

Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Коптелов Ярослав Юрьевич

**Об асимптотике собственных функций абсолютно
непрерывного спектра задачи рассеяния нескольких
заряженных квантовых частиц**

01.01.03 – Математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Сергей Борисович Левин

Санкт-Петербург – 2019

Оглавление

Введение	4
Общая характеристика работы	4
Формулировка основных результатов	11
1 Асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра для задачи нескольких одноименно заряженных частиц	17
1.1 Общие сведения и постановка задачи	17
1.2 Построение анзаца	19
1.3 Система четырех квантовых кулоновских одноименно заряженных частиц . .	20
1.3.1 Случай хорошо разделенных частиц	21
1.3.2 Парное сближение	24
1.3.3 Трехчастичный "кластер" в системе четырех частиц	29
1.3.4 О равномерности асимптотики	35
1.3.5 Согласование с известными ранее результатами	36
1.4 О случае систем с произвольным числом частиц	37
1.4.1 Случай хорошо разделенных частиц	38
1.4.2 Малость одной парной координаты	41
1.4.3 Малость нескольких парных координат одновременно	43
1.4.4 Произвольная асимптотическая конфигурация	45
1.4.5 Обсуждение теоремы 1.4.6	47
2 Система трех трехмерных кулоновских квантовых частиц при наличии парного потенциала притяжения	49
2.1 Описание модели	49
2.1.1 ВВК-приближение	50
2.1.2 Асимптотическое "почти разделение" переменных	52
2.1.3 Построение $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$ и оправдание представления для Ψ^{sep}	53
2.2 Согласование представлений	56
2.3 Нормировочный интеграл	59
2.3.1 Основной вклад	61
2.3.2 О вкладе других областей	75

2.4	Поведение свободного члена уравнения для ядра R_n	85
2.5	Решение уравнения для $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$	89
2.6	Изучение результата	92
2.6.1	Обсуждение результатов	98
Заключение		100
Литература		102

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Многие принципиальные вопросы теории рассеяния нескольких (трех и более) квантовых частиц, взаимодействующих посредством кулоновских парных потенциалов, рассматриваемые в терминах собственных функций до сих пор остаются не исследованными.

Система трех трехмерных квантовых частиц с короткодействующими парными потенциалами была описана Л. Д. Фаддеевым в шестидесятых годах прошлого века [15, 16]. Позднее были предприняты значительные усилия по распространению результатов на случай далекодействующих потенциалов (потенциалы кулоновского типа). Однако, до настоящего времени эта система оставляет открытые вопросы как с точки зрения корректной математической трактовки, так и с точки зрения разработки вычислительных схем, которые могли бы быть использованы, например, для вычисления параметров атомных, молекулярных или ядерных реакций с удовлетворительной точностью.

Заметим, что качественная природа спектра и асимптотическое поведение решений нестационарного уравнения Шрёдингера, однако, известны. Эти результаты были получены в рамках нестационарного подхода. Однако, с точки зрения стационарной теории, математически строгий подход, схожий с уравнением Липмана–Швингера или его аналогов не был развит, хотя он необходим, если стоят вопросы о нахождении асимптотик собственных функций или определении численных параметров многих важных физических процессов, например, таких как квантовое рассеяние в ядерных системах, диссоциативная рекомбинация в атомной и молекулярной физике, приложения для астрофизики и многие другие.

Существует два принципиально разных подхода для решения подобных задач на практике (с точки зрения компьютерных вычислений). Первый подход заключается в том, что кулоновский потенциал может быть регуляризован с помощью замены его на потенциал Юкавы, однако, строгая оценка влияния такого рода замены в настоящее время не известна, что оставляет ряд вопросов к подобным результатам. Второй же подход состоит в построении приближенных собственных функций непрерывного спектра. О теоретических аспектах второго подхода в данной работе и пойдет речь.

Различные подходы к задаче рассеяния нескольких квантовых частиц, такие как уравне-

ние Шрёдингера, дифференциальные или интегральные уравнения Фаддеева [15, 16], уравнения Альта–Грассбергера–Сандхаса (АГС) [18], сталкиваются с характерными трудностями, когда речь идет о заряженных частицах. Эти трудности связаны с далекодействующим характером кулоновских парных потенциалов, порождающих сложные асимптотические граничные условия для волновой функции в конфигурационном представлении или соответствующую сложную структуру сингулярностей в импульсном представлении. Но поскольку в задаче рассеяния заряженных частиц кулоновские взаимодействия в общем случае не могут быть проигнорированы, их эффекты должны быть учтены соответствующим образом.

