Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

На правах рукописи

Кумаллагов Давид Зелимович

Весовые структуры на мотивных категориях и их применения

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —
доктор физико-математических наук,
профессор РАН М.В. Бондарко

Санкт-Петербург
2022

Оглавление

Введение

Актуальность темы и степень её разработанности

В середине 1980-х годов А. Бейлинсон, опираясь на предшествующие идеи А. Гротендика, сформулировал ряд гипотез о существовании некоторых мотивных комплексов с заданными свойствами. В частности, он предположил существование так называемой весовой фильтрации на мотивных пучках, свойства которой должны быть аналогичны соответствующим свойствам для $l-$адических превратных пучков.

Данная программа была во многом реализована В. Воеводским, А. Суслиным, Ф. Морелем, М. Левином и др. А именно, Воеводский построил триангулированную категорию мотивов $DM(k)$ [55] , внутри которой имеются мотивные комплексы $\mathbb{Z}(n)$, и доказал различные их свойства, связывающие его категорию с классическими геометрическими объектами, например, группами Чжоу. Затем, совместно с Морелем, им была построена стабильная мотивная гомотопическая категория $SH(k)$. Эта категория является более «гибкой», чем $DM(k)$, что позволяет строить и исследовать внутри нее различные теории когомологий. Огромное количество алгебро-топологических конструкций переносится в $SH(k)$, в частности, в ней определяется алгебра Стинрода, строятся спектры K-теории, алгебраических кобордизмов, Эйленберга–Маклейна. Одним из самых замечательных приложений возникшей таким образом науки стало доказательство Воеводским гипотез Блоха–Като и Бейлинсона–Лихтенбаума, что дополнительно подтвердило чрезвычайную силу разработанных методов и конструкций. Одновременно с этим, а также в последующие годы были построены различные категории «мотивной природы» (например, $SH^{S^1}(k)$, $D_{\mathbb{A}^1}(k)$, $MGl\text{-}Mod(k)$), конструкции которых инспирированы соответствующими конструкциями Мореля–Воеводского (Аюб, Цисинский, Деглиз и др., см. [9], [35], [36]).

Одним из важнейших инструментов для исследования всевозможных мотивных категорий является так называемая гомотопическая t-структура. Она чрезвычайно тщательно исследовалась большим количеством математиков, и для упомянутых выше категорий сердцевины являются классическими объектами «пучкового происхождения» [11], [26], [36], [38], [39], [48], [49], [55]. Но помимо t-структур, на триангулированных категориях также существуют весовые структуры w, определенные и детально изученные Бондарко [18] – [23], [27], [1], [28] – [33]. Весовые структуры во многом родственны, и являются естественными аналогами t-структур. В то время как t-структуры являются аксиоматизацией канонической фильтрации комплексов, весовые структуры аксиоматизируют глупую фильтрацию. В частности, для любого объекта M триангулированной категории $\underline{C}$ весовая структура w даёт башню Постникова, факторы которой лежат в сердцевине $\underline{Hw}$ (которая является аддитивной, связной и Карубиевой категорией). Общая машинерия весов также дает весовые комплексы, весовые фильтрации и спектральные последовательности (в частности, широко обобщающие спектральные последовательности Атьи–Хирцебруха, Делиня, и коразмерности носителя); в дополнение, такой подход позволяет исследовать их функториальность. Кроме этого, для достаточно общей триангулированной категории $\underline{C}$ с весовой структурой w построен точный и консервативный функтор весового комплекса $\underline{C} \to K(\underline{Hw})$ [17], [18], [54].

Применительно к мотивам, в статьях [18] и [20] Бондарко была построена весовая структура Чжоу на категории $DM^{eff}_{gm}(k)$ в предположении, что экспоненциальная характеристика базового поля k обращена в кольце коэффициентов. Заметим, что в этих статьях существенно использовались утверждения о разрешении особенностей Хиронаки и Габбера. Ядром данной весовой структуры является классическая категория чистых мотивов Чжоу $Chow^{eff}$. Таким образом, данные построения позволяют получить упомянутый выше консервативный точный функтор весового комплекса $t : DM^{eff}_{gm}(k) \to K^b(Chow^{eff}(k))$ (а также его стабильную версию $t : DM_{gm}(k) \to K^b(Chow(k))$), который является триангулированным обобщением функтора весового комплекса Жилля–Суле [41]. Отметим, что данный функтор индуцирует изоморфизм на группах Гротендика K_0. Более того, описанные конструкции позволили построить функториальную (начиная с E_2) Чжоу-весовую спектральную последовательность и весовые фильтрации для любых теорий когомологий на $DM^{eff}_{gm}(k)$. В статье [18] было показано, что эта спектральная последовательность широко обобщает спектральную последовательность Делиня (построенную только в случаях сингулярных и этальных когомологий многообразий, и дающую функториальность лишь с рациональными коэффициентами).

В ходе дальнейшего исследования мотивного функтора весового комплекса, в статье [34] была построена крайне интересная теория гомологий CWH^i_j, названных Чжоу-весовыми. А именно, в упомянутой работе гомологический функтор $\mathrm{CWH}^i_j : DM^{eff}_{gm}(k) \to \underline{\mathrm{Ab}}$ определяется просто как i-е гомологии комплекса $DM^{eff}_{gm}(R\langle j\rangle, t(M))$, где $M \in DM^{eff}_{gm}(k)$. Там же были получены удивительные критерии эффективности мотива, его связности, а также ограниченности его веса в терминах обнуления некоторых групп Чжоу-весовых гомологий. Любопытно отметить, что абсолютно классическая техника и результаты о разложении диагонали могут быть переформулированы и доказаны на языке Чжоу-весовых гомологий; заметим, что такой подход значительно упрощает многие доказательства и является намного более концептуальным. Также Чжоу-весовые гомологии тесно связаны с мотивными гомологиями, но вычисляются несколько проще. Наконец, условие существования рациональных точек для собственных многообразий над конечными полями также может быть выражено через некоторые условия на CWH^i_j; это открывает возможности для систематического исследования этого вопроса и для случая сингулярных многообразий, который обычно намного сложнее, чем гладкий.

Цели и задачи работы

Целью настоящей диссертационной работы является построение различных весовых и t-структур, и их применение к различным мотивным категориям и некоторым вопросам алгебраической геометрии.

Во-первых, мы строим большое семейство *айлов* (это – некоторые классы объектов) в терминах мотивных спектров гладких многообразий и их подкруток; эти айлы дают весовые структуры, названные гладкими. Полученные нами конструкции обобщают построенные ранее Бондарко весовые структуры Чжоу в нескольких направлениях. А именно, наша конструкция применяется к различным мотивным категориям, а не только к $DM^{eff}_{gm}(k)$ и $DM^{eff}(k)$ (мы рассматриваем категории $SH^{S^1}(k)$, MGl-$Mod(k)$, $DM(k)$, $SH(k)$, $D_{\mathbb{A}^1}(k)$, $SH(k)^+$ и их эффективные версии); к тому же, она независима от различных утверждений о разрешении особенностей.

Во-вторых, с помощью наших айлов мы получаем всевозможные фильтрации на мотивных категориях, наиболее интересные из которых – (слабо) бирациональные, слайс и Чжоу-весовые. Далее, упомянутые выше гладкие весовые структуры дают гладкие t-структуры, с помощью которых строится интересная фильтрация на гомотопических сердцевинах $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$ максимальными слабо бирациональными подобъектами. Мы применяем наши конструкции к вычислениям неразветвленных когомологий, а также описываем некоторые «весовые» условия для $DM^{eff}(k)$ и $DM^{bir}(k)$ «геометрически».

Наконец, используя функтор весового комплекса t_R в случае классической w_{Chow} (в частности, обращая характеристику p базового поля k), мы расширяем теорию Чжоу-весовых гомологий на категорию $DM^{eff}(k)$. Она применяется к исследованию мотивных гомологий, весовых фильтраций Делиня и когомологий с компактными носителями; это значительно обобщает полученные ранее результаты работы [34].

Научная новизна и степень достоверности результатов

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования структуры мотивных категорий, их применений к вопросам вычисления различных когомологических инвариантов в алгебраической геометрии, для изучения алгебраических циклов на многообразиях. Материалы диссертации также могут быть использованы для проведения спецкурсов и спецсеминаров по темам «Теория мотивов и мотивных когомологий», «Теория $\mathbb{A}^1$−гомотопий», «Триангулированные категории», «Алгебраическая геометрия».

Методы исследования

Мы свободно используем различные конструкции и утверждения, относящиеся к мотивным категориям. Наиболее существенным образом используется гомотопическая t-структура и её свойства, а также теория бирациональных мотивных категорий и слайсов. Также используются общие техники и конструкции для триангулированных категорий, теория весовых структур, весовых комплексов и спектральных последовательностей. Для построения некоторых фильтраций очень важна теория смежных t-структур.

Положения, выносимые на защиту

- Определено большое семейство айлов на различных мотивных категориях; изучена их связь с гомотопической t-структурой.

- Доказано, что гомотопическая t-структура ограничивается на все n-бирациональные категории. Слабо бирациональные категории выражаются в терминах построенных айлов.

- Посредством данных айлов определены гладкие весовые и t-структуры, исследованы их свойства; слабая бирациональность объектов из $\underline{Ht}_{hom}^{eff}$ выражена через их веса.

- На $\underline{Ht}_{hom}^{eff}$ построена фильтрация максимальными слабо бирациональными подобъектами. Доказаны различные свойства этой фильтрации.

- Вычислены новые группы неразветвлённых когомологий.
- Теория Чжоу-весовых гомологий расширена на категорию $DM^{eff}(k)$; доказана эквивалентность обнуления высших групп мотивных и Чжоу-весовых гомологий в некоторых областях.

Апробация результатов

По результатам диссертационной работы были сделаны доклады на следующих семинарах и конференциях:

1. Восьмая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», Москва, 2020.
2. Семинар по $\mathbb{A}^1$-топологии, мотивам и K-теории, лаборатория Чебышева, 2021.
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2021», Москва, 2021.
4. Санкт-Петербургский алгебраический семинар им. Д.К. Фаддеева.

Основные результаты данной работы подтверждены строгими математическими доказательствами и опубликованы в печатных работах соискателя [1], [2], [3], [4], [5]. Работы [1] – [3] вышли в журналах, входящих в список рекомендованных ВАК для соискателей учёной степени кандидата или доктора наук; [4] и [5] опубликованы в сборниках тезисов конференций. Статьи [1] – [3] были опубликованы совместно с научным руководителем. При этом научным руководителем были сформулированы задачи и указаны некоторые методы и конструкции, использованные в его предыдущих работах. Все основные положения диссертации, выносимые на защиту, получены диссертантом самостоятельно.

Содержание работы

Кратко опишем содержание диссертации и приведем формулировки основных утверждений.

В главе 1 приводятся базовые определения и обозначения, в основном, относящиеся к триангулированным категориям и t-структурам. Затем кратко обсуждаются всевозможные мотивные категории, и на них вводится гомотопическая $t_{hom}-$структура. Отметим, что мы формулируем необходимые далее свойства t_{hom} аксиоматически; такой подход инспирирован классической статьей [37]. Там же наши аксиомы рассмотрены в случае $SH^{eff}(k) \subset SH(k)$. Эти результаты взяты из статьи [3].

Глава 2 содержит важнейшие конструкции и технические результаты диссертации. Мы вводим на мотивных категориях $\mathfrak{D}^{eff}(k) \subset \mathfrak{D}(k)$ "гладкие" айлы $\mathcal{A}_s$ (порожденные мотивными спектрами $\mathcal{M}(\mathrm{SmVar})\langle j\rangle[s_j]$, где $s = s_j$ произвольная неубывающая последовательность). Эти айлы также описываются в терминах ростков, соответствующих полям функций. Затем изучается их поведение относительно t_{hom}–гомологий. А именно, получено следующее

Предложение 2.1.3. *Следующие условия для объекта $C \in \mathfrak{D}$ равносильны:*
1. $C \in \mathcal{A}_s$.
2. $H_r^{t_{hom}}(C)[r] \in \mathcal{A}_s$ для любого $r \in \mathbb{Z}$.

Очевидная эффективная версия этого утверждения также выполняется.

Это предложение доказывается в пункте 2.1.

Далее, мы изучаем связь наших конструкций и n-бирациональных категорий. Здесь основным является

Предложение 2.1.5. *Зафиксируем $r \geq -1$ и определим последовательность s^{r-bir} следующим образом: $s_j^{r-bir} = -\infty$ при $0 \leq j \leq r$, и $s_j^{r-bir} = +\infty$ при $j \geq r+1$. Тогда для $S \in \mathrm{Obj}\, \underline{Ht}_{hom}^{eff} \subset \mathfrak{D}^{eff}$ следующие условия эквивалентны:*
1. $S \in \mathcal{A}_{s^{r-bir}}$.
2. Когомологии Нисневича S обнуляются в степенях $> r$.
3. $S(K\{m\}) = \{0\}$ для всех полей функций K/k и $m > r$, где $S(K\{m\}) = \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(K)\{m\}, S)$.
4. $S(K\{r+1\}) = \{0\}$ для всех полей функций K/k.
5. $S_{-r-1} = 0$.

В тексте диссертации это предложение доказано в пункте 2.1. Из этих предложений следует, что гомотопическая t-структура ограничивается на всевозможные категории $\mathfrak{D}^{n-bir} := \mathfrak{D}^{eff}\{n+1\}^{\perp}$.

Далее, через наши айлы определяются гладкие весовые структуры $w_{Smooth}^{eff,s}$ и w_{Smooth}^{s}, и получаются утверждения, аналогичные приведенным выше. Поскольку $w_{Smooth}^{eff,s}$ приведена, существует смежная t-структура $t_{Smooth}^{eff,s}$. Посредством этой t-структуры мы получаем следующую фильтрацию для любого объекта $E \in \mathrm{Obj}\, \underline{Ht}_{hom}^{eff}$:

$$F^{j,s}(E) = \mathrm{Im}_{\underline{Ht}_{hom}^{eff}}(H_0^{t_{hom}}(\tau_{\geq -j}^{t_{Smooth}^{eff,s}}(E)) \to H_0^{t_{hom}}(E) = E).$$

Для неё доказывается ключевая

<u>**Теорема 2.2.12.**</u> *Пусть* $-1 \le i \le +\infty$, $j \in \mathbb{Z}$.

1. *Категория* $\underline{Ht}^{i-bir,s}$ $i-$*бирациональных объектов — абелева подкатегория Серра в* $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$.

   Обозначим через j_i *соответствующее вложение и зафиксируем* $E \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}^{eff}_{hom}$.

2. $F^{j,s}(E)$ *— максимальный* r*-бирациональным подобъект* E *(в категории* $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$*); здесь* r *равно наименьшему* $m \ge -1$, *для которого* $s_{m+1} \ge -j$, *если такое* m *существует, и* $r = +\infty$ *в противном случае.*

   Таким образом, $F^{j,s}$ *— правый сопряженный к вложению* j_r.

3. *Функтор высшей неразветвленной части* $R_{nr,i}$ *даёт* $t-$*срезку* $\tau_{\ge 0}^{t^{eff,s^{i-bir}}_{Smooth}}$.

4. *Аналогично,* $w^{eff,s^{i-bir}}_{Smooth}$*-срезки дают соответствующие слайсы.*

5. E *лежит в* $\underline{Ht}^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$ *тогда и только тогда, когда он бирационален.*

В тексте диссертации эта теорема доказывается в 2.2. При некоторых $s = (s_j)$ мы получаем фильтрацию, гипотетически дающую фильтрацию Блоха–Бейлинсона–Мюрра. Также наша теорема применяется к вычислениям неразветвлённых когомологий. Завершается этот раздел различными утверждениями о сравнении гладкой весовой и t-структур, а также утверждениями о (слабой) весо-точности функторов $-\langle n \rangle$, локализации p_n и стабилизации i. Результаты этой главы опубликованы в статьях [3] и [1], а также в сборнике тезисов [5].

В главе 3 мы демонстрируем, что все вышесказанное применимо ко всем рассматриваемым нами мотивным категориям. Затем, мы исследуем вопрос локализации коэффициентов – это даёт возможность распространить полученные конструкции ещё и на категорию $SH(k)^+$. В разделах 3.3 исследуются категории $DM^{eff}(k) \subset DM(k)$ и весовая структура w_{Chow} (то есть, соответствующая последовательности $s = 0$). Доказаны следующие утверждения

<u>**Теорема 3.3.3.**</u>

1. $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \subset \underline{Hw}_{\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R}$.

2. *Пусть* R *—* $\mathbb{Z}[1/p]$*-алгебра. Тогда весовая структура* $w_{\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R}$ *также порождается множеством* $\mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar})$.

3. *Функтор* $-\otimes_R^{mot} R'$ *является весо-точным (относительно весовых структур* $w_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ *и* $w_{\underline{\mathrm{Chow}}_{R'}^{eff}}$*).*

Предложение 3.3.6.

1. Пусть многообразие U *можно представить в виде* $X \setminus \cup_{i=1}^n Z_i$*, где* X*, все* Z_i*, пересечения всех их наборов — гладкие собственные* k*-многообразия, и пересечение любого набора из более чем* m *различных* Z_i *пусто (для некоторых* $m \le n \in \mathbb{Z}$*).*

Тогда мотив $\mathcal{M}_R(U)$ *принадлежит оболочке* $\cup_{i=0}^m \mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$*, а значит, принадлежит* $(\mathrm{Obj}(\langle \mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle)) \cap DM_R^{eff}{}_{[0,m]}$.

2. Пусть $f : U \to V$ *— плотное открытое вложение, где* $U, V \in \mathrm{SmVar}$*. Тогда* $\mathrm{Cone}(\mathcal{M}_R(f)) \in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff} \le 0}$.

В работе приведенные предложения доказаны в пунтах 3.3 и 3.6. Завершается эта глава следующим геометрическим описанием бирациональной весовой структуры (предложение из раздела 3.3 диссертации)

Предложение 3.3.7.

1. w_R^{bir} *ограничивается на триангулированную подкатегорию компактных объектов* $DM_{gm,R}^{bir}$.

2. *Категория* DM_R^{bir} *эквивалентна локализации категории* $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ *по локализующей подкатегории, порожденной конусами всех* $\mathcal{M}_R(f)$*, где* $f : U \to X$ *— плотное открытое вложение гладких многообразий над* k.

3. *Рассмотрим на категории* $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ *"глупую" весовую структуру, порожденную* $R_{tr}(\mathrm{SmVar})$*. Тогда на* DM_R^{bir} *существует весовая структура, для которой функтор локализации* $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}) \to DM_R^{bir}$ *весо-точен. Более того, эта весовая структура совпадает с* w_R^{bir}.

Основные результаты главы 3 опубликованы в статье [1], а разделы 3.1 и 3.2 в статье [3].

Глава 4 посвящена изучению Чжоу-весовых гомологий $\mathrm{CWH}_j^i(-_K, R, l)$. А именно, мы расширяем функтор $\mathrm{CWH}_j^i(-_K, R, l)$ на всю категорию DM_R^{eff}.

Основной результат этой главы – следующая теорема о связи Чжоу-весовых и мотивных гомологий (теорема из раздела 4.2 в тексте).

<u>**Теорема 4.2.12.**</u> *Пусть $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$ для некоторых $t_s \in \mathbb{Z},\ n_s \geq 0$. Тогда следующие условия на $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$ равносильны:*

(a). $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ для любой пары $(i,j) \in \mathcal{I}$ и любого поля функций K/k;

(b). $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ для любого K, $0 \leq r \leq n_s$, и $c \geq t_s$;

(c) $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ для любого K и $(r,c) \in \mathcal{I}$.

Из этого результата и некоторых дополнительных утверждений выводится следующая любопытная

<u>**Теорема 4.3.5.**</u> *Пусть $X \in \mathrm{Var}$, K — универсальная область, содержащая k, и для некоторого множества $\{(t_s, n_s)\} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ и любых $(r,c) \in \mathbb{Z} \otimes [0, +\infty)$, т.ч. $0 \leq r \leq n_s$ и $c \geq t_s$ для некоторого s, выполнено $CH_r(X_K, -c, \mathbb{Q}) = \{0\}$.*

1. Тогда существует $E_X > 0$ такое, что $E_X CH_r(X_{k'}, -c, \mathbb{Z}[1/p]) = \{0\}$ для любых $(r,c) \in \mathcal{I}$ и любого расширения k'/k, где $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$.

2. Если k — подполе $\mathbb{C}$, а $l, m \in \mathbb{Z}$, то $(m+l)$-й весовой фактор Делиня $H^m_c(X_{\mathbb{C}})$ ($\mathbb{Q}$-линейных) сингулярных когомологий $X_{\mathbb{C}}$ с компактными носителями $a_{\mathcal{I},l}$– эффективен как чистая структура Ходжа.

Кроме того, аналогичные свойства факторов Делиня имеются и для этальных когомологий $H^q_c(X_{k^{alg}}, \mathbb{Q}_\ell)$, если k – совершенное замыкание поля, имеющего конечную степень трансцендентности над простым подполем.

В диссертации эта теорема приведена в разделе 4.3.

Результаты главы 4 опубликованы в статье [2] и сборнике тезисов [4].

Объём и структура диссертации

Текст диссертации изложен на 75 страницах и содержит одну иллюстрацию. Он включает в себя введение, четыре главы и заключение. Библиография содержит 56 наименований.

Благодарности

Автор глубоко признателен своему научному руководителю Михаилу Владимировичу Бондарко.

1 Необходимые определения и предварительные сведения

В §1.1 приведены определения и соглашения, преимущественно относящиеся к триангулированным категориям.
В §1.1.1 напоминаются основные определения и свойства t-структур.
В §1.2 обсуждается ряд мотивных категорий.
В §1.2.1 вводятся гомотопические $t-$структуры на этих категориях; некоторые их свойства формулируются как аксиомы.
В §1.2.2 наши аксиомы рассмотрены, в основном, в случае категорий $SH^{eff}(k) \subset SH(k)$.

1.1 Категорные определения и обозначения

- Будем говорить, что объект M категории $\underline{B}$ — ретракт объекта N, если id_M пропускается через N (отметим, что если категория $\underline{B}$ триангулированна, то M–ретракт N тогда и только тогда, когда M–прямое слагаемое).

- Подкатегория $\underline{D}$ категории $\underline{B}$ *Каруби-замкнута* в $\underline{B}$, если она содержит все $\underline{B}$-ретракты своих объектов.

- Полная подкатегория $\mathrm{Kar}_{\underline{B}}(\underline{D})$ в $\underline{B}$, объекты которой — все $\underline{B}$-ретракты объектов $\underline{D}$, называется *Каруби-замыканием* $\underline{D}$ в $\underline{B}$. Легко видеть, что подкатегория $\mathrm{Kar}_{\underline{B}}(\underline{D})$ Каруби-замкнута в $\underline{B}$; если $\underline{B}$ и $\underline{D}$ аддитивны, то $\mathrm{Kar}_{\underline{B}}(\underline{D})$ также аддитивна.

- Говорим, что аддитивная категория $\underline{D}$ *Карубиева*, если любой идемпотентный эндоморфизм в ней изоморфен композиции ретракции и коретракции типа $M \bigoplus N \to M \to M \bigoplus N$.

- Для данного класса объектов $\mathcal{P}$ категории $\mathrm{Obj}\,\underline{C}$ будем обозначать через $\langle \mathcal{P} \rangle$ наименьшую полную Каруби-замкнутую триангулированную подкатегорию $\underline{C}$, содержащую $\mathcal{P}$.

- Для любых $A, B, C \in \mathrm{Obj}\,\underline{C}$ говорим, что C — расширение B посредством A, если существует выделенный треугольник $A \to C \to B \to A[1]$. Говорим, что класс $\mathcal{P} \subset \mathrm{Obj}\,\underline{C}$ замкнут относительно расширений, если он содержит 0 и все расширения своих объектов (т.е., для такого выделенного треугольника если $A, B \in \mathcal{P}$, то $C \in \mathcal{P}$).

- Для $X, Y \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ будем писать $X \perp Y$, если $\underline{C}(X,Y) = \{0\}$. Если $D, E \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$, то $D \perp E$ будет означать, что $X \perp Y$ для любых $X \in D,\ Y \in E$. Для данного $D \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ обозначим через $D^{\perp}$ класс

$$\{Y \in \operatorname{Obj} \underline{C} :\ X \perp Y\ \forall X \in D\}.$$

  Аналогично, ${}^{\perp}D$ — это класс $\{Y \in \operatorname{Obj} \underline{C} :\ Y \perp X\ \forall X \in D\}$.

- Пусть $f \in \underline{C}(X,Y)$; будем называть третью вершину любого выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y \to Z$ *конусом* f.[1]

- Все копроизведения в статье будут малыми.

- Теперь дадим несколько определений для случая, когда $\underline{C}$ *приведена*, то есть, замкнута относительно копроизведений.

- Если $\underline{D} \subset \underline{C}$ ($\underline{D}$ — триангулированная подкатегория, возможно, совпадающая с $\underline{C}$) то говорим, что класс $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ порождает $\underline{D}$ как *локализующую подкатегорию* в $\underline{C}$, если $\underline{D}$ наименьшая полная строгая и триангулированная подкатегория в $\underline{C}$, содержащая $\mathcal{P}$ и замкнутая относительно $\underline{C}$ - копроизведений.

- Говорим, что $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ *компактен*, если функтор $\underline{C}(M,-) : \underline{C} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ сохраняет копроизведения.

- Говорим, что $\underline{C}$ *компактно порождена*, если она порождается некоторым множеством компактных объектов как своя локализующая подкатегория.

1.1.1 t-структуры: напоминание

Напомним некоторые обозначения и свойства t-структур. В отличие от классических обозначений статьи [15], наша конвенция для t-структур будет гомологической.[2]

Определение 1.1.1. Будем говорить, что пара строгих подкатегорий $\underline{C}_{t\geq 0}, \underline{C}_{t<0} \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ определяет t-структуру t на триангулированной категории $\underline{C}$, если она удовлетворяет следующим условиям.

(i) $\underline{C}_{t\geq 0}[1] \subset \underline{C}_{t\geq 0}$ и $\underline{C}_{t<0}[-1] \subset \underline{C}_{t<0}$.

(ii) $\underline{C}_{t\geq 0} \perp \underline{C}_{t<0}$.

---

[1] Напомним что различные конуса связаны неканоническими изоморфизмами.

