническое отображение $\mathscr{F}_{Zar}(U) \to \mathscr{F}_{Nis}(U)$ — инъективно. Для доказательства сюръективности по произвольному сечению $s_{Nis} \in F_{Nis}(U)$ найдем сечение $s_{Zar} \in \mathscr{F}_{Zar}(U)$, согласованное с s_{Nis} в общей точке.

Пусть $c\colon \mathfrak{U} \to U$ — покрытие по Нисневичу, для которого существует $s_{\mathfrak{U}}$, такое, что $c^*(s) = \varepsilon(s_{\mathfrak{U}})$, где ε — естественное преобразование $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{Nis}$. Как покрытие по Нисневичу, $s_{\mathfrak{U}}$ содержит некоторое открытое по Зарисскому подмножество $V \subset U$, и для любой точки $z \in U \setminus V$ U_z такое, что $c_z\colon U_z \to \mathbb{A}^1_K$ — этально и $c_z^{-1}(z) {\simeq} z$. Обозначим $s_V \in \mathscr{F}(V)$ и $s_{U_z} \in \mathscr{F}(U_z)$ — ограничения $s_{\mathfrak{U}}$ на V и U_z, для всех $z \in U \setminus V$.

Выберем некоторую точку $z \in U \setminus V$. Поскольку для всех достаточно малых окрестностей по Зарисскому $W \subset \mathbb{A}^1_K$ точки z выполняется включение $W - z \subset V$, определён элемент $r_z \in \lim\limits_{z\in W\subset\mathbb{A}^1_K} \frac{\mathscr{F}(W-z)}{\mathscr{F}(W)}$ — образ s_V. По теореме 5

$$\lim_{z\in W\subset\mathbb{A}^1_K} \frac{\mathscr{F}(W-z)}{\mathscr{F}(W)} \simeq \lim_{z\in W\subset U_z} \frac{\mathscr{F}(W-z)}{\mathscr{F}(W)},$$

и поскольку существует $s_{U_z} \in \mathscr{F}(U_z)$, согласованное с s_V на $U_z - z$, то $r_z = 0$. Значит, существует $s_{V_z} \in \mathscr{F}(V_z)$, для некоторой достаточно малой окрестности по Зарисскому точки $z \in \mathbb{A}^1_K$, согласованное с s_V.

Полученные сечения s_{V_z} предпучка $\mathscr{F}$ (для всех $z \in U \setminus V$) вместе с s_V задают некоторое сечение $\mathscr{F}_{Zar}$ на U (попарная согласованность сечений s_{V_z} следует из согласованности всех s_{V_z} с s_V, поскольку окрестности V_z достаточно малы, т.е. $V_z - z \subset V$). Поскольку сечения s_{Nis} и s_{Zar} согласованы с s_V на V, то они согласованны в общей точке $\mathbb{A}^1_K$.

Замечание 11 *Заметим что как и в случае топологии Зарисского, для доказательства леммы 3.2.1 и теоремы 6 достаточно только инъективности гомоморфизма этального вырезания, а из сюръктивности можно вывести тем же способом, что* $H^i_{Nis}|\mathbb{A}^1_K = 0$ *для* $i \geqslant 1$ *и гомотопически инвариантного предпучка с* $Witt$*-трансфераими* $\mathscr{F}$.

Глава 4. Дополнительные результаты

В этой главе во втором параграфе доказана теорема А из введения, которая позволяет дать определение категории $Witt$-мотивов. В первом и третьем параграфах доказаны теоремы дополняющие и усиливающие результаты об изоморфизмах вырезания из предыдущих глав и необходимые для доказательства гомотопической инвариантности когомологий пучка, ассоциированного с гомотопически инвариантным предпучком с $Witt$-трансферами. Эта теорема является следующим шагом в плане по решению всей задачи по построению категории $Witt$-мотивов, т.е доказательству её основного свойства, описанном в заключительном параграфе.

4.1 Вырезание на $\mathbb{A}^1_U$

Теорема 7 *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами, $U = \mathscr{O}_{X,x}$ — спектр локального кольца некоторой гладкой схемы X в точке x. Тогда для любого открытого подмножества $V \subset \mathbb{A}^1_U$, содержащего нулевое сечение $0_U \subset \mathbb{A}^1_U$, отображение ограничения*

$$i^*\colon \frac{\mathscr{F}(\mathbb{A}^1_U - 0_U)}{\mathscr{F}(\mathbb{A}^1_U)} \to \frac{\mathscr{F}(V - 0_U)}{\mathscr{F}(V)}$$

является изоморфизмом (i обозначает вложение V в $\mathbb{A}^1_U$).

Замечание 12

1) Аналогично случаю вырезания по Зарисскому над точкой, утверждение теоремы означает, что $i^*\colon \mathscr{F}'(\mathbb{A}^1_U - 0_U, \mathbb{A}^1_U) \to \mathscr{F}(V - 0_U, V)$ — изоморфизм, и следует из следующей леммы.

2) Очевидно, утверждение теоремы равносильно утверждению, что гомоморфизм ограничения

$$i^*\colon \frac{\mathscr{F}(V - 0_U)}{\mathscr{F}(V)} \to \frac{\mathscr{F}(V' - 0_U)}{\mathscr{F}(V')}$$

является изоморфизмом для любых двух вложенных открытых подмножеств $V' \subset V \subset \mathbb{A}^1_U$, содержащих нулевое сечение $0_U \subset \mathbb{A}^1_U$.

Лемма 4.1.1 *Пусть i обозначает вложение V в $\mathbb{A}^1_U$. Тогда $[i]\colon (V, V - 0_U) \to (\mathbb{A}^1_U, \mathbb{A}^1_U - 0_U)$ в $\overline{Wor_k}$ является изоморфизмом.*

Замечание 13

a) *Правый обратный к* $[i]$ *определяется элементом* $\Phi \in Wor_K((\mathbb{A}^1_U, \mathbb{A}^1_U - 0_U), (V, V - 0_U))$ *таким, что* $[i \circ \Phi] = [id] \in \overline{Wor_K}((\mathbb{A}^1_U - 0_U), (\mathbb{A}^1_U - 0_U))$, *т.е. существует* $\Theta \in Wor_K((\mathbb{A}^1_U \times \times \mathbb{A}^1, (\mathbb{A}^1_U - 0_U) \times \mathbb{A}^1), (\mathbb{A}^1_U, \mathbb{A}^1_U - 0_U))$ *такое, что*

$$\Theta \circ j_0 = i \circ \Phi,\ \Theta \circ j_1 = id, \tag{4.1.1}$$

где j_0, j_1 *— вложения нулевого и единичного сечений в* $(\mathbb{A}^1_U, \mathbb{A}^1_U - 0_U) \times \mathbb{A}^1$, *по второму сомножителю.*

b) *Левый обратный к* $[i]$ *определяется элементом* $\Psi \in Wor_K((\mathbb{A}^1_U, \mathbb{A}^1_U - 0_U), (V, V - 0_U))$ *таким, что* $[\Psi \circ i] = [id] \in \overline{Wor_K}((V, V - 0_U), (V, V - 0_U))$, *т.е. существует* $\Xi \in Wor_K((V \times \times \mathbb{A}^1, (V - 0_U) \times \mathbb{A}^1), (V, V - 0_U))$ *такое, что*

$$\Xi \circ j_0 = \Psi \circ i,\ \Xi \circ j_1 = id, \tag{4.1.2}$$

где j_0, j_1 *— вложения нулевого и единичного сечений в* $(V, V - 0_U) \times \mathbb{A}^1$.

Доказательство леммы 4.1.1.

Перейдём к рассмотрению схем над U и будем строить искомые морфизмы в категории Wor_U, которая является подкатегорией в Wor_k.

a) Для построения правого обратного к $i \in \overline{Wor}((V, V - 0_U), (\mathbb{A}^1_U, \mathbb{A}^1_U - 0_U))$ нужно найти квадратичные пространства P и H, соответствующие элементам Φ и Θ, а именно:

1) $P \in k[V \times_U \mathbb{A}^1_U] - mod$ — конечнопорождённый, проективный над $k[\mathbb{A}^1_U]$ и $k[V \times_U \mathbb{A}^1_U]$-линейный изоморфизм $q_P \colon P \simeq Hom(P, k[\mathbb{A}^1_U])$,

2) $H \in k[\mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U \times \mathbb{A}^1] - mod$ — конечнопорождённый, проективный над $k[\mathbb{A}^1_U \times \mathbb{A}^1]$ и $k[\mathbb{A}^1_U \times_U \mathbb{A}^1_U \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм $q_H \colon H \simeq Hom(H, k[\mathbb{A}^1_U \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что:

3) канонические отображения

$$\begin{gathered} P \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} k[\mathbb{A}^1_U - 0_U] \to k[V - 0_U] \otimes_{k[V]} P \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} k[\mathbb{A}^1_U - 0_U], \\ H \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} k[\mathbb{A}^1_U - 0_U] \to k[\mathbb{A}^1_U - 0_U] \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} H \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} k[\mathbb{A}^1_U - 0_U] \end{gathered} \tag{4.1.3}$$

являются изоморфизмами (здесь одна из структур $k[\mathbb{A}^1_U]$-модуля на H подразумевается правой, а другая — левой), что означает, что P и H задают морфизмы пар,

4) в группе Витта категории $Proj(\mathbb{A}^2_U \to \mathbb{A}^1_U)$ верны равенства

$$\begin{aligned} \big[(H,q_H)\otimes_{k[\mathbb{A}^1_U\times\mathbb{A}^1]} k[\mathbb{A}^1_U\times 0]\big] &= \big[\ {}_{k[\mathbb{A}^1_U]}k[V]\otimes_{k[V]}(P,q_P)\big],\\ \big[(H,q_H)\otimes_{k[\mathbb{A}^1_U\times\mathbb{A}^1]} k[\mathbb{A}^1_U\times 1]\big] &= \big[E_{k[\mathbb{A}^1_U]}\big], \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

что означает выполнение тождеств (4.1.1).

Рассмотрим $\mathbb{A}^1_U\times\mathbb{A}^1_U$ и $V\times_U\mathbb{A}^1_U$ как подмножества в $\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1\times U}$. Обозначим $T=\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}\setminus\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}$, $D=\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}\setminus V_{\mathbb{A}^1_U}$ и $\Delta\subset\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1\times U}$ — график вложения $\mathbb{A}^1_U\hookrightarrow\mathbb{P}^1_U$.