Конечно, по крайней мере для чисто отталкивательных кулоновских взаимодействий, многие теоретические проблемы были решены [14, 19, 20, 21, 23, 34], хотя некоторые вопросы, по-прежнему, остаются открытыми. В частности, поведение асимптотики решения в окрестности ряда специальных направлений (направлений рассеяния вперед) до сих пор не выяснено, также как не выяснено поведение равномерной по всему конфигурационному пространству асимптотики решения задачи рассеяния n заряженных частиц ($n > 3$). Приложение существующей теории к ряду практических задач вычисления физических наблюдаемых в задаче рассеяния было успешно реализовано как в импульсном (см. [22, 24] и ссылки внутри работ) так и в координатном представлении (см. [31] и ссылки внутри работы). Тем не менее, поскольку практическое приложение любого из этих подходов очень сложно и частично все еще включает приближения, последствия которых не всегда легко могут быть оценены, определенно имеет смысл искать новые, независимые методы описания многочастичного кулоновского рассеяния.

Один из методов описания асимптотики решения задачи рассеяния трех одномерных и трехмерных заряженных квантовых частиц с кулоновскими парными потенциалами (для одноименно заряженных частиц) был развит в последние годы в рамках подхода, основанного на аналогии задачи рассеяния и задачи дифракции волны на системе бесконечных полупрозрачных "экранов" с окрестностями (см. [5, 6] и ссылки внутри работ). Далее будем упоминать этот метод как "дифракционный подход к задачам рассеяния". В его рамках в случае трехмерных частиц была построена равномерная по всему конфигурационному пространству асимптотика собственной функции абсолютно непрерывного спектра [6, 12].

Отметим, что при рассмотрении задач с разноименно заряженными частицами наряду с медленным убыванием парных потенциалов и, тем самым, со сложностью построения асимптотических граничных условий, существует отдельная проблема, связанная с учетом бесконечного дискретного спектра в парных подсистемах с кулоновскими потенциалами притяжения. Поэтому, нахождение метода, позволяющего корректно учесть этот вклад, является отдельной и важной задачей.

Тем самым, применение развивающегося метода (дифракционного подхода к задачам рассеяния) к не исследованным в достаточной мере задачам квантового рассеяния, безусловно, является актуальным с точки зрения математической физики. Более того, получение результатов в этом направлении является важным для физических приложений.

Степень разработанности проблемы

Квантовая задача рассеяния трех частиц для случая быстро убывающих потенциалов была решена на строгом математическом уровне еще в начале 60х годов прошлого века Л. Д. Фаддеевым. И, хотя, для прикладных задач в высокоэнергитической области ядерной физики этих результатов оказалось достаточно, для прикладных низкоэнергитических проблем атомной и молекулярной физики, где медленно убывающие кулоновские парные потенциалы заведомо вносят определяющий вклад в динамику системы, нужен был другой подход.

До текущего момента не создана теоретическая концепция, позволяющая создавать прозрачные вычислительные алгоритмы для описания динамики квантовых систем нескольких заряженных частиц с кулоновскими парными потенциалами. Принципиальное отличие таких систем от нейтральных заключается в отсутствие асимптотической свободы частиц даже на бесконечном удалении частиц друг от друга. Таким образом, осуществить разделение волновой функции на естественные компоненты, используя метод Л. Д. Фаддеева, не представляется возможным. В этом смысле вопрос о разработке новых концепций, по-прежнему, открыт.

Один из первых точных результатов в этой области, имеющий ограниченную в асимптотической части конфигурационного пространства область корректности был получен Р. К. Петеркопом [35]. В работах В. С. Буслаева, С. П. Меркурьева и С. П. Саликова [7], [8] впервые была замечена связь между квантовой задачей рассеяния нескольких заряженных частиц и задачей дифракции, позволившая в одномерном случае описать специальные области "света" и "тени" в конфигурационном пространстве, а также описать класс потенциалов, не порождающих дифракционных эффектов. В дальнейшем оказалось, что эти области играют важную роль в структуре асимптотики собственных функций уравнения Шрёдингера. В дальнейших работах С. П. Меркурьева были предложены методы нахождения координатных асимптотик волновых функций для системы трех трехмерных заряженных частиц (эйканальные приближения) и найдены в явном виде асимптотики волновых функций для конфигураций, в которых расстояние между всеми частицами стремится к бесконечности. Большинство этих результатов упоминается в книге [14].

Группа Е. О. Альта и А. М. Мухамеджанова в работах [20], [21] и [22] смогла дополнить явные результаты, добавив к ним рассмотрение асимптотических конфигураций, в которых пара частиц могла сближаться на конечные расстояния (однако сумма всех парных расстояний в системе должна стремиться к бесконечности). Недостатком этих работ является отсутствие рассмотрения окрестности направления рассеяния вперед.