[2] Здесь мы следуем [48]. Гомологическая и когомологическая конвенции связаны стандартным образом: $\underline{C}^{t\leq n} = \underline{C}_{t\geq -n}$ и $\underline{C}^{t\geq n} = \underline{C}_{t\leq -n}$.

(iii) Для любого $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ существует выделенный треугольник

$$M_{t\geq 0} \to M \to M_{t<0} \to M_{t\geq 0}[1]$$

такой, что$M_{t\geq 0} \in \underline{C}_{t\geq 0}$, $M_{t<0} \in \underline{C}_{t<0}$.

Нам также потребуются следующие вспомогательные определения.

Определение 1.1.2. 1. $\underline{C}_{t\geq n} := \underline{C}_{t\geq 0}[n]$ (соотв. $\underline{C}_{t\leq n+1} := \underline{C}_{t<n} := \underline{C}_{t<0}[n]$) для любого $n \in \mathbb{Z}$.

2. Сердцевина t — это категория $\underline{Ht} = \underline{C}_{t\geq 0} \cap \underline{C}_{t\leq 0} \subset \underline{C}$; напомним, что эта категория абелева.

3. Говорим, что t *невырожденна* слева (соотв. справа), если $\cap_{i\in\mathbb{Z}} \underline{C}_{t\leq i} = \{0\}$ (соотв. $\cap_{i\in\mathbb{Z}} \underline{C}_{t\geq i} = \{0\}$). t *невырожденна*, если она невырожденна и справа, и слева.

Замечание 1.1.3. 1. Треугольник в аксиоме (iii) функториален по M. Соответственно, получаем корректно определенный функтор $\tau_{\geq 0} : \underline{C} \to \underline{C}_{t\geq 0}$ (соотв. $\tau_{<0} : \underline{C} \to \underline{C}_{t<0}$), сопряженный справа (соотв. слева) к функтору вложения $\underline{C}_{t\geq 0} \hookrightarrow \underline{C}$ (соотв. $\underline{C}_{t<0} \hookrightarrow \underline{C}$). Определим также $\tau_{\geq n}(M) := \tau_{\geq 0}(M[-n])[n]$ (соотв. $\tau_{\leq n}(M) := \tau_{<0}(M[n+1])[-n-1]$).

2. Функтор $H_0^t := \tau_{\geq 0} \circ \tau_{\leq 0}$ переводит $\underline{C}$ в $\underline{Ht}$; он гомологичен (то есть, переводит выделенные треугольники в длинные точные последовательности).

Через H_n^t обозначим композицию $H_0^t \circ [-n]$.

3. Легко видеть, что t невырождена тогда и только тогда, когда семейство функторов $(H_n^t)_{n\in\mathbb{Z}}$ консервативно.

4. Рассмотрим категории C и D, снабженные t-структурами. Говорим, что функтор $F : C \to D$ t*−точен слева* (соотв. t−точен справа), если он сохраняет t-отрицательность (соотв. t-положительность) объекты. Будем называть F t*−точным*, если он t−точен и слева, и справа.

Предложение 1.1.4. *Пусть $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj} \underline{C}$ — множество компактных объектов. Тогда существует единственная t-структура t на $\underline{C}$ такая, что $\underline{C}_{t\geq 0}$ — наименьший подкласс $\operatorname{Obj} \underline{C}$, содержащий $\mathcal{P}$ и замкнутый относительно расширений, сдвигов* [1], *и копроизведений.*

Доказательство. Это в точности теорема A.1 статьи [6]. □

Определение 1.1.5. Будем называть t-структуру из предыдущего предложения t-структурой, *порожденной* $\mathcal{P}$.

Замечание 1.1.6. 1. Для t-структуры из предложения 1.1.4, функторы $\tau_{\geq 0}, \tau_{\leq 0}$ и H_0^t сохраняют копроизведения (см. предложение А.2 вышеупомянутой статьи).
2. t-структура из этого предложения невырождена слева тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{P}$ попрождает $\underline{C}$ как свою локализующую подкатегорию (очевидно; см. лемму 1.2.9 статьи [26]).

1.2 О различных мотивных категориях

Теперь напомним основы, касающиеся мотивных категорий. Всюду ниже k будет совершенным полем характеристики $p \geq 0$, и $\mathfrak{D}(k)$ будет одной из перечисленных далее мотивных категорий; через $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathfrak{D}} : \mathrm{SmVar} \to \mathfrak{D}(k)$ будет обозначаться функтор "$\mathfrak{D}-$мотива" из категории SmVar гладких k-многообразий. Всегда будем предполагать, что $\mathfrak{D}$ — триангулированная моноидальная категория, с тензорной единицей $\mathbb{1}_{\mathfrak{D}} = \mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(Spec(k))$, а $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}$ переводит произведения многообразий в тензорное произведение.

$\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}$ будет удовлетворять *свойству гомотопической инвариантности*, то есть, $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(\mathbb{A}^1) \cong \mathbb{1}_{\mathfrak{D}}$.

Замечание 1.2.1. 1. Введем некоторые обозначения для "подкруток тейтовского типа".

Положим $T := \mathrm{Cone}(\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(\mathbb{G}_m) \to \mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(\mathbb{A}^1))$. Всюду ниже будем считать, что $T \otimes -$ обратим в $\mathfrak{D}$ (однако см. замечание 1.2.2(4) ниже). Для любого $C \in \mathrm{Obj}\,\mathfrak{D}$ и $n \in \mathbb{Z}$ положим $C\langle n\rangle := C \otimes T^{\otimes n}$ и $C\{n\} := C\langle n\rangle[-n]$.

2. Разумеется, эти подкрутки "согласованы" с функторами, коммутирующими с $\mathcal{M}$ в различных мотивных категориях ниже.

Более того, гомотопическая инвариантность влечет $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(\mathbb{G}_m) \cong \mathbb{1}_{\mathfrak{D}} \bigoplus T[-1]$. Далее, хорошо известно (и следует из так называемого свойства Майера-Вьеториса), что $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{1}_{\mathfrak{D}} \bigoplus T$ для рассматриваемых нами категорий.

Эти расщепления также существуют в мотивных категориях вида $\mathfrak{D}^{eff}$, упомянутых в замечании 1.2.2(2-3) ниже.

- $SH(k)$ будет обозначать $\mathbb{P}^1-$стабильную мотивную гомотопическую категорию, а $\mathcal{M}_{SH} : \mathrm{SmVar} \to SH(k)$ обозначает соответствующий функтор бесконечного надстроечного спектра (см. [48, §5.1]).

- Обозначим через $DM(k)$ категорию мотивов Воеводского, а $\mathcal{M}_{DM} : \mathrm{SmVar} \to DM(k)$ — соответствующий функтор ("обычного") $DM-$мотива (см. [38, §5.1]).

- $D_{\mathbb{A}^1}(k)$ будет обозначать $\mathbb{A}^1-$производную категорию в смысле определения из [36, §5.3.20]; $\mathcal{M}_{D_{\mathbb{A}^1}}$: SmVar $\to D_{\mathbb{A}^1}(k)$ — соответствующий функтор (см. также [48, §6.2]).

- Обозначим через $\mathrm{MGl}-\mathrm{Mod}(k)$ категорию MGl-модулей в $SH(k)$; см. предложения 7.2.14 и 7.2.18 статьи [36], [26, пример 1.3.1(3)], или [39, §2.2].

Замечание 1.2.2. 1. Хорошо известно, что все обсуждаемые выше категории приведены и компактно порождены объектами $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(X)\{i\}$, где $X \in \mathrm{SmVar}, i \in \mathbb{Z}$.

Отметим еще, что функторы $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}$ пропускаются через соответствующие подкатегории компактных объектов.

2. Через $\mathfrak{D}^{eff}(k)$ будет обозначаться локализующая подкатегория в $\mathfrak{D}(k)$, порожденная объектами вида $\mathcal{M}(X)$ для $X \in \mathrm{SmVar}$. Таким образом, $\mathfrak{D}^{eff}(k)$ также компактно порождается этими объектами.

3. $SH^{S^1}(k)$ будет обозначать S^1-стабильную мотивную гомотопическую категорию, $\mathcal{M}_{SH^{S^1}}$: SmVar $\to SH^{S^1}(k)$ — соответствующий функтор бесконечного надстроечного спектра (см. [48, §4.1]). Категория $SH^{S^1}(k)$ компактно порождена объектами вида $\mathcal{M}(X)$, где $X \in \mathrm{SmVar}$. Отметим также, что существует сопряженность $\sigma : SH^{S^1}(k) \rightleftarrows SH(k) : \omega$ (см. [48, замечание 5.1.11]).

Категория $SH^{S^1}(k)$ не эквивалента эффективной категории $\mathfrak{D}^{eff}(k)$ для какой-либо мотивной категории $\mathfrak{D}(k)$. Тем не менее, $SH^{S^1}(k)$ ниже будет одной из возможных категорий $\mathfrak{D}^{eff}(k)$, везде кроме параграфа 2.2.3.

4. В категориях вида $\mathfrak{D}^{eff}(k)$ подкрутки типа $-\langle n\rangle$ и $-\{n\}$ определены только при $n \geq 0$. Отметим еще, что эти функторы не являются вполне строгими на $SH^{S^1}(k)$ (в отличие от других $\mathfrak{D}^{eff}(k)$).

1.2.1 Гомотопические t-структуры

Будем обозначать через $\mathfrak{D}$ какую-либо из мотивных категорий параграфа 1.2, а через $\mathfrak{D}^{eff}$ — ее эффективную версию (см. также замечание 1.2.2(3)).

Определение 1.2.3. 1. Через $t_{hom}^{\mathfrak{D}}$ будем обозначать $t-$структуру на $\mathfrak{D}$, порожденную $\mathcal{M}(X)\{i\}$ для $X \in \mathrm{SmVar}, i \in \mathbb{Z}$ (см. определение 1.1.5).

2. Через $t_{hom}^{\mathfrak{D}^{eff}}$ будем обозначать $t-$структуру на $\mathfrak{D}^{eff}$, порожденную $\mathcal{M}(X)$ при $X \in \mathrm{SmVar}$.

3. Для $i \in \mathbb{Z}$, $C \in \mathfrak{D}$ и $j \in \mathbb{Z}$ (соотв. $C \in \mathfrak{D}^{eff}$ и $j \geq 0$) определим функтор $C_j^i(-) : \mathrm{SmVar}^{op} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ как $X \mapsto \mathfrak{D}(\mathcal{M}(X)\{j\}, C[i])$ (соотв. $X \mapsto \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(X)\{j\}, C[i]))$.

Более общим образом, для любого когомологического функтора H из $\mathfrak{D}(k)$ в $\underline{Ab}$, и $X \in \mathrm{SmVar}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ определим $H^i_j(\mathcal{M}(X))$ как $H(\mathcal{M}(X)\{j\}[-i])$.

4. Для i, j как выше обозначим через $\mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(K)\{j\}[i], -)$ (соотв. $\mathfrak{D}(\mathcal{M}(K)\{j\}[i], -)$) следующий функтор на $\mathfrak{D}^{eff}$: $C \mapsto \varinjlim_{X, k(X)=K} C^{-i}_j(X)$ (соотв. функтор на $\mathfrak{D}$: $C \mapsto \varinjlim_{X, k(X)=K} C^{-i}_j(X)$).

5. Обозначим через $-_{-1}$ правый сопряженный к $-\{1\} : \mathfrak{D}^{eff} \to \mathfrak{D}^{eff}$; это — так называемое стягивание Воеводского.[3] Для $i > 0$, i-я итерация $-_{-1}$ будет обозначаться через $-_{-i}$.

Введем некоторые «аксиомы», характеризующие гомотопические $t-$структуры на рассматриваемых в этой статье мотивных категориях.

(A1) Пусть H — когомологический функтор из $\mathfrak{D}(k)$ в $\underline{Ab}$, $X \in \mathrm{SmVar}$. Тогда существует следующая сходящаяся спектральная последовательность (коразмерности носителя):

$$E_1^{p,q} = \coprod_{x \in X^{(p)}} H^q_p(x) \Rightarrow H^{p+q}_0(\mathcal{M}(X)),$$

где X^p - множество точек из X коразмерности $p \geq 0$, и для представления $x \in X^p$ в виде $\varprojlim_i X_i$, где $X_i \in \mathrm{SmVar}$, определим $H^q_p(x)$ как $\varinjlim_i H(\mathcal{M}(X_i)\{p\}[-q])$.

(A2) $\mathfrak{D}(k)_{t_{hom} \geq 0} = \{C \in \mathfrak{D}(k) | \mathfrak{D}(\mathcal{M}(K)\{j\}, C[i]) = \{0\}$ для любого поля функций K/k, $j \in \mathbb{Z}$, $i > 0\}$.

В эффективном случае следует взять $j \geq 0$ в аксиоме (A2).

Следствие 1.2.4. *1. Эндофунктор $(-)_{-1}$ $t_{hom}-$точен.*

2. *Функтор $\Phi : \underline{Ht}^{\mathfrak{D}} \to Psh(Pts, Ab^{\mathbb{Z}}), \Phi(F) = F^0_*(-)$ (см. необходимые определения выше) консервативен, точен, и коммутирует с копроизведениями. Здесь через Pts обозначается множество полей функций (то есть, конечнопорожденных расширений над базовым полем k).*

   Более того, функтор $\Phi_0 : F \mapsto F^0_0(-)$ консервативен на $\underline{Ht}^{\mathfrak{D}^{eff}}$.

[3] По сути, следуя определению 4.3.10 статьи [48]; отметим, что последнее эквивалентно исходному определению из [56]. Существование стягивания следует из того, что категория $\mathfrak{D}^{eff}$ компактно порождена (см. замечание 1.2.2(2,3)), а $-\{1\}$ точен и сохраняет копроизведения.

3. $t_{hom}^{\mathfrak{D}}$ и $t_{hom}^{\mathfrak{D}^{eff}}$ невырождены (см. определение 1.1.2(3)).

Доказательство. 1. $t_{hom}-$точность справа следует из **(A2)**. Далее отметим, что $-\{1\}$ $t_{hom}-$точен справа; таким образом, $(-)_{-1}$ также $t_{hom}-$точен слева (как правый сопряженный).

2. Из описания $\mathfrak{D}(k)_{t_{hom}\geq 0}$ в **(A2)** немедленно следует, что $\Phi(F)\neq 0$ если $F\in\mathfrak{D}(k)_{t_{hom}\geq 0}\setminus\mathfrak{D}(k)_{t_{hom}\geq 1}$. Далее, Φ коммутирует с копроизведениями, поскольку он определен через функторы, копредставленные компактными объектами.

Для доказательства точности, применим функтор Φ к точной последовательности $0\to F'\to F\to F''\to 0$ в $\underline{Ht}^{\mathfrak{D}}$. Наши определения незамедлительно дают $\Phi(F''[-1])=0$, тогда как $\Phi(F'[1])=0$ по **(A2)**.

Также нужно показать, что если $F\in\operatorname{Obj}\underline{Ht}^{\mathfrak{D}^{eff}}$ и $\Phi_0(F)=0$, то $F_i^0(-)=\{0\}$ при $i>0$. Во-первых, $F_*^*(\mathcal{M}((\mathbb{G}_{m,K})^{\times i}))$ равно $\varinjlim_j F_*^*(\mathcal{M}((\mathbb{G}_m)^{\times i}(X_j)))$ для представления $Spec(K)=\varprojlim_j X_j$. Нужно доказать, что $F_0^{p+q}(\mathcal{M}((\mathbb{G}_{m,K})^{\times i}))=\{0\}$ при $p+q=0$. Возьмем спектральную последовательность из **(A1)** для многообразия $(\mathbb{G}_m)^{\times i}(X_j)$ при каждом j. По нашему предположению и **(A2)**, соответствующие $E_1^{p,q}$ обнуляются если $q>0$ и $p=q=0$. Далее, для $q<0$ (т.е., в случае $p=-q$) эти группы обнуляются по свойству (ii) для $t-$структур и правой $t-$точности $-\{p\}$. Таким образом, $F_0^0(\mathcal{M}((\mathbb{G}_m)^{\times i}(X_j)))=0$ для любого j, и переходя к прямому пределу получаем наше утверждение.

3. Легко получается с помощью спектральной последовательности (как в аксиоме **(A1)**) и соображений компактной порожденности; см. замечания 1.1.3(3) и 1.2.2. □

Ниже будет установлено, что аксиомы (**A1**–**A2**) выполнены во всех вышеупомянутых мотивных категориях (и не только в них).

1.2.2 Случай $SH(k)$ и $SH^{eff}(k)$

Теперь проверим наши аксиомы и обсудим связанные с ними определения для категорий $SH^{eff}(k)\subset SH(k)$, дающих наиболее интересный пример.

Определение 1.2.5. Обозначим через $\underline{\pi}_i(E)_j$ пучок Нисневича на SmVar, ассоциированный с предпучком E_j^i.

Лемма 1.2.6. 1. Существует сходящаяся спектральная последовательность как в **(A1)**.

2. Аксиома **(A2)** выполнена.

Доказательство. 1. См. предложение 4.3.1(I.3) и замечание 4.3.2(2) статьи [21] (заметим, что конструкция там была инспирирована соответствующими результатами статьи [37]).

2. См. [21, предложение 5.1.1(5)]. □

Замечание 1.2.7. Таким образом, наши аксиомы **(A1)** и **(A2)** выше выполняются для $SH(k)$ и $SH^{eff}(k)$. Отсюда получаем, что и следствие 1.2.4 применимо в этих случаях.

Предложение 1.2.8. *1.* $SH(k)_{\geq 0} = \{E \in SH(k) | \underline{\pi}_i(E)_j = \{0\}$ *для* $i > 0, j \in \mathbb{Z}\}$.

2. $SH(k)_{\leq 0} = \{E \in SH(k) | \underline{\pi}_i(E)_j = \{0\}$ *для* $i < 0, j \in \mathbb{Z}\}$.

3. *Существует сопряженность* $i^{SH} : SH^{eff}(k) \rightleftarrows SH(k) : \omega^{SH}$. *Более того,* i^{SH} $t_{hom}-$*точен справа, а* ω^{SH} $t_{hom}-$*точен.*

4. *Функтор* $E \mapsto \underline{\pi}_0(E)_*$ *индуцирует эквивалентность категорий* $\underline{Ht}^{SH}$ *и* $HI_*(k)$, *где* $HI_*(k)$ — *категория гомотопических модулей (см. [48, определение 5.2.4]). Кроме того, функтор* $E \mapsto \underline{\pi}_0(E)_0$ *задает эквивалентность* $\underline{Ht}^{SH^{eff}} \cong HI^{fr}(k)$, *где* $HI^{fr}(k)$ — *категория гомотопически инвариантных, стабильных пучков Нисневича с фрейм-трансферами (см. эти определения в [40, §1]).*

5. *Если* $E \in \underline{Ht}^{eff}$, $X \in \mathrm{SmVar}$, *и* $n \in \mathbb{Z}$, *то* $H^n_{Nis}(X, \underline{\pi}_0(E)_0) \cong E^n_0(X)$.

Доказательство. 1, 2. Это доказано в теореме 2.3 статьи [42].
3. См. [26, следствие 3.3.7(2)] или [24, предложение 2.2.5(1)].
4. См. [48, теорема 5.2.6] и [14, теорема 5.14].
5. Этот факт хорошо известен; см. предложение 5.1.1(8) статьи [21]. □

2 "Гладко порожденные" айлы и бирациональные фильтрации в мотивных категориях

Этот параграф содержит центральные технические результаты работы. В §2.1 некоторые айлы определяются в терминах мотивов гладких многообразий; затем они описываются через ростки, соответствующие полям функций. Кроме того, доказывается, что $t_{hom}-$гомологии сохраняют эти классы.
В §2.1.1 определяются $n-$бирациональные категории $\mathfrak{D}^{n-bir}$. Наши айлы

используются для исследования бирациональной фильтрации на $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$; доказываем, что гомотопическая $t-$структура ограничивается на $\mathfrak{D}^{n-bir} \subset \mathfrak{D}^{eff}$.

2.1 Гладко порожденные айлы: определение и основные свойства

Определение 2.1.1. Для всякой неубывающей последовательности $s = (s_j)$ из $\mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $j \in \mathbb{Z}$, определим айл (см. замечание 2.1.4 ниже) $\mathcal{A}_s$ как $(\{\mathcal{M}_R(\mathrm{SmVar})\langle j\rangle[t_j]\})^{\perp_{\mathfrak{D}}}$; здесь берем все $t_j < s_j$, $t_j \in \mathbb{Z}$.

Также будем использовать следующую модификацию этого определения в эффективном контексте: берем $j \geq 0$, и рассматриваем ортогонал в $\mathfrak{D}^{eff}$.

Лемма 2.1.2. 1. Класс $\mathcal{A}_s$ совпадает с $\{C \in \mathfrak{D} | \mathfrak{D}(\mathcal{M}(K)\langle j\rangle[t_i], C) = 0\}$; здесь K пробегает все поля функций над k, $j \in \mathbb{Z}$, и $t_j < s_j$ (см. соответствующие обозначения в определении 1.2.3(4)).

2. Схожее утверждение будет выполнено в эффективном случае если брать $j \geq 0$.

Доказательство. 1. Нужно доказать, что $\mathcal{A}_s = (\{\cup_{j\in\mathbb{Z}}\mathcal{M}_R(K)\langle j\rangle[t_i]\})^{\perp_{\mathfrak{D}}}$. Очевидно, первый из этих классов содержится во втором; ср. определение 1.2.3(4). Обратно, если N лежит во втором классе, то из спектральной последовательности

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x\in X^{(p)}} H^q_{j+p-t_j}(x) \Rightarrow H_j^{p+q-t_j}(\mathcal{M}(X))$$

(см. **(A1)**) получаем, что N принадлежит $\mathcal{A}_s$. Напомним, что здесь X^p — множество точек X коразмерности p, а теория когомологий H^q_p на SmVar определяется следующим образом: $H^q_p(X) := \mathfrak{D}(\mathcal{M}_R(X)\langle p\rangle[-p-q], N)$ (см. определение 1.2.3(3)).

2. В эффективном случае доказательство полностью аналогично. $\square$

Предложение 2.1.3. *Следующие условия для объекта $C \in \mathfrak{D}$ равносильны:*
1. $C \in \mathcal{A}_s$.
2. $H_r^{t_{hom}}(C)[r] \in \mathcal{A}_s$ для любого $r \in \mathbb{Z}$.

Очевидная эффективная версия этого утверждения также выполняется.

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, достаточно проверить, что $\mathfrak{D}(\mathcal{M}(K)\{j\}[t_i], C) \cong \mathfrak{D}(\mathcal{M}(K)\{j\}, H_{t_i}^{t_{hom}}(C))$ для всех полей функций K/k, и $j \in \mathbb{Z}$. Этот изоморфизм хорошо известен. По определению

$t^{\mathfrak{D}}_{hom}$ (см. предложение 1.2.8(1,2)) и сопряженности из замечания 1.1.3, достаточно проверить это для $C \in \mathfrak{D}_{t_{hom} \leq t_i}$, а в последнем случае это вытекает из хорошо известного следствия 2.4 статьи [42].

В эффективном случае доказательство такое же; только нужно взять $j \geq 0$. $\square$

Замечание 2.1.4. 1. Заметим, что наши классы $\mathcal{A}_s$ — *айлы* (это понятие было определено в [6, §1]). Действительно, пара $(\mathcal{A}_s, \mathcal{A}_s^{\perp})$ задает $t-$структуру для всякой (неубывающей) последовательности s; см. §2.2.2 ниже.

2. Отметим также, что условие неубывания в определении 2.1.1 не является ограничительным. Действительно, если для произвольной последовательности целых чисел s_i определить s'_j для соответствующих значений j как $\sup_{i \leq j} s_i$, то легко получить равенство $\mathcal{A}_{s'} = \mathcal{A}_s$. Для получения неочевидного включения в этом утверждении достаточно напомнить, что $\mathcal{M}(X)\langle n \rangle$ — ретракт $\mathcal{M}(\mathbb{P}^n_X)$ для любого $X \in \mathrm{SmVar}$.

По этой причине в определении 2.1.1 рассмотрены только неубывающие последовательности; это также упрощает некоторые формулировки (см. предложения 2.2.8 и 2.2.16 ниже).

2.1.1 Слабо бирациональные категории в терминах гладких айлов

В этом параграфе наши результаты применяются к некоторым айлам, стабильным относительно сдвигов.

- Пусть $n \geq 0$. Напомним некоторые свойства $n-$бирациональной мотивной категории $\mathfrak{D}^{n-bir} := \mathfrak{D}^{eff}\{n+1\}^{\perp}$. Во-первых, заданы сопряженные функторы $p_n : \mathfrak{D}^{eff} \rightleftarrows \mathfrak{D}^{eff}/\mathfrak{D}^{eff}\{n+1\} : i^{(n)}$; здесь p_n — соответствующая локализация, а функтор $i^{(n)}$ вполне строг и задает эквивалентность $\mathfrak{D}^{eff}/\mathfrak{D}^{eff}\{n+1\} \cong \mathfrak{D}^{n-bir}$, а также имеет правый сопряженный $R_{nr,n}$.[4] Эти утверждения следуют из хорошо известных абстрактных результатов; см. предложение 3.6 и теорему 1.4(2) статьи [52], или теорему A.2.6 и лемму 4.5.4 статьи [43].

- Теперь кратко напомним понятие т.н. *слайса*, см. подробности в [52, §1] и [43, §4.2]. Рассмотрим сопряженные функторы $i_n : \mathfrak{D}^{eff}\{n\} \rightleftarrows$

[4]Объекты $\mathfrak{D}^{n-bir}$ называются $n-$бирациональными потому, что функтор локализации $\mathcal{M}_R^{n-bir} := p_n \circ \mathcal{M}_R$ переводит все открытые вложения $U \to V$, для которых $codim_V(V \setminus U) \geq n+1$, в изоморфизмы.

$\mathfrak{D}^{eff}: r_n$, и определим функтор $\nu^{\geq n}: \mathfrak{D}^{eff} \to \mathfrak{D}^{eff}$ как композицию $i_n \circ r_n$. Тогда для любого $C \in \mathfrak{D}^{eff}$ существует следующий треугольник (соответствующий т.н. *слайс-фильтрации*):

$$\nu^{\geq n}(C) \to C \to i^{(n-1)}p_{n-1}(C) \to \nu^{\geq n}(C)[1] \qquad (1)$$

И $\nu^{\geq *}(C)$, и $i^{(*-1)}p_{*-1}(C)$ называются слайсами C; см. теорему 2.2.12(4) ниже.

