На правах рукописи

Иванов Александр Валентинович

Коэффициенты Сили—деВитта: диаграммная техника, нерекурсивная формула, интеграл по путям и теорема Атьи—Зингера—Патоди для многообразия с доменными стенками

Специальность 01.01.03 — «Математическая физика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2021

Работа выполнена в ФГБУН Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН).

Научный руководитель:	**Деркачёв Сергей Эдуардович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математических проблем физики, ФГБУН ПОМИ РАН
Официальные оппоненты:	**Барвинский Андрей Олегович,** доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теории фундаментальных взаимодействий, ФГБУН Физический институт им. П.Н. Лебедева Российской академии наук (ФИАН)
	Пастон Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц, ФГБОУ ВО Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ)
Ведущая организация:	Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ), лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова

Защита состоится «___» _______ 2021 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН ПОМИ РАН и на сайте http://www.pdmi.ras.ru/pdmi/diss-council/.

Автореферат разослан «___» _______ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.202.01,
доктор физико-математических наук — А.Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Метод собственного времени развивается на протяжении более чем восьмидесяти лет и на сегодняшний день является широко используемым инструментом в теоретической и математической физике. Основную идею метода можно сформулировать следующим образом. Пусть $\mathcal{B}$ — некоторый дифференциальный оператор. Предположим, что нам необходимо найти обратный к нему оператор $\mathcal{G}$, который является решением уравнения $\mathcal{B}\mathcal{G} = \mathbf{1}$. В этом случае можно перейти к рассмотрению вспомогательной задачи вида

$$(\partial_\tau + \mathcal{B})\mathcal{K}(\tau) = 0, \quad \mathcal{K}(0) = \mathbf{1}, \tag{1}$$

где переменная τ называется собственным временем. Тогда обратный оператор $\mathcal{G}$ получается из $\mathcal{K}(\tau)$ простым интегрированием по переменной τ. Возникает естественный вопрос: зачем усложнять задачу и переходить к уравнению (1)? Дело в том, что функцию $\mathcal{K}(\tau)$ можно раскладывать около некоторого вспомогательного решения и искать ответ в виде ряда по степеням собственного времени. Такая процедура позволяет находить асимптотическое разложение для обратного оператора $\mathcal{G}$.

Впервые данный подход был предложен В. А. Фоком в работе в 1937 году. В этой статье автор предложил введение собственного времени в уравнение Дирака с последующим его интегрированием. Такая процедура давала возможность найти приближенное решение и, по сути, являлась обобщением и упрощением результата Паули, полученного после применения метода Вентцеля—Бриллуэна. Лишь спустя 15 лет, после формулировки квантовой теории поля в ковариантном виде, метод собственного времени появился в работах Намбу, при построении функции Грина для уравнения Дирака, и Швингера, при исследовании калибровочной инвариантности и поляризации вакуума. С тех пор подход стал активно использоваться в теоретической физике.

Следующим важным этапом в развитии метода стали работы деВитта, в которых были рассмотрены квантовые поправки в искривленном пространстве-времени, а также работы Сили, по исследованию краевых задач, и Гилки, по спектральной геометрии. Эти работы перевели метод на качественно новый уровень, поскольку в них появилось математическое описание в терминах теории расслоений и спектральной геометрии. В частности, авторы изучали асимптотическое разложение фундаментального решения $\mathcal{G}$ для оператора второго порядка. В этом случае задача (1) редуцируется к уравнению теплопроводности, а решение $\mathcal{K}(\tau)$ называется тепловым ядром.

Другими примерами использования подхода в теоретической физике могут послужить изучение эффекта Казимира (см. работы Швингера, Бордага и др.), исследование Боллом аномалий киральных калибровочных теорий, вывод аномальных киральных тождеств Уорда—Такахаши в работе Фуджикава, перенормировка квантовой теории Янга—Миллса в формализме фонового поля в двух и трех петлях (Джек, Осборн, Бьорнсен, ван де Вен), а также многие другие эффекты квантовых и квази-классических теорий.