Пусть $\nu,\delta\in\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U},\mathscr{L}(T))$ — сечения, дивизорами нулей которых являются $0_{\mathbb{A}^1_U}$ и Δ соответственно, поскольку сечения пучков на $\mathscr{L}(T)\big|_T$ можно умножать на функции на U и при умножении на обратимую функцию дивизор нулей не меняется, рассмотрев $u=\dfrac{\nu\big|_T}{\delta\big|_T}$ как обратимую функцию на Uи домножив δ на u, можем добиться того, чтобы $\nu\big|_T=\delta\big|_T$. Поскольку V содержит 0_U и, следовательно, D не пересекается с $0_{\mathbb{A}^1_U}$, то по подлемме 3.1.1.1 для достаточно большого n существует сечение

$$s_0\in\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U},\mathscr{L}(nT)):\ s_0\big|_D=\nu^n,\ s_0\big|_{0_{\mathbb{A}^1_U}}=\delta^n.$$

Определим $s=s_0\cdot(1-t)+\delta^n\cdot t\in\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}\times\mathbb{A}^1,\mathscr{L}(nT))$, тогда

$$s\big|_{0_{\mathbb{A}^1}\times\mathbb{A}^1}=\delta^n,\ s\big|_{T_{\mathbb{A}^1}\times\mathbb{A}^1}=\nu^n.$$

Поскольку s обратимо на $T_{\mathbb{A}^1}$, а s_0 – на D, то

$$S_0=divs_0\subset V\times\mathbb{A}^1\times U,\quad S\subset\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1,$$

и можно положить

$$P=k[S_0]_{k[\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U]},\quad H=k[S]_{k[\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1]}.$$

Условие 4.1.3 выполняется, поскольку $s_0\big|_{0\times\mathbb{A}^1\times U}=\delta^n$ и $s\big|_{0\times\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1}=\delta^n$, и следовательно $S_0\cap 0\times\mathbb{A}^1\times U=0\times 0\times U$ и $S\cap(0\times\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1)=0\times 0\times U\times\mathbb{A}^1$.

Для доказательства того, что H и P — конечнопорождённые и проективные над $k[\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}]$ и $k[V\times\mathbb{A}^1_U]$ модули и построения изоморфизмов q_H и q_P, аналогично тому, как это сделано в доказательстве изоморфизма этального вырезания для кривых, рассмотрим конечный морфизм гладких схем над $\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1$

$$\overline{F}=([s:\mu^n]\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1},$$

который является плоским по теореме Гротендика, и из которого с помощью замены базы вдоль вложения $\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1}$ получим конечный морфизм аффинных гладких схем F, и обозначим через B_A алгебру, соответствующую F. С помощью изоморфизма из утверждения 2.1 из [4] и тривиализации канонического класса $\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U\times\mathbb{A}^1$ получим $k[B]$-линейный изоморфизм $q_B\colon k[B]\simeq Hom_A(k[B],k[A])$

$$\begin{tikzcd}
S_0 \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1} \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & \mathbb{P}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1} . \arrow[d, "\overline{F}"'] \\
\mathbb{A}^1_U \arrow[r] & \mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1} \arrow[r] & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1} \arrow[r] & \mathbb{P}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}
\end{tikzcd}$$

С помощью замен базы вдоль вложений $0\times\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1\times U}\to\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}$ и $\mathbb{A}^1_{U\times 0}\to\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}$ получим согласованные изоморфизмы $q_S\colon k[S]\simeq Hom(k[S],k[\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}])$ и $q_{S_0}\colon k[S_0]\simeq Hom(k[S_0],k[\mathbb{A}^1_U])$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r] & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1} \arrow[r] & \mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1} \\
S_0 \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_U \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{A}^1_U \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

И, наконец, с помощью ограничений скаляров вдоль вложений $S\hookrightarrow\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_{U\times\mathbb{A}^1}$ и $S_0\hookrightarrow\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1_U$ получим квадратичные формы q_H и q_P, согласованные посредством первого равенства в 4.1.4. Для выполнения второго изоморфизма из 4.1.4 достаточно домножить полученные q_P и q_H на некоторую обратимую функцию $l\in k[\mathbb{A}^1\times U]$. Действительно, $H\otimes k[\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U\times 1]=k[\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U]/(\delta^n)$ (здесь δ рассматривается как функция на $\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U$ посредством тривиализации $\mathscr{L}(T)$ на этой подсхеме $\mathbb{P}^1\times\mathbb{A}^1\times U$) и, поскольку n – нечётно, по подлемме 2.1.1.1, и подлагранжевой редукции, аналогично тому, как было показано в доказательствах инъективности на $\mathbb{A}^1_K$ и инъективности гомоморфизма вырезания на $\mathbb{A}^1_K$, любая $k[\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U]$-линейная квадратичная форма на $k[\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1\times U]/(\delta^n)$ определяет квадратичное пространство совпадающее в группе Гротендика-Витта с пространством ранга 1, квадратичная форма на котором определяется некоторой обратимой функцией $l \in k[\mathbb{A}^1 \times U]^*$. Поэтому домножив квадратичные формы q_P и q_H на l^{-1}, добьёмся того, что класс $k[\mathbb{A}^1 \times U \times 1] \otimes_{k[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]} (H, q_H)$ станет равен классу $E_{k[\mathbb{A}^1 \times U]}$.

b) Для построения левого обратного к $i \in \overline{Wor}((V, V - 0_U), (\mathbb{A}^1_U, \mathbb{A}^1_U - 0_U))$ нужно найти квадратичные пространства P и H, соответствующие элементам Ψ и Ξ, а именно:

1) конечнопорождённый, проективный над $k[\mathbb{A}^1_U]$ $k[V \times_U \mathbb{A}^1_U]$-модуль P и $k[V \times_U \mathbb{A}^1_U]$-линейный изоморфизм $q_P \colon P \simeq Hom(P, k[\mathbb{A}^1_U])$,

2) конечнопорождённый, проективный над $k[V \times \mathbb{A}^1]$ $k[V \times_U V \times \mathbb{A}^1]$-модуль H и $k[V \times_U V \times \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм $q_H \colon H \simeq Hom(H, k[V \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что:

3) канонические отображения

$$\begin{gathered} P \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} k[\mathbb{A}^1_U - 0_U] \to k[V - 0_U] \otimes_{k[V]} P \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} k[\mathbb{A}^1_U - 0_U], \\ H \otimes_{k[V]} k[V - 0_U] \to k[V - 0_U] \otimes_{k[V]} H \otimes_{k[V]} k[V - 0_U] \end{gathered} \tag{4.1.5}$$

являются изоморфизмами (здесь одна из структур $k[V]$-модуля на H подразумевается правой, а другая — левой), что означает, что P и H задают морфизмы пар,

4) в группе Витта верны равенства

$$\begin{aligned} \big[(H, q_H) \otimes_{k[V \times \mathbb{A}^1]} k[V \times 0]\big] &= \big[(P, q_P) \otimes_{k[\mathbb{A}^1_U]} k[V]\big], \\ \big[(H, q_H) \otimes_{k[V \times \mathbb{A}^1]} k[V \times 1]\big] &= \big[E_{k[V]}, 1\big], \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

что означает выполнение тождеств (4.1.2).

Пусть $\mu, \nu, \delta \in \Gamma(\mathscr{L}(T), \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U})$ — сечения, дивизоры нулей которых равны T, 0_U и Δ соответственно.

Поскольку Δ не пересекается с D_V в $\mathbb{P}^1_V$, то δ — обратимо на D_V и определено сечение $\delta^{-1} \in \Gamma(\mathscr{L}(-T)_{D_V})$. Теперь заметим, что по подлемме 3.1.1.1 для достаточно большого n существуют сечения

$$\begin{gathered} s' \in \Gamma(\mathscr{L}(n \cdot T), \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}) s'\big|_{D_{\mathbb{A}^1_U}} = \nu^n, \qquad s'\big|_{0_{\mathbb{A}^1_U}} = \mu^{n-1} \cdot \delta \\ g \in \Gamma(\mathscr{L}((n-1) \cdot T), \mathbb{P}^1 \times V) g\big|_{D_V} = \nu^n \cdot \delta^{-1}, \quad g\big|_{\Delta} = \mu^{n-1}, g\big|_{0_U \times V} = \mu^{n-1} \end{gathered},$$

поскольку $D_{\mathbb{A}^1_U}$ не пересекается с $0_{\mathbb{A}^1_U}$ в $\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}$ и поскольку D_V не пересекается с Δ в $\mathbb{P}^1_V$. Определим $s_0 \in \Gamma(\mathscr{L}(n\cdot T), \mathbb{P}^1 \times V)$ как обратный образ s' вдоль вложения $\mathbb{P}^1_V \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}$, а также $s_1 = g\cdot\delta \in \Gamma(\mathscr{L}(n\cdot T), \mathbb{P}^1_V)$. Тогда

$$s_0\big|_{D_V} = s_1\big|_{D_V} = \nu^n, s_1\big|_{\Delta} = 0, s_0\big|_{0_V} = s_1\big|_{0_V} = \mu^{n-1}\cdot\delta$$

и $divs_1$ раскладывается в дизъюнктное объединение $divg$ и Δ. Определим $s = s_0\cdot(1-t) + {}$ $+ s_1\cdot t \in \Gamma(\mathscr{L}(n\cdot T), \mathbb{P}^1_{V\times\mathbb{A}^1})$, тогда

$$s\big|_{0_{V\times\mathbb{A}^1}} = \mu^{n-1}\cdot\delta,\ s\big|_{D_{V\times\mathbb{A}^1}} = \nu^n.$$

Поскольку s — обратимо на $D_{V\times\mathbb{A}^1}$, а s_0 на $D_{\mathbb{A}^1_U}$, то $S_0 = divs_0 \subset V\times_U \mathbb{A}^1_U$ и $S = divs \subset V\times_U V\times\mathbb{A}^1$, и можно положить $P = k[S_0]_{k[V\times_U\mathbb{A}^1_U]}$, а $H = k[S]_{k[V\times_U V\times\mathbb{A}^1]}$.