Исследуем теперь свойства бирациональной фильтрации для объектов сердцевины t^{eff}_{hom}. Напомним, что для всех категорий, рассматриваемых в этой статье, объекты $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$ имеют "пучковую природу" (см. описания в предложениях 1.2.8(4), 3.1.3(2), 3.1.1(3) и 3.1.2(3)).

Предложение 2.1.5. *Зафиксируем $r \geq -1$ и определим последовательность s^{r-bir} следующим образом: $s^{r-bir}_j = -\infty$ при $0 \leq j \leq r$, и $s^{r-bir}_j = +\infty$ при $j \geq r+1$. Тогда для $S \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}^{eff}_{hom} \subset \mathfrak{D}^{eff}$ следующие условия эквивалентны:*
1. $S \in \mathcal{A}_{s^{r-bir}}$.
2. Когомологии Нисневича S обнуляются в степенях $> r$.
3. $S(K\{m\}) = \{0\}$ для всех полей функций K/k и $m > r$, где $S(K\{m\}) = \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(K)\{m\}, S)$.
4. $S(K\{r+1\}) = \{0\}$ для всех полей функций K/k.
5. $S_{-r-1} = 0$ (см. определение 1.2.3(5)).

Доказательство. Из аксиомы **(A2)** и предложения 2.1.2 немедленно следует эквивалентность условий (1) и (3). Напомним спектральную последовательность из **(A1)**:

$$E_1^{p,q} = \coprod_{x \in X^{(p)}} S_p^q(x) \Rightarrow S_0^{p+q}(\mathcal{M}(X)),$$

где X^p - множество точек X коразмерности p. Теперь отметим, что $\mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(X), S[p+q]) \cong H^{p+q}_{Nis}(X, S)$ (см. предложение 1.2.8(5) и замечание 3.1.5). Отсюда легко следует, что (3) $\Rightarrow$ (2).

Далее, напомним, что $S(K\{m\}) = \varinjlim_{X, k(X)=K} \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(X) \otimes T^m[-m], S)$. Поскольку $\mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(X) \otimes T^m[-m], S)$ — ретракт $\mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}((\mathbb{P}^1)^m(X)), S[m])$ (см. замечание 1.2.1(2)), получаем, что (2) $\Rightarrow$ (3).

Кроме того, условие (3), очевидно, влечет (4). Затем, если (4) выполняется, то $S_{-r-1} = 0$, так как следствие 1.2.4(2) можно применить к S_{-r-1}. Наконец, если выполнено (5), то $S_{-m} = 0$ для всех $m > r$; следовательно, $S_{-m}(K) = 0$ для всех полей функций K/k согласно аксиоме **(A2)**.

$\square$

Замечание 2.1.6. 1. Очевидно, $\mathcal{A}_{s^{r-bir}} = \mathfrak{D}^{eff}\{r+1\}^{\perp}$; см. замечание 1.2.2(2,3).

Объекты $\mathfrak{D}^{eff}\{r+1\}^{\perp}$ (также удовлетворяющие эквивалентным условиям из предложения выше), будут называться r*-бирациональными*; иногда также будем называть их *слабо бирациональными*. Отметим еще, что предложение 2.1.5 обобщает предложение 2.5.2 статьи [43] (которое следует из него при $r = 0$).

2. Разумеется, условия (1)–(3) предложения эквивалентны и в "вырожденном" случае $r = +\infty$.

Предложение 2.1.7. *t^{eff}_{hom} ограничивается до (гомотопической) t-структуры t^{n-bir}_{hom} на категории $\mathfrak{D}^{n-bir}$. Соответственно, функтор p_n $t-$точен справа, $i^{(n)}$ $t-$точен, а $R_{nr,n}$ $t-$точен слева.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $t_{hom}-$срезки сохраняют класс $\mathfrak{D}^{n-bir} := \mathfrak{D}^{eff}\{n+1\}^{\perp}$; а этот факт немедленно следует из предложения 2.1.3. □

Замечание 2.1.8. Наше предложение 2.1.7 широко обобщает теорему 4.4.1 статьи [43] (в которой был рассмотрен лишь случай $DM^{eff}(k)$ и $n = 0$). Отметим также, что использованные там рассуждения не могут быть применены при $n > 0$.

2.2 Гладкие весовые и t-структуры и их применения

В §2.2.1 напоминаются основы теории весовых структур.
В §2.2.2 приводится определение гладких весовых структур w^{s}_{Smooth} и $w^{eff,s}_{Smooth}$, соответствующих некоторым последовательностям s_j, и доказываются их основные свойства. Далее, условия *слабой бирациональности* выражены в терминах $w^{eff,s}_{Smooth}$. Затем смежная $t-$структура $t^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$ используется для задания фильтрации на $\underline{Ht}^{hom}$, и доказываются интересные свойства этой фильтрации. Кроме того, наши результаты применяются к изучению неразветвленных когомологий.
В §2.2.3 доказывается некоторая слабая весо-точность функтора $-\langle n\rangle$; из нее следует, что $w^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$ индуцирует весовую структуру на $n-$бирациональной категории $\mathfrak{D}^{n-bir}$ (это также верно и для $w^{eff,s}_{Smooth}$ при некоторых предположениях на $s = (s_j)$).

2.2.1 Весовые структуры: краткое напоминание

Напомним определение и некоторые свойства весовых структур.

Определение 2.2.1. I. Будем говорить, что пара подклассов $\underline{C}_{w\le 0}, \underline{C}_{w\ge 0} \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$ задает весовую структуру w на триангулированной категории $\underline{C}$, если она удовлетворяет следующим условиям.[5]

(i) $\underline{C}_{w\ge 0}, \underline{C}_{w\le 0}$ замкнуты относительно ретракций в $\underline{C}$ (т.е., содержат все $\underline{C}$-ретракты своих объектов).

(ii) **Полуинвариантность относительно сдвигов.**

$\underline{C}_{w\le 0} \subset \underline{C}_{w\le 0}[1]$, $\underline{C}_{w\ge 0}[1] \subset \underline{C}_{w\ge 0}$.

(iii) **Ортогональность.**

$\underline{C}_{w\le 0} \perp \underline{C}_{w\ge 0}[1]$.

(iv) **Весовые разложения**.

Для любого $M \in \operatorname{Obj}\underline{C}$ существует выделенный треугольник

$$X \to M \to Y \to X[1]$$

такой, что $X \in \underline{C}_{w\le 0},\ Y \in \underline{C}_{w\ge 0}[1]$.

Начнём с рассмотрения примера.

Замечание 2.2.2. Простой, но важный пример весовой структуры связан с "глупой" фильтрацией на категории $K^b(\underline{B})$ (или $K(\underline{B})$) для произвольной аддитивной $\underline{B}$.

А именно, возьмем в качестве $K^b(\underline{B})_{w\le 0}$ (соотв. $K^b(\underline{B})_{w\ge 0}$) класс комплексов, гомотопически эквивалентных комплексам, сконцентрированным в степенях ≥ 0 (соотв. ≤ 0); см. [32, Remark 1.2.3(1)]. Это дает весовую структуру, которую мы будем обозначать через w^{st}.

Сердцевина w^{st} — Каруби-замыкание $\underline{B}$ в $K^b(\underline{B})$ (или в $K(\underline{B})$, соответственно).

Нам также потребуются следующие определения.

Определение 2.2.3. Пусть $i, j \in \mathbb{Z}$; предположим, что триангулированная категория $\underline{C}$ оснащена весовой структурой w.

1. Полная подкатегория $\underline{Hw} \subset \underline{C}$ с объектами $\underline{C}_{w=0} = \underline{C}_{w\ge 0} \cap \underline{C}_{w\le 0}$ называется *сердцевиной* весовой структуры w.

2. $\underline{C}_{w\ge i}$ (соотв. $\underline{C}_{w\le i}$, соотв. $\underline{C}_{w=i}$) будет обозначаться $\underline{C}_{w\ge 0}[i]$ (соотв. $\underline{C}_{w\le 0}[i]$, соотв. $\underline{C}_{w=0}[i]$).

3. Будем говорить, что весовая структура w *порождена* классом $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$, если $\underline{C}_{w\ge 0} = (\cup_{i>0}\mathcal{P}[-i])^{\perp}$.

[5] В этой статье используется так называемая гомологическая конвенция для весовых структур; в то время как в [18] использовалась когомологическая конвенция. В последней конвенции рассматриваются классы $\underline{C}^{w\le 0} = \underline{C}_{w\ge 0}$ и $\underline{C}^{w\ge 0} = \underline{C}_{w\le 0}$.

4. Будем называть $\cup_{i\in\mathbb{Z}}\underline{C}_{w\geq i}$ классом $w-$ограниченных снизу объектов из $\underline{C}$; он будет обозначаться $\underline{C}^{+}$.

5. Будем говорить, что w *приведена*, если и категория $\underline{C}$, и класс $\underline{C}_{w\geq 0}$ замкнуты относительно $\underline{C}$-копроизведений (ср. с предложением 2.2.5(2)).

6. Пусть $\underline{C}'$ - триангулированная категория с весовой структурой w'; и $F:\underline{C}\to\underline{C}'$ - точный функтор.

   F называется *весо-точным* (относительно w, w'), если он переводит $\underline{C}_{w\leq 0}$ в $\underline{C}'_{w'\leq 0}$, а $\underline{C}_{w\geq 0}$ в $\underline{C}'_{w'\geq 0}$.

7. Пусть $\underline{D}$ - полная триангулированная подкатегория в $\underline{C}$.

   Будем говорить, что w *ограничивается* на $\underline{D}$, если пара $(\underline{C}_{w\leq 0}\cap \operatorname{Obj}\underline{D},\ \underline{C}_{w\geq 0}\cap\operatorname{Obj}\underline{D})$ дает весовую структуру на $\underline{D}$.

Замечание 2.2.4. Весовые разложения (для любого $M\in\operatorname{Obj}\underline{C}$) почти никогда не каноничны.

Тем не менее, для любого $m\in\mathbb{Z}$ аксиома (iv) дает выделенный треугольник
$$w_{\leq m}M\to M\to w_{\geq m+1}M \tag{2}$$
с некоторыми $w_{\geq m+1}M\in\underline{C}_{w\geq m+1}$ и $w_{\leq m}M\in\underline{C}_{w\leq m}$; будем называть его *$m$-весовым разложением* для M.

Эти обозначения будут часто использоваться ниже — несмотря на то, что $w_{\geq m+1}M$ и $w_{\leq m}M$ не канонически определяются объектом M; будем называть любой выбор $w_{\geq m+1}M$ или $w_{\leq m}M$ (при любом $m\in\mathbb{Z}$) *весовыми срезками* M. Более того, стрелки типа $w_{\leq m}M\to M$ или $M\to w_{\geq m+1}M$ всегда будут частями некоторого m-весового разложения для M.

Предложение 2.2.5. *Пусть $\underline{C}$ - триангулированная категория, $n\geq 0$; будем предполагать, что w - фиксированная весовая труктура на $\underline{C}$.*

1. *Аксиоматика весовых структур самодвойственна, т.е., для $\underline{D}=\underline{C}^{op}$ (так $\operatorname{Obj}\underline{D}=\operatorname{Obj}\underline{C}$) существует (противоположная) весовая структура w', для которой $\underline{D}_{w'\leq 0}=\underline{C}_{w\geq 0}$ и $\underline{D}_{w'\geq 0}=\underline{C}_{w\leq 0}$.*

2. *$\underline{C}_{w\leq 0}$ замкнута относительно $\underline{C}-$копроизведений.*

3. *$\underline{C}_{w\geq 0}=(\underline{C}_{w\leq -1})^{\perp}$ и $\underline{C}_{w\leq 0}={}^{\perp}\underline{C}_{w\geq 1}$. Таким образом, если w порождена классом $\mathcal{P}$, то $\mathcal{P}\subset\underline{C}_{w\leq 0}$.*

4. *Пусть* $m \leq l \in \mathbb{Z}$, $X, X' \in \operatorname{Obj}\underline{C}$*; фиксируем некоторое весовое разложение для* $X[-m]$ *и* $X'[-l]$*. Тогда любой морфизм* $g : X \to X'$ *продолжается до коммутативной диаграммы с соответствующими выделенными треугольниками (см. замечание 2.2.4(2)):*

$$\begin{array}{ccccc} w_{\leq m}X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & w_{\geq m+1}X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow \\ w_{\leq l}X' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & w_{\geq l+1}X' \end{array}$$

Более того, если $m < l$*, то это продожение единственно (при условии, что строки фиксированы).*

5. *Если* M *принадлежит* $\underline{C}_{w\geq -n}$*, то* $w_{\leq 0}M$ *принадлежит* $\underline{C}_{[-n,0]}$*.*

Доказательство. См. замечание 1.1.2(1), предложение 1.3.3(1,2,5) и лемму 1.5.1(1,2) статьи [18]. □

Предложение 2.2.6. *Предположим, что* $\underline{C}$ *компактно порожденная категория.*

1. *Пусть* $\mathcal{P}$ *— множество компактных объектов из* $\underline{C}$*. Тогда существует (единственная) весовая структура на* $\underline{C}$*, порожденная* $\mathcal{P}$*, и* $\mathcal{P} \subset \underline{C}_{w\leq 0}$*.*

2. *Пусть функтор* $F : C \to C'$ *сохраняет копроизведения,* w *- весовая структура на* $\underline{C}$*, порожденная некоторым классом* $\mathcal{P} \subset \operatorname{Obj}\underline{C}$*, и* w' *весовая структура на* $\underline{C}'$*. Тогда* F *весо-точен слева тогда и только тогда, когда* $F(\mathcal{P}) \subset \underline{C}'_{w\leq 0}$*.*

3. *В дополнение к вышеупомянутым условиям предположим, что функтор* F *сюръективен на объектах. Тогда* F *весо-точен в том и только в том случае, если весовая структура* w' *порождена* $F(\mathcal{P})$*.*

Доказательство. См. теорему 5 статьи [51] (ср. также с [1, предложение 1.2.3(II)]). □

2.2.2 Гладкие весовые и $t-$структуры, неразветвленные когомологии и слабо бирациональная фильтрация

Определение 2.2.7. Для любой категории вида $\mathfrak{D}^{eff}$ или $\mathfrak{D}$ будет обозначать через $w^{eff,s}_{Smooth}$ (соотв. w^{s}_{Smooth}) весовую структуру, заданную $\mathcal{A}_s$ на $\mathfrak{D}^{eff}$ (соотв. на $\mathfrak{D}$); то есть, полагаем класс весо-неотрицательных объектов равным $\mathcal{A}_s$.

Будем писать просто $w^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$ и w_{Smooth} в случае, когда все s_j нулевые.

Предложение 2.2.8. *Пусть* $S \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}^{eff}_{hom} \subset \mathfrak{D}^{eff}$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*
1. $S \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff,s}_{Smooth}\geq 0}$.
2. Условия (2)–(3) предложения 2.1.5 выполнены, если положить r *равным минимальному такому* $m \geq -1$, *что* $s_{m+1} \geq -m-1$, *если такое* m *существует, и* $r = +\infty$ *в обратном случае (см. замечание 2.1.6(2)).*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Эта импликация следует из определения $w^{eff,s}_{Smooth}$, предложения 1.2.8(5) и замечания 3.1.5.
$2 \Rightarrow 1$. Из условия (2) получаем, что $\mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(X), S[i]) = \{0\}$, при $i > r$. Отсюда получаем, что S принадлежит классу $\mathcal{A}_s$, где s — это последовательность из формулировки предложения, т.е., $s_{\geq r+1} = -r-1$, если выполняется первая из альтернатив в (2), и $(s_j) = -\infty$ в противном случае (напомним, что все наши последовательности неубывающие). $\square$

Замечание 2.2.9. 1. Разумеется, в случае $r < +\infty$ условия (4) и (5) предложения 2.1.5 также равносильны приведенным выше.

2.Наиболее интересные для нас примеры — это $s = s^{r-bir}$ (см. предложение 2.1.5) и $s = 0$ (он соответствует гладкой весовой структуре w^{eff}_{Smooth}).

Определим теперь некоторые t-структуры.

Определение 2.2.10. 1. Будем называть $t-$структуру t *смежной справа* к w, если $\underline{C}_{w\geq 0} = \underline{C}_{t\geq 0}$.

2. Пусть $H : \underline{C} \to \underline{A}$ — контравариантный функтор, где $\underline{A}$ — абелева категория. Определим $W^j(H)(X) := \operatorname{Im}(H(w_{\geq j}(X)) \to H(X))$ (см. замечание 2.2.4). Это соответствие задает канонический подфунктор функтора H (в частности, оно не зависит от выбора весового разложения для $X[j]$); см. предложение 2.1.2 статьи [18].

Прилагательное "правая" в этом определении ниже будет опускаться, поскольку в дальнейшем нам нужен лишь этот вариант; будем просто писать "смежная . Напомним также, что категория $\mathfrak{D}^{eff}$ удовлетворяет условию представимости Брауна, так как она компактно порождена (см. главу 8 книги [50]).

Конструкция-Определение 2.2.11. 1. Так как весовая структура $w^{eff,s}_{Smooth}$ приведена (см. определение 2.2.3(5)), теорема 3.2.3(I) статьи [23] дает существование $t-$структуры $t^{eff,s}_{Smooth}$, смежной с ней. Далее, задано каноническое отображение $\tau^{t^{eff,s}_{Smooth}}_{\geq -j}(E) \to E$ для каждого

$E \in \mathfrak{D}^{eff}$, см. определение 1.1.1(iii) и замечание 1.1.3(1). Применив $H_0^{t_{hom}^{eff}}$ к этому отображению, получаем канонический морфизм $H_0^{t_{hom}^{eff}}(\tau_{\geq -j}^{t_{Smooth}^{eff,s}}(E) \to E)$. Как и выше, будем просто писать t_{Smooth}^{eff} в случае, когда $s_j = 0$ (для $j \geq 0$).

2. Итак, применяя вышеупомянутую конструкцию к $E \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}_{hom}^{eff}$, получаем морфизмы из $\underline{Ht}_{hom}^{eff} \cap \mathfrak{D}^{eff}_{t_{Smooth}^{eff} \geq -j}$ в $\underline{Ht}_{hom}^{eff}$; они дают следующую фильтрацию: $F^{j,s}(E) = \operatorname{Im}_{\underline{Ht}_{hom}^{eff}}(H_0^{t_{hom}}(\tau_{\geq -j}^{t_{Smooth}^{eff,s}}(E)) \to H_0^{t_{hom}}(E) = E)$.

Теперь исследуем нашу фильтрацию для $t-$структур, порожденных $\mathcal{A}_s$, более детально.

Теорема 2.2.12. Пусть $-1 \leq i \leq +\infty$, $j \in \mathbb{Z}$.

1. Категория $\underline{Ht}^{i-bir,s}$ $i-$бирациональных объектов — абелева подкатегория Серра в $\underline{Ht}_{hom}^{eff}$.

   Обозначим через j_i соответствующее вложение и зафиксируем $E \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}_{hom}^{eff}$.

2. $F^{j,s}(E)$ — максимальный r-бирациональным подобъект E (в категории $\underline{Ht}_{hom}^{eff}$); здесь r равно наименьшему $m \geq -1$, для которого $s_{m+1} \geq -j$, если такое m существует, и $r = +\infty$ в противном случае (см. замечание 2.1.6(2)).

   Таким образом, $F^{j,s}$ — правый сопряженный к вложению j_r.

3. Функтор *высшей неразветвленной части* $R_{nr,i}$ (см. §2.1.1; ср. также с [43, §7.1]) дает $t-$срезку $\tau_{\geq 0}^{t_{Smooth}^{eff,s^{i-bir}}}$.

4. Аналогично, $w_{Smooth}^{eff,s^{i-bir}}$-срезки дают соответствующие *слайсы* (см. начало §2.1.1).

5. E лежит в $\underline{Ht}_{\mathrm{Smooth}}^{eff}$ тогда и только тогда, когда он бирационален (см. замечание 2.1.6(1)).

Доказательство. 1. Пусть $0 \to S' \to S \to S'' \to 0$ - точная последовательность в $\underline{Ht}_{hom}^{eff}$. Поскольку ростки в условии (3) из предложения 2.1.5 дают точные функторы $\underline{Ht}_{hom}^{eff} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ (см. следствие 1.2.4(2)), S лежит в $\underline{Ht}^{i-bir,s}$ тогда и только тогда, когда там лежат S' и S''.

2. Пучок $F^{j,s}(E)$ $r-$бирационален согласно предложениям 2.2.8 и 2.1.3 и пункту (1) выше. Пусть $\widetilde{E} \stackrel{f}{\hookrightarrow} E$ некоторый r-бирациональный подобъект в E. Так как $\widetilde{E} \in \mathfrak{D}^{eff}_{t^{eff,s}_{Smooth \geq -j}}$, сопряженность, соответствующая $\tau_{\geq -j}^{t^{eff,s}_{Smooth}}$ (см. замечание 1.1.3(1)) дает, что f пропускается через $\tau_{\geq -j}^{t^{eff,s}_{Smooth}}(E)$. Применяя H_0^{hom} к соответствующему коммутативному треугольнику получаем, что f также пропускается через $F^{j,s}(E)$.

3. Наше утверждение следует из сопряженностей $\mathfrak{D}^{eff}_{t^{eff,s^{i-bir}}_{Smooth} \geq 0} \rightleftarrows \mathfrak{D}^{eff}$ и $i^{(i)} \dashv R_{nr,i}$.

4. Заметим, что наша весовая структура — также t-структура (по определению). Поэтому наше утверждение легко следует из определения слайсов и соответствующих сопряженностей (ср. пункт (3) выше и §2.1.1).

5. Очевидно; заметим, что $\mathfrak{D}^{eff}_{t_{hom} \leq 0} \subset \mathfrak{D}^{eff}_{t^{eff}_{Smooth} \leq 0}$. □

Замечание 2.2.13. 1. В частности, для $E \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}^{eff}_{hom}$ выполнено $F^j(E) = E$ тогда и только тогда, когда E — $j-$бирациональный объект.

2. Было бы интересно сравнить нашу фильтрацию с фильтрацией из теоремы 15 статьи [12] (в случае $\mathfrak{D}^{eff} = SH(k)^{eff}$).

3. Для весовой структуры как в пункте (4) выше легко видеть, что $W^*(\mathfrak{D}^{eff}(-, R(n)[m]))$ дает фильтрацию из определения 5.2.1 и следствия 5.3.3 статьи [53]. Заметим, что при $m = 2n$ и $\mathfrak{D}^{eff} = DM^{eff}$ эта фильтрация гипотетически должна давать фильтрацию Блоха–Бейлинсона–Мюрра (см. теорему 6.1.4, гипотезу 6.1.7, предложение 6.1.8 и замечание 6.1.9 вышеупомянутой статьи).

Теперь применим наши результаты к изучению неразветвленных когомологий.

Следствие 2.2.14. *1. Пусть $S \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}^{eff}_{hom}$. Тогда*

$\underline{Ht}^{eff}_{hom}$-мономорфизм $c(S) : F^0(S) \to S$ из конструкции-определения 2.2.11 дает неразветвленную часть $\mathfrak{D}^{eff}_R(-, S)$ в смысле [43, Определение 7.2.1].

2. Пусть $M \in \underline{Hw}_{Smooth^{eff}_R}$; и некоторые $X \in \mathrm{SmVar}$ и $f : \mathcal{M}_R(X) \to M$ таковы, что $p_0(f)$ изоморфизм. Тогда $\mathfrak{D}^{eff}_R(f, S)$ мономорфно, и его образ дает неразветвленную часть в $\mathfrak{D}^{eff}_R(\mathcal{M}_R(X), S)$.

Доказательство. 1. См. предложение 2.6.3 и теорему 7.3.1 статьи [43], и [8, лемма 4.2] (заметим, что приведенные там доказательства применимы к любой мотивной категории из §1.2).

2. Наши аргументы сходны с [25, Теорема 2.2.3]. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D}_R^{eff}(M, F^0(S)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "c(S)_*"'] & \mathfrak{D}_R^{eff}(\mathcal{M}_R(X), F^0(S)) \arrow[d] \\
\mathfrak{D}_R^{eff}(M, S) \arrow[r] & \mathfrak{D}_R^{eff}(\mathcal{M}_R(X), S)
\end{tikzcd}$$

Сопряженность вместе с теоремой 2.2.12 дает $\mathfrak{D}_R^{eff}(i^{(0)}p_0(M), S) \cong \mathfrak{D}_R^{eff}(M, i^{(0)}R_{nr,0}(S)) \cong \mathfrak{D}_R^{eff}(M, F^0(S))$. Далее, треугольник слайс-фильтрации (1) дает следующую точную последовательность:

$$0 \to \mathfrak{D}_R^{eff}(M, F^0(S)) \to \mathfrak{D}_R^{eff}(M, S) \to \mathfrak{D}_R^{eff}(\nu^{\geq 1}(M), S)$$

Остается показать, что отображение $c(S)_*$ эпиморфно, а этот факт следует из последовательности выше и аксиомы ортогональности для $t-$структур, так как $\nu^{\geq 1}(M) \in \mathfrak{D}^{eff}_{t_{hom}\geq 1}$ (см. лемму 2.2.4(2) из [1] и [14, лемма 6.1(2)]). □

Предложение 2.2.15. *1. Пусть* $E, X \in \mathfrak{D}^{eff}$*; тогда* $W^i(\mathfrak{D}^{eff}(-, E))(X) \cong \operatorname{Im}(\mathfrak{D}^{eff}(X, \tau_{\geq -i}^{t^{eff,s}_{Smooth}}(E)) \to \mathfrak{D}^{eff}(X, E))$.

2. Для любых i, j *и* $X, Y \in \mathfrak{D}^{eff}$ *существует функториальный изоморфизм*

$$\mathfrak{D}^{eff}(X, \tau_{\geq -i}^{t^{eff,s}_{Smooth}}(Y)[j+i]) \cong \operatorname{Im}(\mathfrak{D}^{eff}(w^{eff,s}_{Smooth\geq j}(X), Y[i]) \to \mathfrak{D}^{eff}(w^{eff,s}_{Smooth\geq j-1}(X), Y[i+1])).$$

3. Если $X \in \mathfrak{D}_{w^s_{Smooth}=i}$ *то для любого* $Y \in \mathfrak{D}$ *выполнено* $\mathfrak{D}(X, Y) \cong \mathfrak{D}(X, H_i^{t^s_{\mathrm{Smooth}}}(Y))$.

