На правах рукописи

ГЛАЗМАН Александр Львович

ОБОБЩЁННЫЕ РОМАШКИ В k-СВЯЗНОМ ГРАФЕ

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН).

Научный руководитель: КАРПОВ Дмитрий Валерьевич
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

Райгородский Андрей Михайлович
доктор физико-математических наук
профессор Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова

Образцова Светлана Анатольевна
кандидат физико-математических наук
научный сотрудник (postdoctoral researcher), Тель-Авивский университет

Ведущая организация:

Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург.

Защита состоится « 4 » марта 2015г. в 16.00 на заседании диссертационного совета Д002.202.02 в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council-02/dissertations

Автореферат разослан « __ » ________ 2015г.

Ученый секретарь
диссертационного совета А. В. Малютин

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

Теория графов является одним из важнейших и интереснейших разделов математики. В различных областях математики — алгебре, топологии, информатике и других — возникает потребность описания свойств тех или иных объектов на языке теории графов и использования результатов теории графов, что подчеркивает значимость изучения графов и их свойств.

Одним из основных понятий в теории графов является понятие *связности*. Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует путь. Граф называется *(вершинно) k-связным*, если в нем не менее $k+1$ вершин и при удалении любых $k-1$ вершин получается связный граф. Понятие вершинной k-связности является обобщением понятия связности и по этой причине имеет большое теоретическое и практическое значение.

Одно из направлений исследований по вершинной связности — это исследование структуры разбиения k-связных графов k-разделяющими множествами (то есть, k-вершинными множествами, удаление которых делает граф несвязным). Интерес к этому объясняется тем, что в изучении свойств связных графов важную роль играет структура разбиения графа *точками сочленения* — вершинами, удаление которых делает этот граф несвязным. Точки сочленения разбивают граф на *блоки* — максимальные по включению двусвязные подграфы, структуру этого разбиения удобно отображать с помощью дерева блоков и точек сочленения.

Многими исследователями делались попытки обобщить эти конструкции на разбиение k-связного графа его k-разделяющими множествами. В 1966 году W. T. Tutte подробно описал конструкцию разбиения двусвязного графа его 2-разделяющими множествами. Эта структура является естественным обобщением структуры блоков и точек сочленения для двусвязного графа и также отображается с помощью дерева. В 1992 году W. Hohberg предложил обобщение этой конструкции на случай разбиения k-связного графа его k-разделяющими множествами для произвольного k. Основным недостатком конструкции, которую предложил W. Hohberg, является зависимость получаемых в результате блоков от процесса разбиения и, как следствие, отсутствие единственности структуры разбиения.

F. Harary, Y. Kodama (1964) и D. W. Matula (1978) предлагали называть k-блоком или

k-компонентой графа G максимальный по включению k-связный подграф этого графа. При очевидной аналогии в определении с блоками связного графа, свойства вводимых таким образом k-блоков имеют мало общего со свойствами классических двусвязных блоков.

Д. В. Карпов (2002) предложил новый метод изучения структуры взаимного расположения k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа — понятие части разбиения графа набором разделяющих множеств. Д. В. Карпов доказал теорему, утверждающую, что если в каждой части разбиения графа набором k-вершинных разделяющих множеств не менее k вершин, то все множества этого набора могут быть разбиты на группы, образующие так называемые ромашки. Эти ромашки являются естественным обобщением колес в трехсвязном графе, которые описал W. T. Tutte (1966).

Д.В.Карпов и А.В.Пастор (2011) описали с помощью этого метода структуру трехсвязного графа. В их работе трехвершинные разделяющие множества разбиваются на вполне определенные группы, которые называются комплексами. Благодаря этому новому определению удается построить гипердерево, вершинами которого являются комплексы. То есть и в случае трехсвязного графа получается некий аналог дерева блоков и точек сочленения. При этом, единственным комплексом, содержащим потенциально неограниченное число разделяющих множеств, является ромашка.