Благодаря появлению в теоретической физике функционального интегрирования и понятия диаграмм Фейнмана многие математические объекты приобрели ясный физический смысл. В частности, данный подход нашел свое применение в теории теплового ядра (Матиас, Норрис, Бастианелли, Коррадини, Пизани). Как известно, работа с континуальным интегралом требует определения детерминанта оператора, однако в большинстве примеров такие величины расходятся. В этом случае придать ясность математическим объектам можно при помощи определения квази-интеграла на бесконечномерном пространстве (см. монографию Тахтаджяна), или же путем введения регуляризации посредством аналитического продолжения дзета-функции, как это было сделано в работах Доукера, Критчли и Хокинга.

Основной интерес математиков к тепловому ядру появился благодаря теореме об индексе, которая впервые была доказана в работе Атьи и Зингера в 1963 году. Она позволила связать спектральные характеристики дифференциального оператора с топологическими характеристиками многообразия. Спустя несколько лет в статье Атьи и Ботта был предложен аналитический подход к доказательству, который основывался на том факте, что индекс может быть представлен разностью двух дзета-функций. Такие функции, имеющие прямое отношение к тепловому ядру, впервые появились при работе с оператором Лапласа—Бельтрами, а затем обобщены Сили. После выхода статьи Патоди, в которой были показаны некоторые сокращения, связь теоремы об индексе и асимптотического разложения теплового ядра стала активно использоваться при доказательствах, что имеет тенденцию и по сей день.

Теорема Атьи—Зингера—Патоди об индексе устанавливает равенство между индексом оператора Дирака на многообразии с границей, интегралом от плотности Понтрягина по внутренности многообразия и η-инвариантом для вспомогательного оператора Дирака на границе. Такое соотношение весьма примечательно с точки зрения теоретической физики, поскольку плотность Понтрягина является локальной аксиальной аномалией (см. работы Адлера, Белла и Джакива) и выражается через коэффициенты асимптотического разложения теплового ядра, в то время как η-инвариант можно использовать для определения аномалии четности, как это показали Ниеми, Редлих, Альварес-Гауме и их соавторы.

Соотношения между аномалиями на границе и внутри объема активно изучаются (Виттен, Йонекура) в настоящее время в контексте механизма “аномальных токов” . Также Виттен использовал теорему об индексе в рамках квантовой теории поля при обсуждении топологических фаз в фермионном интеграле по траекториям.

Несмотря на то, что теорема об индексе стала применяться в контексте квантовой теории поля вскоре после выхода оригинальной статьи Ортасу, Роте и Шроера, использование ее было ограничено нелокальной природой граничных условий. Однако, в более поздних работах использование нелокальных граничных условий стало ненужным. Так, в недавней статье Виттена изучалась теорема об индексе с локальными условиями на границе. Граничные же вклады в аномалию четности были посчитаны в работах Василевича и Куркова также и для локальных условий.

При обсуждении построения теплового ядра важно различать два случая: многообразие без границы и с границей. Во втором случае постановка задачи (1) дополняется граничными условиями, которым должно удовлетворять тепловое ядро $\mathcal{K}(\tau)$. Впервые такой случай был рассмотрен в работе Маккина и Зингера. Далее, в статьях Макавити и Осборна были рассмотрены случаи с различными граничными условиями, в том числе и обобщенными.

Как известно, точное решение уравнения теплопроводности удается получить лишь в специальных случаях, поэтому отдельной важной задачей является вычисление коэффициентов разложения теплового ядра в асимптотический ряд при малых значениях собственного времени τ. К примеру, при рассмотрении оператора Лапласа, как правило, анзатц выбирается в следующем виде

$$\mathcal{K}(\mathrm{x},\mathrm{y};\tau) = (4\pi\tau)^{-\mathrm{d}/2} e^{-(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2/4\tau} \sum_{2\mathrm{k}=0}^{\infty} \tau^{\mathrm{k}} \mathfrak{a}_{\mathrm{k}}(\mathrm{x},\mathrm{y}), \tag{2}$$

где d — размерность пространства, а функции $\mathfrak{a}_k$ носят название коэффициентов Сили—деВитта (иногда также содержат фамилии Хамидью и Гилки). Помимо давно известных результатов для первых трех коэффициентов, которые могут быть найдены в стандартных монографиях, важно вспомнить подсчет четвертого (Авримиди, Амстердамский, Беркин, О’Коннор) и пятого (ван де Вен) коэффициентов в самой общей постановке на многообразиях без границы, а также коэффициентов более высокого порядка при некоторых ограничениях на калибровочную связность (Аврамиди).