Условие 4.1.5 выполняется, поскольку

$$s_0\big|_{0\times\mathbb{A}^1_U} = \delta,\ s\big|_{0\times\mathbb{A}^1_U\times\mathbb{A}^1} = \delta,$$

и следовательно,

$$S_0\cap(0\times\mathbb{A}^1_U) = 0\times 0\times U,\ S\cap(0\times\mathbb{A}^1_U\times\mathbb{A}^1) = 0\times 0\times U\times\mathbb{A}^1.$$

Для проверки того, что P и H являются конечнопорождёнными проективными модулями над $k[\mathbb{A}^1_U]$ и $k[V\times_U\mathbb{A}^1]$ соответственно, и определения на них квадратичных форм $q_P\colon P\simeq Hom(P, k[\mathbb{A}^1_U])$ и $q_H\colon H\simeq Hom(H, k[V\times\mathbb{A}^1])$, связанных первым соотношением из 4.1.6, аналогично тому, как это сделано в доказательстве сюръективности гомоморфизма этального вырезания, рассмотрим отображения

$$\overline{F'} = [s':\nu^n]\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U},\quad \overline{F_0} = [s_0:\nu^n]\colon \mathbb{P}^1_V\to\mathbb{P}^1_V,\quad \overline{F} = [s:\nu^n]\colon \mathbb{P}^1_{V\times\mathbb{A}^1}\to\mathbb{P}^1_{V\times\mathbb{A}^1},$$

которые являются конечными сюръективными плоскими морфизмами существенно гладких схем, при этом $\overline{F_0}$ получается из $\overline{F'}$ и $\overline{F}$ заменами баз вдоль вложения $i\colon V\hookrightarrow\mathbb{A}^1_U$ и вложения нулевым сечением $j_0\colon V \overset{id_V\times 0}{\hookrightarrow} V\times\mathbb{A}^1$ соответственно.

$$
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, hook] \arrow[dd] & & S_0 \arrow[ll, hook'] \arrow[rr, hook] \arrow[dl] \arrow[dd] & & S' \arrow[dl, hook] \arrow[dd] \\
\mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1} \arrow[dd, "F"'] & & \mathbb{A}^1_V \arrow[ll, hook'] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "F_0"' near start] & & \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U} \arrow[dd, "F'"' near start] & \\
 & V\times\mathbb{A}^1 \arrow[dl, hook, "0\times id_{V\times\mathbb{A}^1}"] & & V \arrow[ll, hook', "id_V\times 0"] \arrow[rr, "i"] \arrow[dl, "0\times id_V"] & & \mathbb{A}^1_U \arrow[dl, hook, "0\times id_{\mathbb{A}^1_U}"] \\
\mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1} & & \mathbb{A}^1_V \arrow[ll, hook', "id_{\mathbb{A}^1}\times id_V\times 0"] \arrow[rr, "id_{\mathbb{A}^1}\times i"'] & & \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U} & .
\end{tikzcd}
$$

Заменами баз вдоль вложений

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{A}^1_U}, \quad \mathbb{A}^1_V \hookrightarrow \mathbb{P}^1_V \quad, \mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{V\times\mathbb{A}^1}$$

из морфизмов $\overline{F'}$, $\overline{F_0}$ и $\overline{F}$ получим конечные плоские морфизмы существенно гладких аффинных схем F', F_0 и F, и с помощью утверждения 2.1 из [4] получим изоморфизмы

$$d'\colon \omega(F') \simeq Hom(k[\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}], k[\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}]), \quad d_0\colon \omega(F_0) \simeq Hom(k[\mathbb{A}^1_V], k[\mathbb{A}^1_V])$$
$$d\colon \omega(F) \simeq Hom(k[\mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1}], k[\mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1}])$$

согласованные с помощью замен баз вдоль i и j_0. Поскольку

$$\omega(F') \simeq \omega(\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}) \cdot F' * (\omega(\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}))^{-1} \simeq \omega(\mathbb{A}^1) \cdot F' * (\omega(\mathbb{A}^1))^{-1},$$
$$\omega(F_0) \simeq \omega(\mathbb{A}^1_V) \cdot F_0 * (\omega(\mathbb{A}^1_V))^{-1} \simeq \omega(\mathbb{A}^1) \cdot F_0 * (\omega(\mathbb{A}^1))^{-1},$$
$$\omega(F) \simeq \omega(\mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1}) \cdot F * (\omega(\mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1}))^{-1} \simeq \omega(\mathbb{A}^1) \cdot F * (\omega(\mathbb{A}^1))^{-1},$$

и эти изоморфизмы также согласованы с помощью замен баз вдоль i и j_0, а канонический класс $\mathbb{A}^1$ тривиален, то, взяв композицию d', d_0 и d с приведёнными выше изоморфизмами, и тривиализацией канонического класса $\mathbb{A}^1$ получим согласованные с помощью замен баз вдоль i и j_0 квадратичные формы

$$q'\colon\ B' \quad\simeq\quad Hom_{A'}(B', A'), \quad q_0\colon\ B_0 \quad\simeq\quad Hom_{A_0}(B_0, A_0), \quad q\colon\ B \quad\simeq\quad Hom_A(B, A),$$

где $A' = k[\mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}]$, а $B'_{A'}$ — алгебра, соответствующая морфизму F', и аналогично для A_0 с B_{0A_0}, и A с B_A.

Наконец, заменами баз вдоль вложений нулевым сечением $\mathbb{A}^1_U \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}$, $V \hookrightarrow \mathbb{A}^1_V$ и $V \times \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1}$ соответственно, и ограничениями скаляров вдоль вложений $S' \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^1_U}$, $S_0 \hookrightarrow \mathbb{A}^1_V$ и $S \hookrightarrow \mathbb{A}^1_{V\times\mathbb{A}^1}$ получим согласованные с помощью замен баз вдоль i и j_0 квадратичные формы q_P, $q_{H,0}\colon k[S_0] \simeq Hom(k[S_0], k[V])$ и q_H, и их согласованность означает выполнение первого равенства из 4.1.6.

Для удовлетворения второго равенства из 4.1.6 нужно умножить построенные q_P и q_H на обратимую функцию на V (используя структуры $k[V]$-модулей на P и H, получаемые с помощью проекций $V \times_U \mathbb{A}^1_U$ и $V \times_U V$ на первые сомножители), которая задаёт квадратичную форму на $k[\Delta]$, являющуюся слагаемым $q_H \otimes k[V \times 0]$.

4.2 Ассоциированный пучок как предпучок с $Witt$-трансферами

Теорема 8 *Для произвольного предпучка $\mathscr{F}$ с $Witt$-трансферами существует единственная структура предпучка с $Witt$-трансферами на ассоциированном пучке в топологии Нисневича $\mathscr{F}_{Nis}$, такая, что канонический гомоморфизм $\varepsilon : \mathscr{F} \to \mathscr{F}_{Nis}$ является гомоморфизмом предпучков с $Witt$-трансферами.*

Доказательство. Доказательство можно провести как и в случае Cor-соответствий, выведя утверждение теоремы из следующей ключевой леммы

Лемма 4.2.1 *Пусть $\Phi \in Wor(X, Y)$, $x \in X$ и $u^h_x\colon U^h_x \to X$ — гензелева локальная окрестность x в X, тогда композиция $\Phi \circ u^h_x$ раскладывается в сумму $\Phi_i \in Wor(U^h_x, U^h_{y_i})$ для некоторого конечного набора точек $y_i \in Y$.*

*Доказательство леммы.*Пусть (P, q_P) — квадратичное пространство, представляющее морфизм Φ, и Z — замкнутая подсхема $X\times Y$, являющаяся носителем $k[X\times Y]$-модуля P. Сначала убедимся, что Z — конечная над X.

Обозначим $R = k[X \times Y]$. Поскольку P — конечнопорождённый над $k[X]$ и $k[X]$ — нётерово, то любой его подмодуль конечнопорождён над $k[X]$. В частности, для любого элемента $m \in P$, подмодуль $R/Ann\, m$ порождённый m в P с помощью R — конечнопорождённый над $k[X]$, т.е носитель m в $X\times Y$ — конечен над X. Пусть m_1,m_2,...m_n — образующие P, тогда Z покрывается носителями элементов m_i, т.е $I(Z) = Ann\, P = \bigcap\limits_{i=1}^{n} Ann\, m_i$

и гомоморфизм

$$(1,\dots 1)\colon R/Ann\,P \to \bigoplus_{i=1}^{n} R/Ann, m_i$$

является вложением. Следовательно, поскольку все $R/Ann\,m_i$ — конечнопорождены над $k[X]$, $R/Ann\,P$ — конечнопорождён над $k[X]$ и Z — конечна над X.

Теперь остаётся заметить, что, поскольку Z — конечна над X, то при замене базы вдоль u_x^h Z разваливается в дизъюнктное объединение гензелевых локальных схем $Z_i = U_{z_i}^h$, соответствующих точкам z_1,...z_m в слое Z над x и, следовательно, поскольку P является $k[Z]$-модулем и q_P — $k[Z]$-линейно, то (P, q_P) раскладывается в сумму (P_i, q_i), где P_i являются $k[Z_i]$-модулями и q_i — $k[Z_i]$-линейны. При этом, поскольку определён морфизм $U_{z_i}^h \to U_{y_i}^h$, где y_i — образ при проекции z_i на Y, то P_i являются $k[U_x^h \times U_{y_i}^h]$-модулями и q_i $k[U_x^h \times U_{y_i}^h]$-линейны, и квадратичное пространство (P_i, q_i) задаёт морфизм в $Wor(U_x^h, U_{y_i}^h)$. Таким образом, получаем, что $\Phi \circ u_x^h = \sum_{i=1}^{m}[(P_i, q_i)]$ и $[(P_i, q_i)] \in Wor(U_x^h, U_{y_i}^h)$. *Лемма доказана.*

Остальная часть доказательства теоремы не имеет специфики связанной с *Witt*-трансферами и аналогична известному доказательству для *Cor*-соответствий.

