“УТВЕРЖДАЮ”
Директор ИППИ РАН
академик РАН
А. П. Кулешов

25 ноября 2015

ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации Н. В. Цилевич “Асимптотическая теория унитарных представлений симметрических групп и ее приложения”, представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации можно выделить две основные темы:

(1) представления бесконечной симметрической группы;
(2) гамма–процесс, распределение Пуассона–Дирихле и приложения к представлениям группы токов.

Как справедливо отмечено автором, связующим звеном служит пространство Фока в его различных реализациях. Можно еще добавить, что распределение Пуассона–Дирихле с параметром $\theta = 1$ ответственно за асимптотику равномерного распределения на растущих симметрических группах $\mathfrak{S}_n$ и, тем самым, бесконечная симметрическая группа неявно присутствует и во второй теме.

Под бесконечной симметрической группой в диссертации понимается счетная дискретная группа $\varinjlim \mathfrak{S}_n$ — индуктивный предел конечных симметрических групп относительно естественных вложений $\mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_{n+1}$. Эта группа состоит из финитных перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$ и обозначается в диссертации через $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.

Традиционная теория унитарных представлений строится в рамках класса т.н. ручных групп, тогда как $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ относится к разряду т.н. диких групп. Для них теория неизбежно должна исходить из иных принципов. В частности, стандартный вопрос об описании всех неприводимых унитарных представлений применительно к группе $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ оказывается т.н. дикой классификационной задачей и, тем самым, не допускает обозримого решения.

Представления, изучаемые в диссертации, это, в основном, индуктивные пределы конечномерных представлений конечных симметрических групп. Первое чувство, вызванное чтением диссертации, это удивление от контраста между кажущейся простотой рассматриваемых представлений и содержательностью полученных результатов.

Попытки построения отдельных примеров неприводимых унитарных представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, в том числе, достаточно сложных, предпринимались ранее (цикл работ Т. Хираи), но в них не было видно четкой идеи и возникало ощущение, что это направление — тупиковое.

Автор идет по другому пути: она не нагромождает тяжеловесных конструкций, а концентрирует внимание на самом главном — выявлению скрытых связей с другими областями теории представлений и математики в целом.

С этой точки зрения выделяются следующие два результата диссертации:

1. В теореме 1.3 автор указывает на интригующее сходство в структуре разложения некоторого специального представления Шура–Вейля группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и представления алгебры Вирасоро, связанного с некоторым представлением со старшим весом аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$, и затем явно строит изоморфизм между соответствующими пространствами. Результат совершенно неожиданный, и дальнейшие исследования в этом направлении представляются весьма желательными.
2. В теореме 3.7 показано, как связать асимптотику максимального собственного значения гамильтониана антиферромагнитной цепочки XXX с асимптотикой операторов Кокстера–Лапласа в некоторых индуктивных цепочках неприводимых представлениях растущих симметрических групп.

Но это только два наиболее эффектных результата, относящихся к представлениям группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, тогда как в диссертации есть целый ряд других утверждений и находок, заслуживающих внимания.

Так, чрезвычайно любопытны все вычисления из раздела 3.2, где автор анализирует предельное поведение операторов Кокстера–Лапласа в различных представлениях. Здесь получен ценный экспериментальный материал, который может послужить отправной точкой для дальнейших исследований.

Совсем вроде бы простая идея разрежения исходной цепочки вложенных симметрических групп $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \dots$, а между тем ее умелое применение в комбинации с классической двойственностью Шура–Вейля приводит к содержательной бесконечномерной версии двойственности Шура–Вейля, введенной автором совместно с А. М. Вершиком. Нетривиальность ситуации связана с тем, что бесконечное тензорное произведение гильбертовых пространств в смысле фон Неймана зависит от произвола в выборе стабилизирующей системы векторов.

Следует отметить также результаты раздела 1.4 о представлениях, индуцированных с юнговских подгрупп группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. Они не сложны в техническом аспекте, но здесь важен акцент на связи с марковскими мерами на бесконечных таблицах. Те примеры марковских мер на таблицах, которые ранее исследовались в теории представлений больших групп, относились к классу т.н. центральных мер, тогда как в диссертации возникают совсем другие, и уже не центральные меры. Интересна их связь со случайными блужданиями, отмеченная автором.