Имеющиеся на данный момент методы вычисления коэффициентов Сили—деВитта при отсутствии границы можно разделить на два класса: нерекурсивные подходы (Фуллинг, Кеннеди, Иванов), которые дают замкнутую формулу для отдельного коэффициента, а также рекурсивные ковариантные разложения. Описание последних можно найти в работах Вилковыского и Барвинского, где прием базируется на разложении операторной экспоненты, в монографии Аврамиди, посвященных разложению единицы, а также в статьях [A1; A2], результат которых основан на формуле дифференцирования линии Вильсона вдоль геодезического отрезка.

При добавлении границы и граничных условий задача приобретает более затейливый вид, ввиду этого методика подсчета несколько усложняется. Как правило, в этом случае поиск разложения происходит в виде суммы

$$\mathcal{K}(\tau) + \mathcal{N}(\tau), \tag{3}$$

где первая часть дает решение внутри области и ищется в виде (2), а вторая часть $\mathcal{N}(\tau)$ — сумма "поверхностных" слагаемых для удовлетворения условий на границе. Наиболее исчерпывающая информация о вычислении первых членов асимптотики и их математическом смысле может быть найдена в работах Кирстена, Авримиди и их соавторов, а также в монографии Василевича и Фурсаева.

Из краткой исторической справки следует, что помимо точного математического описания свойств теплового ядра существует и более физический подход, который заключается в формальном построении асимптотики. В этой связи первые две главы диссертации посвящены изучению модельной задачи в области без границы с евклидовой метрикой и произвольными гладкими компонентами калибровочной связности и потенциалом. В них строятся различные новые методы анализа коэффициентов Сили—деВитта (см. [A1; A2]). Также производится обобщение на случай римановой метрики [A3] и доказывается эквивалентность с континуальным представлением [A2; A4].

Другая недавняя и довольно плодотворная идея заключается в применении теоремы об индексе для случая конфигураций типа доменных стенок. В статье Фукая, Фурута и их соавторов доменные стенки были определены как поверхности, на которых потенциал оператора Дирака теряет непрерывность. Однако, в дальнейшем мы будем придерживаться подхода из работы Василевича 2018 года, в которой доменные стенки определены как подмногообразия, на которых компоненты связности испытывают скачок. Именно это и происходит на доменных стенках в ферромагнетике. Для доказательства теоремы об индексе в статье Василевича использовались явные вычисления с применением разложения теплового ядра для всех аномалий в четырехмерном пространстве с некоторыми ограничениями на геометрию вблизи доменных стенок. В настоящей диссертации приводится расширение результата Василевича на наиболее общий случай без ограничений на размерность и геометрию многообразия. Кроме того, мы используем более утонченные методы для доказательства, которые не затрагивают явные вычисления всех слагаемых [A5; A6].

Цель и задачи диссертационной работы

Основной **целью** данной диссертации является изучение методов построения коэффициентов асимптотического разложения теплового ядра при малых значениях собственного времени, а также расширение теоремы Атьи—Зингера—Патоди об индексе на случай многообразия с доменными стенками.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать свойства упорядоченной экспоненты при многократном ее ковариантном дифференцировании и интегрировании вдоль геодезического отрезка. В частности, найти закономерность в возникающих после дифференцирования или интегрирования конструкциях, а также выделить необходимые параметры для восстановления формулы.
2. Построить диаграммную технику для дифференцирования и интегрирования упорядоченной экспоненты путем определения конечного числа вершин и линий, а также переформулировать полученные в первом пункте свойства на диаграммный язык. В частности, вывести формулу для ковариантного дифференцирования произвольной диаграммы.
3. Применить полученную диаграммную технику в задаче о нахождении коэффициентов Сили—деВитта вне диагонали для оператора Лапласа с ковариантной производной и без потенциала.
4. Исследовать диаграммную технику для поиска коэффициентов Сили—деВитта на диагонали. Переформулировать полученный частный случай на алгебраический язык и вывести нерекурсивную формулу для диагональных частей коэффициентов.
5. Вывести нерекурсивную формулу для коэффициентов Сили—деВитта оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом на основе ковариантного разложения путем перехода в калибровку Фока—Швингера.
6. Обобщить нерекурсивную формулу для диагональных частей коэффициентов на случай римановых многообразий.
7. Вывести континуальное представление для теплового ядра путем анализа коэффициентов при степенях собственного времени, а также показать, что эти коэффициенты удовлетворяют системе рекуррентных соотношений Сили—деВитта.
8. Исследовать следовые части коэффициентов Сили—деВитта в цилиндре и найти главный член асимптотики, когда длина цилиндра стремится к бесконечности.
9. Вывести формулу для индекса оператора Дирака на многообразии при наличии ограничений на геометрию в виде прямого произведения в окрестности доменных стенок путем дополнения области цилиндром и сглаживания компонент связности.