Лемма 4.2.2 *Для любого морфизма $\Phi \in Wor(X, Y)$ между гладкими аффинными схемами X и Y и $v\colon V \to Y$ — покрытия по Нисневичу схемы Y, существуют покрытие по Нисневичу $u\colon U \to X$ и морфизм $\Omega \in Wor(U, V)$, являющийся поднятием Φ вдоль u и v, т.е. такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] & Y \\ U \arrow[u, "\Omega"] \arrow[r, "u"] & X \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство леммы. По подлемме 4.2.1 для любой точки $x \in X$ существует

$$\Omega_x^h \in Wor(U_x^h, \coprod_{i=1}^{m} U_{y_i}^h),$$

такой, что $\Phi \circ u_x = u_Y^h \circ \Omega_x^h$, где $u_Y^h\colon \coprod_{i=1}^{m} U_{y_i}^h \to Y$ — канонический гомоморфизм. Поскольку $U_{y_i}^h$ — гензелевы, а v — покрытие по Нисневичу, морфизмы $u_{y_i}^h$ можно поднять вдоль v до морфизмов $v_{y_i}^h$ и таким образом поднять u_Y^h до v_Y^h. В результате получатся первые две строки коммутативной диаграммы 4.2. Поскольку U_x^h является проективным пределом морфизмов гладких схем с отмеченной точкой $u_x\colon (U_x, x') \to (X, x)$, задающих изоморфизм x' и x, и этальных в x', и $Wor(U^h_x, V) = \varinjlim_{u_x} Wor(U_x, V)$, то для некоторого $u_x\colon U_x \to X$ существует морфизм $\Omega_x \in Wor(U_x, V)$, такой, что $\Omega_x \circ u^h_{x'} = v^h_Y \circ \Omega^h_x$, и поскольку $v \circ \Omega^h_x \circ = \Phi \circ u^h_x$, заменив U_x можно добиться того, чтобы $v \circ \Omega_x = \Phi \circ u_x$. Таким образом, достроена вершина U_x коммутативной диаграммы 4.2

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i=1}^m U^h_{y_i} \arrow[r, "v^h_Y"] & V \arrow[r, "v"] & Y \\
U^h_x \arrow[u, "\Omega^h_x"] \arrow[rr, "u^h_x"] \arrow[dr, "u^h_{x'}"'] & & X \arrow[u, "\Phi"'] \\
& U_x \arrow[uu, dashed, "\Omega_x"] \arrow[ur, dashed, "u_x"] \arrow[r, dashed] & U \arrow[u, "u"'] \arrow[uul, dashed, "\Omega"']
\end{tikzcd} .$$

Выбрав некоторые U_x для всех $x \in X$ и определив $U = \coprod U_x$ и Ω равным сумме Ω_x, достроим вершину U коммутативной диаграммы 4.2 и получим искомые покрытие и морфизм.

Перейдём к доказательству теоремы. Пусть задан элемент $a_Y \in \mathscr{F}_{Nis}(X)$. Пусть $v\colon V \to Y$ — покрытие по Нисневичу схемы Y, для которого задан $a_V \in \mathscr{F}(V) :\ v^*(a_Y) = \varepsilon(a_V)$. Выберем $u\colon U \to X$ и $\Omega \in Wor(U, V)$ в соответствии с леммой 4.2.2. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V \times_Y V \arrow[r, shift left, "pr_{1,V}"] \arrow[r, shift right, "pr_{2,V}"'] \arrow[d, "\Omega^2 = \Omega \times_\Phi \Omega"'] & V \arrow[r] \arrow[d, "\Omega"'] & Y \arrow[d, "\Phi"'] \\
U \times_X U \arrow[r, shift left, "pr_{1,U}"] \arrow[r, shift right, "pr_{2,U}"'] & U \arrow[r] & X
\end{tikzcd} \qquad (4.2.1)$$

Определён элемент $a_U = \Omega^*(a_V) \in \mathscr{F}(U)$ и, поскольку, в силу определения a_U и коммутативности двух левых квадратов диаграммы 4.2.1 и того, что a_V задаёт элемент a_Y в $\mathscr{F}_{Nis}(Y)$,

$$pr^*_{1,U}(a_U) = pr^*_{1,U}(\Omega^*(a_V)) = \Omega^{2^*}(pr^*_{1,V}(a_V)) =$$
$$= \Omega^{2^*}(pr^*_{2,V}(a_V)) = pr^*_{2,U}(\Omega^*(a_V)) = pr^*_{2,U}(a_U),$$

a_U задаёт некоторый элемент $a_X \in \mathscr{F}_{Nis}(X)$. Если предположить, что на $\mathscr{F}_{Nis}$ определены $Witt$-трансферы, то в силу коммутативности правого квадрата диаграммы 4.2.1

$u * (Phi^*(a_Y)) = \Omega^*(v^*(a_Y) = a_U$, и, следовательно, $\Phi^*(a_Y) = a_X$, что показывает единственность возможного определения $Witt$-трансферов на $\mathscr{F}_{Nis}$. Для того, чтобы доказать существование, нужно убедиться в корректности приведённой выше конструкции, т.е. независимости от выбора покрытий и подъёма Ψ (Ω), а также в том, что она определяет гомоморфизм групп, и "уважает" композицию. Сначала покажем независимость от выбора u и Ω при фиксированном v. Пусть $u_1\colon U_1 \to X$ и $u_2\colon U_2 \to X$ — покрытия по Нисневичу схемы X, и $\Omega_1 \in Wor(U_1, V)$ и $\Omega_2 \in Wor(U_2, V)$ — подъёмы Φ. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & V \times_Y V \arrow[r, shift left, "pr_{1,V}"] \arrow[r, shift right, "pr_{2,V}"'] & V \arrow[r, "v"] & Y \\
U_1 \times_X U_2 \arrow[ur, "\Omega_1 \times \Omega_2"] \arrow[r, "pr_{Y_2}"] \arrow[dr, "pr_{X_1}"'] & U_2 \arrow[ur, "\Omega_2"] \arrow[dr, "u_2"] & & \\
 & U_1 \arrow[uur, "\Omega_1"] \arrow[r, "u_1"] & X \arrow[uur, "Phi"] &
\end{tikzcd}$$

В силу определений a_{U_1} и a_{U_2}, коммутативности диаграммы и того, что a_V задаёт элемент a_Y в $\mathscr{F}_{Nis}(Y)$,

$$pr^*_{U_1}(a_{U_1}) = pr^*_{U_1}(\Omega^*_1(a_V)) = (\Omega_1 \times \Omega_2)^*(pr^*_{1,V}(a_V)) =$$
$$= (\Omega_1 \times \Omega_2)^*(pr^*_{2,V}(a_V)) = pr^*_{U_2}(\Omega^*_2(a_V)) = pr^*_{U_2}(a_{U_2}).$$

Поэтому a_{U_1} и a_{U_2} задают один и тот же элемент $a_X \in \mathscr{F}_{Nis}(X)$.

Для проверки независимости от выбора v покажем, что результат не изменится, если заменить v на $v' = v'' \circ v$, являющееся композицией покрытий v и $v''\colon V' \to V$. Из этого следует общий случай, поскольку у любых двух покрытий есть общее измельчение.

Итак, пусть $u\colon U \to X$ и Ω — покрытие X и подъём Φ, соответствующие v. Поскольку v'' — покрытие V, по лемме 4.2.2 существуют покрытие по Нисневичу $u''\colon U' \to U$ и Ω' — подъём Ω. Таким образом, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[r, "v''"] & V \arrow[r, "v"] & Y \arrow[d, "\Phi"'] \\
U' \arrow[u, "\Omega'"] \arrow[r, "u''"] & U \arrow[u, "\Omega"] \arrow[r, "u"] & X
\end{tikzcd}.$$

Поскольку Ω' является подъёмом Φ для покрытий $v' = v'' \circ v$ и $u' = v'' \circ u$, $a_{U'} = \Omega'^*(w^*(a_V))$ задаёт элемент в $\mathscr{F}_{Nis}(X)$, получаемый из a_Y с помощью покрытия v', и в силу коммутативности диаграммы он совпадает с $u''^*(a_U)$, следовательно $a_{U'}$ и a_U задают один и тот же элемент в $\mathscr{F}_{Nis}(X)$.

То, что построенное отображение $\Phi^*\colon \mathscr{F}_{Nis}(Y) \to \mathscr{F}_{Nis}(X)$, является гомоморфизмом групп, следует из того, что для любых элементов $a_1, a_2 \in \mathscr{F}_{Nis}(Y)$ можно найти общее покрытие Y, на котором они представляются сечениями $\mathscr{F}$, и того, что Ω^* является гомоморфизмом групп.

Функториальность построенного соответствия $\Phi \mapsto \Phi^*$ следует из того, что для двух морфизмов $\Phi \in Wor(X,Y)$ и $\Psi \in Wor(Y,Z)$ и сечения $a_Z \in \mathscr{F}_{Nis}(Z)$ можно выбрать последовательно покрытия $w\colon W \to Z$, $v\colon V \to Y$ и $u\colon U \to X$ и подъёмы $\Upsilon \in Wor(V,W)$ и $\Omega \in Wor(U,V)$ для Φ и Ψ соответственно, а композиция $\Omega \circ \Upsilon$ является подъёмом композиции $\Phi \circ \Psi$.

4.3 Этальное вырезание в размерности n

Теорема 9 *Пусть $\mathscr{F}$ — гомотопически инвариантный предпучок с $Witt$-трансферами и пусть $\pi\colon X' \to X$ — этальный морфизм гладких схем над полем K, являющимся полем частных некоторого гладкого аффинного многообразия. Пусть $Z \subset X$ — замкнутая подсхема коразмерности 1 в X, такая, что π индуцирует изоморфизм Z с его прообразом $Z' = \pi^{-1}(Z)$, и пусть z — некоторая замкнутая точка Z, а $z' \in Z'$ — её прообраз. Тогда π индуцирует изоморфизм*

$$\pi^*\colon \frac{\mathscr{F}(U-Z)}{\mathscr{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathscr{F}(U'-Z')}{\mathscr{F}(U')},$$

где $U = Spec(\mathcal{O}_{X,z})$, $U' = Spec(\mathcal{O}_{X',z'})$.

Замечание 14

1) *В терминах замечания 4.2 теорема 9 означает, что*

$$i^*\colon \mathscr{F}'(U, U-Z) \to \mathscr{F}'(U', U'-Z')$$

— изоморфизм.