4. $\mathfrak{D}^+_{w_{\mathrm{Smooth}\geq 0}} = \operatorname{Obj}(\mathfrak{D}^+) \bigcap {}^{\perp}(\bigcup_{i<0} \mathfrak{D}_{t_{\mathrm{Smooth}}=i})$ *(см. обозначения в определении 2.2.3(4)).*

5. Если $C \in \mathfrak{D}_{t_{hom}\leq i}$*,* $U \in \mathrm{SmVar}$*,* $i \geq 0$*, то*

$$\mathfrak{D}(\mathcal{M}(U), \tau_{\geq -i-1}^{t_{\mathrm{Smooth}}}(C[-i-1])) \cong \mathfrak{D}(w_{\mathrm{Smooth}\geq -i}\mathcal{M}(U), C).$$

Доказательство. 1, 2. См. теорему 4.4.2(6,7) статьи [18].

3. См. [19, теорема 2.6.1(4)].

4. Очевидно, первый класс лежит во втором. Пусть X - объект из $\mathfrak{D}^+$. Для проверки обратного включения, достаточно доказать, что $X \perp Y$ при $X \perp (\bigcup_{i<0} \mathfrak{D}_{t_{\mathrm{Smooth}}=i})$, и любом $Y \in \mathfrak{D}_{t_{\mathrm{Smooth}}\leq -1}$. Поскольку X w_{Smooth}-ограничен снизу, $X \perp \tau_{\leq i}^{t_{\mathrm{Smooth}}}(Y)$ для некоторого i. Отсюда, рассмотрев подходящие $t-$разложения для Y и его срезок, получаем требуемое утверждение.

5. Возьмем весовое разложение как в предложении 2.2.5(4) при $m = -i-2, l = -i-1, g = \mathrm{id}_{\mathcal{M}(U)}$. Применив функтор $\mathfrak{D}(-, C)$ получаем, что отображение $\mathfrak{D}(w_{\mathrm{Smooth}\geq -i}\mathcal{M}(U), C) \to \mathfrak{D}(w_{\mathrm{Smooth}\geq -i-1}\mathcal{M}(U), C)$ инъективно. Теперь утверждение немедленно следует из теоремы 4.4.2(7) статьи [18]. $\square$

2.2.3 Еще о n-бирациональных категориях и весо-точных локализациях

В этом разделе доказываются некоторые свойства слабой весо-точности функтора $-\langle n\rangle$. Из них выводится w^{eff}_{Smooth} и $w_{Smooth}-$точность и этого функтора, и функтора локализации p_n. Отметим, что в этом параграфе исключен случай $SH^{S^1}(k)$ (см. замечание 1.2.2(3)).

Предложение 2.2.16. *Положим $k, n \geq 0$ фиксированы, и $s_{j+n} - s_j \leq k$ при $j \geq 0$; возьмем $C \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff,s}_{Smooth}\geq 0}$ для $s = (s_j)$. Тогда $C\langle n\rangle \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff,s}_{Smooth}\geq -k}$.*

Доказательство. Пусть $C \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff,s}_{Smooth}\geq 0}$, и рассмотрим следующие функторы из категории SmVar гладких k-многообразий: $H^q_p(X) := \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(X)\{p\}[-q], C\langle n\rangle[-k])$ для всяких $p \geq 0, q \in \mathbb{Z}, X \in \mathrm{SmVar}$. Нам надо проверить, что $H^{p+q}_j(X) = \{0\}$ при всех $q > 0, X \in \mathrm{SmVar}$. Напишем спектральную последовательность из аксиомы **(A1)**:

$$E_1^{p,q} = \coprod_{x\in X^{(p)}} H^q_{j+p}(x) \Rightarrow H^{p+q}_j(X).$$

Тогда $E_1^{0,q} = \{0\}$ при $q \geq 0$ по **(A2)**. Далее, для поля функций K/k и $p > 0$ легко видеть, что $H^q_{p+j}(K) = \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}(K)\langle j+p-n\rangle[k-j-p-q], C) = \{0\}$ (см. определение 1.2.3(4) для обозначений; ср. также доказательство предложения 2.1.2). Из этого с очевидностью следует, что $H^{p+q}_j(X) = \{0\}$, если $p + q > 0$, и это то, что требуется.

$\square$

Замечание 2.2.17. Конечно, похожее свойство выполняется и в неэффективном случае (ср. определение 2.1.1).

Следствие 2.2.18. *1. Эндофункторы $-\langle n\rangle$ $w^{eff}_{Smooth}-$точны (соотв. $w_{Smooth}-$точны) при $n \geq 0$ (соотв. $n \in \mathbb{Z}$).*

2. Вложение $i : \mathfrak{D}^{eff} \hookrightarrow \mathfrak{D}$ весо-точно относительно $w^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$ и w_{Smooth}.

3. Пусть последовательность $(s_j)_{j\geq 0}$ удовлетворяет условию $s_{j+n} - s_j \leq 1$ при $j \geq 0$. Тогда функтор p_n весо-точен относительно весовых *структур* $w^{eff,s}_{Smooth}$ *и* $w^{n-bir,s}$*, где весовая структура* $w^{n-bir,s}$ *определена при помощи функтора* $\mathcal{M}_R^{n-bir}$ *аналогично определениям 2.2.7 и 2.1.1.*

4. $\mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff}_{\mathrm{Smooth}}\geq 0} \subset \mathfrak{D}^{eff}_{t^{eff}_{hom}\geq 0}$.

Доказательство. 1. Возьмем $s_j = 0$ при $j \geq 0$ (соотв. $j \in \mathbb{Z}$) в предыдущем предложении.

2. Из предложения 2.2.6(2) получаем, что i весо-точен слева. Для доказательства правой весо-точности, возьмем $C \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff}_{\mathrm{Smooth}}\geq 0}$, и рассмотрим группу $\mathfrak{D}(\mathcal{M}_R(X)\langle n\rangle[s], C)$, где $X \in \mathrm{SmVar}, n \in \mathbb{Z}, s < 0$. Тогда в случае $n \geq 0$ эта группа обнуляется по предыдущему пункту. Если $n < 0$, то $\mathfrak{D}(\mathcal{M}_R(X)\langle n\rangle[s], C) \cong \mathfrak{D}^{eff}(\mathcal{M}_R(X)[s], C\langle -n\rangle)$, и $C\langle -n\rangle \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff}_{\mathrm{Smooth}}\geq 0}$, и эта группа также обнуляется. Таким образом, утверждение доказано.

3. Возьмем весовое разложение $X \to C \to Y \to X[1]$ относительно $w^{eff,s}_{Smooth}$, и подкрутим его с помощью $-\langle n\rangle$; тогда $Y\langle n\rangle \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff,s}_{Smooth}\geq 0} \cap \mathfrak{D}^{eff}\langle n\rangle$ по предложению 2.2.16, а $X\langle n\rangle \in \mathfrak{D}^{eff}_{w^{eff,s}_{Smooth}\leq 0} \cap \mathfrak{D}^{eff}\langle n\rangle$ по определению. Таким образом, наше утверждение следует из теоремы 3.1.3(2) статьи [29].

4. Незамедлительно из определения и предложения 1.2.8(1) (см. также лемму 2.2.4(3) статьи [1]). $\square$

3 Исследуемые конструкции в мотивных категориях, отличных от SH

Для удобства читателя, теперь обсудим наши основные результаты и конструкции для категорий $\mathfrak{D}$, отличных от $SH^{eff}(k) \subset SH(k)$. Как отмечалось выше, эти результаты вполне аналогичны полученным в предложении 1.2.8.

3.1 Обсуждаемые понятия и предположения в различных мотивных категориях

Сперва напомним, что существуют канонические точные моноидальные функторы из $SH^{S^1}(k)$ во все наши мотивные категории $\mathfrak{D}(k)$; они переводят $\mathcal{M}_{SH^{S^1}}(X)$ в соответствующие $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(X)$. Это дает изоморфизм $\mathcal{M}_{\mathfrak{D}}(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{1}_{\mathfrak{D}} \oplus T$, упомянутый в начале §1.2. Соответственно, спектральные последовательности аксиомы **(A1)** для всех этих $\mathfrak{D}(k)$ можно получить из таковых для $SH^{S^1}(k)$.

Теперь проверим аксиому **(A2)** для каждой из наших категорий в отдельности; ср. с леммой 1.2.6 выше.

$\boxed{\text{Случай } SH^{S^1}(k)}$

Основное отличие этого случая от остальных состоит в необратимости функтора подкрутки.
Обозначим через $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(E)$ пучок Нисневича, ассоциированный с предпучком $X \mapsto E_0^{-n}(X) = SH^{S^1}(\mathcal{M}(X_+)[n], E), X \in \mathrm{SmVar}, n \in \mathbb{Z}$.

Предложение 3.1.1. *1. $E \in SH^{S^1}(k)_{\geq 0}$ тогда и только тогда, когда $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(E) = 0$ для $n < 0$.*

2. $E \in SH^{S^1}(k)_{\leq 0}$ тогда и только тогда, когда $\pi_n^{\mathbb{A}^1}(E) = 0$ для $n > 0$.

3. Функтор $\pi_0^{\mathbb{A}^1}(E)$ задает эквивалентность $\underline{Ht}_{hom}^{SH^{S^1}}$ и $SHI(k)$, где $SHI(k)$ - категория строго гомотопически инвариантных пучков (см. [48, определение 4.3.5]).

*4. **(A2)** справедлива.*

Доказательство. 1, 2. Аналогично теореме 2.3 статьи [42].
3. См. [48, лемма 4.3.7(2)].
4. См. лемму 6.1.6 статьи [49].

□

$\boxed{\text{Случай } D_{\mathbb{A}^1}(k) \text{ и } D_{\mathbb{A}^1}^{eff}(k)}$

Предложение 3.1.2. *1. $E \in D_{\mathbb{A}^1}(k)_{\geq 0}$ тогда и только тогда, когда $\underline{H}_{m,n}^{\mathbb{A}^1}(E) = 0$ при $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^-$.*

2. $E \in D_{\mathbb{A}^1}(k)_{\leq 0}$ тогда и только тогда, когда $\underline{H}_{m,n}^{\mathbb{A}^1}(E) = 0$ при $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$.

3. Существуют эквивалентности $\underline{H}_{*,0}^{\mathbb{A}^1} : \underline{Ht}_{hom}^{D_{\mathbb{A}^1}} \to HI_*(k)$ и $\underline{H}_{0,0}^{\mathbb{A}^1} : \underline{Ht}^{D_{\mathbb{A}^1}^{eff}} \to HI^{fr}(k)$.

*4. **(A2)** выполняется.*

Доказательство. 1, 2. См. [36, §16.2.4] и следствие 2.1.72 статьи [9].
3. См. пример 4.1.2 в [26], теорему 8.12 и следствие 8.14 работы [7].
4. Аналогично предыдущим случаям; см. замечание 8 статьи [49].

□

$\boxed{\text{Случай } DM(k) \text{ и } DM^{eff}(k)}$

Предложение 3.1.3. *1. Существуют эквивалентности* $\underline{H}^0_* : \underline{Ht}^{DM} \to HI^{tr}_*(k)$ *и* $\underline{H}^0 : \underline{Ht}^{DM^{eff}} \to HI(k)$*, где* $HI^{tr}_*(k)$ *и* $HI(k)$ *— категории гомотопических модулей с трансферами и гомотопически инвариантных пучков с трансферами, соответственно (см. [55, определение 3.1.9] и [38, определение 1.3.2]).*

2. ***(A2)*** *выполнена.*

Доказательство. 1. См. [55, предложение 3.1.12] и [38, следствие 5.2 и теорему 5.11].
2. Хорошо известно, см. §5 там же (ср. также [1, лемма 2.2.4]).

□

$\boxed{\text{Случай } \mathrm{MGl}-\mathrm{Mod}(k)}$

Предложение 3.1.4. *1. Существует эквивалентность* $\mathcal{O}|_{\underline{Ht}} : \underline{Ht}^{\mathrm{MGl}} \cong HI^{tr}_*(k)$.

2. ***(A2)*** *справедлива.*

Доказательство. 1. См. замечание 4.3.3 статьи [26].
2. С легкостью следует из соответствующего результата для $SH(k)$ и t_{hom}-точности и консервативности "забывающего" функтора $\mathcal{O}$, сопряженного справа к естественному связывающему функтору $\mathcal{L} : SH(k) \to \mathrm{MGl}-\mathrm{Mod}(k)$ (для которого выполнено $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{SH}(X)\{i\}[n]) = \mathrm{MGl}(X)\{i\}[n]$); см. пример 2.3.3 статьи [26] и §2.2.5 из [39]. □

Замечание 3.1.5. Напомним также, что для каждой из категорий $\mathfrak{D}^{eff}(k)$ имеется также "забывающий" t^{eff}_{hom}−точный функтор $\Psi_{\mathfrak{D}}$ в $SH^{S^1}(k)$, сопряженный справа к естественному функтору $SH^{S^1}(k) \to \mathfrak{D}^{eff}$ (легко следует из нашего описания t^{eff}_{hom} в терминах гомотопических пучков, см. также лемму 6.2(2) статьи [14]).

Пусть $E \in \operatorname{Obj} \underline{Ht}^{\mathfrak{D}^{eff}}_{hom}$; тогда $E^n_0(X) \cong H^n_{Nis}(X, \pi_0^{\mathbb{A}^1}(\Psi_{\mathfrak{D}}(E)))$ для любых $X \in \mathrm{SmVar}$, $n \in \mathbb{Z}$. Действительно, в случае $\mathfrak{D}^{eff} = SH^{S^1}(k)$ это утверждение хорошо известо и дано предложением 1.4.6(6) статьи [21]. Общий случай получается отсюда при помощи изоморфизма сопряжения $E^n_0(X) \cong \Psi_{\mathfrak{D}}(E)^n_0(X)$; ср. предложение 1.2.8(5).

3.2 О локализации коэффициентов в мотивных категориях

Теперь напомним основы теории локализации колец коэффициентов в компактно порожденных категориях (впрочем, наше "исходное" кольцо коэффициентов — это $\mathbb{Z}$).

Ниже $S \subset \mathbb{Z}$ будет некоторым множеством простых; обозначим кольцо $\mathbb{Z}[S^{-1}]$ через R.

Предложение 3.2.1. *Пусть $\underline{C}$ компактно порождена малой подкатегорией $\underline{C}'$. Обозначим через $\underline{C}_{S-tors}$ локализующую подкатегорию в $\underline{C}$, (компактно) порожденную $\operatorname{Cone}(c' \xrightarrow{\times s} c')$ для $c' \in \operatorname{Obj} \underline{C}'$, $s \in S$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *$\underline{C}_{S-tors}$ содержит конусы $c \xrightarrow{\times s} c$ при любых $c \in \operatorname{Obj} \underline{C}$, $s \in S$.*

2. *Локализация Вердье $\underline{C}_R = \underline{C}/\underline{C}_{S-tors}$ существует (т.е., морфизмы образуют множество); функтор локализации $l : \underline{C} \to \underline{C}_R$ сохраняет копроизведения и компактные объекты. Более того, $\underline{C}_R$ порождена $l(\operatorname{Obj} \underline{C}')$ как локализующая подкатегория.*

3. *Для любых $c \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ и $c' \in \operatorname{Obj} \underline{C}'$ выполнено $\underline{C}_R(l(c'), l(c)) \cong \underline{C}(c', c) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.*

4. *l обладает правым сопряженным функтором G, и G — полное вложение. Существенный образ G состоит из $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ таких, что sId_M — автоморфизм при любом $s \in S$.*

5. *Предположим, $char(k) = p$ и $p \in S$, если $p > 0$. Тогда категория $\mathfrak{D}^c_R(k)$ — жесткая тензорная. Кроме того, $\mathfrak{D}^c_R(k)$ — наименьшая толстая подкатегория $\mathfrak{D}_R(k)$, содержащая все $\mathcal{M}_R(P)\{i\}$ при $P \in \operatorname{SmPrVar}$, $i \in \mathbb{Z}$. Таким образом, множество $\mathcal{M}_R(\operatorname{SmPrVar})$ компактно порождает $\mathfrak{D}_R(k)$.*

   Конечно, соответствующие утверждения выполнены и в эффективном случае.

Доказательство. 1, 2, 3, 4. См. предложение 1.2.5 статьи [24].

5. См. [24, предложение 2.2.3(9)] (ср. также следствие 2.4.8 статьи [26] и [20, лемма 2.3.1]). $\square$

Замечание 3.2.2. 1. Поскольку Chow_R Карубиева и связна в DM_R (т.е., $\mathrm{Chow}_R \perp \mathrm{Chow}_R[i]$ для любого $i > 0$; см. замечание 3.3.1(1) ниже, следствие 2.1.2 статьи [32] дает единственную весовую структуру $w_{\mathrm{Chow},gm}$ на наименьшей полной Каруби-замкнутой триангулированной подкатегории DM_R, содержащей Chow_R, для которой $\underline{Hw}_{\mathrm{Chow},gm} = \mathrm{Chow}_R$.

Важное наблюдение: если $char(k) = 0$ или $char(k) = p \in S$, то w_{Smooth} и $w_{\mathrm{Smooth}}^{eff}$ также порождены мотивами **гладких проективных** многообразий (см. теорему 2.1.2(2) статьи [1] и предложение выше). Кроме того, в этих случаях $DM_R(k)$ и $\mathrm{MGl} - \mathrm{Mod}_R(k)$ отличаются от других мотивных категорий тем, что сердцевины w_{Smooth} можно описать "геометрически"; это — соответствующие "большие" категории мотивов Чжоу. Соответственно, для данных категорий предложение 2.2.14(2) дает достаточно явное вычисление неразветвленных когомологий. Далее, в этих случаях w_{Smooth}^{eff} и w_{Smooth} ограничиваются на соответствующие подкатегории $DM_{gm,R}^{eff}(k) \subset DM_{gm,R}(k)$ компактных объектов (которые равны наименьшим строгим триангулированным подкатегориям в $DM_R^{eff}(k) \subset DM_R(k)$, содержащим соответствующие мотивы Чжоу; см. [55, §2.1]), и $Hw_{\mathrm{Chow},gm}$ эквивалентна соответствующей категории мотивов Чжоу Chow_R. Эти типы весовых структур были исходно определены в [18] и [20] (ср. также замечание 3.1.4 и предложение 3.2.6 статьи [22]). Данные вопросы будут детальнее изучаться в следующих параграфах.

Отметим также, что одним из препятствий к включению $\mathrm{Chow}_R \subset \underline{Hw}_{\mathrm{Chow}}$ является нетривиальность отображения Хопфа η (см. [48, §6.2]); это также тесно связано с ориентируемостью, ср. [13].

2. Возьмем $S = \{2\}$, и напомним разложение $SH(k)[1/2] = SH(k)^+ \times SH(k)^-$ (индуцированное инволюцией симметрии на $\mathbb{P}^1 \wedge \mathbb{P}^1$; см. §6 статьи [46]). Отсюда легко следует, что категорию $SH(k)^+$ можно добавить к нашим примерам из §3.1.

3. Соединяя все вышесказанное получаем, что все наши результаты из предыдущих параграфов могут быть применены ко всем мотивным категориям, упомянутым выше.

3.3 Случай $DM_R(k)$

В этом разделе детально обсуждается весовая структура Чжоу на категориях $DM_R^{eff}(k) \subset DM_R(k)$. Напомним, что весовая структура Чжоу – это просто гладкая весовая структура с параметром $s = 0$.

3.3.1 Геометрические теоремы сравнения для $DM_R(k)$

Начнем с нескольких замечаний.

Замечание 3.3.1. 1. Кратко напомним (преимущественно, чтобы зафиксировать обозначения), некоторые основы теории $R-$линейных и неограниченных мотивных комплексов Воеводского. Отметим, что случай $R = \mathbb{Z}$ был разобран и изучен в статьях В. Воеводского и Ф. Деглиза; для того, чтобы получить обобщения приведенных в этих статьях утверждений на случай произвольного R, можно применить предложение 3.3.2; см. также предложение 3.2.1 выше.

В частности, ниже мы воспользуемся следующим свойством DM_R^{eff}: для каждого гладкого многообразия Y/k и гладкого собственного X/k, все компоненты которого имеют размерность n, и $i \geq 0$ выполнено следующее: группа $DM_R^{eff}(\mathcal{M}_R(Y), \mathcal{M}_R(X)[i])$ равна $\{0\}$ если $i > 0$, и равна $CH^n(X \times Y) \otimes_{\mathbb{Z}} R$ если $i = 0$; см. [16, Corollary 6.7.3]. Вспомнив, что композиция морфизмов в полной подкатегории $\mathrm{Corr}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{rat}}$ категории DM_R^{eff}, объекты которой — все $\mathcal{M}_R(X)$, соответствует композиции морфизмов в категории эффективных мотивов Чжоу (отметим, что этот факт достаточно проверить в случае $R = \mathbb{Z}$; см. предложение 3.3.2 ниже) мы получаем, что аддитивная категория $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff} = \mathrm{Kar}_{DM_R^{eff}} \mathrm{Corr}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{rat}}$ — естественная R-линейная версия категории эффективных мотивов Чжоу.[6]

2. Обозначим SmCor (следуя [55]) аддитивную категорию гладких соответствий Воеводского (соответственно, $\mathrm{Obj}\,\mathrm{SmCor} = \mathrm{SmVar}$; морфизмы в этой категории — алгебраические аналоги многозначных функций).

   Напомним также, что имеется сопряженность (например, см. замечание 1.3.2(3) в [1]) $L_R : D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R)) \rightleftarrows DM_R^{eff} : i_R$, и функтор i_R – полное вложение; здесь через $D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R))$ обозначена производная категория $R-$линейных пучков Нисневича с трансферами. Хорошо известно, что объекты в образе i_R характеризуются условием гомотопической инвариантности предпучков $H^i_{Nis}(-, C)$ для любого $i \in \mathbb{Z}$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

[6]Заметим, что категория DM_R^{eff} карубиева согласно предложению 1.6.8 книги [50]; следовательно, $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ также карубиева.

Предложение 3.3.2. *Пусть R' — коммутативная ассоциативная алгебра над R с единицей. Тогда естественный функтор расширения скаляров $\otimes_R R' : D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R)) \to D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R'))$ задает коммутативную диаграмму функторов*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{SmCor} & \xrightarrow{\mathcal{M}_R} & DM_R^{eff} & \xrightarrow{i_R} & D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R)) & \xrightarrow{L_R} & DM_R^{eff} \\ \downarrow{=} & & \downarrow{-\otimes_R^{mot} R'} & & \downarrow{-\otimes_R R'} & & \downarrow{\otimes_R^{mot} R'} \\ \mathrm{SmCor} & \xrightarrow{\mathcal{M}_{R'}} & DM_{R'}^{eff} & \xrightarrow{i_{R'}} & D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R')) & \xrightarrow{L_{R'}} & DM_{R'}^{eff} \end{array} \quad (3)$$

Доказательство. Существование (коммутативного) правого квадрата в нашей диаграмме очевидно.

Напомним, что мотивные комплексы характеризуются условием гомотопической инвариантности предпучков $H^i_{Nis}(-, C)$ (см. замечание 3.3.1(2)). Применив этот факт в сочетании с теоремой 22.3 книги [47] (которая говорит, что пучкование по Нисневичу сохраняет гомотопическую инвариантность предпучков с трансферами) получаем, что функтор $-\otimes_R R'$ переводит R-линейные мотивные комплексы в (R'-линейные) мотивные комплексы. Таким образом, из [27, Proposition 1.1.1(III)] (см. также [27, Remark 1.3.3(3)] и [50, §9]) мы легко получаем коммутативность среднего квадрата диаграммы.

Остается заметить, что коммутативность левого квадрата диаграммы немедленно следует из коммутативности диаграммы, которая получается из нашей выкидыванием второго столбца (и замены проходящих через него горизонтальных стрелок на их попарные композиции). $\square$

Напомним, что весовая структура Чжоу $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ получается из определения 2.2.7 при $s = 0$, см. также замечание 2.2.9(2).

Докажем важную теорему о сравнении весовых структур.

Теорема 3.3.3. 1. $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff} \subset \underline{Hw}_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$.

2. Пусть R — $\mathbb{Z}[1/p]$-алгебра. Тогда весовая структура $w_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ также порождается множеством $\mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar})$.

3. Функтор $-\otimes_R^{mot} R'$ является весо-точным (относительно весовых структур $w_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ и $w_{\underline{\mathrm{Chow}}_{R'}^{eff}}$).

Доказательство. 1. Так как категория $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ Каруби-замкнута в DM_R^{eff}, достаточно доказать, что $\mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar}) \subset DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}=0}$.

Мы уже отметили, что $\mathcal{M}_R(\mathrm{SmVar}) \subset DM^{eff}_R{}_{w_{\mathrm{Chow}} \le 0}$. Таким образом, остается проверить, что $\mathcal{M}_R(\mathrm{SmVar}) \perp \mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar})[i]$ для всех $i > 0$. Это немедленно следует из замечания 3.3.1(1).

2. Согласно предложению 2.2.5(3), достаточно проверить, что

$$(\cup_{i<0}\mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar})[i])^{\perp} = (\cup_{i<0}\mathcal{M}_R(\mathrm{SmVar})[i])^{\perp}.$$

Очевидно, правый класс содержится в левом. Для проверки обратного включения достаточно показать для каждого многообразия $X \in \mathrm{SmVar}$ что $\mathcal{M}_R(X)$ лежит в оболочке множества $\cup_{i\le 0}\mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar})[i]$. Из коммутативности левого квадрата в диаграмме (3) следует, что этот факт достаточно проверить для случая $R = \mathbb{Z}[1/p]$ (напомним, что мы считаем $\mathbb{Z}[1/p]$ равным кольцу $\mathbb{Z}$ в случае $p = 0$). В этом случае достаточно применить теорему 2.2.1(3) и предложение 1.3.2(iii) статьи [20].[7]

3. Из предложения 2.2.6(2) немедленно следует, что функтор $-\otimes^{mot}_R R'$ весо-точен слева.