10. Доказать, что индекс оператора Дирака на многообразии с ограничением на геометрию инвариантен относительно сглаживания компонент калибровочного поля.
11. Вывести формулу для индекса оператора Дирака на многообразии без условия прямого произведения, а также доказать инвариантность индекса для регуляризации специального типа.
12. Расширить формулу для индекса на случай, когда не только компоненты связности Янга—Миллса, но и компоненты римановой связности испытывают скачок. При этом метрический тензор остается непрерывным.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Разработана диаграммная техника и построен матричный формализм для нахождения коэффициентов Сили—деВитта оператора Лапласа с ковариантной производной и без потенциала как вне диагонали, так и на ней.
2. Выведена новая нерекурсивная формула для следовых частей коэффициентов Сили—деВитта оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом. Также дано обобщение на случай риманового многообразия.
3. Получено новое доказательство (без предельного перехода) связи асимптотического разложения теплового ядра и интеграла по путям.
4. Получены и доказаны новые формулы для индекса оператора Дирака на многообразии с доменными стенками. Рассмотрен случай общего положения, когда 1-формы римановой связности и связности Янга—Миллса имеют скачок, а метрический тензор остается непрерывным.
5. Доказана инвариантность индекса оператора Дирака на римановом многообразии с доменными стенками относительно регуляризаций специального вида.

Научная новизна

Все положения диссертационной работы, выносимые на защиту, являются новыми.

Практическая значимость

В работе строится диаграммная техника для вычисления коэффициентов Сили—деВитта и алгебраический ее аналог, а также выводятся нерекурсивные формулы, которые могут быть осуществлены в программах Maple или Mathematica при помощи простейших операций разбиения множества на части.

Результаты, изложенные в первых двух главах, могут быть использованы для работы с более сложными случаями (кривая метрика, многообразие с границей). В качестве основных приложений нерекурсивной формулы и новых свойств упорядоченных экспонент можно отметить теорию перенормировки и теорию континуального интеграла. Например, полученные результаты могут быть использованы при работе с квантовыми моделями для нахождения расходимостей в условиях регуляризации с импульсом обрезания.

В частности, результаты третьей главы основаны на анализе коэффициентов Сили—деВитта, поэтому их также можно считать приложением первых двух глав.

Теорема об индексе в свою очередь устанавливает важное соотношение между аномалиями киральности и четности и, таким образом, доставляет новую физическую информацию, которая может найти приложения в теоретической и математической физике.

Методология и методы исследования

В диссертации используется обширный набор методов и подходов, включающий асимптотическое разложение теплового ядра, спектральную теорию дифференциальных операторов, теорию расслоений и характеристических полиномов. При этом в диссертации упоминаются лишь необходимые для доказательств свойства используемых объектов. Более подробное и полное описание можно найти в монографиях [1—6].

Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием примеров, приведенных в каждом разделе. Так, в случае диаграммной техники и нерекурсивных формул рассмотрены первые три коэффициента Сили—деВитта и показано, что полученные результаты полностью совпадают с ранее известными. Справедливость же формулы для индекса оператора Дирака проверяется путем рассмотрения частных случаев, которые также совпадают с ранее полученными результатами.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция “Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems”, Дубна, Россия, 24—29 июля, 2017;
2. Седьмая международная конференция по математическому моделированию в физических науках “IC-MSQUARE 2018”, Москва, Россия, 27—31 августа, 2018;
3. Городской семинар по вопросам теории распространения волн, ПОМИ РАН, Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 14 мая, 2019;

4. Международная конференция “Days on Diffraction”, Санкт-Петербург, Россия, 3—7 июня, 2019;
5. Петербургский семинар по квантовой теории поля, ПОМИ РАН, Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 13 июня, 2019;
6. Международная конференция “Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ”, г. Долгопрудный, Московская обл., 17—21 июня, 2019;
7. Семинар лаборатории математических проблем физики, ПОМИ РАН, Фонтанка 27, Санкт-Петербург, 1 февраля, 2021.