Д.В.Карпов (2013) описал дерево разбиения, построенное Таттом (1966) для двусвязного графа, в терминах частей разбиения графа разделяющим множеств. Это дерево очень похоже на дерево блоков и точек сочленения. Роль точек сочленения здесь выполняют одиночные разделяющие множества, то есть разделяющие множества, не зависимые ни с одним другим разделяющим множеством, а роль блоков — части разбиения графа набором всех одиночных разделяющих множеств. При этом, если в часть разбиения добавить ребра между вершинами каждого одиночного разделяющего множества, то получится либо трехсвязный подграф, либо простой цикл. Части разбиения, являющиеся простыми циклами, соответствуют ромашкам в двусвязном графе. Таким образом, все неодиночные разделяющие множества в двусвязном графе содержатся в некоторой максимальной ромашке, причем разные ромашки соответствуют разным частям из дерева разбиения и, как следствие, не разбивают друг друга. Используя эту структуру, Карпов нашел простое доказательство теоремы Маклейна о планарности двусвязного графа, доказал несколько оценок на хроматическое число двусвязного графа и описал критические двусвязные графы.

Таким образом, вопрос об изучении свойств ромашек в k-связном графе является актуальным.

Цель диссертационной работы. Основные цели диссертации — ввести понятие обобщенных ромашек в k-связном графе, доказать ряд основополагающих свойств для произвольного k, после этого перейти к описанию взаимного расположения обобщенных ромашек в четырехсвязном графе и доказать, в частности, теорему о взаимном расположении двух максимальных обобщенных ромашек, имеющих общее разделяющее множество.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть использованы для дальнейшего изучения свойств обобщенных ромашек в k-связных графах и свойств самих k-связных графов. В частности, введение понятия внешних ребер части разбиения графа обобщенной ромашкой может существенно облегчить дальнейший анализ обобщенных ромашек в k-связных графах. Обобщения понятия ромашки и детальное описание взаимного расположения двух обобщенных ромашек в четырехсвязном графе может быть использовано для полного описания структуры разделяющих множеств этих графов.

Методы исследований. В работе использовались классические методы работы с k-связными графами и новые идеи. Одной из наиболее существенных новых методик изучения ромашек в k-связном графе является обобщение понятия части разбиения и, как следствие, понятия ромашки, а также введение понятия внешних ребер в главе диссертации *обобщенные ромашки в k-связном графе.*

Основные положения и результаты, выносимые на защиту. Решен комплекс задач, связанных с расположением разделяющих множеств в k-связном графе:

1. Обобщение понятия ромашки и доказательство для обобщенной ромашки базовых утверждений. В частности, доказана корректность определения части разбиения графа обобщенной ромашкой.

2. Введение понятия внешних ребер части разбиения графа внутренним множеством обобщенной ромашки, существенно облегчающее изучение структуры этой части. Исследована связность частей разбиения графа обобщенной ромашкой и доказано утверждение о добавлении в ромашку новых лепестков.

3. Для четырехсвязного графа произведен более детальный анализ свойств обобщенных ромашек. Описаны все разделяющие множества, содержащиеся в множестве вершин обобщенной ромашки. Для обобщенных ромашек с пустым центром описано взаимное расположение двух ромашек с общим разделяющим множеством.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, представленные в работе, являются достоверными, математически строго доказанными фактами. Основные результаты диссертации обсуждались на семинаре по дискретной математике Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, на семинаре по дискретной математике в Уральском федеральном университете (Екатеринбург), на Петербургском топологическом семинаре им. В. А. Рохлина (ПОМИ РАН) и на первом "Российско-Финском симпозиуме по дискретной математике".

Публикации. Основные результаты диссертации содержатся в двух работах, опубликованных в рецензируемых журналах [1, 2].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав и библиографии. Общий объем диссертации 135 страниц. Библиография включает 28 наименований на 3 страницах.

Содержание работы

Диссертация посвящена изучению свойств ромашек в k-связных графах и частей, на которые ромашки делят k-связный граф. (В диссертации рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер.)

Приведем определения основных понятий, используемых в диссертации. Как обычно, через $V(G)$ обозначается множество вершин графа G. Множество всех k-вершинных разделяющих множеств в графе G обозначается через $\mathfrak{R}_k(G)$.

Определение 1. 1) Пусть $R, X \subset \mathrm{V}(G)$. Будем говорить, что множество R *разделяет* множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

2) Пусть $U, W \subset \mathrm{V}(G)$. Будем говорить, что множество R *отделяет* множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что R отделяет вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что R отделяет вершину u от вершины w.

Определение 2. 1) Будем называть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае, назовем эти множества *зависимыми*.

2) Каждому набору $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ поставим в соответствие *граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$, вершины которого — множества набора $\mathfrak{S}$, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие множества зависимы.

Таким образом, набор $\mathfrak{S}$ разбивается на *компоненты зависимости* — поднаборы, соответствующие компонентам связности графа $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

Нетрудно доказать, что если T не разделяет S, то S не разделяет T, то есть, эти множества независимы.