Для того, чтобы проверить весо-точность $-\otimes^{mot}_R R'$ справа, нужно показать, что если мотивный комплекс C удовлетворяет условию $H^i_{Nis}(X, C) = \{0\}$ для всех $X \in \mathrm{SmVar}$ и $i < 0$, то этим свойством также обладает комплекс $C \otimes^{mot}_R R' \in \mathrm{Obj}\, D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R'))$ (см. предложение 3.3.2). Очевидно, для проверки этого условия достаточно рассмотреть $C\otimes^{mot}_R R'$ как объект $D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R))$ (таким образом, мы здесь применяем к C забывающий функтор $F : D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R')) \to D(\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R))$, который сопряжен к $-\otimes_R R'$ справа). Отсюда, комплекс $F(C \otimes^{mot}_R R')$ можно вычислить, тензорно домножив C на плоскую R-модульную резольвенту R'; так как последняя сконцентрирована в неположительных степенях, это дает искомый результат (ср. [47, Definition 14.2, §8]).[8]

□

Замечание 3.3.4. 1. Так как $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \subset \underline{Hw}_{\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R}$, то подкатегория $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R$ *связна* в DM^{eff}_R, т.е., $\mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \perp \mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R[i]$ для всех $i > 0$. Так как категория $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R$ карубиева, следствие 2.1.2 статьи [32] дает существование и единственность весовой структуры w на $\langle \mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R\rangle$, для которой $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \subset \underline{Hw}$; кроме того, $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R = \underline{Hw}$, класс $\langle \mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R\rangle_{w\le 0}$

[7] В этой статье предполагалось, что $p > 0$, однако всеми рассуждениями можно также воспользоваться в случае $p = 0$. Кроме того, в случае $p = 0$ можно применить теорему 6.2.1(1) статьи [17].

[8] Разумеется, мы можем считать, что комплекс C имеет нулевые члены в положительных степенях, что дает возможность пользоваться результатами этой книги. Кроме того, это вычисление также нетрудно выполнить, пользуясь альтернативными описаниями DM^{eff}_R.

совпадает с оболочкой $\cup_{i\le 0}\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$, а класс $\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle_{w\ge 0}$ равен оболочке $\cup_{i\ge 0}\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$.

В ситуациях, рассмотренных в статьях [18] и [20], известно, что $\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle$ совпадает со всей подкатегорией компактных объектов $DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}}$ категории DM_R^{eff} (то есть, категорией *эффективных геометрических мотивов*). Соответственно, описанная нами весовая структура w была названа весовой структурой Чжоу.

2. Заметим теперь, что для каждой весовой структуры $(\underline{C},w)$ класс $\underline{C}_{w\le 0}$ замкнут относительно копроизведений, существующих в $\underline{C}$. Так как w^{eff}_{Chow} порождена некоторым множеством компактных объектов DM_R^{eff}, класс $DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\ge 0}$ также замкнут относительно DM_R^{eff}-копроизведений.

Далее, рассмотрим локализующую подкатегорию $DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ категории DM_R^{eff}, порожденную $\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$, и весовую структуру $w'_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$, порожденную $\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ (заметим, что мы можем считать этот класс множеством и применить предложение 2.2.6(1)) в категории $DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$. Легко видеть, что вложение $\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle\to DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ весо-точно относительно весовых структур w и $w'_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$. Кроме того, функтор вложения $DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}\to DM_R^{eff}$ также весо-точен (относительно весовых структур $w'_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ и w^{eff}_{Chow}) согласно следствию 2.3.1(1) статьи [29].

Применив предложение 2.2.5(3), из этих утверждений легко получить, что $\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle_{w\le 0}=DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\le 0}\cap\operatorname{Obj}\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle$, $\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle_{w\ge 0}$ $=DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\ge 0}\cap\operatorname{Obj}\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle$, $DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}{}_{w'_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}\le 0}=DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\le 0}$ $\cap\operatorname{Obj}DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$, а $DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}{}_{w'_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}\ge 0}=DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\ge 0}\cap\operatorname{Obj}DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$ (см. [29, Proposition 1.2.5(1)]).

Доказанные результаты показывают, что w^{eff}_{Chow} "близко связана" с весовыми структурами, "порожденными" (в соответствующих смыслах) мотивами Чжоу; поэтому мы и называем w^{eff}_{Chow} весовой структурой Чжоу. В частности, для того, чтобы доказать равенство $w^{eff}_{\mathrm{Chow}}=w'_{\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}$, достаточно проверить, что $DM_R^{eff\,\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}}=DM_R^{eff}$; это предположение равносильно тому, что $\langle\operatorname{Obj}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\rangle=DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}}$.

3. Применив следствие 2.2.18(1) в сочетании с предложением 2.2.5(3) легко доказать следующую "теорему о сокращении" для w^{eff}_{Chow}: $DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\le 0}\cap$ $\operatorname{Obj}(DM_R^{eff}\langle 1\rangle)=DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\le 0}\langle 1\rangle$ и $DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\ge 0}\cap\operatorname{Obj}(DM_R^{eff}\langle 1\rangle)=$ $DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}\ge 0}\langle 1\rangle$; следовательно, пересечение $DM_R^{eff}{}_{w^{eff}_{\mathrm{Chow}}=0}\cap\operatorname{Obj}(DM_R^{eff}\langle 1\rangle)$

равно $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff}=0}\langle 1\rangle$.[9]

4. Основные недостатки весовой структуры w_{Chow}^{eff} (для произвольного R и $p>0$) в том, что мы не можем явно описать ее ядро, и не знаем, можно ли эту весовую структуру "ограничить" на подкатегорию $DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}$.

Напомним также, что для каждого функтора H из DM_R^{eff} в абелеву категорию весовая структура w_{Chow}^{eff} задает на его значениях некоторую фильтрацию (см. [18, Proposition 2.1.2]), которую можно назвать Чжоу-весовой (как объясняется в [18, Remark 2.4.3] и [27, Remark 2.4.5], Чжоу-весовые фильтрации широко обобщают весовые фильтрации Делиня на сингулярных и этальных когомологиях многообразий); эти фильтрации функториальны (на DM_R^{eff}). Таким образом, определенная нами версия весовой структуры Чжоу задает интересные весовые фильтрации для произвольного R (в частности, мы можем рассмотреть ее для "p-адических" функторов). Этот и связанные вопросы будут детально изучаться далее в главе 4.

Если функтор H является гомологическим или когомологическим, построенная в [18, §2.3–2.4] теория *весовых спектральных последовательностей* позволяет связать (ко)гомологии произвольных мотивных комплексов с (ко)гомологиями объектов ядра w_{Chow}^{eff}. Перечисленные выше недостатки w_{Chow}^{eff} затрудняют применение этого результата; однако см. предложение 3.3.6(1) ниже.

5. Пункт 2 теоремы 3.3.3 — единственное до сих пор встретившееся утверждение в диссертации, доказательство которого опирается на некоторые утверждения о разрешении особенностей k-многообразий; отметим, что эти утверждения были ключевыми для соответствующих результатов статей [18] и [20]. Это наводит на мысль о том, что методы данной работы также применимы к некоторым категориям относительных мотивов (над базовой схемой, отличной от спектра поля). Напомним также, что компактно порожденная версия весовой структуры Чжоу нашла интересные применения к т.н. относительным K-мотивам в параграфе 2.3 статьи [28].

Докажем некоторые утверждения, конкретизирующие веса мотивов многообразий. Нам понадобится следующий классический результат.

---

[9]Заметим, что классы $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff}\geq 0}\cap \mathrm{Obj}(DM_R^{eff}\langle 1\rangle)$ и $DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff}\geq 0}\cap \mathrm{Obj}(DM_R^{eff}\langle 1\rangle)$ дают на категории $DM_R^{eff}\langle 1\rangle$ весовую структуру, "компоненты" которой содержат соответствующие компоненты весовой структуры $(DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff}\leq 0}\langle 1\rangle, DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff}\geq 0}\langle 1\rangle)$; после этого достаточно применить [18, Lemma 1.3.8].

Лемма 3.3.5. Пусть $Z \in \mathrm{SmVar}$ — эквикоразмерное замкнутое подмногообразие коразмерности n в гладком многообразии X (т.е., Z имеет покомпонетно коразмерность n в X), $n \geq 0$. Тогда существует выделенный *треугольник Гизина*

$$\mathcal{M}_R(X \setminus Z) \to \mathcal{M}_R(X) \to \mathcal{M}_R(Z)\langle n \rangle \to \mathcal{M}_R(X \setminus Z)[1]$$

в DM_R^{eff}.

Доказательство. См. предложение 6.3.1 статьи [16].

□

Предложение 3.3.6. *1. Пусть многообразие U можно представить в виде $X \setminus \cup_{i=1}^n Z_i$, где X, все Z_i, и пересечения всех их наборов — гладкие собственные k-многообразия, и пересение любого набора из более чем m различных Z_i пусто (для некоторых $m \leq n \in \mathbb{Z}$).*

Тогда мотив $\mathcal{M}_R(U)$ принадлежит оболочке $\cup_{i=0}^m \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$, а значит, принадлежит $(\operatorname{Obj}(\langle \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff} \rangle)) \cap DM_R^{eff}{}_{[0,m]}$.

2. Пусть $f : U \to V$ — плотное открытое вложение, где $U, V \in$ SmVar. Тогда $\operatorname{Cone}(\mathcal{M}_R(f)) \in DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff} \leq 0}$.

Доказательство. 1. Так как $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff} \subset \underline{Hw}_{\mathrm{Chow}_R^{eff}}$, и класс $DM_R^{eff}{}_{[0,m]} = DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff} \geq 0} \cap DM_R^{eff}{}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff} \leq m}$ замкнуто относительно расширений (и ретракций), достаточно доказать, что мотив $\mathcal{M}_R(U)$ принадлежит оболочке $\cup_{i=0}^m \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$. Докажем это утверждение индукцией по n. В случае $n = 1$ оно очевидно.

Предположим теперь, что наше утверждение выполнено для всех $n' < n$. Представим U как $(X \setminus \cup_{i=2}^n Z_i) \setminus (Z_1 \setminus \cup_{i=2}^n Z_i)$. Обозначим многообразие $X \setminus \cup_{i=2}^n Z_i$ через X', а компоненты связности многообразия $Z_1 \setminus \cup_{i=2}^n Z_i$ через Y_j (считаем, что $1 \leq j \leq l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$).

Согласно нашему индукционному предположению, мотив $\mathcal{M}_R(X')$ принадлежит оболочке $\cup_{i=0}^m \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$, а все $\mathcal{M}_R(Y_j)$ принадлежат оболочке $\cup_{i=0}^{m-1} \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$. Обозначим коразмерности многообразий Y_j в X через c_j. Так как $\operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle c_j \rangle \subset \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$, получаем, что все $M_R(Y_j)\langle c_j \rangle$ также принадлежат оболочке $\cup_{i=0}^{m-1} \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$.

Далее, выделенный треугольник Гизина (см. лемму 3.3.5) дает выделенные треугольники

$$\mathcal{M}_R(Y_{r+1})\langle c_{r+1} \rangle[-1] \to \mathcal{M}_R(X' \setminus (\sqcup_{j=1}^{r+1}) Y_j) \to \mathcal{M}_R(X' \setminus (\sqcup_{j=1}^{r}) Y_j) \to \mathcal{M}_R(Y_{r+1})\langle c_{r+1} \rangle$$

для всех r от 0 до $l-1$. Так как $U = X' \setminus (\sqcup_{j=1}^{l}) Y_j$, из этих треугольников получаем искомое.

2. Очевидно, существует последовательность открытых вложений $U_0 = U \subset U_1 \subset \cdots \subset U_m = V$ (для $m > 0$), для которых многообразия $U_{i+1} \backslash U_i$ регулярны и эквикоразмерны в U_{i+1} для всех i от 0 до $m-1$.

Треугольники Гизина в сочетании с октаэдральной аксиомой триангулированных категорий дают выделенные треугольники

$$\mathcal{M}_R(U_{i+1} \backslash U_i)\langle c_i \rangle \to \mathrm{Cone}(\mathcal{M}_R(U_i) \to \mathcal{M}_R(V)) \to \mathrm{Cone}(\mathcal{M}_R(U_{i+1} \to \mathcal{M}_R(V))$$

для всех i от 0 до $m-1$, где c_i — коразмерность $U_{i+1} \backslash U_i$ в U_{i+1}. Таким образом, мотив $\mathrm{Cone}(\mathcal{M}_R(f))$ лежит в оболочке (всех) $\mathcal{M}_R(U_{i+1} \backslash U_i)\langle c_i \rangle$. Так как класс ${DM_R^{eff}}_{w_{\mathrm{Chow}}^{eff} \le 0}$ замкнут относительно расширений, остается воспользоваться следствием 2.2.18(1). □

3.3.2 "Геометризация" w_{Chow}^{eff} в бирациональной категории

Важнейшим отличием w_R^{bir} от w_{Chow}^{eff} является то обстоятельство, что она ограничивается на подкатегорию компактных объектов в DM_R^{bir} (см. соотв. обозначения в следствии 2.2.18(3) и §2.1.1).

Рассмотим аддитивную категорию $\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}$, состоящую из всех копроизведений объектов типа $R_{tr}(X)$ в категории $\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R)$ (конечно же, $\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}$ также является полной подкатегорией $\mathrm{PreSh}_{Nis}(\mathrm{SmCor}, R)$). Обозначим через $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ локализующую подкатегорию гомотопической категории комплексов $K(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$, порожденную $\mathrm{Obj}\,\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}$ (здесь мы рассматриваем объекты $\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}$ как одночленные комплексы; отметим, что в категории $K(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ существуют все малые произведения).

Предложение 3.3.7. *1. w_R^{bir} ограничивается на триангулированную подкатегорию компактных объектов $DM_{gm,R}^{bir}$.*

2. Категория DM_R^{bir} эквивалентна локализации категории $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ по локализующей подкатегории, порожденной конусами всех $\mathcal{M}_R(f)$, где $f : U \to X$ — плотное открытое вложение гладких многообразий над k.

3. Рассмотрим на категории $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$ "глупую" весовую структуру, порожденную $R_{tr}(\mathrm{SmVar})$ (см. замечание 2.2.2). Тогда на DM_R^{bir} существует весовая структура, для которой функтор локализации $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}) \to DM_R^{bir}$ весо-точен. Более того, эта весовая структура совпадает с w_R^{bir}.

Доказательство. 1.Действительно, из предложения 4.1.4(II) следует, что эта категория эквивалентна $\mathrm{Kar}(DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}/DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}\langle 1 \rangle)$, а существование на последней весовой структуры, порожденной подкатегорией $Chow_R^{bir}$, состоящей из ретрактов элементов $\mathcal{M}_R^{bir}(\mathrm{SmVar})$, было доказано в [31, §5.2]. Ядро этого ограничения равно $Chow_R^{bir}$, поэтому из [29, Corollary 2.3.1(1)] (см. также [18, Theorem 4.5.2]) получаем, что ядро w_R^{bir} состоит из всех ретрактов копроизведений объектов $\mathcal{M}_R^{bir}(\mathrm{SmVar})$.

2. Получается с помощью рассуждений, абсолютно аналогичных [31, §5].

3. Достаточно применить теорему 4.3.1.4 статьи [31] и предложение 2.2.6(3). □

Замечание 3.3.8. Таким образом, каждый элемент $DM^{bir}_{R\ w_R^{bir}\le 0}$ (соотв., $DM^{bir}_{R\ w_R^{bir}\ge 0}$) является ретрактом объекта, имеющего прообраз в категории $K'(\mathrm{SmCor}_R^{\oplus})$, представленный $\mathrm{SmCor}_R^{\oplus}$-комплексом, который имеет только нулевые члены в отрицательных (соотв., в положительных) степенях (см. [29, Proposition 3.1.1(1)]).

4 Чжоу-весовые гомологии мотивов

Эта глава посвящена детальному исследованию теории Чжоу-весовых гомологий, введенных в статье [34]. Мы расширяем эту теорию на всю категорию мотивов Воеводского, а также доказываем различные утверждения о связи Чжоу-весовых и мотивных гомологий. Наконец, полученные результаты применяются к геометрическим мотивам.

4.1 Терминология и обозначения

Введем некоторые определения и обозначения, необходимые далее в работе.

Определение 4.1.1. Пусть $\underline{B}$ — аддитивная категория.

1. Будем называть категорию $\frac{\underline{B}}{\underline{H}}$ *фактором* $\underline{B}$ по своей полной аддитивной подкатегории $\underline{H}$ если $\mathrm{Obj}(\frac{\underline{B}}{\underline{H}}) = \mathrm{Obj}\,\underline{B}$ и $(\frac{\underline{B}}{\underline{H}})(X,Y) = \underline{B}(X,Y)/(\sum_{Z\in \mathrm{Obj}\,\underline{H}} \underline{B}(Z,Y)\circ \underline{B}(X,Z))$.

2. Будем обозначать через $K(\underline{B})$ гомотопическую категорию (когомологических) комплексов над $\underline{B}$. Мы будем писать $M = (M^i)$ если M^i — члены комплекса M.

3. Если $\underline{H}$ — подкатегория $\underline{C}$, то мы будем называть полную подкатегорию $\underline{C}$, объекты которой являются ретрактами копроизведений объектов из $\underline{H}$ в $\underline{C}$ *копродуктивной оболочкой* $\underline{H}$ (в $\underline{C}$); мы будем обозначать ее через $\underline{H}^{\widehat{\oplus}}$.

Напомним, что через k обозначается совершенное поле характеристики p, и мы полагаем $\mathbb{Z}[1/p] = \mathbb{Z}$, если $p = 0$.

- Если $a \le b \in \mathbb{Z}$, то будем обозначать через $[a, b]$ (соотв. $[a, +\infty)$, соотв. $[a, +\infty]$) множество $\{i \in \mathbb{Z} : \ a \le i \le b\}$ (соотв. $\{i \in \mathbb{Z} : \ i \ge a\}$, соотв. $[a, +\infty) \cup \{+\infty\} \subset \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$). Таким образом, когда мы пишем $i \ge c$ (где $c \in \mathbb{Z}$), мы всегда считаем i целым.

- Через R обозначена фиксированная унитальная коммутативная и ассоциативная $\mathbb{Z}[1/p]$-алгебра.

Нам также понадобятся следующие определения, связанные с мотивами.

Определение 4.1.2. Пусть K — расширение k, а M — объект DM_R^{eff}.

1. Будем обозначать через K^{perf} совершенное замыкание поля K.

2. Мы будем обозначать через M_K результат применения к M функтора замены основного поля $DM_R^{eff} \to DM_R^{eff}(K^{perf})$; см. приложение 4.4 ниже.

3. Для $l, j \in \mathbb{Z}$ определим $\mathfrak{Chow}_j(M_K, R, l)$ (соотв. $\mathfrak{Chow}_j(M_K, R)$) как группу $DM_R(K^{perf})(R\langle j\rangle[l], M_K)$ (соотв. $DM_R(K^{perf})(R\langle j\rangle, M_L)$).[10]

Приведем следующее утверждение, крайне полезное для нас далее.

Предложение 4.1.3. *Пусть $j, l \in \mathbb{Z}$, $r \ge 0$, и $j - r + l < 0$. Тогда $\mathfrak{Chow}_j(N_K\langle r\rangle, R, l) = \{0\}$ для любого $N \in \operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ и любого расширения K/k.*

Доказательство. Это утверждение легко следует из известных свойств комплексов циклов Блоха-Суслина и предложения 4.1(1) ниже; см. также предложение 2.3.3(2) статьи [34]. □

4.1.1 Дополнительные утверждения о существовании весовых структур и их свойствах

Приведем следующее важное утверждение.

Предложение 4.1.4. *I. Пусть $\underline{B}$ — связная аддитивная подкатегория приведенной (триангулированной) категории $\underline{C}$, и объекты $\underline{B}$ компактны в $\underline{C}$.*

[10] В [34] группа $DM_R(K^{perf})(R\langle j\rangle[l], M_L)$ обозначается как $h_{2j+l,j}(M_K, R)$.

1. *Тогда существует такая весовая структура w на $\underline{C}$, что $\underline{C}_{w\le 0}$ (соотв. $\underline{C}_{w\ge 0}$) — наименьший подкласс в $\operatorname{Obj}\underline{C}$, который замкнут относительно копроизведений, расширений, и содержит $\operatorname{Obj}\underline{B}[i]$ для $i \le 0$ (соотв. для $i \ge 0$). Кроме того, $\underline{Hw} = \underline{B}^{\widehat{\oplus}}$ (см. определение 4.1.1(3)). В таком случае мы будем говорить, что w чисто компактно порождена подкатегорией $\underline{B}$.*

   Далее, если объекты $\underline{B}$ компактно порождают $\underline{C}$ как свою локализующую подкатегорию, то w невырождена слева.

   II. Кроме того, пусть $\underline{B}$ существенно мала и порождает $\underline{C}$ как собственную локализующую подкатегорию, и $\underline{H}$ — аддитивная подкатегория $\underline{B}$. Обозначим через $\underline{D}$ локализующую подкатегорию $\underline{C}$, порожденную $\underline{H}$.

   Тогда выполнены следующие утверждения.

2. *Локализация Вердье $\underline{C}/\underline{D}$ существует; функтор локализации $\pi : \underline{C} \to \underline{C}/\underline{D}$ сохраняет копроизведения и компактные объекты. Кроме того, категория $\underline{C}/\underline{D}$ порождена $\pi(\operatorname{Obj}\underline{B})$ как своя собственная локализующая подкатегория, и соответствующий точный функтор $\langle \underline{B}\rangle_{\underline{C}}/\langle \underline{H}\rangle_{\underline{C}} \to \underline{C}/\underline{D}$ (где $\langle \underline{B}\rangle_{\underline{C}}/\langle \underline{H}\rangle_{\underline{C}}$ — локализация Вердье соответствующих локально малых категорий) — полное вложение.*

3. *$\underline{C}/\underline{D}$ оснащена такой весовой структурой $w_{\underline{C}/\underline{D}}$, что функтор π весо-точен. К тому же, $w_{\underline{C}/\underline{D}}$ чисто компактно порождена своей полной подкатегорией, соответствующей $\underline{B}$, а функтор $\underline{Hw} \to \underline{Hw}_{\underline{C}/\underline{D}}$ раскладывается как композиция $\underline{Hw} \to \underline{Hw}/\underline{H}^{\widehat{\oplus}}$ (см. определение 4.1.1(1)) и полного вложения.*

   III. Пусть $\underline{E} \subset \underline{C}$ — такая триангулированная подкатегория $\underline{C}$, что w ограничивается до весовой структуры $w_{\underline{E}}$ на $\underline{E}$. Пусть $M \in \underline{C}_{w\ge 0}$, $N \in \underline{C}_{w=0}$, и предположим, что морфизм $f \in \underline{C}(N, M)$ равен 0 в локализации $\underline{C}/\underline{E}$.

   Тогда f пропускается через некоторый объект категории $\underline{Hw}_{\underline{E}}$.

Доказательство. I.1.Данные утверждения легко следуют из следствия 2.3.1 и леммы 2.3.3 статьи [29]; ср. теорему 3.2.2(2,3) из [22].
II.2,3. Приведенные утверждения доказаны в [31] (см. предложение 4.3.1.3(III) и теорему 4.3.1.4 этой статьи).
III. Данное утверждение приведено в следствии 1.4.6(2) статьи [34]. □

4.1.2 О весовых комплексах, чистых функторах, и весовых спектральных последовательностях

Напомним понятие так называемого функтора "сильного" *весового комплекса.* Заметим, что эта версия теории менее общая, чем "слабая" версия, используемая в статье [34]. Последняя достаточна для наших целей (и в некотором смысле более удобна), но требует несколько нестандартных определений.

Предложение 4.1.5. *Предположим, что $\underline{C}$ обладает ∞-оснащением (см. соответствующие ссылки в параграфе 1.1 статьи [54]) и удовлетворяет условиям предложения 4.1.4(I). Тогда существует точный функтор $t^{st} : \underline{C} \to K(\underline{Hw})$, $M \mapsto (M^i)$, для которого выполнено следующее:*

1. *Композиция вложения $\underline{Hw} \to \underline{C}$ с t^{st} изоморфна очевидному вложению $\underline{Hw} \to K(\underline{Hw})$.*

2. *Пусть $\underline{C}'$ — триангулированная категория, обладающая ∞-оснащением и чисто компактно порожденной весовой структурой w'; пусть $F : \underline{C} \to \underline{C}'$ — весо-точный функтор, поднимающийся на ∞-оснащение. Тогда композиция $t'^{st} \circ F$ изоморфна $K(\underline{HF}) \circ t^{st}$, где t'^{st} — функтор весового комплекса, соответствующий w', а функтор $K(\underline{HF}) : K(\underline{Hw}) \to K(\underline{Hw}')$ — очевидная $K(-)$-версия ограничения $\underline{HF} : \underline{Hw} \to \underline{Hw}'$ функтора F.*

3. *Пусть $i \in \mathbb{Z}$; зафиксируем весовую срезку $w_{\le i}N$ объекта $N \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ (см. замечание 2.2.4). Тогда существуют единственные морфизмы $j_i : w_{\le i}N \to w_{\le i+1}N$ (для $i \in \mathbb{Z}$), делающие треугольники $w_{\le i}N \to w_{\le i+1}N \to N$ коммутативными. К тому же, объекты $\tilde{N}^{-1-i} = \operatorname{Cone}(j_i)[-1-i]$ принадлежат $\underline{C}_{w=0}$, и существует комплекс $\tilde{t}(N)$, члены которого — $\tilde{N}^i$ (в соответствующих степенях), и $\tilde{t}(N) \cong t^{st}(N)$ (в категории $K(\underline{Hw})$).*

   Далее, если $l \le m \in \mathbb{Z}$ и $w_{\le l}N = 0$, то объект $w_{\le m}N$ принадлежит замыканию относительно расширений множества $\{\tilde{N}^j[-j],\ -m \le j \le -l\}$.

