

## ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации А.А.Логунова  
«О граничных свойствах гармонических функций»,  
представленной на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.01.01 -  
вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации А.А.Логунова «О граничных свойствах гармонических функций» решается ряд задач, связанных с гармоническими функциями в областях пространств  $R^n$ ; наиболее интересные достижения диссертации представляют собой аналоги результатов, известных для двумерных областей, в высших размерностях, в первую очередь при  $n=3$ . Актуальность темы диссертации несомненна, поскольку речь идет об обобщении важнейших двумерных результатов. Доказательства рассматриваемых в диссертации вопросов в случае размерности 2 опирались на отождествление пространства  $R^2$  с комплексной плоскостью, что позволяло существенно привлекать средства комплексного анализа. Интерес к подобным вопросам в пространствах более высокой размерности естественно возникал при появлении соответствующих двумерных фактов, тогда как содержательные результаты в этом направлении появились лишь сравнительно недавно. Так, результат Мангуби, обобщающий классическое неравенство Гарнака на случай, когда допускается непустое множество нулей, причём только в двумерном случае, появился в 2014 году. Теоремой Левинсона в размерности 2 занимались Бёрлинг, Домар, Карлеман, Шёберг и многие другие выдающиеся математики; из результатов для пространств более высокой размерности отметим результат Дынькина 1996 года.

Трудность решаемых диссертантом задач состоит в том, что техника, использованная ранее при доказательстве двумерных результатов, существенно не годится для работы с обобщениями на более высокие размерности, в связи с чем перед автором естественно возникали задачи по поиску новых подходов. Считаю, что с этими задачами диссертант вполне справился, и тем самым в том числе внес и немалый вклад в развитие технического аппарата, который проясняет суть разнообразных эффектов и в перспективе может быть использован также и при решении других задач. Диссертация состоит из трех глав; содержание каждой из по крайней мере

первых двух из них могло бы быть достаточным для кандидатской диссертации.

Глава 1 посвящена свойствам отношений гармонических функций в  $R^n$ . Рассматривается пара гармонических функций в области, множества нулей которых совпадают, и изучаются свойства их отношения  $f$ . Одним из важных результатов главы является вещественная аналитичность функции  $f$ . Отметим, что чем выше размерность пространства, тем более сложно может быть устроено множество нулей гармонической функции в его области, и что из поверхностных соображений вещественная аналитичность частного не вытекает, т.е. результат существенно опирается на то, что исходные функции гармонические. Другим важным результатом главы является неравенство Гарнака, но теперь уже только для областей в трехмерном пространстве - аналог классического неравенства для  $n=2$ . Судя по владению автором различными методами работы с отношениями гармонических функций, можно ожидать, что в дальнейшем он сможет доказать и аналогичные результаты для случая произвольной конечной размерности.

В главе 2 изучается вопрос об оценках гармонических функций в области пространства  $R^n$ , подчиненных некоторой мажоранте. Главным результатом главы является точный аналог теоремы Левинсона - обобщение со случая области в двумерном пространстве на произвольную конечную размерность, причем для класса гармонических (а не голоморфных, как у Левинсона в случае размерности 2) функций. Обращает на себя внимание общность, для которой доказан этот результат, при том, что этим кругом вопросов ранее занимались очень известные математики.

В главе 3 исследуются тауберовы теоремы для положительных гармонических функций; полученные диссертантом результаты также представляют большой интерес.

К несущественным недостаткам работы можно отнести отдельные стилистические погрешности, по-видимому, связанные с тем, что некоторые фрагменты текста переводились автором со статей, написанных им ранее на английском языке. Также некоторое удивление вызывает использование термина *касн* (стр. 7 и 46), хотя может быть на самом деле непросто найти подходящий перевод этого термина на русский язык.

Результаты диссертации получены самим диссертантом, строго доказаны и обоснованы, и являются новыми, достоверными и актуальными. Они

были представлены автором на семинарах ПОМИ и Лаборатории Чебышева СПбГУ, а также на семинаре по анализу в г.Тронхейм (Норвегия) и на нескольких международных конференциях. Диссертация хорошо оформлена. Автореферат диссертации правильно отражает её содержание. Список публикаций диссертанта содержит требуемое количество публикаций по специальности 01.01.01 в журналах, входящих в перечень ВАК.

Представленная А.А.Логуновым диссертация «О граничных свойствах гармонических функций» является научно-квалификационной работой, результаты которой вносят существенный вклад в теорию гармонических функций. Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01, а диссертант заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Зам. директора отдела Международный математический институт им. Л.Эйлера ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук,

доктор физико-математических наук

Капустин Владимир Владимирович

*Капустин*

27.04.2015

kapustin@pdmi.ras.ru

+7 812 310 71 64

ПОМИ РАН, Фонтанка 27

Санкт-Петербург 191023