Личный вклад

Все результаты диссертационной работы были получены либо лично автором (см. [A1; A4; A6]), либо при непосредственном его участии. В последнем случае личный вклад диссертанта, который можно выделить явно, включает теоремы 2, 4 и 5 из статьи [A2], теорему 2 из работы [A3], а также часть теоремы 2.1 в виде лемм 3.1 и 3.2 из статьи [A5].

Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных работах, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Все статьи опубликованы в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и/или Scopus.

Содержание работы

Во **введении** обсуждается актуальность темы, формулируются цель и задачи диссертации, а также основные положения, выносимые на защиту.

Глава 1 посвящена асимптотическому разложению теплового ядра для оператора Лапласа с гладким калибровочным полем и без потенциала. Она включает описание необходимого математического аппарата, диаграммной техники для разложения в асимптотический ряд, а также вывод новой нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов разложения. Глава состоит из разделов 1.1—1.8.

В **разделе** 1.1 дается постановка задачи, включающая определения таких базовых математических объектов, как калибровочное поле, оператор Лапласа и тепловое ядро.

Раздел 1.2 содержит анзатц для поиска асимптотического разложения при малых значениях собственного времени. Дается определение коэффициентов Сили—деВитта, а также выписывается система дифференциальных уравнений, которым последние должны удовлетворять.

В **разделе** 1.3 обсуждается упорядоченная операторная экспонента, ее определение, основные свойства и уравнения, дифференциальное и интегральное, решением которых она является. Некоторые свойства идут совместно с доказательствами.

В **разделе** 1.4 рассматривается система дифференциальных уравнений для коэффициентов Сили—деВитта. Доказывается, что такая система имеет итерационное решение в виде набора интегральных соотношений.

В **разделе** 1.5 описываются формулы дифференцирования упорядоченных экспонент, основанные на усреднении напряженности калибровочного поля вдоль геодезической, а также приводятся их доказательства.

В **разделе** 1.6 излагается диаграммная техника для дифференцирования и интегрирования упорядоченных экспонент, а также для итерационного вывода коэффициентов Сили—деВитта для оператора Лапласа с гладким калибровочным полем и без потенциала. Раздел 1.6 включает в себя четыре части.

Раздел 1.6.1 посвящен мотивировке. В частности, в нем акцентируется внимание на том факте, что формулу дифференцирования упорядоченной экспоненты можно разбить на блоки, которые позволяют анализировать многократное ковариантное дифференцирование.

В **разделах** 1.6.2 и 1.6.4 приводятся определения базовых элементов (линии и вершины) диаграммной техники, примеры их применения, а также формулируется и доказывается теорема о ковариантном дифференцировании диаграммы, включающая также несколько вспомогательных утверждений.

Разделы 1.6.3 и 1.6.5 содержат дополнительные примеры использования диаграммной техники. В частности, дается вывод диагональных частей первых двух коэффициентов Сили—деВитта, в результате которого получены решения, совпадающие с ранее известными.

Раздел 1.7 посвящен описанию алгебраического подхода и является дополнением к диаграммной технике из предыдущей части диссертации. Основным результатом данного раздела является вывод нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта. В данный раздел входят несколько подразделов.

В **разделе** 1.7.1 дается мотивировка к поставленной задаче, а также обсуждаются некоторые эвристические соображения о переходе от диаграмм к матрицам.

Раздел 1.7.2 содержит определения операторов интегрирования и добавления столбца/индекса. Также формулируются правила, по которым тензорно-значные функции сопоставляются матрицам.

В **разделе** 1.7.3 формулируются и доказываются такие свойства операторов, как коммутационные соотношения и отображение в множество тензоров.

Раздел 1.7.4 посвящен формулированию и доказательству нерекурсивной формулы для следовой части коэффициента Сили—деВитта оператора Лапласа с произвольным гладким полем Янга—Миллса и без потенциала, а также выводу некоторых вспомогательных утверждений.

Раздел 1.7.5 содержит описание применения нерекурсивной формулы к вычислению третьего коэффициента на диагонали, результат для которого полностью совпадает с ранее известным.

В **разделе** 1.8 дается доказательство формулы для обратной упорядоченной экспоненты, которое было вынесено из основной части и носит характер приложения.