4. *Если $M \in \underline{C}_{w\le n}$ (соотв. $M \in \underline{C}_{w\ge n}$), то комплекс $t^{st}(M)$ принадлежит классу $K(\underline{Hw})_{w_{st}\le n}$ (соотв. $K(\underline{Hw})_{w_{st}\ge n}$). Напомним, что w_{st}– глупая весовая структура из замечания 2.2.2.*

5. *Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивный ковариантный функтор из $\underline{Hw}$ в абелеву категорию $\underline{A}$. Тогда функтор $H^{\mathcal{A}}$, переводящий $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ в нулевые гомологии комплекса $\mathcal{A}(M^i)$, гомологический. Кроме того, если*

$\mathcal{A}=\mathcal{A}'\circ \underline{HF}$ для некоторого аддитивного функтора $\mathcal{A}':\underline{Hw}'\to\underline{A}$ (в условиях пункта 2), то $H^{\mathcal{A}}=H^{\mathcal{A}'}\circ F$.

6. *Если $\underline{A}$ — AB4 абелева категория, то описанный выше функтор $H^{\mathcal{A}}$ — единственный с точностью до изоморфизма гомологический функтор, который сохраняет копроизведения, и ограничение которого на категорию $\underline{B}$ (см. предложение 4.1.4(I)) равно $\mathcal{A}$, а ограничения на $\underline{B}[i]$ для $i\neq 0$ равны 0.*

Доказательство. Пункты 1 и 2 легко следуют из замечания 3.6 статьи [54], а первое утверждение пункта 5 очевидно.

Далее, напомним, что функтор t^{st} "совместим" со *слабым* функтором весового комплекса как в [22]; см. замечание 4.1.6(2) ниже. Следовательно, применяя предложение 1.3.4(4,6) и лемму 1.3.2(3) упомянутой статьи, получаем пункт 3

Аналогично, пункт 4 следует из предложения 1.3.4(10) той же статьи, а второе утверждение пункта 5 — из предложения 1.3.4(12) (см. также теорему 2.1.2 там же). Дальше, пункт 6 следует из предложения 2.3.2(6) той же статьи; тут достаточно заметить, что функторы $\underline{Hw}\to\underline{A}$, сохраняющие малые копроизведения, взаимно однозначно соответствуют аддитивным функторам $\underline{B}\to\underline{A}$ (поскольку $\underline{Hw}=\underline{B}^{\widehat{\oplus}}$). □

Замечание 4.1.6. 1. Термин "весовой комплекс" был впервые использован в статье [41]; однако, область определения функтора весового комплекса, рассмотренного в этой статье, не была триангулированной.

2. В предложении 1.3.4 статьи [22] некоторый (канонический) функтор весового комплекса определялся как функтор из категории, канонически эквивалентной $\underline{C}$, в "слабую" категорию $K_{\mathfrak{w}}(\underline{Hw})$. Наше доказательство выше основано на следующих соображениях.

Во-первых, существует канонический аддитивный функтор $K(\underline{Hw})\to K_{\mathfrak{w}}(\underline{Hw})$, и функтор слабого весового комплекса пропускается через него; см замечания 1.3.5(3) и 3.6 статьи [54].

Во-вторых, функторы типа $H^{\mathcal{A}}$ из части 5 нашего предложения (названные *w-чистыми* в [22]; эта терминология разъяснена в замечании 2.1.3(3) там же) пропускаются через функтор слабого весового комплекса; см. теорему 2.1.2 статьи [22]. Кроме того, свойства чистых функторов не зависят от какого-либо оснащения (как в предложении). В частности, легко видеть, что существование ∞-подъемов для F необязательно для второй части предложения 4.1.5(5).

С другой стороны, вероятно, возможно доказать некоторые упомянутые выше утверждения с помощью аргументов, вполне аналогичных упомянутым в замечании 3.6 из [54].

Предложение 4.1.7. *Пусть выполнены условия предложения 4.1.5, и H — гомологический функтор $\underline{C} \to \underline{A}$. Тогда для любого $M \in \operatorname{Obj} \underline{C}$ существует спектральная последовательность $T = T_w(H, M)$ с $E_2^{pq}(T) = H_{-p}^{G_{-q}}(M)$, где G_{-q} — ограничение функтора $H_{-q} = H \circ [q]$ на $\underline{Hw}$ (и соотв., $H_{-p}^{G_{-q}} = H^{G_{-q}} \circ [p]$; также см. предложение 4.1.5(5).*

Кроме того, $T_w(H, M)$ функториальна как по M, так и по H относительно композиции H с точными функторами между абелевыми категориями. $T_w(H, M)$ сходится к $H_{-p-q}(M)$ если M ограничен снизу и H обнуляет $\underline{C}_{w \geq i}$ для достаточно больших i.

Доказательство. Все утверждения легко следует из теоремы 2.3.2 статьи [18] вместе с предложением 4.1.5(5); см. также замечание 4.1.6(2). □

4.1.3 Снова о весовых структурах Чжоу на рассматриваемых категориях

Используя приведенные выше результаты, изучим весовые структуры Чжоу на DM_R^{eff} и DM_R^{r-bir}.

Предложение 4.1.8. *Пусть $r \geq -1$ и $M \in \operatorname{Obj} DM_R^{eff}$.*

1. *Тогда категории DM_R^{eff} и DM_R^{r-bir} допускают ∞-оснащения.*

2. *Существует невырожденная слева весовая структура w_{Chow} на DM_R^{eff}, которая чисто компактно порождена с помощью $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ в смысле предложения 4.1.4(I); таким образом, $DM_{R,w_{Chow} \leq 0}^{eff}$ (соотв. $DM_{R,w_{Chow} \geq 0}^{eff}$) — наименьший подкласс $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}$, замкнутый относительно копроизведений, расширений, и содержащий $\operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}[i]$ при $i \leq 0$ (соотв., при $i \geq 0$).*

   Соответственно, $\underline{Hw}_{\mathrm{Chow}} = \underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff \widehat{\oplus}}$.

3. *Функтор $-\langle r+1 \rangle : DM_R^{eff} \to DM_R^{eff}$ весо-точен по отношению к w_{Chow}.*

   Кроме того, этот функтор "строго" весо-точен, т.е., если $M\langle r+1\rangle$ принадлежит $DM_{R,w_{Chow} \leq 0}^{eff}$ (соотв., $DM_{R,w_{Chow} \geq 0}^{eff}$), то $M \in DM_{R,w_{Chow} \leq 0}^{eff}$ (соотв., $M \in DM_{R,w_{Chow} \geq 0}^{eff}$).

4. *Пусть для некоторого $i \in \mathbb{Z}$ существуют варианты $w_{Chow \leq -i} M$ и $w_{Chow \leq -i-1} M$, принадлежащие $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}\langle r+1 \rangle$. Тогда соответствующий объект $\tilde{M}^i = Cone(j_{-i-1})$, упомянутый в предложении 4.1.5(3), принадлежит ${DM_R^{eff}}_{w_{Chow}=0}\langle r+1 \rangle$.*

5. *Локализация DM_R^{eff} по подкатегории $DM_R^{eff}\langle r+1\rangle$ удовлетворяет условиям предложения 4.1.4(II), если мы положим $\underline{H} = \underline{\text{Chow}}_R^{eff}\langle r+1\rangle$. Следовательно, существует такая чисто компактно порожденная весовая структура w^r_{Chow} на DM_R^{r-bir}, что функтор локализации $p_r : DM_R^{eff} \to DM_R^r$ (см. определение 4.1.2(4)) весо-точен. Кроме того, p_r сохраняет копроизведения и компактность объектов.*

   Далее, если $-1 \leq s \leq r$, то очевидный функтор локализации $l_r^s : DM_R^r \to DM_R^s$ также весо-точен и сохраняет компактность и копроизведения.

6. *Если K — расширение поля k, то функтор замены основного поля $-_K : DM_R^{eff} \to DM_R^{eff}(K^{perf})$ (см. определение 4.1.2(2) и предложение 4.1 ниже) весо-точен и сохраняет копроизведения.*

7. *Если R не имеет кручения, k — поле бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем, то весовая структура w_{Chow} вырождена справа.*

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Далее, подкатегория $\underline{\text{Chow}}_R^{eff}$ компактно порождает DM_R^{eff}. Следовательно, для доказательства утверждения 2 достаточно напомнить, что $\underline{\text{Chow}}_R^{eff}$ связна в DM_R^{eff} (см. замечание 3.2.2(1) или следствие 6.7.3 статьи [16]) и применить предложение 4.1.4(I).

Теперь напомним, что функтор $-\langle r+1\rangle$ сохраняет копроизведения и переводит $\underline{\text{Chow}}_R^{eff}$ в себя.

Используя явное описание w_{Chow} мы получаем, что $-\langle r+1\rangle$ весо-точен. Кроме того, если $M\langle r+1\rangle \in DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}\leq 0}$ (соотв., $M\langle r+1\rangle \in DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}\geq 0}$), то из данной весо-точности немедленно получаем, что $M\langle r+1\rangle \perp DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}\geq 1}\langle r+1\rangle$ (соотв., $DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}\leq -1}\langle r+1\rangle \perp M$). Применяя предложение 2.2.5(3) и теорему сокращения (которая утверждает, что функтор $-\langle r+1\rangle$ вполне строг), получаем требуемое.

4. Согласно предложению 4.1.5(3), мотив $\tilde{M}^i$ принадлежит $DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}=0}$. Поскольку $\tilde{M}^i$ также принадлежит $\operatorname{Obj} DM_R^{eff}\langle r+1\rangle$, предыдущее утверждение дает $\tilde{M}^i = N\langle r+1\rangle$, где N принадлежит $DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}\leq 0}\cap DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}\geq 0} = DM_R^{eff}{}_{w_{\text{Chow}}=0}$.

Поскольку $\underline{\text{Chow}}_R^{eff}\langle r\rangle \subset \underline{\text{Chow}}_R^{eff}$, мы также получаем, что первая часть пункта 5 следует из предложения 4.1.4(II). Далее, чтобы получить вторую часть утверждения, применим предложение 4.1.4(II) для категорий $\underline{B}$ и $\underline{H}$, чьи объекты суть $\mathcal{M}_R^{r-bir}(\text{SmPrVar})$ и $p_r(\mathcal{M}_R(\text{SmPrVar})\langle s+1\rangle)$, соответственно.

6. Напомним, что для соответствующего морфизма $f : \operatorname{Spec} K^{perf} \to \operatorname{Spec} k$ функтор $-_K$ можно определить как ограничение на DM_R^{eff} функтора $f^* : DM_R \to DM_R(K^{perf})$; см. предложение 4.1(1) ниже.

Далее, функтор f^* сохраняет копроизведения, так как он сопряжен слева к некоторому функтору f_*, см. теорему 3.1 статьи [35], а также, определения 1.1.12 и 1.4.2 книги [36]. Следовательно, функтор $-_K$ также сохраняет копроизведения.

Далее, f^* переводит (эффективные) мотивы Чжоу над k в мотивы Чжоу над K^{perf} (см. предложение 4.1(1) ниже), а значит, снова применяя явное описание w_{Chow}, мы получаем, что функтор $-_K$ весо-точен.

Наконец, утверждение 7 — это предложение 3.2.6 статьи [22]. $\square$

Замечание 4.1.9. Разумеется, построенная весовая структура совпадает с весовой структурой Чжоу из раздела §3.3 при условии обращения характеристики основного поля k, см. замечание 3.2.2(1) и соответствующие обсуждения в §3.3. Обращение характеристики делает возможным приведенное выше описание сердцевины, необходимое нам в диссертации далее.

4.2 Чжоу-весовые гомологии мотивов: определение и основные свойства

Определение 4.2.1. 1. Пусть $i, l, j \in \mathbb{Z}$; K — расширение поля k.

Тогда мы будем обозначать через $\mathrm{CWH}^i_j(-_K, R, l)$ функтор $H^{\mathcal{A}} \circ [i]$, соответствующий весовой структуре w_{Chow} (см. предложение 4.1.8(2)) согласно предложению 4.1.5(5), где $\mathcal{A}$ — ограничение функтора $N \mapsto \mathfrak{Chow}_j(N_K, R, l)$ (см. определение 4.1.2(3)) на $\underline{Hw}_{\mathrm{Chow}}$. Иногда будем опускать R в этом обозначении. Кроме того, мы обычно будем писать $\mathrm{CWH}^i_j(M_K, R)$ вместо $\mathrm{CWH}^i_j(M_K, R, 0)$.

2. Мы будем использовать обозначение $DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$ для класса w_{Chow}−ограниченных снизу мотивов (см. определение 2.2.3(4)).[11]

3. Нам потребуются следующие соглашения : функтор $l^{+\infty} = l^{+\infty}_{+\infty}$ — тождественный функтор на категории DM_R^{eff}, $l^j_{+\infty} = p_j$, $w^{+\infty}_{\mathrm{Chow}} = w_{\mathrm{Chow}}$, $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle +\infty \rangle = DM_R^{eff}\langle +\infty \rangle = \{0\}$, и.т.д.

Докажем некоторые свойства этих функторов.

Предложение 4.2.2. *Пусть i, l, j, K такие же, как в предыдущем определении, и $r \in [0, +\infty]$.*

[11] Легко видеть, что этот класс дает (полную) триангулированную подкатегорию DM_R^{eff}, но нам этот факт не понадобится.

1. Тогда $\mathrm{CWH}^i_j(-_K, R, l)$ *— гомологический функтор на* DM^{eff}_R*, сохраняющий копроизведения. Кроме того, этот функтор пропускается через функтор замены базы* $DM^{eff}_R \to DM^{eff}_R(K^{perf})$*.*

2. Пусть $r \geq j+l$*. Тогда функтор* $\mathrm{CWH}^0_j(-_K, R, l)$ *обнуляет* $DM^{eff}_R\langle r+1\rangle$*; таким образом, он индуцирует корректно определенный функтор* $DM^{r-bir}_R \to \underline{\mathrm{Ab}}$ *(см. определение 4.1.2(4)). Кроме того, этот функтор чист по отношению к весовой структуре* w^r_{Chow} *(см. предложение 4.1.8(5)).*

3. Для любого гладкого связного проективного многообразия P/k *функторы* $DM^{j-bir}_R(p_j(M_R(P)\langle j\rangle), -)$ *и* $\mathrm{CWH}^0_j(-_{k(P)}, R)$ *канонически изоморфны; заметим, что последний функтор корректно определен согласно предыдущему пункту.*

4. Пусть N *принадлежит* ${DM^{r-bir}_R}_{w^r_{Chow}\geq -n}$*. Тогда* $\mathrm{CWH}^i_j(N_K, l) = \{0\}$ *если или* $i > n$ *и* $j \leq r-l$*, или* $l < 0$*.*

5. Кроме того, если $m \in [0, r]$*, то следующие условия на* $N \in {DM^{r-bir}_R}_{w^r_{Chow}\geq -n}$ *равносильны.*

(a). $\mathrm{CWH}^i_j(N_K) = \{0\}$ *для любого* $0 \leq j \leq m$ *и любого поля функций* K/k*.*

(b). Объект $N_m = l^m_r(N)$ *принадлежит* ${DM^{m-bir}_R}_{w^m_{Chow}\geq 1-n}$*.*

(c). Существует срезка $w^r_{Chow\leq -n}N$*, принадлежащая* $p_r(\mathrm{Obj}\, DM_R\langle m+1\rangle)$*.*

6. Класс $DM^{eff}_{R, t^R_{hom}\geq 0}$ *равен наименьшему подклассу* $\mathrm{Obj}\, DM^{eff}_R$*, который замкнут относительно расширений, копроизведений и содержит* $\mathrm{Obj}\, \underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R(a)[a+b]$ *для любых* $a, b \geq 0$*. Кроме того, если* $i > j+l$*, то функтор* $\mathrm{CWH}^i_j(N_K, l) = \{0\}$ *обнуляет этот класс.*

Доказательство. 1. Все эти утверждения легко следуют из предложений 4.1.5(5, 6) и 4.1.8(6); достаточно лишь заметить, что функтор $\mathfrak{Chow}_j(-_K, R, l)$ сохраняет копроизведения, так как объект $R\langle j\rangle_{K^{perf}}$ категории $DM_R(K^{perf})$ компактен.

2. Для доказательства первого утверждения этого пункта мы должны проверить, что $\mathrm{CWH}^0_j(-_K, R, l) \circ \langle r+1\rangle = 0$. Напомним, что функтор $-\langle r+1\rangle : DM^{eff}_R \to DM^{eff}_R$ весо-точен относительно w_{Chow} по предложению 4.1.8(3); следовательно, предложение 4.1.5(5, 6) сводит утверждение к обнулению ограничения $\mathfrak{Chow}_j(M^s_K, R, l)$ на $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R\langle r+1\rangle$. Остается применить предложение 4.1.3.

Для доказательства второго утверждения применим предложение 4.1.5(6) еще раз. Поскольку функтор $DM^{eff}_R \to \underline{\mathrm{Ab}}$, индуцированный $\mathrm{CWH}^0_j(-_K, R, l)$, сохраняет копроизведения, достаточно заметить, что его ограничение на $\mathcal{M}^{r-bir}_R(\mathrm{SmPrVar})[s]$ для $s \neq 0$ зануляется, поскольку функтор $\mathrm{CWH}^0_j(-_K, R, l)$

чист относительно w_{Chow}; здесь мы применяем вышеупомянутые свойства функторов замены базы и мотивных гомологий.

3. Поскольку объект $p_j(\mathcal{M}_R(P)\langle j\rangle)$ компактен в DM_R^{j-bir} (см. предложение 4.1.4(II)), оба указанных функтора сохраняют копроизведения. Кроме того, они гомологичны, и функтор $\mathrm{CWH}_j^0(-_{k(P)}, R)$ чист по определению; следовательно, для получения требуемого изоморфизма, достаточно сравнить их ограничения на категории $p_j(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff})[i] \subset \mathrm{Obj}\, DM_R^{j-bir}$ при $i \in \mathbb{Z}$. Далее, напомним, что локализация $DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}/DM_{\mathrm{gm,R}}^{eff}\langle j+1\rangle$ вкладывается в DM_R^{j-bir} по предложению 4.1.4(II). Следовательно, искомое утверждение легко следует из предложения 2.2.5(6) статьи [34].

4. Разумеется, мы можем считать n равным 0.

По предложению 4.1.5(4), соответствующий весовой комплекс $t^{st}(N)$ гомотопически эквивалентен комплексу, сконцентрированному в неположительных степенях. Теперь вспомним, что функтор CWH_j^0 чист относительно w_{Chow}^r (см. определение 4.2.1(1) и пункт 2 этого предложения); применив утверждение о связи чистых функторов с весовыми комплексами, получаем, что $\mathrm{CWH}_j^i(N_K, l) = \{0\}$ для любого $i > 0$ (и соответствующих значений j).

Наконец, $\mathrm{CWH}_j^i(N_K, l) = \{0\}$ если $l < 0$, поскольку соответствующее ограничение $\mathcal{A}$ функтора $N \mapsto \mathfrak{Chow}_j(N_K, R, l)$ на $\underline{Hw}_{\mathrm{Chow}}$ равно нулю ввиду связности категории $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}(K^{perf})$.

5. Если $j < m$, то функтор $\mathrm{CWH}_j^i(-_K) = \{0\}$ пропускается через l_m^r по пункту 2; следовательно, пункт 4 дает импликацию (b) $\implies$ (a). Далее, условие (c) очевидно следует из условия (b) если $r = +\infty$, и следует из (b) если $r \in \mathbb{Z}$ согласно теореме 3.3.1 из [33] (см. замечание 3.3.2(1) в этой статье). К тому же, напомним, что функтор l_r^m весо-точен по предложению 4.1.8(5); следовательно, условие (b) следует из (c).

Осталось проверить, что (b) следует (a). Снова предположим, что $n = 0$.

Сперва положим $m < +\infty$. Тогда, разумеется, достаточно проверить следующее: из (a) следует, что если $-1 \le s < m$ и $l_r^s(N) \in DM_R^{s-bir}{}_{w_{Chow}^s \ge 1}$, то объект N_{s+1} принадлежит $DM_R^{s+1-bir}{}_{w_{Chow}^{s+1} \ge 1}$.

Выберем весовое разложение $w_{Chow \le 0}^{s+1} N_{s+1} \stackrel{g_{s+1}}{\to} N_{s+1} \to w_{Chow \ge 1}^{s+1} N_{s+1}$ объекта N_{s+1}, и применим локализацию $l_{s+1}^s : DM_R^{s+1-bir} \to DM_R^{s-bir}$. Поскольку функтор l_{s+1}^s весо-точен, $l_{s+1}^s(w_{Chow \le 0}^{s+1} N_{s+1}) \in DM_{R w_{Chow}^s \le 0}^s$. Поскольку $l_r^s(N) = l_{s+1}^s(N_{s+1})$, аксиома ортогональности (iii) из определения 2.2.1 дает $l_{s+1}^s(g_{s+1}) = 0$.

Далее, предложение 2.2.5(5) дает $w_{Chow \le 0}^{s+1} N_{s+1} \in DM_R^{s+1-bir}{}_{w_{Chow}^{s+1} = 0}$. Таким образом, применяя предложения 2.2.5(3) и 4.1.8(3), мы получаем, что морфизм g_{s+1} пропускается через элемент $DM_R^{s+1-bir}{}_{w_{Chow}^{s+1}=0}\langle s+1\rangle$; а значит, и через некоторое копроизведение вида $\mathcal{M}_R^{s+1-bir}(P_a)\langle s+1\rangle$ для некоторых (связных) многообразий $P_a \in \mathrm{SmPrVar}$.

Применяя пункт 3, получаем, что $\mathcal{M}_R^{s+1-bir}(P_a)\langle s+1\rangle \perp N_{s+1}$, поскольку $\mathrm{CWH}^0_{s+1}(N_{s+1,k(P_a)}) = 0$; таким образом, $g_{s+1} = 0$. Отсюда получаем, что N_{s+1} — ретракт $w_{Chow\geq 1}^{s+1} N_{s+1}$; следовательно, N_{s+1} принадлежит $DM_R^{s+1-bir}{}_{w_{Chow}^{s+1}\geq 1}$.

Осталось рассмотреть случай $m = r = +\infty$. Рассуждая так же, как и выше, получаем, что достаточно проверить, что $\mathcal{M}_R(P_a) \perp N$ для любого гладкого проективного k-многообразия P_a. Теперь пусть P_a — многообразие размерности d; применим равносильность наших условий в случае $m = d$ (заметим, что ее мы только что доказали). Условие (b) в этом случае дает весовое разложение с $w_{Chow\leq 0}^{d+1} N_{d+1} \in \mathrm{Obj}(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff\widehat{\oplus}})\langle d+1\rangle$ (см. рассуждение выше). По определению групп Чжоу, сразу получаем $\mathcal{M}_R(P_a) \perp \mathcal{M}_R(\mathrm{SmPrVar})\langle d+1\rangle$; следовательно, $\mathcal{M}_R(P_a) \perp w_{Chow\leq 0}^{d+1} N_{d+1}$. Поскольку $\mathcal{M}_R(P_a) \perp w_{Chow\geq 1}^{d+1} N_{d+1}$, по аксиоме ортогональности для w_{Chow} получаем, что, действительно, $\mathcal{M}_R(P_a) \perp N$.

6. Первая часть утверждения дана теоремой 2.4.3 и примером 2.3.13 статьи [26]; она также может быть легко получена из теоремы 2.2.1(3) статьи [20] (см. также [17, Theorem 6.2.1(1)]). Далее, Чжоу-весовые гомологии сохраняют копроизведения; следовательно, требуемое обнуление следует из первого утверждения пункта и предложения 4.1.3. □

Замечание 4.2.3. Поскольку весовая структура w_{Chow} вырождена справа (по крайней мере, в некоторых случаях; см. предложение 4.1.8(7)), и для вырожденных справа объектов M весовой комплекс $t_R(M)$ обнуляется, далее мы в основном будем изучать w_{Chow}-ограниченные снизу мотивы. Напомним, что лемма 2.4 статьи [11] дает интересный пример w_{Chow}−вырожденного мотива; см. предложение 3.2.6 из [22]. Заметим также, что этот мотив бесконечно эффективен, то есть, принадлежит $\cap_{r\geq 0} \mathrm{Obj}\, DM_R^{eff}\langle r\rangle$; см. замечание 4.2.7 ниже.

Другое соображение, указывающее на проблемы с применением рассуждений, схожих с нашими, к w_{Chow}−неограниченным снизу объектам, приведено в [22, Remark 2.2.6(3)].

2. Напомним, что Чжоу-весовые гомологии для геометрических мотивов были введены и подробно изучены в [34]. Наша версия этих теорий гомологий — единственное их чистое расширение на категорию DM_R^{eff}, сохраняющее копроизведения (см. предложение 4.1.5(6)).

4.2.1 Критерии обнуления Чжоу-весовых гомологий

Чтобы сформулировать наши утверждения в максимальной общности, напомним следующее техническое определение.

Определение 4.2.4. 1. Пусть $\mathcal{I}$ — подмножество $\mathbb{Z}\times[0,+\infty)$ (см. §4.1).

Мы будем называть $\mathcal{I}$ *лестничным* множеством, если для любых $(i,j)\in\mathcal{I}$ и $(i',j')\in\mathbb{Z}\times[0,+\infty)$, таких, что $i'\geq i$ и $j'\leq j$, выполнено $(i',j')\in\mathcal{I}$.

Для $i\in\mathbb{Z}$ будем обозначать через $a_{\mathcal{I},i}$ наименьшее число $j\in[0,+\infty]$, для которого $(i,j)\notin\mathcal{I}$.

2. Для $m\in\mathbb{Z}$ мы будем обозначать через $d_{\leq m}DM_R^{eff}$ локализующую подкатегорию DM_R^{eff}, порожденную $\{M_R(X)\}$, для X пробегающих гладкие k-многообразия размерности, не превосходящей m; соответственно, эта категория нулевая, если $m<0$.

Кроме того, обозначим через $d_{\leq m}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$ подкатегорию $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}$, состоящую из ретрактов мотивов гладких проективных многообразий размерности, не превосходящей m.

Замечание 4.2.5. Очевидно, множество $\mathcal{I}\subset\mathbb{Z}\times[0,+\infty)$ — лестничное тогда и только тогда, когда оно равно объединению "полос" $\bigcup\limits_{(i_0,j_0)\in\mathcal{I}}\mathcal{I}_{i_0,j_0}$, где $\mathcal{I}_{(i_0,j_0)}=[i_0,+\infty)\times[0,j_0]$.

Поэтому объединение лестничных множеств лестнично; ср. теорему 4.2.6(4) ниже.

Изучим обнуление $\mathrm{CWH}_*^*(M_K)$ в степенях, соответствующих лестничным множествам.