Определение 3. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) *Часть* разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ (или часть $\mathfrak{S}$-разбиения) — это подграф графа G, индуцированный на максимальном по включению множестве $A \subset \mathrm{V}(G)$ таком, что никакое множество $S \in \mathfrak{S}$ не разделяет A. Будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ множество всех таких частей. Если набор $\mathfrak{S}$ состоит из одного множества S, то будем обозначать множество всех частей $\{S\}$-разбиения через $\mathrm{Part}(S)$.

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, будем называть *внутренними*, а множество всех таких вершин — *внутренностью* части A, которую будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$. Вершины части A, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а множество всех этих вершин — *границей* части A и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Первая глава начинается с определения самого важного понятия в диссертации — обобщенной ромашки в k-связном графе.

Пусть $m \geq 4$ и множества $P, Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathrm{V}(G)$ удовлетворяют следующим условиям для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$0 \leq |P| < k, \qquad Q_i \cap P = \varnothing, \qquad |Q_i| = \frac{k - |P|}{2}.$$

Рассмотрим набор $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$. Множества $Q_1, \ldots, Q_m$ считаем *циклически упорядоченными*, то есть, их циклическая перестановка не меняет F. Введем обозначение $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$.

Если не заботиться о строгости определения, удобно рассматривать ромашку, расположив лепестки $Q_1, \ldots, Q_m$ по окружности в соответствии с их циклическим порядком, а в центр поместив P. При этом удаление двух несоседних лепестков и центра делает граф несвязным, отделяя одну дугу этой окружности от другой.

Строгое определение обобщенной ромашки гораздо более абстрактно и требует некоторых предварительных определений.

Определение 4. 1) Индексы у нас являются вычетами по модулю m, и удобно представлять их себе как числа от 1 до m, расставленные по кругу — по часовой стрелке для определенности.

Пусть $i \notin \{j, j-1\}$. Тогда под индексами от i до j будем понимать индексы, лежащие на той из дуг между i и j, на которой находится индекс $i+1$. Для $i = j-1$ под индексами от i до j будем понимать i и j.

Различные индексы i и j будем называть *соседними*, если $i = j-1$ или $j = i-1$, и *несоседними* в противном случае.

2) Назовем Q_i и Q_j *близкими*, если включение $Q_k \subset Q_{i,j}$ выполняется либо для всех k от i до j, либо для всех k от j до i.

Далее вводится понятие *обобщенных частей*, на которые делит граф разделяющее множество. Отличие обобщенной части от обычной в том, что не требуется связности, то есть обобщенные части могут состоять из нескольких обычных.

Определение 5. 1) Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, причем $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \ldots, A_m\}$. Рассмотрим произвольное j от 2 до m и некоторое дизъюнктное разбиение $I = \{I_1, \ldots, I_j\}$ множества натуральных чисел от 1 до m на j подмножеств. Рассмотрим такие индуцированные подграфы $B_1,\ldots,B_j$ графа G, что $\mathrm{V}(B_t) = \cup_{i \in I_t} \mathrm{V}(A_i)$. Будем говорить, что S делит граф G на *обобщенные части* $B_1,\ldots,B_j$, согласованные с разбиением I. Обозначать набор обобщенных частей, согласованных с I, будем так — $\mathrm{Part}_I(S)$.

2) Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ — это набор разделяющих множеств $S_1, \ldots, S_t$, которые делят граф на $m_1, \ldots, m_t$ частей соответственно. Рассмотрим набор $\mathfrak{I} = \{I^1, \ldots, I^t\}$ такой, что для всех j от 1 до t множество I^j является разбиением чисел от 1 до m_j на несколько (более одной) групп. Обобщенной частью разбиения графа набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$, согласованной с набором разбиений $\mathfrak{I}$, назовем максимальный по включению индуцированный подграф, целиком лежащий в одной из обобщенных частей разбиения

графа каждым из множеств набора. Множество всех обобщенных частей разбиения графа набором $\mathfrak{S}$, согласованных с набором разбиений $\mathfrak{I}$, будем обозначать через $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{S})$ и называть *обобщенным разбиением* графа набором $\mathfrak{S}$, согласованным с $\mathfrak{I}$.

3) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, будем называть *внутренними*, а множество всех таких вершин — *внутренностью* части A, которую будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$. Вершины части A, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а множество всех этих вершин — *границей* части A и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Теперь можно определить обобщенную ромашку.