Результаты, относящиеся ко второй теме диссертации, связаны с понятием гамма-меры, или гамма-процесса. Это замечательный пример "меры на мерáх" — вероятностное распределение, задающее закон распределения случайных атомических мер на пространстве Лебега.

Автор устанавливает ключевые свойства гамма-процесса — квазиинвариантность и эргодичность относительно естественного действия большой группы мультипликативных преобразований. Более того, получена явная формула для производной Радона–Никодима. Это красивые и несомненно важные результаты. С их помощью автор исследует т.н. коммутативную модель для канонического представления группы измеримых токов $SL(2,\mathbb{R})^X$.

Коммутативная модель доставляет реализацию канонического представления в гильбертовом пространстве L^2 по гамма–мере. В коммутативной модели очень просто записывается действие подгруппы B^X, где B обозначает борелевскую подгруппу в $SL(2,\mathbb{R})$. Чтобы породить всю группу токов, достаточно добавить к B^X всего один элемент, но выписать в явном виде его действие нелегко. Автор объясняет, как это сделать, опираясь на развитую ею теорию, которая позволяет перейти от исходной реализации канонического представления в схеме Араки к коммутативной модели.

Важность гамма-процесса связана также с тем обстоятельством, что он тесно связан (посредством независимого масштабирования) с процессом Дирихле, причем первый процесс проще, нежели второй. Автор изобретательно использует этот факт и получает с помощью гамма-процесса очень интересные результаты о процессе Дирихле и затем о распределении Пуассона–Дирихле. Тут и новый вывод тождества Чифарелли–Ригаццини, и нетривиальная конструкция полиморфизмов, сохраняющих класс эквивалентности распределения Пуассона–Дирихле.

Несколько мелких замечаний.

• Было бы целесообразно включить в список литературы книгу Stratila and Voiculescu, Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$, Springer Lect. Notes Math. 486 (1975). Хотя эта книга нацелена на изучение представлений бесконечномерной унитарной группы, а не бесконечной симметрической группы, ее содержание имеет точки соприкосновения с материалом диссертации.

• Утверждение о неприводимости индуктивного предела неприводимых представлений в общем виде, по-видимости, впервые было отмечено в статье Коломыцев и Самойленко, Укр. мат. ж. 29 (1977), 526–531. Стоило бы упомянуть и эту статью.

• Выражение "'мультипликативный базис" (с. 32) несколько неудачно; было бы лучше употребить стандартный термин "система образующих".

• Упоминание копереходных вероятностей в контексте с. 16 не нужно: они не определяют однозначно марковскую меру.

• Преобразования S_a (с. 115–116) не образуют группу, поэтому следовало бы говорить не о группе, а о семействе этих преобразований.

• Имеется также ряд опечаток, но они очевидны и не заслуживают особого упоминания.

Однако высказанные замечания носят чисто редакционный характер и не затрагивают доказательства. В целом текст написан тщательно, с обстоятельным введением, дающим четкое представление о содержании работы.

Результаты диссертации оригинальны и несомненно могут быть квалифицированы как крупное научное достижение. Они представляют значительный интерес для специалистов в области функционального анализа, теории представлений, теории вероятностей и математической физики. Особо следует отметить найденные автором связи с моделями математической физики.

Результаты диссертации могут быть использованы во многих научных центрах, в том числе, в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, математических факультетах университетов (МГУ, СПбГУ, ВШЭ и др.). Материал диссертации дает прекрасный выбор тем для специальных курсов и семинаров.

Основные результаты своевременно опубликованы, автореферат адекватно отражает содержание работы, соответствие специальности 01.01.01 сомнений не вызывает.

Диссертация удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям (пункт 9 положения ВАК "О присуждении ученых степеней"), а ее автор, Наталия Владимировна Цилевич, несомненно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01.

д.ф.-м.н., г.н.с. Г. И. Ольшанский

Отзыв обсужден и одобрен на заседании семинара Добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН.

Руководитель семинара
д.ф.-м.н., г.н.с. М. Л. Бланк