2) *Аналогично тому как было отмечено для вырезания по Зарисскому на $\mathbb{A}^1_K$, приведённое*

ниже рассуждение фактически доказывает декартовость и кодекатровость квадрата

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U') \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}(U'-Z') \arrow[d] \\
\mathscr{F}(U) \arrow[r] & \mathscr{F}(U-Z)
\end{tikzcd}$$

Лемма 4.3.1 *Пусть* $\pi\colon X \to X'$ *— этальный морфизм гладких схем с тривиальными каноническими классами,* z *и* z' *— точки* X *и* X' *такие, что* $\pi(z') = z$ *и поля вычетов* z *и* z' *изоморфны,* Z *и* Z' *— замкнутые подсхемы* X *и* X'*, содержащие* z *и* z'*, такие, что* $Z' = \pi^{-1}(Z)$*,* $U = \varprojlim_{z\in V\subset X} V$*,* $U' = \varprojlim_{z'\in V'\subset X'} V'$*, тогда:*

a) существует $\Phi \in Wor_K((U, U-Z), (X', X'-Z'))$ *такой, что* $[\pi\circ\Phi] = [i]$ *в* $\overline{Wor_K}((U, U-Z), (X, X-Z))$*;*

b) существует $\Psi \in Wor_K((U, U-Z), (X', X'-Z'))$ *такой, что* $[\Psi\circ\pi] = [i']$ *в* $\overline{Wor_K}((U', U'-Z'), (X', X'-Z'))$*.*

Замечание 15 *Утверждение Леммы 4.3.1 означает, что в* $\overline{Wor_K}((U, U-Z), (X, X-Z'))$

$$[\pi\circ\Phi] = [i] + [\Omega],$$

$$[\Psi\circ\pi] = [i'] + [\Omega'],$$

где $\Omega \in Wor_K(U, X-Z)$ *и* $\Omega' \in Wor_K(U', X'-Z')$*. Это может быть обеспечено следующими коммутативными диаграммами в* Wor_K*:*

$$\begin{tikzcd}
 & & (U-Z)\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[dd, "\Theta'"] & U\times\mathbb{A}^1 \arrow[dd, "\Theta"] & & \\
(U-Z) \arrow[r, hook] \arrow[urr, "j_0"] \arrow[drr] & U \arrow[urr] \arrow[drr, "\pi\circ\Phi"] & & & (U-Z) \arrow[r, hook] \arrow[ull, "j_1"'] \arrow[dll] & U \arrow[ull] \arrow[dll, "i+\Omega"] \\
 & & X-Z \arrow[r, hook] & X & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (U'-Z')\times\mathbb{A}^1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\Xi'"] & U\times\mathbb{A}^1 \arrow[d, "\Xi"] & & \\
(U'-Z') \arrow[r, hook] \arrow[urr, "j'_0"'] \arrow[drr, "\Psi\circ\pi"'] & U' \arrow[urr] \arrow[drr] & & & (U'-Z') \arrow[r, hook] \arrow[ull] \arrow[dll] & U \arrow[ull, "j'_1"'] \arrow[dll, "i'+\Omega'"] \\
 & & X'-Z \arrow[r, hook] & X' & &
\end{tikzcd},$$

где j_0, j'_0, j_1 и j'_1 — нулевые и единичные сечения соответственно.

Доказательство леммы 4.3.1.

С помощью трюка Квиллена, выбрав некоторый конечный сюръективный морфизм $p\colon X \to \mathbb{A}^n_K$, где n — размерность X, построим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}' \arrow[d, "\varpi"] \arrow[dr, "p'_U"] \arrow[drr] & & & \\
\mathcal{X} \arrow[r, "p_U"] \arrow[d] \arrow[drr] & \mathbb{A}^1_U \arrow[dl] \arrow[drr] & X' \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "p'"] & \\
U \arrow[rr, "i"] \arrow[drr, "pr_{\mathbb{A}}\circ p\circ i"'] & & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "pr_{\mathbb{A}}\circ p"] & \mathbb{A}^n_K \arrow[dl, "pr_{\mathbb{A}}"] \\
 & & \mathbb{A}^{n-1}_K &
\end{tikzcd}, \tag{4.3.1}$$

где $pr_{\mathbb{A}}$ — линейная проекция n-мерного аффинного пространства на $n-1$-мерное, и в которой все параллелограммы декартовы, т.е. $\mathcal{X}$ — расслоенное произведение $pr\circ p$ и $pr\circ p\circ i$, а $\mathcal{X}'$ — расслоенное произведение $pr\circ p\circ\pi$ и $pr\circ p\circ\pi$.

Тогда, поскольку $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$ имеют согласованные структуры многообразий над $X\times U$ и $X'\times U$, для построения искомых морфизмов Φ, Θ и Ω достаточно построить:

1) P — квадратичное пространство в $Proj(pr_U)$, где $pr_U\colon \mathcal{X}'\to U$ — каноническая проекция. Т.е. $P\in K[\mathcal{X}']-mod$ — конечнопорождённый над $K[U]$ и $K[\mathcal{X}']$-линейный изоморфизм $q_P\colon P\simeq Hom_{K[U]}(P,K[U])$ (здесь используется структура $K[U]$-модуля на P, полученная из того что $\mathcal{X}'$ — схема над U),

2) H — квадратичное пространство в $Proj(pr_{\mathbb{A}\times U})$, где $pr_{U\times\mathbb{A}}\colon \mathcal{X}\times\mathbb{A}\to U\times\mathbb{A}$ — каноническая проекция. Т.е. $H\in K[X\times\mathbb{A}\times U]-mod$ — конечнопорождённый над $K[U\times\mathbb{A}]$ и $K[\mathcal{X}]$-линейный изоморфизм $q_H\colon H\simeq Hom_{K[U\times\mathbb{A}]}(H,K[U\times\mathbb{A}])$,

такие, что:

3) канонические отображения:

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[U]} K[U-Z] \to K[X'-Z'] \otimes_{K[X']} P \otimes_{K[U]} K[U-Z], \\ H \otimes_{K[U]} K[U-Z] \to K[X-Z] \otimes_{K[X]} H \otimes_{K[U]} K[U-Z] \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

являются изоморфизмами,

4) существуют изоморфизмы квадратичных пространств:

$$\begin{aligned} {j_0}^*(H, q_H) \simeq \varpi_*(P, q_P), \\ {j_1}^*(H, q_H) \simeq (K[\Delta], 1) \oplus (G, q_G), \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

где $(K[\Delta], 1)$ — единичная квадратичная форма на $K[\Delta]$ (т.е. форма, получаемая из единичной при помощи изоморфизма $K[\Delta] \simeq K[U]$) и G — $K[\mathcal{X}]$-модуль, такой, что $G \simeq K[\mathcal{X} - \mathcal{Z}] \otimes_{K[\mathcal{X}]} G$.

Вложим $\mathbb{A}^1_U$ в $\mathbb{P}^1_U$, и пусть $\overline{p_U}\colon \overline{\mathcal{X}} \to \mathbb{A}^1_U$ — нормализация композиции $cl^1_{\mathbb{A}} \circ p_U\colon X \to \mathbb{P}^1_U$, где $cl^1_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A}^1_U \to \mathbb{P}^1_U$ — упомянутое выше вложение, а $\overline{\varpi}\colon \overline{\mathcal{X}'} \to \overline{\mathcal{X}'}$ — нормализация композиции ϖ с вложением $\mathcal{X}$ в $\overline{\mathcal{X}}$

$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{X}'} \arrow[r, "\overline{\varpi}"] & \overline{\mathcal{X}} \arrow[r, "\bar{p}"] & \mathbb{P}^1_U \\ & \mathcal{X}' \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varpi"] \arrow[dl] \arrow[drr] & \mathcal{X} \arrow[u, hook] \arrow[r, "p"] \arrow[dl] \arrow[dr] & \mathbb{A}^1_U \arrow[u, hook] \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "\pi"] & X & & U \end{tikzcd} \tag{4.3.4}$$

Схемы $\overline{\mathcal{X}}$ и $\overline{\mathcal{X}'}$ не обязательно являются гладкими, однако содержат гладкие подсхемы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$. Обозначим $D = \overline{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}$ и $D'' = \overline{\varpi}^{-1}(D)$ и заметим, что, поскольку p_U и ϖ — конечные морфизмы, то $D = \overline{p_U}^{-1}(\infty_U)$, а $D' = \overline{\varpi}^{-1}(D) = \overline{p'_U}^{-1}(\infty_U)$ (где $\overline{p'_U} = \overline{p_U} \circ \overline{\varpi}$ — нормализация $p'_U \circ \varpi$).

Определим теперь "аналоги" Z и Z'. Пусть $\mathcal{Z}$ — расслоенное произведение $Z \subset X$ и U над $\mathbb{A}^{n-1}$, т.е. прообраз Z вдоль проекции $\mathcal{X} \to X$, и аналогично $\mathcal{Z}' = Z' \times_{\mathbb{A}^{n-1}} U$, $\overline{\mathcal{Z}}$ и $\overline{\mathcal{Z}'}$ — замыкания $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}'$ в $\overline{\mathcal{X}}$ и $\overline{\mathcal{X}'}$ соответственно, а Δ_Z и Δ'_Z — замкнутые подсхемы $\overline{\mathcal{X}}$ и $\overline{\mathcal{X}'}$ соответственно, являющиеся графиками вложения $Z \hookrightarrow X$ и композиции вложения $Z' \hookrightarrow X'$ с изоморфизмом $Z \simeq Z'$ как морфизмов над $\mathbb{A}^{n-1}$ (они, очевидно, замкнутые в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'$ и являются замкнутыми в $\overline{\mathcal{X}}$ и $\overline{\mathcal{X}'}$, поскольку содержатся в прообразах вдоль

$\overline{p_U}$ и $\overline{p'_U}$ графиков композиций описанных выше отображений с отображениями p и p' соответственно).

Обозначим также Δ, Δ_Z и Δ_z замкнутые подсхемы $\overline{\mathcal{X}}$, являющиеся графиками вложений U как морфизмов над $\mathbb{A}^{n-1}$, Z и соответственно z в X (они, очевидно, замкнутые в $\mathcal{X}$ и являются замкнутыми в $\overline{\mathcal{X}}$, поскольку содержатся в прообразах вдоль $\overline{p_U}$ графиков композиций, описанных выше морфизмов с морфизмом p). Аналогично обозначим Δ'_Z и Δ'_z графики композиций вложений Z' и z' в X' с изоморфизмами $Z \simeq Z'$ и $z \simeq z'$.