Определение 6. 1) Пусть существует такие набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, состоящий из множеств вида $Q_{i,j}$, где i и j — несоседние, и набор разбиений $\mathfrak{I}$, что обобщенное разбиение $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{S})$ состоит из m частей $G_{1,2}$, $G_{2,3}, \ldots$, $G_{m,1}$, причем $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Кроме того, пусть из того, что Q_i и Q_j пересекаются, следует, что они близки. Тогда назовем набор F *обобщенной ромашкой*.

2) Множество P назовем *центром*, а множества $Q_1, \ldots, Q_m$ — *лепестками* этой ромашки. *Разбиением графа G обобщенной ромашкой F* назовем $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(F) = \{G_{1,2}, \ldots, G_{m,1}\}$, а подграфы $G_{i,i+1}$ будем называть *частями* этого разбиения.

После этого доказываются основные свойства обобщенных ромашек, сближающие абстрактное определение с интуитивным графическим изображением. Введем обозначение

$$G_{i,j} = G\left(\bigcup_{x=i}^{j-1} \mathrm{V}(G_{x,x+1})\right).$$

Определение 7. *Внутренними множествами* обобщенной ромашки назовем множества $Q_{i,j}$ для всех пар неблизких лепестков. Обозначим через $\mathfrak{R}(F)$ набор, состоящий из внутренних множеств ромашки F. *Границами* ромашки назовем множества $Q_{i,i+1}$ для всех i.

Пусть $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ — обобщенная ромашка. Теорема 1 утверждает, что $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем множество $Q_{i,j} \in \mathfrak{R}(F)$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$.

Благодаря теореме 2 становится корректно определено понятие разбиения графа ромашкой F. Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_k(G)$ порождают обобщенные ромашки F_S и F_T соответственно с одинаковым центром и одинаковыми множествами лепестков. Тогда Теорема 2 утверждает, что $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ и $F_S = F_T$ (то есть, циклические порядки лепестков в этих ромашках одинаковы).

После этого рассматривается ряд свойств частей разбиения графа обобщенной ромашкой, более детально описывающих их структуру. Для этого вводится понятие внешних ребер части разбиения графа обобщенной ромашкой.

Определение 8. Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ — обобщенная ромашка. Рассмотрим два ее произвольных лепестка Q_i и Q_j, где $i \neq j$. Ребро части $G_{i,j}$ назовем *внешним*, если ни для какого x от i до $j-1$ оно не является ребром части $G_{x,x+1}$. Множество внешних ребер части $G_{i,j}$ обозначим через $\mathrm{E}^F_{out}(i,j)$.

Понятие внешних ребер было введено диссертантом. Польза внешних ребер части разбиения графа ромашкой заключается в том, что после их удаления из части про нее становится достаточно просто доказывать некоторые интуитивно верные структурные утверждения, которые до удаления внешних ребер были не верны.

Обозначим через ℓ количество вершин в лепестке обобщенной ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$.

В Лемме 10 доказывается, что для k от $i+1$ до $j-1$ лепесток Q_k отделяет $\mathrm{V}(G_{i,k})$ от $\mathrm{V}(G_{k,j})$ в подграфе $G_{i,j} - \mathrm{E}_{out}(i,j) - P$ (при некоторых дополнительных ограничениях). После этого в леммах 12 и 13 исследуется возможность добавления лепестков в ромашку — устанавливаются достаточные для этого условия. Эти утверждения оказываются крайне полезными в доказательстве Теоремы 5.

Наконец, в лемме 15 доказывается, что граф, полученный из $G_{i,j} - P$ удалением всех внешних ребер этой части и добавлением всех ребер, соединяющих две вершины из лепестка Q_i или две вершины из лепестка Q_j, является ℓ-связным, и описываются ℓ-вершинные разделяющие множества этого подграфа.

Вторая глава диссертации посвящена изучению свойств обобщенных ромашек в четырехсвязных графах. Основное отличие четырехсвязного графа от графов большей связности заключается в том, что есть всего два типа ромашек — с центром, состоящим из двух вершин (2-ромашки), и с пустым центром (0-ромашки). Работу с ромашками усложняют ребра между вершинами разных лепестков. В случае четырехсвязного графа в лепестках либо по одной, либо по две вершины, и для двух выбранных лепестков можно рассмотреть все возможные способы соединения их вершин ребрами. Объем работы существенно сокращается благодаря утверждениям, доказанным в первой главе для произвольного

k-связного графа.

