ОТЗЫВ
ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА НА ДИССЕРТАЦИЮ И. К. ЗЛОТНИКОВА "ИДЕАЛЫ АЛГЕБРЫ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ: ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И УРАВНЕНИЕ БЕЗУ", ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Диссертация Ильи Константиновича Злотникова посвящена изучению различных интерполяционных свойств подпространств в пространствах ограниченных аналитических функций, главным образом в пространстве $H^\infty(\mathbb{D})$ ограниченных аналитических функций в единичном круге. Остановимся более подробно на основных результатах диссертации.

Вторая глава диссертации посвящена изучению интерполяционных пространств для указанных подпространств. Основным рабочим инструментом их исследования является доказываемая в диссертации теорема 1. Она представляет собой достаточное условие на пару подпространств C, D в пространстве $L^\infty(X,\mu)$ (здесь μ — конечная мера на X) для того, чтобы пара $(C_p \cap D_p, C \cap D)$ была K-замкнута в паре $(L^p(X,\mu), L^\infty(X,\mu))$, где C_p и D_p — замыкания пространств C и D в $L^p(X,\mu)$ соответственно. Отметим, что одно из условий в теореме 1 может быть одного из двух видов: 1) наличие у вспомогательного проектора P разложения Кальдерона–Зигмунда; 2) наличие у C структуры модуля над некоторой подалгеброй A в алгебре $L^\infty(X,\mu)$, обладающей специальным аппроксимативным свойством (α_p). При этом автору удалось при доказательстве изящно свести два этих случая в один, построив во втором случае с помощью использования аналитических срезающих функций некоторое разложение аннулятора модуля C, аналогичное разложению Кальдерона–Зигмунда. Применяя теорему 1, автор доказывает K-замкнутость пары пространств, коинвариантных относительно оператора обратного сдвига $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ (здесь θ — внутренняя функция), в паре пространств $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$ (на единичной окружности $\mathbb{T}$ по стандартной мере Лебега) при $p > 1$. Отметим, что K-замкнутость пары пространств Харди $(H^p(\mathbb{T}), H^q(\mathbb{T}))$ в $(L^p(\mathbb{T}), L^q(\mathbb{T}))$ при всех показателях $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ известна уже по крайней мере с начала 90-х годов, в то время как указанный выше результат является новым. С помощью установленной K-замкнутости автор легко вычисляет интерполяционные пространства для пары $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$, пользуясь простым утверждением о том, что интерполяционное пространство для пары K-замкнутых пространств есть пересечение суммы этих пространств с интерполяционным пространством "объемлющей" пары. Далее в этой главе доказывается достаточное условие K-замкнутости пары $(K^p_\theta(w_1), K^\infty_\theta(w_2))$ — весовых аналогов пространств K^p_θ (здесь w_1, w_2 — веса на окружности $\mathbb{T}$) — в паре соответствующих весовых пространств $(L^p(w_1), L^\infty(w_2))$ при достаточно больших p. Условие формулируется в терминах принадлежности весов определенным классам Макенхаупта. Доказательство этого утверждения основано на аналоге теоремы 1, где вместо разложения Кальдерона–Зигмунда используется его весовой аналог, полученный в работе Д. С. Анисимова и С. В. Кислякова 2004 года. Аналогично предыдущему для указанных подпространств вычисляются интерполяционные пространства. Следует отметить, что при доказательстве результатов из 2-й главы автор демонстрирует уверенное владение такими методами, как разложение Кальдерона–Зигмунда и метод аналитических срезающих функций.