Поскольку $\overline{\mathcal{X}}$ и $\overline{\mathcal{X}'}$ — относительные кривые над U, будем строить искомые морфизмы и квадратичные пространства аналогично тому, как строили их в случае этального вырезания в размерности 1, с помощью специально выбранных глобальных сечений пучков

$$
\begin{aligned}
s' \in &\mathscr{L}(\overline{\mathcal{X}'}, nD''): && divs'.\mathcal{Z}' = \Delta'_Z,\ divs'.D'' = 0,\\
s \in &\mathscr{L}(\overline{\mathcal{X}} \times \mathbb{A}^1, lnD \times \mathbb{A}^1): && divs.\mathcal{Z} \times \mathbb{A}^1 = \Delta_Z \times \mathbb{A}^1,\ divs.D \times \mathbb{A}^1 = 0,\\
s_0, s_1 \in &\mathscr{L}(\overline{\mathcal{X}}, lnD): && s\big|_{\overline{\mathcal{X}'} \times 0} = s_0,\ s\big|_{\overline{\mathcal{X}'} \times 1} = s_1,\\
& && \varpi\colon divs' \overset{\varpi}{\tilde{\to}} divs_0,\ s_1\big|_{\Delta} = 0.
\end{aligned}
$$

Построение таких сечений описано ниже, а сейчас покажем как по ним построить квадратичные пространства (P, q_P) и (H, q_H). Определим

$$P \triangleq K[divs'], H \triangleq K[divs].$$

Квадратичную форму q_H определим при помощи функции $F = (\frac{s}{d^n}, pr_{U \times \mathbb{A}^1})\colon \mathcal{X}' \to \mathbb{A}^1 \times \times U \times \mathbb{A}^1$, которая является конечным сюръективным морфизмом гладких схем, и соответственно плоским, и изоморфизма из утверждения 2.1 из [4] : $q_B\colon B \simeq Hom_A(B, A)$, где B_A — алгебра, соответствующая морфизму F.Тогда квадратичную форму q_H получим из q_B с помощью замены базы вдоль вложения $U \times \mathbb{A}^1 \overset{0 \times id_{U \times \mathbb{A}^1}}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ и ограничения скаляров вдоль вложения $divs \hookrightarrow \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1$, а квадратичную форму q_P из q_B с помощью замен базы вдоль вложений $U \times \mathbb{A}^1 \overset{0 \times id_{U \times \mathbb{A}^1}}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ и $U \overset{id_U \times 0}{\hookrightarrow} U \times \mathbb{A}^1$ и ограничения скаляров вдоль вложения $divs_0 \hookrightarrow \mathcal{X}'$ (здесь подразумевается использование изоморфизма $divs' \simeq divs_0$)

$$\begin{tikzcd}
divs' \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & divs_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & divs \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1 \arrow[d, hook] \\
\mathcal{X}' \arrow[r, "\varpi"] \arrow[dr] & \mathcal{X} \arrow[r, hook, "id\times 0"] \arrow[d] & \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, hook, "0\times id"] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \times \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1 \arrow[d] \\
 & U \arrow[r, hook, "id\times 0"'] & U \times \mathbb{A}^1 \arrow[r, hook, "0\times id"'] & \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1
\end{tikzcd} .$$

Согласованность квадратичных форм q_P и q_H, т.е. первое равенство из 4.3.3, следует из того, что они оба получены из q_B с помощью замен базы и функториальности этой операции.

Условия 4.3.2 выполняются, поскольку

$$divs' \cap \mathcal{Z}' = \Delta'_Z \subset \mathcal{X}'_Z,\ divs \cap \mathcal{Z} \times \mathbb{A}^1 = \Delta_Z \times \mathbb{A}^1 \subset \mathcal{X}_Z.$$

Второе равенство из условия 4.3.3 может не выполняться, однако верно, что пространство (H, q_H) при ограничении на сечение $\mathcal{X} \times 1 \subset \mathcal{X} \times \mathbb{A}^1$ раскладывается в прямую сумму некоторых пространств (E, q_E) и (G, q_G), поскольку его носитель $divs$ раскладывается в дизъюнктное объединение. Действительно, поскольку $s_1\big|_\Delta = 0$, то $divs_1 = \Delta + R$, а поскольку, $s\big|_{\mathcal{X}\times 1} = s_1$ и $divs.(\mathcal{Z} \times \mathbb{A}^1) = \Delta_Z \times \mathbb{A}^1$,то $divs_1.\mathcal{Z} = \Delta_Z = \Delta.\mathcal{Z}$. Следовательно $R \cap \mathcal{Z} = \emptyset$. Наконец, поскольку Δ_z — единственная замкнутая точка Δ (и $\Delta_z \subset \mathcal{Z}$), то $R \cap \Delta = \emptyset$. Таким образом, $divs_1 = \Delta \coprod R$, причём $R \cap \mathcal{Z} = \emptyset$ и (H, q_H) при ограничении на $\mathcal{X} \times 1$ равно прямой сумме пространств с носителями Δ и R, а модули этих пространств (E и G) равны соответственно $K[\Delta]$ и $K[R]$, поскольку

$$H \otimes_{K[U\times\mathbb{A}^1]} K[U \times 1] = K[divs] \otimes_{K[U\times\mathbb{A}^1]} K[U \times 1] = K[divs_1] = K[R] \oplus K[\Delta].$$

Т.к. $R \cap \mathcal{Z} = \emptyset$, пространство (G, q_G), как и требуется, определено над $K[X - Z]$ и задаёт морфизм из U в $X - Z$, поскольку R является замкнутым подмножеством в $\mathcal{X} - \mathcal{Z}$, являющимся расслоенным произведением $X - Z$ и U, однако квадратичная форма на слагаемом $K[\Delta]$ может быть задана произвольной обратимой функцией $\lambda \in K[U]^*$ (не обязательно единичной). Чтобы она стала единичной, нужно взять композицию всех построенных морфизмов справа на морфизм, заданный пространством $(K[\Delta], \lambda^{-1})$, т.е. домножить все построенные квадратичные формы на λ^{-1}, используя то, что все носители этих форм являются схемами над U.

Теперь построим требуемые s', s_0, s_1 и s. Заметим, что поскольку π и p — конечны, то p_U — конечен, и, следовательно, $\overline{p_U}$ — конечен, и, поскольку $\mathscr{L}(\infty_U)$ — обилен, то $\mathscr{L}(D) = \overline{p}_U{}^*(\mathscr{L}(\infty_U))$ — обилен. А т.к. $\overline{\varpi}$ — конечен и $D'' = \overline{\varpi}^{-1}(D)$, то $\mathscr{L}(D'')$ — обилен.

Обозначим $\overline{\varpi}_z\colon \overline{\mathcal{X}'}_z \to \overline{\mathcal{X}}_z$, $\mathcal{Z}_z$ соответственно слои $\varpi\colon \overline{\mathcal{X}'} \to \overline{\mathcal{X}}$ и $\mathcal{Z}$ над замкнутой точкой U, т.е. z. В соответствии с леммой 3.1.1.2, применённой к $\overline{\varpi}_z\colon \overline{\mathcal{X}'} \to \overline{\mathcal{X}}$ и пучку $\mathscr{L}(D'' \times z)$, для n, больших некоторого $\overline{k}$, существует сечение $\overline{s} \in \Gamma(\overline{\mathcal{X}'}_z, \mathscr{L}(nD''))$, такое, что ограничение $\overline{\varpi}_z$ на $div\overline{s}$ является замкнутым вложением в $\overline{\mathcal{X}}$, $\overline{s}$ обращается в ноль в Δ_z и не обращается в ноль на $\overline{\varpi}_z^{-1}(\mathcal{Z}_z)_z - \mathbf{z}'$ и на D''_z. По подлемме 3.1.1.1, применённой к многообразиям $\mathcal{X}', \mathcal{X}$, пучкам $\mathscr{O}(\overline{\mathcal{X}'}), \mathscr{O}(\overline{\mathcal{X}})$ и линейным расслоениям $\mathscr{L}(D'')$ и $\mathscr{L}(D)$ для всех n, больших некоторого k, отображения ограничения

$$\Gamma(\overline{\mathcal{X}'}, \mathscr{L}(nD'')) \to \Gamma(\mathscr{L}(nD'')\big|_{N \cup D'' \cup \overline{\mathcal{X}}_z}),$$
$$\Gamma(\overline{\mathcal{X}}, \mathscr{L}(lnD)) \to \Gamma(\mathscr{L}(lnD)\big|_{mathcal Z \cup D \cup \Delta})$$

сюръективны, где N — нульмерная замкнутая подсхема $\overline{\mathcal{X}'}$, задаваемая квадратом пучка идеалов функций, обновляющихся в Δ_z. Выберем $n > \overline{k}, k$. И выберем $\overline{s}$, удовлетворяющее описанным выше условиям.

Выберем s' — глобальное сечение $\mathscr{L}(nD'')$ такое, что $s'\big|_{\overline{\mathcal{X}'}_z} = \overline{s}$, $s'\big|_{\Delta'_Z} = 0$ и $s'\big|_N = \delta'$, где δ — функция, задающая дивизор Δ'_Z на N (здесь подразумевается некоторая тривиализация $\mathscr{L}(nD'')\big|'_N$ и используется, что на локальной схеме все дивизоры главные). Тогда

$$divs'.(\overline{\varpi}^{-1}(\overline{\mathcal{Z}'})) = \Delta'_Z, \quad div\, s'.(D'') = 0. \tag{4.3.5}$$

Первое равенство следует из того, что s' обращается в 0 на Δ'_Z и, следовательно, $divs'.\overline{\mathcal{Z}'} = \Delta'_Z + F$, но поскольку $s'\big|_N = \delta'$ и, следовательно, $divs'.N = \Delta'_Z$, то $F \cap N = \emptyset$. С другой стороны, поскольку s' не обращается в 0 в других замкнутых точках $\overline{\mathcal{Z}}$, то $F = 0$. Второе равенство — переформулировка необращения в ноль на D''.