Обобщенные 2-ромашки в четырехсвязном графе, во-первых, являются, ромашками, а во-вторых, очень похожи на ромашки в трехсвязном графе, отличие только в дополнительной вершине в центре. В Теореме 3 исследуются 4-вершинные разделяющие множества, содержащиеся в множестве вершин максимальной 2-ромашки — доказывается, что все они содержат ее центр, то есть, либо являются внутренними множествами ромашки, либо ее границами.

Обобщенные 0-ромашки в четырехсвязном графе исследовать оказывается гораздо сложнее. Для формулировки аналогичной теоремы про разделяющие множества, содержащиеся в множестве вершин максимальной 0-ромашки, необходимо ввести понятие квазивнутренних множеств.

Определение 9. Назовем лепесток 0-ромашки *переключателем*, если он состоит из двух несмежных вершин и лежит в объединении двух соседних с ним лепестков. Если лепесток Q_i 0-ромашки $F = (Q_1, \dots, Q_m)$ является переключателем, то *переключением* Q_i назовем замену Q_i на $Q'_i = (Q_{i-1} \cup Q_{i+1}) \setminus Q_i$.

Определение 10. Две 0-ромашки будем называть *похожими*, если одна из них получается из другой после нескольких переключений. Внутренние множества ромашки, похожей на ромашку F, будем называть *квазивнутренними* множествами F.

В Теореме 4 доказывается, что любое 4-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин максимальной обобщенной 0-ромашки, является либо ее внутренним множеством, либо ее квазивнутренним множеством, либо ее границей.

Далее исследуется взаимное расположение двух максимальных обобщенных 0-ромашек F и F', имеющих общее внутреннее разделяющее множество. В общем и целом, в Теореме 5 доказывается, что за исключением некоторых вырожденных случаев, ромашки лежат "сбоку" друг от друга, то есть, ни одно внутреннее разделяющее множество ромашки F (или F') не разделяет множество $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$ (соответственно, $\mathrm{V}(F) \setminus \mathrm{V}(F')$). Для точной формулировки указанной теоремы необходимо ввести понятие малых ромашек и ромашек W1 и W2-типа.

Определение 11. Назовем обобщенную 0-ромашку F *малой*, если у нее есть внутреннее множество, пересекающееся со всеми лепестками F.

Определение 12. Допустим, что вершины обобщенной 0-ромашки можно таким образом обозначить через $a, b, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$, что лепестками ромашки являются множества $\{a, b\}$, $\{d_1, d_2\}$, $\{d_2, d_3\}$, $\{d_3, d_4\}$, $\{d_4, d_5\}$. Будем говорить тогда, что это — *ромашка* $W1$*-типа.*

Если в множестве вершин ромашки есть еще одна вершина, назовем ее вершиной c, причем $\{a, c\}$ является лепестком, то будем говорить, что это — *ромашка* $W2$*-типа.*

Теперь можно сформулировать Теорему 5. Пусть две максимальные обобщенные 0-ромашки F и F' имеют общее внутреннее разделяющее множество T. Известно, что некоторое внутреннее разделяющее множество ромашки F разделяет множество $\mathrm{V}(F') \setminus \mathrm{V}(F)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:

1° Граф G изоморфен одному из трех исключений, содержащих либо 10, либо 12 вершин и подробно описанных в диссертации.

2° Множество T разбивается в обеих ромашках на лепестки одинаково, обе ромашки являются малыми, причем у них ровно два общих лепестка. Кроме того, индуцированный подграф графа G на двух общих лепестках ромашек F и F' — это цикл длины 4.

3° Множество T разбивается на лепестки по-разному, обе ромашки являются малыми, в каждой из них есть ровно по две вершины, не лежащие в другой.

4° Множество T разбивается на лепестки по-разному, обе ромашки — $W1$-типа, в каждой из них есть ровно по две вершины, не лежащие в другой.

5° Множество T разбивается на лепестки по-разному, обе ромашки — $W2$-типа, в каждой из них есть ровно по две вершины, не лежащие в другой.

Список публикаций

1. А. Л. Глазман. *Обобщенные ромашки в k-связном графе.* // Записки научных семинаров ПОМИ, **391**, 2011, стр. 45-78.

2. А. Л. Глазман. *Обобщенные ромашки в k-связном графе. Часть 2.* // Записки научных семинаров ПОМИ, **417**, 2013, стр. 11-85.