Глава 2 посвящена описанию вывода нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта для оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом. Вывод основан на использовании ковариантного разложения, или же, переводя на язык теоретической физики, на применении перехода в калибровку Фока—Швингера. Также глава содержит обобщение нерекурсивной формулы на случай римановой метрики и новый вывод континуального представления, коэффициенты при степенях собственного времени которого совпадают с коэффициентами Сили—деВитта.

В **разделе** 2.1 вводится понятие ковариантного разложения, а также доказывается утверждение о разложении гладкой функции в ряд по ковариантным производным.

В **разделе** 2.2 дается определение калибровочного условия Фока—Швингера, формулируется и доказывается ряд утверждений касательно коммутационных соотношений упорядоченной экспоненты и ковариантной производной (левой или правой). Также обсуждается смысл упорядоченной экспоненты с точки зрения перехода в другую калибровку.

Раздел 2.3 содержит описание оператора Лапласа и системы рекуррентных соотношений на коэффициенты Сили—деВитта в выбранной калибровке Фока—Швингера.

Раздел 2.4 посвящен нерекурсивной формуле. В частности, раздел содержит необходимые определения используемого формализма и его свойства. В нем формулируется и доказывается основная теорема о замкнутой формуле для следовой части произвольного коэффициента Сили—деВитта для оператора Лапласа с произвольными гладкими потенциалом и полем Янга—Миллса. Параллельно доказывается набор вспомогательных утверждений.

В **разделе** 2.5 обсуждается использование полученной формулы на примере вычисления первых трех диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта, результаты для которых полностью согласуется с известными.

В **разделе** 2.6 описывается обобщение нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта на случай произвольного оператора второго порядка с гладкими коэффициентами. Данный раздел содержит две части.

В **разделе** 2.6.1 приводятся формулировка обобщающей теоремы и ее доказательство, которое повторяет основные шаги раздела 2.4 с учетом некоторых фундаментальных изменений.

В **разделе** 2.6.2 приводится пример использования последней обобщенной нерекурсивной формулы в случае римановой метрики. В частности, дается вывод первых двух коэффициентов Сили—деВитта, которые совпадают с известными ранее.

Раздел 2.7 посвящен описанию континуального представления для теплового ядра и содержит несколько частей.

В **разделах** 2.7.1 и 2.7.2 напоминаются основные свойства задачи Штурма—Лиувилля на отрезке, вид ее функции Грина, а также вводятся необходимые обозначения.

В **разделе** 2.7.3 доказывается экспоненциальная формула, коэффициенты разложения которой удовлетворяют рекуррентным соотношениям Сили—деВитта.

Раздел 2.7.4 содержит вывод континуального представления, основанного на экспоненциальной формуле. В частности, обсуждаются способы регуляризации интеграла по путям, а также связь последнего со спектром вспомогательной задачи Штурма—Лиувилля.

В **разделе** 2.8 обсуждается зависимость континуального представления от калибровочного условия, а также формулы перехода из одной калибровки в другую.

Глава 3 посвящена формулировке и доказательству теоремы Атьи—Зингера—Патоди об индексе в случае многообразия с доменными стенками. Процесс доказательства производится в несколько этапов и основан на использовании метода теплового ядра, теории инвариантных полиномов и спектральной теории операторов. Ввиду этого глава разделена на несколько частей 3.1—3.7.

В **разделе** 3.1 излагается базовый математический аппарат, а также формулируется основная теорема об индексе. В частности, даются необходимые сведения о многообразии (связность Янга—Миллса, связность Леви-Чивиты, внешняя кривизна, структура Клиффорда, координаты Гаусса) и его свойствах, вводится оператор Дирака, обсуждаются условия на границе (доменная стенка) и ставится спектральная задача для оператора Лапласа с сингулярным потенциалом. Затем дается определение индекса оператора Дирака и его связь с тепловым ядром и плотностью Понтрягина. Далее вводится понятие спектральной асимметрии и формулируется основной результат в виде теоремы 3.1.

В **разделе** 3.2 приводится доказательство для частного случая, когда в некоторой окрестности доменной стенки присутствует структура прямого произведения, то есть компоненты метрического тензора и калибровочного поля не зависят от “нормальной” координаты. Доказательство также включает в себя несколько этапов: деформация многообразия в виде дополнения его цилиндром, анализ уравнений на коэффициенты Сили—деВитта и поиск их асимптотик, а также доказательство сходимости.