Третья глава диссертации посвящена решению задачи об идеалах в банаховых решетках последовательностей. Указанная задача представляет собой бесконечномерное обобщение известной задачи об описании идеала в алгебре $H^\infty(\mathbb{D})$, порожденного данным конечным набором функций, которая в свою очередь тесно связана с классической задачей о короне. Прежде всего в этой главе доказывается разрешимость задачи об идеалах во всех пространствах l_p при $p \in [1, \infty)$. Ранее разрешимость этой задачи в l_p была известна только при $p = 2$: изначально в работе Толоконникова 1981 года соответствующий результат был получен для показателя 4, а из работы Трейля 2007 года он вытекает для показателя $(1 + \varepsilon)2$. Отметим, что именно из последнего результата для l_2 автор выводит приведенное выше утверждение для всех $p \in [1, \infty)$. Далее в этой главе доказывается общий результат о разрешимости задачи об идеалах в q-вогнутых решетках со свойством Фату. Хотя для соответствующего q пространство l_p является q-вогнутой решеткой, указанный выше результат для l_p нельзя считать следствием последнего, поскольку на нем основано доказательство этого общего результата. Точнее, при его доказательстве используется следующее известное утверждение, что q-вогнутая банахова решетка со свойством Фату представляется в виде произведения l_q на некоторую банахову решетку Z. Далее с помощью трудных технических утверждений показывается, что из разрешимости задачи об идеалах в l_q следует ее разрешимость в произведении $l_q \cdot Z$. Отметим, что основным методом доказательства здесь служит метод Руцкого, основанный на некоторой теореме о неподвижной точке.

Стоит выделить, что в диссертации содержится подробный и широкий обзор по теме исследования. При этом приведена не только библиографическая справка, непосредственно относящаяся к результатам диссертации, но и обсуждаются интересные классические вопросы, затрагивающие область математики, которой посвящена диссертация. Более того, ряд известных ранее утверждений приводится с идеями доказательств. Все это демонстрирует широкий кругозор автора.

К работе имеется ряд замечаний:

1. В формулировке теоремы 5 разрешимость задачи об идеалах утверждается во всех пространствах l_p при $p \in [1, \infty)$ *с показателем* $(1 + \varepsilon)p$. Однако из приведенного доказательства для случая $p \in [1, 2)$ (последний абзац на странице 70) следует ее разрешимость только лишь с показателем $(1 + \varepsilon)2$. Действительно, автор представляет пространство $l_p = l_2 \cdot l_q$, а далее, используя "срезки" l_p, применяет теорему 6 и лемму 8, которые в сумме дают результат о разрешимости задачи в произведении решеток, но с показателем одного из сомножителей, в данном случае l_2, а показатель для l_2, полученный в работе Трейля, $(1 + \varepsilon)2$.

2. В формулировке теоремы 7 разрешимость задачи об идеалах утверждается во всех q-вогнутых решётках X со свойством Фату *с показателем* $(1 + \varepsilon)q$. Однако из приведенного доказательства (первый абзац на странице 71) при $q \in [1, 2)$ следует ее разрешимость только лишь с показателем $(1 + \varepsilon)2$. Действительно, здесь автор представляет решетку X в виде $X = l_q \cdot F$ для

некоторой банаховой решетки F, после этого справедливо утверждает, что можно считать, что $q \geqslant 2$ (подчеркнем, что при $q \in [1,2)$ мы получили $X = l_{q'} \cdot F$ для некоторого $q' \geqslant 2$, на самом деле в этом случае можно считать $q' = 2$). Далее аналогично пункту 1 применяется результат про произведение решеток, из которого (в случае $q \in [1,2)$) следует разрешимость задачи в X с тем же показателем, что и для $l_{q'}$, а он есть $(1+\varepsilon)q' \geqslant (1+\varepsilon)2$ (ну или $(1+\varepsilon)2$, если учесть, что можно считать $q' = 2$).

3. В определении разложения Кальдерона–Зигмунда на стр. 22 не сказано, что функции g_0 и g_1 должны удовлетворять условию $g = g_0 + g_1$.

4. В доказательстве теоремы 2.14 на стр. 27 в четвертой снизу выключной формуле в первом неравенстве выражение справа следует удвоить и, соответственно, в конечной оценке получается $4\|h\|_{L^2}$ вместо $2\|h\|_{L^2}$, что совершенно не влияет на дальнейшие рассуждения.