Теорема 4.2.6. Пусть $\mathcal{I}\subset\mathbb{Z}\times[0,+\infty)$ — лестничное множество, M — элемент $DM_{R\,w_{\mathrm{Chow}}+}^{eff}$ (см. определение 2.2.3(4)).

1. Тогда следующие условия равносильны.

   A. $\mathrm{CWH}_j^i(M_K)=\{0\}$ для любого поля функций K/k и $(i,j)\in\mathcal{I}$.

   B. Если $(i,j)\in\mathcal{I}$, то объект $l^j(M)$ принадлежит $DM_{R\,w_{\mathrm{Chow}}\geq -i+1}^{j-bir}$.

   C. Для любого $i\in\mathbb{Z}$ существует срезка $w_{\mathrm{Chow}\leq -i}M$, принадлежащая $\mathrm{Obj}\,DM_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle$.

   D. M принадлежит наименьшему классу $D_{\mathcal{I}}$ объектов DM_R^{eff}, который замкнут относительно расширений и копроизведений, и содержит $\cup_{i\in\mathbb{Z}}(\mathrm{Obj}(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle)[-i])$.

   E. Существует $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff\widehat{\oplus}}$-комплекс $\tilde{t}(M)\cong t(M)$ такой, что его i-й член $\tilde{M}^i$ является объектом $\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle^{\widehat{\oplus}}$.

2. Если $M \in DM^{eff}_{R,[a,b]}$ (для некоторых $a \leq b \in \mathbb{Z}$), то M принадлежит $D_{\mathcal{I}}$ (см. условие 1.D) тогда и только тогда, когда M принадлежит замыканию относительно расширений класса $\cup_{-b \leq i \leq -a}(\operatorname{Obj} \underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \langle a_{\mathcal{I},i} \rangle^{\widehat{\oplus}})[-i])$.

3. Если размерность M не превосходит $r \geq 0$, то равносильные условия пункта 1 также эквивалентны следующим:

   A'. $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ для всех пар $(i,j) \in \mathcal{I}$ и $K = k(P)$, где P — гладкое проективное k-многообразие размерности не более $r - j$.

   C'. Для любого $i \in \mathbb{Z}$ существует срезка $w_{\mathrm{Chow} \leq -i} M$, принадлежащая $\operatorname{Obj}(d_{\leq r - a_{\mathcal{I},i}} DM^{eff}_R)\langle a_{\mathcal{I},i} \rangle$.

   D'. M прилежит наименьшему классу объектов DM^{eff}_R, замкнутому относительно расширений, копроизведений, и содержащему класс $\cup_i \operatorname{Obj}(d_{\leq r - a_{\mathcal{I},i}} \underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \langle a_{\mathcal{I},i} \rangle)[-i]$.

   E'. Существует $\underline{\mathrm{Chow}}^{eff\,\widehat{\oplus}}_R$-комплекс $\tilde{t}(M) \cong t(M)$ такой, что его i-й член $\tilde{M}^i$ является объектом $(d_{\leq r - a_{\mathcal{I},i}} \underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R)\langle a_{\mathcal{I},i} \rangle^{\widehat{\oplus}}$.

   Кроме того, схожие модификации также могут быть сделаны для пункта 2.

4. Пусть $\mathcal{I}_j$ — лестничные множества, где j пробегает некоторое множество индексов J, и $\mathcal{I} = \cup \mathcal{I}_j$. Тогда M принадлежит $D_{\mathcal{I}}$ тогда и только, когда он принадлежит $\cap_j D_{\mathcal{I}_j}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим полосу $\mathcal{I}_{(i_0,j_0)} = [i_0, +\infty) \times [0, j_0]$. Последовательно применяя предложение 4.2.2(5) легко получаем, что обнуление $\mathrm{CWH}^i_j(M_K)$ для любых $(i,j) \in \mathcal{I}_{(i_0,j_0)}$ эквивалентно $p_{j_0}(M) \in DM^{j_0-bir}_{R\ w_{\mathrm{Chow}} \geq -i_0+1}$; см. доказательство теоремы 3.2.1(2) статьи [34]. Применяя замечание 4.2.5, получаем равносильность условий A и B. Аналогично, эквивалентность B $\Leftrightarrow$ C также следует из предложения 4.2.2(5).

Далее, мы можем выбрать срезку $w_{\leq i} M$ равной 0 для достаточно малых i. Поэтому, если выполнено условие C, то, применяя предложение 4.1.8(4) и утверждение 4.1.5(3), получаем, что срезки $w_{\mathrm{Chow} \leq -i} M$ из условия C принадлежат классу $D_{\mathcal{I}}$.

Напомним теперь, что весовая структура w_{Chow} приведена и невырождена слева; см. предложение 4.1.8(2). Следовательно, для любого объекта $M \in DM^{eff}_R$ и любых вариантов срезок $w_{\mathrm{Chow} \geq j} M$ существует выделенный треугольник $\coprod_{j \geq 0} w_{\mathrm{Chow} \geq j} M \to \coprod_{j \geq 0} w_{\mathrm{Chow} \geq j} M \to M \to \coprod_{j \geq 0} w_{\mathrm{Chow} \geq j} M[1]$ *счетного гомотопического копредела*; см. теорему 4.1.3(1,2), определение 4.1.1, и замечание 1.2.6(1) статьи [29]. Поэтому, выбрав срезки $w_{\mathrm{Chow} \geq j} M$, принадлежащие $D_{\mathcal{I}}$, получаем, что M также принадлежит $D_{\mathcal{I}}$. Следовательно, условие D следует из условия C.

Далее докажем $D \Rightarrow E$ схожим с предложением 2.3.2(9) статьи [22] образом (соответственно, в этом доказательстве можно использовать слабый весовой комплекс вместо сильного). Напомним, что функтор t^{st} точен и сохраняет копроизведения. Поскольку класс $C_{\mathcal{I}}$ объектов $K(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff})$, изоморфных тем, что удовлетворяет нашим условиям эффективности членов, очевидно, замкнут относительно расширений и копроизведений, класс $D'_{\mathcal{I}}$ таких $N \in \mathrm{Obj}\, DM_R^{eff}$, что $t^{st}(N) \in C_{\mathcal{I}}$, также замкнут относительно этих операций. Так как класс $D'_{\mathcal{I}}$, очевидно, содержит $\cup_i \mathrm{Obj}(\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle)[-i]$, получаем, что $D_{\mathcal{I}} \subset D'_{\mathcal{I}}$.

Наконец, для доказательства $E \Rightarrow A$ заметим, что если $\tilde{t}(M) = (\tilde{M}^i)$, то $\mathrm{CWH}^i_j(M_K)$ — подфактор группы $\mathfrak{Chow}_j(\tilde{M}^i_K, R)$, а последняя равна нулю согласно предложению 4.1.3.

2. Пусть M удовлетворяет условиям C предыдущего пункта и принадлежит $DM^{eff}_{R,[a,b]}$. Тогда можем выбрать $w_{\mathrm{Chow}\le a}M = 0$. Кроме того, из условия D в пункте 1 следует, что M — объект $DM_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},-b}\rangle$; поэтому, если мы положим $w_{\mathrm{Chow}\le b}M = M$ и выберем срезки $w_{\mathrm{Chow}\le -i}M$, принадлежащие $\mathrm{Obj}\, DM_R^{eff}\langle a_{\mathcal{I},i}\rangle$ при $-b < i < -a$, то эти условия будут выполнены для выбранных весовых срезок в диапазоне $-b \le i \le -a$.

Теперь применим предложение 4.1.8(4) и предложение 4.1.5(3). Похожим на доказательство следствия $C \Rightarrow D$ предыдущего пункта способом, получаем, что $w_{\mathrm{Chow}\le b}M = M$ принадлежит требуемому классу.

3. Очевидно, условие A пункта 1 влечет условие A', в то время как условия 1.C, 1.D и 1.E следуют из наших условий C', D' и E', соответственно. Таким образом, достаточно проверить, что эти условия равносильны, и из них следуют "ограниченные по размерности" версии условий 2.

Далее, легко увидеть, что приведенные выше рассуждения работают и в нашей ситуации, если воспользоваться следующими утверждениями: для любого $j \ge 0$ весовая структура w_{Chow} ограничивается на триангулированную подкатегорию $d_{\le r}DM_R^{eff}$, объекты которой — j-эффективные и w_{Chow}-ограниченные снизу (в $DM_R^{eff} \supset d_{\le r}DM_R^{eff}$) мотивы, и сердцевина этого ограничения равна $(d_{\le r-j}\underline{\mathrm{Chow}}_R^{eff})\langle j\rangle^{\widehat{\oplus}}$. Теперь утверждение легко следует из теоремы 2.2 статьи [30] (вместе с предложением 1.7 там же, дающим вычисление сердцевины; см. также доказательство последнего).

Оставшиеся детали легко могут быть восстановлены, и мы их опускаем, так как не будем использовать данное утверждение ниже. Отметим только, что предлагается брать подкатегории размерности не более r в локализациях типа DM_R^{j-bir}, а не в соответствующих локализациях $d_{\le r}DM_R^{eff}$ (хотя и они, вероятно, могут быть использованы в доказательстве; см. предложение 2.2.5(7) из [34]).

4. Очевидно; см. условие A в пункте 1.

□

Замечание 4.2.7. Полагая $\mathcal{I} = \mathbb{Z}\times[0,+\infty)$ в нашей теореме, мы немедленно получаем, что бесконечно эффективные элементы $DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$ равны 0; ср. замечание 4.2.3(1).

Теперь установим связь нашей теоремы с высшими Чжоу-весовыми гомологиями.

Предложение 4.2.8. *Пусть $\mathcal{I} \subset \mathbb{Z} \times [0,+\infty)$ и $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$.*

Рассмотрим следующие условия на M.

1. $\mathrm{CWH}^i_j(M_K, R) = \{0\}$ *для любого $(i, j) \in \mathcal{I}$ и любого поля функций K/k.*

2. *Для любого рационального расширения K/k и $(i, j) \in \mathcal{I}$ выполнено* $\mathrm{CWH}^i_{j-1}(M_K, 1) = \{0\}$.

3. $\mathrm{CWH}^i_0(M_K, j) = \{0\}$ *для любых $(i, j) \in \mathcal{I}$ и любого поля функций K/k.*

4. $\mathrm{CWH}^i_a(M_K, j - a) = \{0\}$ *для любых $(i, j) \in \mathcal{I}$, $a \in \mathbb{Z}$, и любого расширения K/k.*

Тогда выполнено следующее.

1. Из условия 4 следуют условия 3 и 2, и из каждого из этих двух условий следует условие 1.

2. Пусть $\mathcal{I}$ — лестничное множество. Тогда все условия 1–4 равносильны.

Доказательство. 1. Очевидно, из условия 4 следуют все остальные. Оставшиеся импликации доказываются так же, как в предложении 3.4.1 статьи [34].

2. Осталось проверить, что условие 4 следует из условия 1. Для этого достаточно приметь теорему 4.2.6(1) (см. условия A и D в ней) и предложение 4.2.2(1,4). □

Замечание 4.2.9. Заметим, что следствие $1 \Rightarrow 4$ из предложения 4.2.8 может быть ложным, если множество $\mathcal{I}$ не лестничное. Например, возьмем $\mathcal{I} = [2,+\infty) \times [0,+\infty) \cup \{0\} \times [0, 5]$. Тогда мотив $\mathbb{Q}\langle 1\rangle[-1]$, очевидно, удовлетворяет условию 1, но $\mathrm{CWH}^2_1(\mathbb{Q}\langle 1\rangle[-1], 1) \cong \mathbb{Q}$. Это является одной из причин введения нами понятия лестничного множества.

4.2.2 Связь с мотивными гомологиями

Определим некоторые "крутые" лестничные множества.

Определение 4.2.10. 1. Пусть $(i_0, j_0) \in \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$. Тогда мы определим $S_{(i_0,j_0)} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ как множество $\{(i,j) : \ i \geq i_0, \ 0 \leq j \leq j_0 + (i - i_0)\}$; проиллюстрируем это определение, закрасив серым цветом точки множества $S_{(2,2)}$ на картинке ниже.

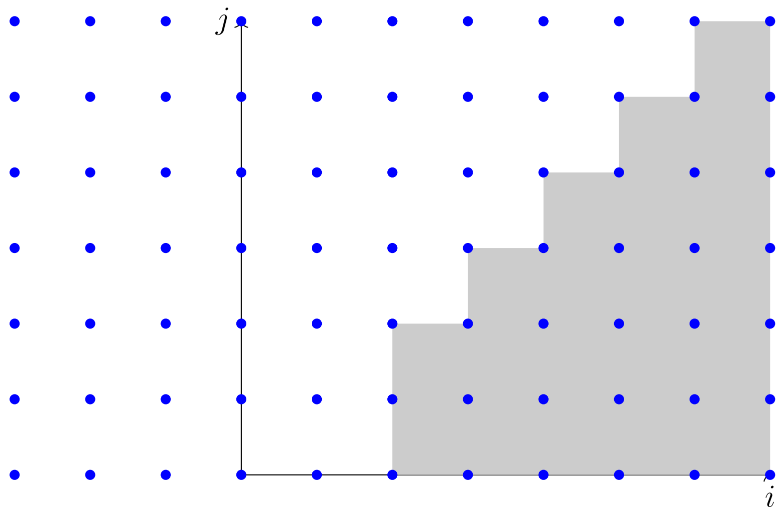

Рис.1 : суперлестничное множество $S_{(2,2)}$.

2. Пусть $\mathcal{I}$ — подмножество в $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ (см. §1.1).
Мы будем называть его *суперлестничным* множеством, если для любых $(i_0, j_0) \in \mathcal{I}$ множество $S_{(i_0,j_0)}$ лежит в $\mathcal{I}$.

Замечание 4.2.11. Очевидно, любое суперлестничное множество является лестничным.

Кроме того, если $(i,j) \in S_{(i_0,j_0)}$, то $S_{(i,j)} \subset S_{(i_0,j_0)}$. Таким образом, подмножество в $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ суперлестнично тогда и только тогда, когда оно представляется в виде объединения "секторов" $S_{(i_l,j_l)}$ для некоторых $(i_l, j_l) \in S_{(i_0,j_0)}$.

Теперь изучим связь между Чжоу-весовыми и мотивными гомологиями.

Теорема 4.2.12. Пусть $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$ для некоторых $t_s \in \mathbb{Z}$, $n_s \geq 0$. Тогда следующие условия на $M \in DM^{eff}_{R\, w_{\mathrm{Chow}}+}$ равносильны:

(a). $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ для любой пары $(i,j) \in \mathcal{I}$ и любого поля функций K/k;

(b). $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ для любого K, $0 \le r \le n_s$, и $c \ge t_s$;
(c) $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ для любого K и $(r, c) \in \mathcal{I}$.

Доказательство. Очевидно, условие (b) следует из условия (c).

Теперь предположим, что условие (a) выполнено, и $(i, j) \in \mathcal{I}$. Так как $\mathcal{I}$ — суперлестничное множество, $(u, j + u - i) \in \mathcal{I}$ при $u \ge i$. Следовательно, $\mathrm{CWH}^u_j(M_K, u - i) = \{0\}$ для любого $u \ge i$ по предложению 4.2.8; см. условия 4 и 1 в нем.

Далее, функтор $H = \mathfrak{Chow}_j(-_K, R, u - i)$ обнуляет $DM^{eff}_R{}_{w_{\mathrm{Chow}} \ge 1}$ для любого $u \in \mathbb{Z}$, и равен нулю, если $u < i$, согласно предложению 4.2.2(4). Поэтому получаем сходящуюся Чжоу-весовую спектральную последовательность

$$T(H, M) : E_2^{u,q} T(H, M) = \mathrm{CWH}^u_j(M_K, R, -q) \implies E_\infty^{u+q} = \mathfrak{Chow}_j(M_K, R, -u-q),$$

соответствующую w_{Chow}; см. предложение 4.1.7. Применяя вышеупомянутые обнуления групп $\mathrm{CWH}^u_j(M_K, u - i)$, мы получаем $\mathfrak{Chow}_j(M_K, R, -i) = \{0\}$, а значит, их условия (c) следует условие (a).

Осталось установить, что условие (a) следует из (b). Поскольку $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s, n_s)}$, достаточно доказать, что это следствие справедливо для $\mathcal{I} = S_{(t,n)}$, где $t \in \mathbb{Z}$ и $n \ge 0$. Конечно, мы можем считать t равным 0. Следовательно, осталось доказать следующую лемму.

Лемма 4.2.13. Пусть $n \ge 0$, $M \in \mathrm{Obj}\, DM^{eff}_R$, и $\mathfrak{Chow}_r(M_K, R, -c) = \{0\}$ для всех $c \ge 0$, $0 \le r \le n$, и полей функций K/k.

Тогда $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ для любого $(i, j) \in S_{(0,n)}$ (и любого поля функций K/k).

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $n \ge 0$.

В случае $n = 0$ наше утверждение — очевидное обобщение следствия 3.4.2 из [34]; мы, по сути, приведем здесь доказательство этого следствия. Согласно предложению 4.1(3) ниже, из нашего предположения следует, что M принадлежит $DM^{eff}_{R, t^R_{hom} \ge 1}$. Таким образом, остается применить предложение 4.2.2(6).

Теперь предположим, что утверждение выполнено при всех $n \le m$, для некоторого $m \ge 0$. Проверим его для $n = m + 1$. Поскольку мы доказали его в случае $n = 0$, достаточно проверить, что $\mathrm{CWH}^i_j(M_K) = \{0\}$ если $(i, j - 1) \in S_{(0,n-1)}$.

Рассмотрим треугольник слайс-фильтраци из §2.1.1 при $n = 1$, и обозначим $i^{(0)} p_0(M)$ и $\nu^{\ge 1}(M)$ через M^0 и M^1, соответственно. Тогда для любого $i \in \mathbb{Z}$, $j \ge 0$, и поля функций K этот треугольник дает длинную точную последовательность $\cdots \to \mathrm{CWH}^i_j(M^1_K) \to \mathrm{CWH}^i_j(M_K) \to$

$\mathrm{CWH}^i_j(M^0_K) \to \ldots$ Поэтому достаточно проверить, что $\mathrm{CWH}^i_j(M^0_K) = \mathrm{CWH}^i_j(M^1_K) = \{0\}$ при $(i, j-1) \in S_{(0,n-1)}$.

Теперь легко видеть, что для $i \in \mathbb{Z}$ и $j \geq 1$ выполнено $\mathfrak{Chow}_j(M^1_K, R, -i) = \mathfrak{Chow}_j(M_K, R, -i)$, и $\mathfrak{Chow}_j(M^0_K, R, -i) = \{0\}$. Таким образом, для $M^2 = M_{-1}$ выполнено $\mathfrak{Chow}_{j-1}(M^2_K, R, -i) = \{0\}$, если $i \geq 0$ и $j-1 \leq n-1$. Применяя предположение индукции, получаем $\mathrm{CWH}^i_{j-1}(M^2_K) = \{0\}$ при $(i, j-1) \in S_{(0,n-1)}$. Поэтому из предложения 4.1.5(5) легко следует, что $\mathrm{CWH}^i_j(-_K) \circ \langle 1 \rangle \cong \mathrm{CWH}^i_{j-1}(-_K)$; следовательно, $\mathrm{CWH}^i_j(M^1_K) = \{0\}$ при $(i, j-1) \in S_{(0,n-1)}$ (напомним, что $M^1 \cong M^2\langle 1 \rangle$). Кроме того, M^1 принадлежит $DM^{eff}_R{}_{t^R_{hom} \geq 1}$ (поскольку $M \in DM^{eff}_R{}_{t^R_{hom} \geq 1}$); см. следствие 3.3.7(2) (и теорему 3.3.1) статьи [26] или предложение 4.1(3) ниже. Отсюда легко получаем, что M^0 также принадлежит $DM^{eff}_R{}_{t^R_{hom} \geq 1}$. Поскольку мотив M^0 бирационален, он принадлежит $DM^{eff}_R{}_{w_{\mathrm{Chow}} \geq 1}$ по лемме 4.2.14(2) ниже. Таким образом, $\mathrm{CWH}^i_j(M^0_K) = \{0\}$ при $i \geq 0$ (см. предложение 4.2.2(4)), что завершает доказательство. $\square$

Лемма 4.2.14. Пусть $N \in DM^{eff}_R{}_{t^R_{hom} \geq 0}$.

1. Тогда для любого $j \geq 0$ можно выбрать срезку $w_{chow \leq -j} N$, принадлежащую $\mathrm{Obj}\, DM^{eff}_R \langle j \rangle$.

2. Предположим к тому же, что мотив N бирационален. Тогда $N \in DM^{eff}_R{}_{w_{\mathrm{Chow}} \geq 0}$.

Доказательство. 1. Если $N \in DM^{eff}_R{}_{w_{\mathrm{Chow}}+}$, то наше утверждение легко следует из случая $n = 0$ леммы 4.2.13 (заметим, что для данного случая доказательство было получено независимо) и теоремы 4.2.6(1) (см. условия A и C в ней).

Рассуждения в общем случае схожи с доказательством [22, Proposition 2.3.2(10)]. Зафиксируем $j \geq 0$. Поскольку весовая структура w_{Chow} приведена, класс C тех $M \in \mathrm{Obj}\, DM^{eff}_R$, для которых существует срезка $w_{\mathrm{Chow} \leq -j} M$, принадлежащая $\mathrm{Obj}\, DM^{eff}_R \langle j \rangle$, приведен в DM^{eff}_R; см. предложение 2.3.2(3) той же статьи. Кроме того, C замкнут относительно расширений по предложению 1.2.4(12) там же. Снова по предложению 4.2.2(6) получаем, что достаточно установить существование таких $w_{\mathrm{Chow} \leq -j} M$ если $M \in \mathrm{Obj}\, \underline{\mathrm{Chow}}^{eff}_R \langle a \rangle [b-a]$ для $a, b \geq 0$. Последнее очевидно.

2. По предыдущему пункту, существует -1-весовое разложение $w_{chow \leq -1} N \xrightarrow{a} N \to w_{\geq 0} N$ (см. замечание 2.2.4), такое, что $w_{\leq -1} N \in \mathrm{Obj}\, DM^{eff}_R \langle 1 \rangle$. Поскольку мотив N бирационален, $w_{\leq -1} N \perp N$ (см. §2.1.1). Следовательно, N — ретракт объекта $w_{\geq 0} N \in DM^{eff}_R{}_{w_{\mathrm{Chow}} \geq 0}$; таким образом, N сам принадлежит $DM^{eff}_R{}_{w_{\mathrm{Chow}} \geq 0}$. $\square$

Таким образом, теорема 4.2.12 полностью доказана. $\square$

Замечание 4.2.15. 1. Ниже мы будем применять теорему 4.2.12 преимущественно к геометрическим мотивам. Однако отметим, что наши аргументы опираются на слайсы; таким образом, их невозможно применить, "не выходя за пределы $DM^{eff}_{\mathrm{gm,R}}$"(см. [10]).

Отметим также, что доказательства теорем 4.2.6 и 4.2.12 намекают на то, что имеет смысл изучать условия этих теорем для подкатегорий DM^{eff}_R, больших $DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$. В частности, можно рассмотреть оригинальную категорию Воеводского $DM^{eff}_{R-} \supset DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$; ср. §2.3 из [30].

2. Поскольку слайсы точны и сохраняют копроизведения, для любого лестничного $\mathcal{I}$ объект M из DM^{eff}_R принадлежит классу $D_{\mathcal{I}}$ (см. условие D в теореме 4.2.6(1)) тогда и только тогда, когда ему принадлежат $i^{(0)}p_0(M)$ и $\nu^{\geq 1}(M)$. Кроме того, аналогичные утверждения выполнены для других слайсов M. Мы оставляем детали читателю.

3. Очевидно, в $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ есть много лестничных, но не суперлестничных подмножеств. Однако, единственный конкретный тип множеств такого типа, рассмотренный в [34], это множества вида $\mathbb{Z} \times [0, c-1]$ (для $c > 0$). Они соответствуют c-эффективности мотивов; см. замечание 3.3.2(2) там.

4. Продемонстрируем, что теорема 4.2.12 не обобщается на произвольные подмножества $\mathbb{Z} \times [0, +\infty)$. Пусть $R = \mathbb{Q}$ и $M = \mathbb{Q}\langle 1\rangle[-1]$. Тогда $\mathrm{CWH}^i_j(M) = \{0\}$ если $(i,j) \neq (1,1)$.

Далее, пусть k не равно объединению конечных полей, и $\mathcal{I} = [0, +\infty) \times [0, +\infty) \setminus \{(1,1)\}$. Тогда $\mathrm{CWH}^0_0(N, \mathbb{Q}) = k^{\times} \otimes \mathbb{Q} \neq \{0\}$, но $(0,0) \in \mathcal{I}$.

5. Пусть $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}}+}$, $t \geq 0$, и $E_2^{*,*}-$члены Чжоу-весовой спектральной последовательности $T_{w_{\mathrm{Chow}}}(H, M)$ для гомологического функтора $DM^{eff}_R(R\langle t\rangle, -)$ сконцентрированы в первом квадранте (в частности, это выполнено, если $M \in DM^{eff}_{R\ w_{\mathrm{Chow}} \leq 0}$). Тогда можно рассмотреть так называемую пятичленную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{CWH}^1_t(M) \to \mathfrak{Chow}_t(M, -1) \to \mathrm{CWH}^0_t(M, -1) \to \mathrm{CWH}^2_t(M) \to \mathfrak{Chow}_t(M, -2),$$

и применить ее для изучения обнуления соответствующих групп гомологий.

4.3 Конечность показателей Чжоу-весовых и мотивных гомологий

Применим наши результаты к геометрическим мотивам.

Теорема 4.3.1. Пусть M — объект категории $DM^{eff}_{gm,\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}$, K — универсальная область (т.е., K — алгебраически замкнутое бесконечной степени трансцендентности над своим простым подполем), содержащая k, и $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s,n_s)}$ (см. определение 4.2.10(1)).

Тогда следующие условия равносильны.

1. $\mathfrak{Chow}_r((M\otimes\mathbb{Q})_K, \mathbb{Q}, -c) = \{0\}$ для $0 \le r \le n_s$ и $c \ge n_s$; здесь $M\otimes\mathbb{Q}$ — результат применения к M функтора расширения скаляров $-\otimes\mathbb{Q} = -\otimes_{\mathbb{Z}[1/p]}\mathbb{Q} : DM^{eff}_{\mathrm{gm},\mathbb{Z}[1/p]} \to DM^{eff}_{gm,\mathbb{Q}}$ из предложения 3.6.2(I.1) статьи [34].