В **разделе** 3.3 предлагается убрать ограничение, связанное со структурой прямого произведения. При этом вывод формулы основан на введении регуляризации специального вида, позволяющей использовать результат для частного случая со структурой прямого произведения. Также даются определения и важные свойства характеристических полиномов ($\widehat{A}$-вид и характер Черна), через которые выражается плотность Понтрягина.

Раздел 3.4 является дополнением к разделу 3.2 и посвящен доказательству инвариантности индекса относительно сглаживания компонент калибровочного потенциала при переходе через доменную стенку в случае наличия структуры прямого произведения. Процесс доказательства разбит на несколько частей и содержит формулировку общих эвристических соображений 3.4.1, введение вспомогательной регуляризации и доказательство леммы о сходимости 3.4.2, а также обсуждение следствия 3.4.3.

Раздел 3.5 также носит характер дополнения и относится к разделу 3.3. В нем излагается лемма об инвариантности индекса оператора Дирака с условиями на границе типа доменных стенок в случае общего положения, то есть без предположения о структуре произведения. Доказательство основано на использовании регуляризации специального вида, оставляющей первую производную компонент ограниченной (при снятии регуляризации). Раздел включает в себя несколько частей: мотивировка 3.5.1, описание регуляризации и доказательство леммы о сходимости 3.5.2.

Раздел 3.6 содержит альтернативный подход к доказательству теоремы об индексе в случае наличия структуры прямого произведения и плоской метрики.

В **разделе** 3.7 рассматривается и доказывается обобщение теоремы об индексе на случай, когда не только компоненты связности Янга—Миллса, но и компоненты римановой связности испытывают скачок на поверхности коразмерности один. При этом можно выделить три основные части: мотивировка к рассмотрению задачи 3.7.1, затем формулировка и доказательство результата 3.7.2, а также доказательство вспомогательной леммы 3.7.3.

В **заключении** диссертации приводятся основные результаты, а также обсуждаются дальнейшие планы по развитию темы. Кроме того, данная часть содержит благодарности автора.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Иванов А. В.* Диаграмматика теплового ядра ковариантного оператора Лапласа // ТМФ. — 2019. — т. 198, № 1. — с. 100—117.

A2. *Иванов А. В.*, *Харук Н. В.* Тепловое ядро: метод собственного времени, калибровка Фока–Швингера, интеграл по путям и линия Вильсона // ТМФ. — 2020. — т. 205. — с. 1456—1472.

A3. *Ivanov A. V.*, *Kharuk N. V.* Non-recursive formula for trace of heat kernel // Proceedings of the International Conference "Days on Diffraction 2019". — 2019. — P. 74—77.

A4. *Ivanov A. V.* Notes on functional integration // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2019. — т. 487. — с. 140—150. — Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 26.

A5. *Ivanov A. V.*, *Vassilevich D. V.* Atiyah–Patodi–Singer index theorem for domain walls // J. Phys. A: Math. Theor. — 2020. — Vol. 53. — P. 305201.

A6. *Ivanov A. V.* Index theorem for domain walls // J. Phys. A: Math. Theor. — 2021. — Vol. 54. — P. 095203.

Список литературы

1. *Fursaev D.*, *Vassilevich D.* Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory. — Dordrecht : Springer, 2011. — P. 1—304.

2. *Berline N.*, *Getzler E.*, *Vergne M.* Heat Kernels and Dirac Operators. — Berlin : Springer, 2004. — P. 1—363.

3. *Bleecker D. D.*, *Booß-Bavnbek B.* Index Theory with Applications to Mathematics and Physics. — Boston : International Press, 2013. — P. 1—698.

4. *Gilkey P. B.* Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem. — Boca Raton : CRC Press, 1994. — P. 1—536.

5. *Kirsten K.* Spectral Functions in Mathematics and Physics. — Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2001. — P. 1—400.

6. *Nakahara M.* Geometry, Topology and Physics. — Bristol : IoP, 2003. — P. 1—573.

Иванов Александр Валентинович

Коэффициенты Сили—деВитта: диаграммная техника, нерекурсивная формула, интеграл по путям и теорема Атьи—Зингера—Патоди для многообразия с доменными стенками

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________