5. В формулировке леммы 2.15 на стр. 28 требуется, чтобы γ было натуральным числом, большим 1. Однако из приведенного доказательства кажется, что и для $\gamma = 1$ утверждение леммы останется в силе.

6. При доказательстве леммы 3.10 на стр. 65 было бы не лишним напомнить, что при возведении банаховой решетки в степень, меньшую 1, свойство банаховости наследуется.

7. В диссертации содержится масса неточностей, связанных с обозначением и последующими ссылками на теоремы, формулы и т.д.:

   7.1 В первом абзаце на стр. 42 автор ссылается на условия (A1), (A2) и (A3) в условии α_p, которые на самом деле в определении обозначены (i), (ii), (iii). А во втором абзаце он пишет: “осталось показать, что Y обладает свойствами (A1) и (A2)”, которых, как уже отмечалось ранее, в диссертации нет, по-видимому имея в виду под обозначением “(A1) и (A2)” свойство б) в условии теоремы об исправлении на стр. 41.

   7.2 На стр. 51 в доказательстве теоремы должна быть ссылка не на теорему 1.5 (которой в диссертации нет), а на теорему 2.10.

   7.3 На стр. 51 автор формулирует и доказывает теорему 2, на самом деле это теорема 3 из первой главы. Аналогично на стр. 53 сформулирована теорема 3, которая на самом деле теорема 4.

   7.4 При доказательстве леммы 3.10 на стр. 65 автор в тексте ссылается на лемму 2.9, на самом деле здесь должна быть лемма 3.8.

8. В диссертации содержится большое количество опечаток и неточностей, как непосредственно в тексте диссертации, так и в использемых математических символах. Приведем некоторые из них:

   8.1 На стр. 7 и во втором абзаце, и в определении 1.2 написано, что $i = 1, 2$, хотя на самом деле $i = 0, 1$.

   8.2 В определении разложения Кальдерона–Зигмунда должно быть вместо “а пространство” написано “в пространство”.

   8.3 В последней строчке на стр. 25 вместо “сходятся к $L^p(\mu)$” должно быть “сходятся в $L^p(\mu)$”.

8.4 На стр. 32 перед формулой (2.9) вместо "строго большое" должно быть "строго большее".

8.5 В формулировке теоремы 2.19 на стр. 36 утверждается K-замкнутость пары $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ в паре $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$, а должна быть, конечно же, в паре $(L^p(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2))$.

8.6 В соответствии с обозначениями автора в первой строчке доказательства теоремы 3.13 вместо обозначения $H^\infty(F)$ должно быть $H^\infty(\mathbb{D}; F)$.

9. В автореферате в формулировке теоремы 2 на стр. 4 утверждается K-замкнутость пары $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ в паре $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$, а должна быть, конечно же, в паре $(L^p(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2))$.

Подведем итог. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Доказана K-замкнутость пары пространств $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ в паре пространств $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$ при $p > 1$.

2. Доказана K-замкнутость пары $(K^p_\theta(w_1), K^\infty_\theta(w_2))$ в паре пространств $(L^p(w_1), L^\infty(w_2))$ при некотором условии на веса w_1, w_2 и достаточно больших p (зависящих от w_1 и w_2).

3. Доказана разрешимость задачи об идеалах в q-вогнутых решётках со свойством Фату, в частности, в пространствах l_p при $p \in [1, \infty)$.

Все основные результаты диссертации опубликованы в рецензируемых журналах. Все они новые и представляют интерес для специалистов по вещественному и комплексному анализу. Автореферат правильно отражает содержание диссертации. Считаю, что несмотря на сделанные замечания, которые не влияют на основные результаты, диссертация полностью удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Злотников Илья Константинович заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Старший научный сотрудник
отдела комплексного анализа МИАН
кандидат физ.-мат. наук

01 ноября 2019 г.

Комлов А. В.

Подпись А.В Комлова заверяю

Ученый секретарь МИАН

С.А. Поликарпов