2. Существует число $E_M > 0$, для которого $E_M\mathfrak{Chow}_r(M_{k'}, -c, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) = \{0\}$ при всех $(r,c) \in \mathcal{I}$, и любого расширения полей k'/k.

3. Если $(i,j) \in \mathcal{I}$, то $\mathrm{CWH}^i_j((M\otimes\mathbb{Q})_K, \mathbb{Q}) = \{0\}$.

4. Существует число $E'_M > 0$ такое, что $E'_M \,\mathrm{CWH}^i_{j-a}(M_{k'}, a) = \{0\}$ для любых $a \in \mathbb{Z}$, $(i,j) \in \mathcal{I}$, и любого расширения полей k'/k.

Доказательство. Условие 1, очевидно, следует из условия 2.

Далее, по предложению 2.3.4(II) статьи [34], условие 1 (соотв. 3) выполнено тогда и только тогда, когда соответствующие гомологии обнуляются для любого поля функций k'/k. Следовательно, применив теорему 4.2.12 к мотиву $M\otimes\mathbb{Q} \in \operatorname{Obj} DM^{eff}_{\mathbb{Q}}$, получаем, что эти условия равносильны.

Кроме того, условия 3 и 4 эквивалентны по теореме 3.6.4(I,II) той же статьи (см. условие II.B в ней).

Наконец, будем рассуждать аналогично следствию 3.6.5(II) там же. Как мы уже отметили в доказательстве теоремы 4.2.12, имеется следующая спектральная последовательность $T(H, M)$:

$$E_2^{u,q}T(H,M) = \mathrm{CWH}^u_j(M_K, \mathbb{Z}[1/p], -q) \implies E_\infty^{u+q} = \mathfrak{Chow}_j(M_K, \mathbb{Z}[1/p], -u-q).$$

К тому же, комплекс $t^{st}(M)$ изоморфен ограниченному (см. определение 3.1.1(1) и предложение 2.2.1(1) из [34]); следовательно, простое вычисление, проведенное выше, дает следующее: если $(r,c) \in \mathcal{I}$, то группа $\mathfrak{Chow}_r(M_{k'}, -c, \mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ обладает фильтрацией, длина которой ограничена константой, а факторы обнуляются умножением на E'_M. Таким образом, в качестве E_M можно взять некоторую степень E'_M . □

Замечание 4.3.2. Конечность показателей некоторых Чжоу-весовых гомологий весьма интересна. Отметим, что группы Чжоу-весовых и мотивных гомологий геометрических мотивов могут иметь очень большие и сложные подгруппы кручения.

4.3.1 Применения к мотивам с компактными носителями

Применим наши результаты к мотивам с компактными носителями. Напомним некоторые базовые факты об этих объектах.

Предложение 4.3.3. *1. Существует функтор $M_{gm}^{c,R}$ мотива с компактными носителями из категории $SchPr$ многообразий над k с собственными морфизмами в $DM_{gm,R}^{eff}$.*

2. Для любых $j, l \in \mathbb{Z}$, $X \in \mathrm{Var}$, $M = M_{gm}^{c,R}(X)$ и любого расширения k'/k группа $\mathfrak{Chow}_j(M_{k'}, R, l)$ (см. определение 4.1.2(3)) естественно изоморфна высшей группе Чжоу $CH_j(X_{k'}, l, R)$ (см. $\mathbb{Z}[1/p]$-линейную версию этого обозначения в теореме 5.3.14 статьи [44]).

Доказательство. Эти утверждения легко следуют из $\mathbb{Z}[1/p]$-линейных версий, доказанных в §5.3 статьи [44], вместе с предложением 3.3.2 и предложением 4.1(2) ниже; ср. [34, Proposition 4.1.8(1)]. □

Замечание 4.3.4. Напомним, что функтор $\mathcal{M}_R$ также определен на категории всех k-многообразий, и если многообразие X собственно, то $\mathcal{M}_R(X) = M_{gm}^{c,R}(X)$ (см. предложение 5.3.5 статьи [44]). В частности, $\mathcal{M}_R(X) = M_{gm}^{c,R}(X)$ если X гладко и проективно.

Теперь мы применим теорему 4.2.12 вместе с некоторыми результатами [34] и получим обобщение теоремы 4.2.1 той статьи. Отметим, что в этом утверждении не упоминаются Чжоу-весовые гомологии.

Теорема 4.3.5. Пусть $X \in \mathrm{Var}$, K — универсальная область, содержащая k, и для некоторого множества $\{(t_s, n_s)\} \subset \mathbb{Z} \times [0, +\infty)$ и любых $(r, c) \in \mathbb{Z} \otimes [0, +\infty)$, т.ч. $0 \le r \le n_s$ и $c \ge t_s$ для некоторого s, выполнено $CH_r(X_K, -c, \mathbb{Q}) = \{0\}$.

1. Тогда существует $E_X > 0$ такое, что $E_X CH_r(X_{k'}, -c, \mathbb{Z}[1/p]) = \{0\}$ для любых $(r, c) \in \mathcal{I}$ и любого расширения k'/k, где $\mathcal{I} = \cup S_{(t_s, n_s)}$ (см. определение 4.2.10(1)).

2. Если k — подполе $\mathbb{C}$, а $l, m \in \mathbb{Z}$, то $m + l$-ый весовой фактор Делиня $H_c^m(X_{\mathbb{C}})$ ($\mathbb{Q}$-линейных) сингулярных когомологий $X_{\mathbb{C}}$ с компактными носителями $a_{\mathcal{I},l}$-эффективен как чистая структура Ходжа; соответствующие обозначения можно найти в определении 4.2.4(1) выше и [34, Definition 3.5.3, Theorem 3.5.4(2)].

Кроме того, аналогичные свойства факторов Делиня выполнены для этальных когомологий $H_c^q(X_{k^{alg}}, \mathbb{Q}_\ell)$, если k - совершенное замыкание поля, имеющего конечную степень трансцендентности над простым подполем.

Доказательство. 1. Утверждение легко следует из предложения 4.3.3(2) и теоремы 4.3.1 (см. условия 1 и 2 в последней).

2. Если $(i,j) \in \mathcal{I}$ и $M = M_{gm}^{c,\mathbb{Q}}(X)$, то $\mathrm{CWH}_j^i(M_K) = \{0\}$; см. теорему 4.2.12. Теперь результат легко получается рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 4.2.1(I.2) статьи [34]. □

Замечание 4.3.6. 1. К тому же, для $M = M_{gm}^{c,\mathbb{Q}}(X)$ и любого когомологического функтора H из $DM_{gm,\mathbb{Q}}^{eff}$ в абелеву категорию $\underline{A}$ можно применить обнуление упомянутых выше групп Чжоу-весовых гомологий вместе с предложением 3.5.1(1) той же статьи и получить, что для любых $l, m \in \mathbb{Z}$ и объект $E_2^{-l,m}T(M)$, и $(Gr_W^{-l}H^{m-l})(M)$ являются подфакторами $H^m(M_R(P)\langle a_{\mathcal{I},l}\rangle)$ для некоторого $P \in \mathrm{SmPrVar}$ если $a_{\mathcal{I},l} < +\infty$, и равны 0 если $a_{\mathcal{I},l} = +\infty$; см. соответствующие обозначения в [34, Definition 1.4.4(3), Proposition 1.4.5(2)].

2. Из сочетания двух "стандартных" мотивных гипотез следует, что условие эффективности структуры Ходжа в теореме 4.3.5(2) равносильно нашим предположениям о группах Чжоу X. Это утверждение легко следует из предложения 3.5.6 статьи [34] (примененного вместе с нашей теоремой 4.2.12).

3. Конечно же, можно рассмотреть Чжоу-весовую спектральную последовательность для негеометрических объектов из $DM_{\mathbb{Q}}^{eff}$ (или DM_R^{eff} для любого R). В частности, можно определить функторы сингулярных и этальных гомологий, сходные с упомянутыми в теореме 4.3.5(2), на категории $DM_{\mathbb{Q}}^{eff}$. Заметим, что такие гомологические функторы, принимающие значения в соответствующих инд-пополненных категориях и сохраняющие копроизведения, существуют; см. лемму 2.2 статьи [45].

Важно отметить здесь, что эти функторы переводят объекты категории $\underline{Chow}_{\mathbb{Q}}^{eff\widehat{\oplus}}$ в (инд-чистые) объекты веса 0 соответствующих смешанных категорий; следовательно, эти весовые спектральные последовательности вырождаются в E_2 (ср. теорему 3.5.4 статьи [34]).

4.4 Вспомогательные утверждения о мотивах

Докажем некоторые утверждения, особенно важные для главы 4 этой работы. Вероятно, эти результаты хорошо известны специалистам - но автор не нашёл соответствующих утверждений в существующей литературе.

Мы не будем вводить определения и обозначения, используемые ниже; они могут быть найдены в статье [35].

Предложение 4.1. *Пусть K/k — расширение совершенных полей, $f : \operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} k$ - соответствующий морфизм, и X — k-многообразие.*

Тогда выполнены следующие утверждения.

1. *Функтор* $-_K$ *из определения 4.1.2(2) — это ограничение на* DM_R^{eff} *функтора* $f^*: DM_R \to DM_R(K^{perf})$, *и выполнено* $f^*(M_R(X)) \cong M_R(X_K)$.

2. *К тому же,* $f^*(M_R^c(X)) \cong M_R^c(X_K)$.

3. *Объект* N *категории* DM_R^{eff} *принадлежит* ${DM_R^{eff}}_{t_{hom}^R \geq 0}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{Chow}_0(N_{k'}, R, l) = \{0\}$ *для любого* $l < 0$, *и любого поля функций* k'/k.

   Кроме того, эти условия равносильны обнулению групп $\mathfrak{Chow}_r(N_{k'}, R, l-r)$ *для всех* $l < 0$, $r \geq 0$ *и любого поля функций* k'/k.

Доказательство. 1. Перейдем к "стабильным" мотивным категориям $DM_R \cong DM_{cdh}(\operatorname{Spec} k, R) \supset DM_R^{eff}$ (см. §1.2, определение 1.5, и предложение 8.1(c) статьи [35]). Тогда вторая часть утверждения говорит, что мы в действительности можем определить $-_K$ как ограничение на DM_R^{eff} функтора f^*.

Для доказательства требуемого изоморфизма напомним, что мотив $M_R(X)$ может быть вычислен как $x_! x^!(R)$, где $x: X \to \operatorname{Spec} k$ — структурный морфизм; см. формулу (8.7.1) (и §1.6) этой статьи. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X_K & \xrightarrow{f_X} & X \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x_K} & & \Big\downarrow{\scriptstyle x} \\ \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{f} & \operatorname{Spec} k \end{array} \tag{4}$$

и напомним, что категории $DM_{cdh}(-, R)$ дают *мотивную категорию* над категорией нетеровых k-схем конечной размерности, и она *непрерывна относительно подкруток* $\langle n \rangle$ для $n \in \mathbb{Z}$; см. предложение 4.3 и теорему 5.1 там же, а также определения 2.4.45 и 4.3.2 книги [36]. Таким образом, мы можем применить изоморфизм замены базы (см. теорему 2.4.50(4) этой книги) и получить $f^* x_! \cong x_{K!} f_X^*$.

Далее, мотивная категория $DM_{cdh}(-, R)$ *порождена этими подкрутками* (см. определение 2.5 и предложение 4.3 статьи [35]), и морфизм f *регулярен* по теореме Попеску-Спиваковского (см. теорему 4.1.5 книги [36]). Таким образом, применяя предложение 4.3.12 этой книги, мы получаем $f_X^* x^! \cong x_K^! f^*$. Остается напомнить, что $f^* R_{\operatorname{Spec} k} \cong R_{\operatorname{Spec} K}$ (см. §1.1.1 там же); следовательно, $f^*(M_R(X)) \cong x_{K!} x_K^! R_{\operatorname{Spec} K} \cong M_R(X_K)$.

2. Доказательство этого пункта во многом похоже на предыдущее. Предложение 8.10 статьи [35] говорит, что мотив $M_{gm}^{r,c}(X)$ вычисляется

как $x_*x^!(R)$; здесь мы используем обозначения [36] (и пишем x_* вместо Rx_*). Далее, упомянутые выше утверждения позволяют применить предложение 4.3.15 этой книги; это дает $f^*x_* \cong x_{K*}f_X^*$. Применяя упомянутые выше изоморфизмы получаем, что $f^*(M_{gm}^{r,c}(X)) \cong x_{K*}x_K^! R_{\operatorname{Spec} K} \cong M_{gm}^{r,c}(X_K)$.

3. N принадлежит $DM_R^{eff}{}_{t^R_{hom}\geq 0}$ тогда и только тогда, когда для любого поля функций k'/k и любого его представления в виде $\operatorname{Spec} k' = \varprojlim X_j$ для $X_j \in \mathrm{SmVar}$, $r \geq 0$, и $l < 0$, выполняется $\varinjlim_j DM_R^{eff}(M_R(X_j)\langle r\rangle[l-r], N) = \{0\}$; см. следствие 5.2, §1.18, и теорему 3.7 статьи [38].[12]

Далее, напомним, что мотивы $M_R(X_j)$ также могут быть вычислены как $x_{j\#}R_{X_j} = x_{j\#}x_j^*R_{\operatorname{Spec} k}$, где $x_j : X_j \to \operatorname{Spec} k$ — структурные морфизмы, а функторы $x_{j\#}$ сопряжены слева к x_j^*; см. формулу (8.5.3) статьи [35] (мы опускаем L в обозначениях этой статьи). Таким образом, $DM_R^{eff}(M_R(X_j)\langle r\rangle[l-r], N) \cong DM_{cdh}(X_j, R)(R_{X_j}\langle r\rangle[l-r], x_j^*N)$. По непрерывности, упомянутой выше, мы можем перейти к пределу (см. определение 2.5 там же) и получить

$$\varinjlim DM_{cdh}(X_j, R)(R_{X_j}\langle r\rangle[l-r], x_j^*N) \cong DM_{cdh}(\operatorname{Spec} k', R)(R_{\operatorname{Spec} k'}\langle r\rangle[l-r], f^*N).$$

Последняя группа изоморфна $\mathfrak{Chow}_r(N_{k'}, R, l-r)$, поскольку мы можем заменить поле k' на его совершенное замыкание; см. предложение 8.1 статьи [35].

Остается проверить требуемое обнуление в случае $r = 0$. Оно легко получается из предложения 5.2.6(8) и замечания 5.2.7(7) статьи [21]. Кроме того, его легко можно вывести из хорошо известной теоремы 4.19 статьи [56] и того факта, что мотив $R\langle n\rangle[-n]$ — ретракт $M_R(\mathbb{G}_m^n)$ (где $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$). $\square$

[12]Как вариант, можно применить следствие 2.3.12 и теорему 3.3.1 статьи [26]; см. также определения 1.3.10 и 3.2.3, и формулу (2.3.4.a) этой статьи.

Заключение

Подведём итоги диссертационного исследования.

- В терминах мотивных спектров гладких многообразий построено большое семейство айлов на различных триангулированных мотивных категориях. Они выражаются через гомотопические t-структуры, слайс и бирациональные фильтрации.

- В терминах построенных айлов получены критерии слабой бирациональности объектов из $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$.

- Получены гладкие весовые и t-структуры, обобщающие весовые структуры Чжоу. Доказано, что они дают бирациональные фильтрации на $\underline{Ht}^{eff}_{hom}$. Также получены новые вычисления неразветвлённых когомологий.

- Получены геометрические теоремы сравнения для гладкой весовой структуры с параметром $s = 0$ (то есть, весовой структуры Чжоу, построенной по гладким многообразиям).

- Теория Чжоу-весовых гомологий расширена на категорию $DM^{eff}(k)$. Доказана эквивалентность обнуления некоторых высших мотивных и Чжоу-весовых гомологий. Также получена ограниченность показателей мотивных гомологий геометрических мотивов при условии, что эти группы являются группами кручения.

В перспективе планируется изучить следующие естественно возникающие вопросы.

1. Интересно обобщить наши весовые и t-структуры и связанные результаты на случай относительных мотивов над общей базовой схемой. Также планируется исследовать весо-точность различных связующих функторов между мотивными категориями.

2. В [13] была рассмотрена t-структура, порожденная объектами вида $Th_X(\xi)$, где $X \in SmProj/k$ и $\xi \in K(X)$. Вероятно, эта t-структура двойственна (в некотором смысле) нашей $t^{eff}_{\mathrm{Smooth}}$.

3. Используя результаты данной работы (в особенности §2.2.3), возможно обобщить Чжоу-весовые (ко)гомологии на произвольные мотивные категории. Наиболее интересный случай – $SH(S)$ (для "разумной" базовой схемы S).

4. Для каких объектов $S \in \underline{Ht}_{hom}^{eff}$ наша фильтрация конечна (т.е., существует N с условием $F^N(S) = S$)? Исчерпывающая ли она?

Список литературы

[1] М.В. Бондарко, Д.З. Кумаллагов. Весовые структуры Чжоу без проективности и разрешения особенностей// Алгебра и анализ. – 2018. –Т.30, № 5. – С. 57—83, переведено в St. Petersburg Math. J., 30:5 (2019), 803–819.

[2] М.В. Бондарко, Д.З. Кумаллагов. Чжоу-весовые гомологии мотивных комплексов и их связь с мотивными гомологиями// Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2020. Т. 7 (65). вып. 4, переведено в Vestnik St. Peters. Univers., Mathematics, 2020, vol. 53(4), 377–397.

[3] М.В. Бондарко, Д.З. Кумаллагов. Гладкие весовые структуры и бирациональные фильтрации на мотивных категориях// Алгебра и анализ. – 2021. –Т.33, № 5. – С. 51—79.

[4] Д.З. Кумаллагов. Чжоу-весовые и мотивные (ко)гомологии //Восьмая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов", Москва, Россия, 27 января - 1 февраля 2020 г. Тезисы докладов, Москва: МЦНМО, 2020, с. 39.

[5] Д.З. Кумаллагов. Гладкие весовые структуры и слабо бирациональные объекты в мотивных категориях //Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021» [Электронный ресурс] – М.: МАКС Пресс, 2021.

[6] L. Alonso, A. Jeremías, M. J. Souto, Construction of t-structures and equivalences of derived categories// Trans. of the AMS, 355(6), 2003, 2523–2543.

[7] A. Ananyevskiy, A. Neshitov, Framed and MW-transfers for homotopy modules// Sel. Math. New Ser. 25, 26 (2019).

[8] A. Asok, Birational invariants and $\mathbb{A}^1$-connectedness// J. reine angew. Math. 681 (2013), 39–64.

[9] J. Ayoub, Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique (I), Astérisque, vol. 314, Soc. Math. France, 2007.

[10] J. Ayoub, The slice filtration on DM(k) does not preserve geometric motives. Appendix to A. Huber's "Slice filtration on motives and the Hodge conjecture"// Math. Nachr. 281(12), 2008, 1764–1776.

[11] J. Ayoub, Motives and algebraic cycles: a selection of conjectures and open questions, in: Hodge theory and L^2-analysis, 87–125, Adv. Lect. Math. (ALM), 39, Int. Press, Somerville, MA, 2017.

[12] T. Bachmann, On the conservativity of the functor assigning to a motivic spectrum its motive// Duke Math. J. 167(8), 2018, 1525–1571.

[13] T. Bachmann, Hana Jia Kong, Guozhen Wang, Zhouli Xu, The Chow t-structure on motivic spectra, preprint, 2020, `https://arxiv.org/abs/2012.02687`

[14] T. Bachmann, M. Yakerson, Towards conservativity of $\mathbb{G}_m$-stabilization// Geom. Topol. 24(4), 2020, 1969–2034.

[15] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers// Asterisque 100, 1982, 5–171.

[16] A. Beilinson, V. Vologodsky, A DG guide to Voevodsky motives// Geom. Funct. Analysis, vol. 17(6), 2008, 1709–1787.

[17] M.V. Bondarko, Differential graded motives: weight complex, weight filtrations and spectral sequences for realizations; Voevodsky vs. Hanamura, J. of the Inst. of Math. of Jussieu, v. 8(1), 2009, 39–97, см. также `http://arxiv.org/abs/math.AG/0601713`.

[18] M.V. Bondarko, Weight structures vs. t-structures; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general)// J. of K-theory, v. 6(3), 2010, 387–504, see also `http://arxiv.org/abs/0704.4003`

[19] M.V. Bondarko, Motivically functorial coniveau spectral sequences; direct summands of cohomology of function fields// Doc. Math., extra volume: Andrei Suslin's Sixtieth Birthday (2010), 33–117; see also `http://arxiv.org/abs/0812.2672`

[20] M.V. Bondarko, $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$-motivic resolution of singularities// Compositio Math. 147(5), 2011, 1434–1446.

[21] M.V. Bondarko, Gersten weight structures for motivic homotopy categories; retracts of cohomology of function fields, motivic dimensions,

and coniveau spectral sequences, preprint, 2018, https://arxiv.org/abs/1803.01432

[22] M.V. Bondarko, On weight complexes, pure functors, and detecting weights// J. of Algebra 574 (2021), 617–668.

[23] M.V. Bondarko, From weight structures to (orthogonal) t-structures and back, preprint, 2019, https://arxiv.org/abs/1907.03686

[24] Bondarko M.V. On infinite effectivity of motivic spectra and the vanishing of their motives// Doc. Math. 25 (2020), 811–840.

[25] M.V. Bondarko, On Chow-pure cohomology and Euler characteristics for motives and varieties, and their relation to unramified cohomology and Brauer groups, preprint, 2020, https://arxiv.org/pdf/2003.10415.pdf

[26] M.V. Bondarko, F. Déglise, Dimensional homotopy t-structures in motivic homotopy theory// Adv. Math., vol. 311 (2017), 91–189.

[27] M.V. Bondarko, On torsion pairs, (well generated) weight structures, adjacent t-structures, and related (co)homological functors, препринт, 2016, https://arxiv.org/abs/1611.00754.

[28] M.V. Bondarko, A.Ju. Luzgarev, On relative K-motives, weights for them, and negative K-groups, preprint, 2016, http://arxiv.org/abs/1605.08435

[29] Bondarko M.V., Sosnilo V.A., On purely generated α-smashing weight structures and weight-exact localizations// J. of Algebra, 2019, vol.535, 407–455.

[30] M.V. Bondarko, Intersecting the dimension and slice filtrations for motives// Homology, Homotopy and Appl., vol. 20(1), 2018, 259–274.

[31] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, Non-commutative localizations of additive categories and weight structures; applications to birational motives// J. of the Inst. of Math. of Jussieu, vol. 17(4), 2018, 785–821.

[32] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On constructing weight structures and extending them to idempotent extensions// Homology, Homotopy and Appl., vol. 20(1), 2018, 37–57.

[33] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On the weight lifting property for localizations of triangulated categories, Lobachevskii J. of Math., vol. 39(7), 2018, 970–984.

[34] M.V. Bondarko, V.A. Sosnilo, On Chow-weight homology of geometric motives, 2020, to appear in Trans. AMS.

[35] D.-C. Cisinski, F. Déglise, Integral mixed motives in equal characteristic, Documenta Mathematica, Extra Volume: Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday, 2015, 145–194.

[36] D.-C. Cisinski, F. Déglise, Triangulated categories of mixed motives, 2019, Springer Monographs in Mathematics.

[37] J.- L. Colliot-Théléne, R.T. Hoobler, and B. Kahn. The Bloch-Ogus-Gabber theorem. In: Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996), volume 16 of Fields Inst. Commun., 31–94. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[38] F. Déglise, Modules homotopiques (Homotopy modules)// Doc. Math. 16 (2011), 411–455.

[39] F. Déglise, Orientable homotopy modules// Amer. Journ. of Math., 135(2), 519–560, 2013.

[40] G. Garkusha, I. Panin, Homotopy invariant presheaves with framed transfers // Cambridge Journal of Math., 8(1), 1–94, 2020.

[41] H. Gillet, C. Soulé, Descent, motives and K-theory// J. f. die reine und ang. Math. v. 478, 1996, 127–176.

[42] M. Hoyois, From algebraic cobordism to motivic cohomology// J. für die reine und ang. Math., vol. 2015 (702), 2015, 173–226.

[43] B. Kahn, R. Sujatha, Birational motives, II: triangulated birational motives// Int. Math. Res. Notices 2017 (22), 2017, 6778–6831.

[44] S. Kelly, Voevodsky motives and ldh-descent// Asterisque No. 391 (2017).

[45] H. Krause, Smashing subcategories and the telescope conjecture — an algebraic approach// Invent. math. 139 (2000), 99–133.

[46] M. Levine, Convergence of Voevodsky's slice tower// Doc. Math. 18 (2013), 907–941.

[47] C. Mazza, V. Voevodsky, Ch. Weibel, Lecture notes on motivic cohomology, Clay Mathematics Monographs, vol. 2, 2006.

[48] F. Morel, An introduction to A^1-homotopy theory, in: Contemporary Developments in Algebraic K-theory (M. Karoubi, A. O. Kuku, C. Pedrini eds.), ICTP Lecture Notes, vol. 15, 2003, 357–441.

[49] F. Morel, The stable A^1-connectivity theorems// K-theory, 35(1), 1–68, 2005.

[50] A. Neeman, Triangulated Categories. Annals of Mathematics Studies 148 (2001), Princeton University Press, viii+449 pp.

[51] D. Pauksztello, A note on compactly generated co-t-structures// Comm. in Algebra, vol. 40(2), 2012, 386–394.

[52] P. Pelaez, Birational motivic homotopy theories and the slice filtration// Doc. Math. 18, 51–70, 2013.

[53] P. Pelaez, Mixed motives and motivic birational covers// J. Pure Appl. Algebra 221(7), 2017, 1699–1716.

[54] V.A. Sosnilo, Theorem of the heart in negative K-theory for weight structures// Doc. Math. 24 (2019), 2137–2158.

[55] V. Voevodsky, Triangulated category of motives, in: Voevodsky V., Suslin A., and Friedlander E., Cycles, transfers and motivic homology theories, Annals of Mathematical studies, vol. 143, Princeton University Press, 2000, 188–238.

[56] V. Voevodsky, Cohomological theory of presheaves with transfers, same volume, 87–137.

Список иллюстраций