Пусть s_0 — некоторое сечение $\mathscr{L}(lnD_U)$, такое, что $div\, s_0 = \overline{\varpi}_*(div\, s')$. Тогда из 4.3.5 следует:

$$divs_0.\mathcal{Z} = \Delta_Z,\ divs_0.D = 0 \tag{4.3.6}$$

Теперь выберем сечение s_1 пучка $\mathscr{L}(lnD)$:

$$s_1\big|_\Delta = 0,\ s_1\big|_{\mathcal{Z} \cup D} = s_0\big|_{\mathcal{Z} \cup D}$$

(согласованность условий на пересечениях обеспечивается тем, что $\Delta \cap \mathcal{Z} = \Delta_Z$ и s_0 обращается в ноль на Δ_Z). И пусть $s = s_0 \cdot (1-t) + s_1 \cdot t$ — сечение $\mathscr{L}(lnD \times \mathbb{A}^1)$. Тогда из 4.3.6 получим:

$$divs.(\mathcal{Z} \times \mathbb{A}^1) = \Delta_Z \times \mathbb{A}^1, \, divs.(D \times \mathbb{A}^1) = 0. \tag{4.3.7}$$

b) Рассмотрим расслоенные произведения $\mathcal{X}'$ и $\overline{\mathcal{X}'}$ с U' над U и обозначим их $\mathcal{X}''$ и $\overline{\mathcal{X}''}$ соответственно, а также их замкнутые подсхемы $\mathcal{Z}''$, $\Delta_{Z'}$ и Δ''_z, являющиеся соответственно расслоенным произведением Z' на U', графиком вложения $i' \colon U' \hookrightarrow X'$, как морфизма над $\mathbb{A}^{n-1}$, и графиком вложения точки z' в $\mathcal{X}'$, соответственно.

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{Z'} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathcal{Z}'' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{X}'' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{\mathcal{X}''} \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathcal{Z}' \arrow[r, hook] & \mathcal{X}' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{\mathcal{X}'} \arrow[r] \arrow[dd] & U \arrow[d, "pr_{\mathbb{A}} \circ p \circ i"] \\
& & X' \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathbb{A}^{n-1} \arrow[d, equal] \\
& & \mathbb{A}^n \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^{n-1} \arrow[r, "pr_{\mathbb{P}}"] & \mathbb{A}^{n-1}
\end{tikzcd} \quad . \tag{4.3.8}$$

Для построения искомых морфизмов достаточно построить:

1) P — квадратичное пространство в $Proj(pr_U)$. Т.е. $P \in K[\mathcal{X}'] - mod$ — конечнопорождённый над $K[U]$ и $K[\mathcal{X}']$-линейный изоморфизм $P \simeq Hom_{K[U]}(P, K[U])$,

2) H — квадратичное пространство в $Proj(pr_{U' \times \mathbb{A}^1})$. Т.е. $H \in K[\mathcal{X}'' \times \mathbb{A}^1] - mod$ — конечнопорождённый над $K[U' \times \mathbb{A}^1]$ и $K[\mathcal{X}'' \times \mathbb{A}^1]$-линейный изоморфизм $H \simeq Hom_{K[U' \times \mathbb{A}^1]}(H, K[U' \times \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что:

3) канонические отображения:

$$\begin{gathered} P \otimes_{K[U]} K[U - Z] \to K[X' - Z'] \otimes_{K[X]} P \otimes_{K[U]} K[U - Z], \\ H \otimes_{K[U']} K[U' - Z'] \to K[X' - Z'] \otimes_{K[X']} H \otimes_{K[U']} K[U' - Z'] \end{gathered} \tag{4.3.9}$$

являются изоморфизмами,

4) существуют изоморфизмы квадратичных пространств:

$$\begin{aligned} {j_0}^*(q_H) &\simeq (id \times \pi)^*(q_P), \\ {j_1}^*(q_H) &\simeq q_{\Delta'} \oplus q_G, \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

где $q_{\Delta'}$ — единичная квадратичная форма на $K[\Delta']$ (т.е. имеется в виду форма, получаемая из единичной при помощи изоморфизма $K[\Delta'] \simeq K[U']$), и $K[\mathcal{X}']$-модуль G, на котором определена квадратичная форма q_G, обладает свойством $G \simeq K[X' - Z'] \otimes_{K[X']} G$.

Будем строить эти модули с помощью специально выбранных глобальных сечений пучков

$$\begin{aligned} s' \in \Gamma(\mathcal{X}', \mathscr{L}(nD')) :& s.\mathcal{Z}' = \Delta'_z,\ s.D' = 0, \\ s \in \Gamma(\mathcal{X}'' \times \mathbb{A}^1, \mathscr{L}(nD''')) :& s.(\mathcal{Z}'' \times \mathbb{A}^1) = \Delta''_z,\ s.(D''' \times \mathbb{A}^1) = 0, \\ & s\big|_{\mathcal{X}'' \times 0} = s_0,\ s\big|_{\mathcal{X}'' \times 1} = s_1, \\ s_0 \in \Gamma(\mathcal{X}'', \mathscr{L}(nD''')) :& s_0 = \pi^{X'^*}(s'), \\ s_1 \in \Gamma(\mathcal{X}'', \mathscr{L}(nD''')) :& s_1|_{\Delta''_z} = 0. \end{aligned}$$

Их построение описано ниже. Выбрав такие сечения, определим модули

$$P = K[divs'],\ H = K[divs].$$

Структуры квадратичных пространств определим аналогично всем предшествующим ситуациям (одновременно убедившись, что эти модули являются конечнопорождёнными проективными над $K[U]$ и $K[U']$ соответственно), заменив $divs'$ и $divs$ на семейства, образующие гладкие схемы, и воспользовавшись утверждением 2.1 из [4].

А именно, рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} \overline{F'} &= ([s' : d'^n], pr_U) \colon \mathcal{X}' \to \mathbb{A}^1 \times U, \\ \overline{F} &= ([s : d'''^n], pr_{U' \times \mathbb{A}^1}) \colon \mathcal{X}' \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1, \\ \overline{F_0} &= ([s_0 : d'''^n], pr_{U'}) \colon \mathcal{X}' \to \mathbb{A}^1 \times U' \end{aligned}$$

и коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & & divs \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & divs_0 \arrow[lll, hook'] \arrow[rrr, hook] \arrow[dl] \arrow[ddd] & & & divs' \arrow[dl] \arrow[ddd] \\
 & \mathcal{X}'' \times \mathbb{A}^1 \arrow[dl] \arrow[ddd, "F"'] & & & \mathcal{X}'' \arrow[lll, hook'] \arrow[rrr, hook] \arrow[dl] \arrow[ddd, "F_0"] & & & \mathcal{X}' \arrow[dl] \arrow[ddd, "F'"'] & \\
\overline{\mathcal{X}''} \times \mathbb{A}^1 \arrow[ddd, "\overline{F}"'] & & & \overline{\mathcal{X}''} \arrow[lll, hook'] \arrow[rrr, hook] \arrow[ddd, "\overline{F_0}"] & & & \overline{\mathcal{X}'} \arrow[ddd, "\overline{F'}"'] & & \\
 & & U' \times \mathbb{A}^1 \arrow[dl] & & & U' \arrow[lll, hook', "id_{U'} \times 0"'] \arrow[rrr, hook, "\pi^{X'}"'] \arrow[dl] & & & U \arrow[dl] \\
 & \mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1 \arrow[dl] & & & \mathbb{A}^1 \times U' \arrow[lll, hook', "id_{\mathbb{A}^1 \times U'} \times 0"'] \arrow[rrr, hook, "id_{\mathbb{A}^1} \times f\pi^{X'}"'] \arrow[dl] & & & \mathbb{A}^1 \times U \arrow[dl] & \\
\mathbb{P}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1 & & & \mathbb{P}^1 \times U' \arrow[lll, hook', "id_{\mathbb{P}^1 \times U'} \times 0"'] \arrow[rrr, hook, "id^1_{\mathbb{P}} \times \pi^{X'}"'] & & & \mathbb{P}^1 \times U & &
\end{tikzcd}
,
$$

в которой все параллелограммы являются декартовыми.

Морфизмы $\overline{F}$, $\overline{F_0}$, $\overline{F'}$ являются конечными и, следовательно, F, F_0, F' — тоже, а по теореме Гротендика, поскольку $\mathcal{X}''$, $\mathbb{A}^1 \times U'$, $\mathcal{X}'$ и $\mathbb{A} \times U$ — существенно гладкие многообразия размерности $d+1$, эти морфизмы также являются плоскими. Следовательно, проекции из $divs$ и $divs'$ на $U' \times \mathbb{A}^1$ и U' тоже плоские, поскольку получаются из F и F' заменами баз, и это доказывает проективность H и P соответственно. Если обозначить алгебры, соответствующие морфизмам F, F_0, и F', через B_A, B_{0A_0} и $B'_{A'}$, то утверждение 2.1 из [4], применённое к конечным плоским морфизмам существенно гладких схем F, F_0 и F', предоставляет изоморфизмы

$$q_B \colon B \simeq Hom_A(B, A), \quad q_{B_0} \colon B_0 \simeq Hom(B_0, A_0), \quad q_{B'} \colon B' \simeq Hom(B', A'),$$

такие, что

$$ind_{id_{\mathbb{A}^1 \times U'} \times 0}(q_B) = q_{B_0},\, ind_{id^1_{\mathbb{A}} \times \pi^{X'}}(q_{B'}) = q_{B_0}.$$

После замен баз вдоль вложений $0 \times id_{U' \times \mathbb{A}^1}$, $0 \times id_{U'}$ и $0 \times id_{U'}$ получим из q, q_{B_0} и $q_{B'}$ соответственно согласованные изоморфизмы q_{divs}, q_{divs_0} и $q_{divs'}$, и после ограничений скаляров вдоль вложений $divs \hookrightarrow \mathcal{X}'' \times \mathbb{A}^1$, $divs_0 \hookrightarrow \mathcal{X}''$ и $divs' \hookrightarrow \mathcal{X}'$ получим изоморфизмы q_H, q_0 и q_P, согласованные в силу функториальности ограничения скаляров относительно замены базы, так что

$$ind_{U' \times 0}(q_H) = q_0 = ind_{\pi^{X'}}(q_P),$$

что означает выполнение первого равенства из 4.3.10.

Условие 4.3.9 выполнено, поскольку

$$divs \cap (\mathcal{Z}'' \times \mathbb{A}^1) \subset \mathcal{X}''_{Z'} \times \mathbb{A}^1, \quad divs' \cap \mathcal{Z}' \subset \mathcal{X}'_{Z'}.$$

Второе равенство из 4.3.10 может не выполняться, однако верно, что (H, q_H) при ограничении на $\mathcal{X}'' \times 1$ раскладывается в прямую сумму некоторых пространств (G, q_G) и (Λ, q_Λ), поскольку его носитель – $divs$ раскладывается в дизъюнктное объединение Δ'' и некоторой замкнутой подсхемы R, содержащейся в $\mathcal{X}'' - \mathcal{Z}''$.

Проверим это. Действительно, поскольку $s_1|_{\Delta''} = 0$, то $divs_1 = \Delta'' + R$. Далее, поскольку $divs.(\mathcal{Z}'' \times \mathbb{A}^1) = \Delta_{Z'} \times \mathbb{A}^1$ и $s\big|_{\mathcal{Z}'' \times \mathbb{A}^1} = s_1$, то $divs_1.\mathcal{Z}'' = \Delta_{Z'} = \Delta''.\mathcal{Z}''$. Следовательно $R \cap \mathcal{Z}'' = \emptyset$, и, поскольку $\Delta_{z'}$ является единственной замкнутой точкой Δ'' и $\Delta_{z'} \subset \mathcal{Z}''$, то R и Δ'' не пересекаются.

Теперь заметим, что поскольку $H = K[divs]$, то $G = K[R]$ и $E = K[\Delta'']$, а квадратичная форма на слагаемом $K[\Delta'']$ задаётся некоторой неединичной обратимой функцией $\lambda \in K[U']^*$. Выберем функцию $\lambda' \in K[U]^*$, такуюо что $\lambda'(z) = \lambda(z')$ и домножим квадратичные формы q_P и q_H на обратную функцию λ'^{-1}. В результате добьёмся того, что $\lambda(z') = 1$, и тогда наконец по подлемме 3.1.1.4 получим, что пространства $(K[\Delta''], \lambda)$ и $(K[\Delta''], 1)$ задают один и тот же морфизм пар $(U', Z') \to (X', Z')$ в категории Wor, что и требуется для выполнения условия 4.3.10.

Теперь опишем построение s', s_0, s_1, и s. Заметим, что, поскольку π и p — конечны и, следовательно, p'_U — конечен, то $\overline{p'_U}$ — конечен и, поскольку $\mathscr{L}(\infty_U)$ — обилен, то $\mathscr{L}(D') = \overline{p'}_U{}^*(\mathscr{L}(\infty_U))$ — обилен, а также, что, поскольку $\pi^{X'}$ — конечен и $D''' = \pi^{X'^{-1}}(D')$, то $\mathscr{L}(D''')$ — также обилен.

Построим сечение $s' \in \Gamma(\mathcal{X}'', \mathscr{L}(nD'))$ для достаточно больших n с помощью подлеммы 3.1.1.1, задав его согласованно на слое над замкнутой точкой, т.е. на $\mathcal{X}'_z$ и на нульмерной замкнутой подсхеме $2\Delta'_z$, задаваемой квадратом пучка идеалов, обновляющихся в Δ'_z.

Сечение s' должно обращаться в 0 в точке Δ'_z и не обращаться в 0 в замкнутых точках D' и замкнутых точках $\mathcal{Z}'$, отличных от Δ'_z. По подлемме 3.1.1.1 для всех n, больших некоторого $\overline{k}$, существует сечение $\overline{s} \in \mathscr{L}(\mathcal{X}'_z, nD)$, удовлетворяющее перечисленным свойствам (поскольку ограничение обратимого пучка на замкнутую точку тривиально). Как локально тривиальный, пучок $\mathscr{L}(D'')$ тривиален на $2\Delta'_z$, и положим s' при ограничении на $2\Delta'_z$ равным функции, дивизор нулей которой равен Δ'_Z (такая функция существует, поскольку на нульмерной схеме любой дивизор главный). Эти условия согласованы, поскольку $\mathcal{X}'_z \cap 2\Delta'_z = \Delta'_z$ и оба заданных сечения обращаются в 0 в Δ'_z.

Построенное сечение обращается в 0 на Δ'_Z и не обращается в 0 в замкнутых точках $\mathcal{Z}'$, отличных от Δ'_z, следовательно, пересечение $divs'$ с $\mathcal{Z}'$ равно Δ'_Z, а поскольку s' не обращается в 0 в замкнутых точках D', то $divs'$ не пересекается с D'.

Положим теперь

$$s_0 = \pi^{X'^*}(s').$$

Тогда

$$divs_0.\mathcal{Z}'' = \pi^{X'^{-1}}(divs'.\mathcal{Z}') = \Delta_{Z'}, \quad divs_0.D''' = 0,$$

поскольку $pi^{X'^{-1}}(\Delta'_Z) = \Delta_{Z'}$, а $D''' = \pi^{X'^{-1}}(D')$.

Теперь снова по подлемме 3.1.1.1 для достаточно больших n, найдём сечение

$$s_1 \in \Gamma(\mathcal{X}'', nD'') : s_1\big|_{\mathcal{Z}''\coprod D'''} = s_0\big|_{\mathcal{Z}''\coprod D'''}, \, s_1\big|_{\Delta''} = 0;$$

эти условия согласованы, поскольку $(\mathcal{Z}''\coprod D''') \cap \Delta'' = \Delta_{Z'}$, и $s_0\big|_{\Delta_{Z'}} = 0$.

Наконец, определим $s = (1-t)\cdot s_0 + t\cdot s_1$, тогда условия на согласованность s с s_0 и s_1 выполняются по определению, а поскольку $s_1\big|_{\mathcal{Z}''\coprod D'''} = s_0\big|_{\mathcal{Z}''\coprod D'''}$, то s постоянно на $(\mathcal{Z}''\coprod D''')\times\mathbb{A}^1$ вдоль $\mathbb{A}^1$, и

$$divs.(\mathcal{Z}''\coprod D''') = (divs_0.(\mathcal{Z}''\coprod D'''))\times\mathbb{A}^1 = \Delta_{Z'}\times\mathbb{A}^1.$$

4.4 План построения категории $Witt$-мотивов

Как легко вывести из теоремы 8, категория $SN_{witt}Tr(k)$ пучков Нисневича с $Witt$-трансферами является *абелевой*. Эта категория лежит в основе определения категории $Witt$-мотивов $DWM(k)$, которое мы сейчас дадим. Сначала рассматривается производная категория $DSN_{witt}Tr(k)$ абелевой категории $SN_{witt}Tr(k)$, а затем в производной категории $DSN_{witt}Tr(k)$ рассматривается полная подкатегория $DWM(k)$, состоящая из таких комплексов $A^\bullet$, все пучковые когомологии которых $h^i(A^\bullet)$ являются гомотопически инвариантными пучками Нисневича (с $Witt$-трансферами). *Категория $DWM(k)$ и называется категорией $Witt$-мотивов поля k.* Объекты категории $DWM(k)$ называются *мотивными комплексами.*

Гладкому k-многообразию Y можно сопоставить его $Witt$-мотив

$$M^W(Y) = \{U \mapsto Wor(\Delta^\bullet \times U, Y)\}(\text{отпучкованный}),$$

ковариантно зависящий от Y. Одно из ключевых свойств $Witt$-мотива $M^W(Y)$ следующее: для любого мотивного комплекса $A^\bullet$ должны иметь место естественные изоморфизмы

$$H^p_{Nis}(Y, A^\bullet) = Hom_{DWM(k)}(M(Y), A^\bullet[p]).$$

Для доказательства этого свойства нужно доказать следующие теоремы:

Теорема 10 *Для произвольного гомотопически инвариантного пучка с Witt-трансферами $\mathscr{F}$ когомологии $H^i_{Nis}(X, \mathscr{F})$ гомотопически инвариантны по схеме X для $i > 0$.*

Теорема 11 *Для произвольного гомотопически инвариантного пучка с Witt-трансферами $\mathscr{F}$ когомологии $H^i_{Nis}(X, \mathscr{F})$ являются предпучками с Witt-трансферами для $i > 0$.*

Теорема 12 *Для произвольного гомотопически инвариантного пучка с Witt-трансферами $\mathscr{F}$ и гладкой схемы X справедливо,что $H^i_{Nis}(X, \mathscr{F}) = Ext^i_{ShWtr}(\mathbb{Z}_{Wtr}(X), \mathscr{F})$.*

Между производной категорией пучков с $Witt$-трансферами и категорией $Witt$-мотивов определён функтор

$$C^\bullet \colon DSN_{witt}Tr(k) \to DWM(k),$$

переводящий комплекс $A^\bullet$ в тотальный комплекс бикомплекса

$$\cdots \to \underline{Hom}(\Delta^n, A^\bullet) \to \underline{Hom}(\Delta^{n-1}, A^\bullet) \to \cdots \to A^\bullet,$$

дифференциалы которого определяются знакопеременными суммами стандартных вложений $\Delta^{n-1} \to \Delta^n$. Теоремы 6, 10 и 12 позволяют доказать, что функтор $C^\bullet$ является левым сопряжённым к функтору вложения $DWM(k) \hookrightarrow SN_{witt}Tr(k)$, а также, что $M^W(X) \simeq M^W(X \times \mathbb{A}^1)$.

Список литературы

1. Voevodsky V. Triangulated Category of Motives over a Field. Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories (V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, eds.), Annals of Math. Studies, 1999.

2. Balmer P. Witt Groups. Handbook of K-theory, vol. 2, Springer, Berlin (2005), 539–576.

3. Hartshorne R. Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer (1977).

4. Ojanguren M., Panin I. A Purity Theorem for the Witt Group. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 1, 71–86.

5. Altman A., Kleiman S. Introduction to Grothendieck Duality Theory, Lecture Notes in Mathematics 146, Springer (1970).

6. Дружинин А.Э. Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с $Witt$-трансферами при пучковании// Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т.423. С. 113-125.

7. Дружинин А.Э. О гомотопически инвариантных предпучках с $Witt$-трансферами// Успехи математических наук. 2014. Т.69, № 3, С. 181-182.

8. Дружинин А.Э. Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с $Witt$-трансферами при пучковании в топологии Зарисского, ПОМИ ПРЕПРИНТ 7-2014.

9. Дружинин А.Э. Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с $Witt$-трансферами при пучковании в топологии Нисневича, ПОМИ ПРЕПРИНТ 8-2014.

10. Чепуркин К. Некоторые свойства гомотопически инвариантных предпучков с Витт-трансферами, дипломная работа, июнь 2013.

11. Suslin A., Voevodsky V. Bloch–Kato Conjecture and Motivic Cohomology with Finite Coefficients, The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., Vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (2000), pp. 117-189.

12. Voevodsky V. A1-Homotopy Theory, Doc. Math., Extra Vol. ICM 1998(1), 417-442.

13. Cisinski D.-C., Deglise F. Triangulated Categories of Mixed Motives, preprint at http://arxiv.org/pdf/0912.2110v3.pdf