Также стоит уделить внимание работам Е. О. Альта, С. Б. Левина и С. Л. Яковлева [19], посвященным кулоновскому Фурье-преобразованию и позволяющим в некотором смысле упростить структуру многочастичного гамильтониана в "кулоновском" импульсном представлении, и работам Н. Эландера, С. Л. Яковлева и Е. А. Яревского (например, [37]), посвященным "комплексному скейлингу" в задаче рассеяния. Заметим, однако, что переход к

несамосопряженному оператору не позволяет проследить за поведением собственных функций абсолютно непрерывного спектра на бесконечности в конфигурационном пространстве, что, в свою очередь, необходимо для описания механизмов физических процессов, связанных с рассеянием нескольких заряженных частиц.

Таким образом, упомянутые результаты не позволяют считать задачу нахождения асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра системы трех и более заряженных кулоновских квантовых частиц решенной на удовлетворительном уровне, либо в силу их ограниченной справедливости (одинаковые заряды, ограниченная область конфигурационного пространства и т. д.), либо в силу значительной громоздкости и сложности входящих в описание конструкций.

Тем не менее, в последнее десятилетие в рамках дифракционного подхода к задачам рассеяния была построена равномерная по углам на бесконечности в конфигурационном пространстве асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра задачи рассеяния трех одноименно заряженных частиц (как одномерных, так и трехмерных) в работах группы В. С. Буслаева и С. Б. Левина [5], [6] и [12].

Цели и задачи

Целью работы является изучение асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра многочастичного оператора Шрёдингера для систем с кулоновскими парными потенциалами с точки зрения дифракционного подхода к задачам рассеяния и развитие методов решения подобных задач. Для этого в работе рассматриваются две различные задачи о рассеянии нескольких заряженных кулоновских частиц.

Первая задача посвящена вопросу обобщения результатов работ группы В. С. Буслаева и С. Б. Левина об асимптотике собственных функций абсолютно непрерывного спектра оператора Шрёдингера системы трех одноименно заряженных кулоновских частиц на системе с произвольным количеством n одноименно заряженных частиц. Первый шаг здесь заключается в поиске асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра для системы четырех одноименно заряженных частиц во всех возможных асимптотических конфигурациях системы на бесконечности в конфигурационном пространстве. Для этого мы будем модифицировать анзац, пригодный для описания хорошо разделенных частиц, и сравнивать скорость убывания невязки при подстановке его в уравнение Шрёдингера со скоростью убывания потенциала. Заключительным этапом будет переход к рассмотрению произвольной асимптотической конфигурации в системе с произвольным количеством одноименно заряженных частиц.

Вторая задача посвящена рассмотрению системы трех заряженных квантовых частиц при наличии кулоновского дискретного спектра в парных подсистемах, включающих частицы с зарядами разных знаков, рассматриваются собственные функции непрерывного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера. В частности исследуется вопрос о влиянии спек-

тральной окрестности точки накопления дискретного спектра парного оператора на структуру собственных функций абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора. Такая задача может быть разбита на несколько этапов:

- Выделение набора асимптотических областей в конфигурационном пространстве системы: области, где применимо известное ВВК-приближение $\Psi^{\text{ВВК}}$ и областей, где оператор Шрёдингера допускает "почти разделение переменных";

- В каждой области с "почти разделением переменных" построение приближенного решения трехчастичного уравнения Шрёдингера Ψ^{sep} в виде спектрального разложения по собственным функциям парной подсистемы с некоторыми весовыми функциями или плотностями. Для вклада, отвечающего дискретному спектру оператора Шрёдингера парной подсистемы, это будет некоторый набор плотностей $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$. Здесь индекс n нумерует энергию связи в данной парной подсистеме;

- Построение интегрального уравнения с сингулярным ядром для неизвестной плотности $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$ путем согласования приближенных решений $\Psi^{\text{ВВК}}$ и Ψ^{sep} в области конфигурационного пространства, где оба приближения справедливы. В силу специфики процедуры согласования уравнения, отвечающие различным значениям индекса n , являются независимыми;

- Построение асимптотики решения данных сингулярных уравнений при больших значениях n ;

- Описание вклада спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра парного оператора Шрёдингера (вклад совокупности всех парных ридберговских состояний) в структуру асимптотики собственной функции непрерывного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера;

- Исследование полученного выражения при помощи метода Пуассона для получения координатной асимптотики вклада дискретного спектра парного оператора Шрёдингера в структуру асимптотики трехчастичной собственной функции непрерывного спектра.

Научная и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты демонстрируют ключевые приемы дифракционного подхода к задачам рассеяния. Эти приемы могут быть использованы при решении многочастичных кулоновских задач и для развития самого метода. Результат работы, описывающий вклад спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра парного оператора в структуру асимптотики собственной функции абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора будет интересен, например, для решения проблем, связанных с описанием реакций молекулярной рекомбинации, где на данный момент не существует законченного и теоретически обоснованного метода, согласующегося с экспериментальными данными (однако, существуют различные феноменологические концепции).

Методология и методы исследования

Работа основана на применении так называемого дифракционного подхода к задачам рассеяния.

В первой главе мы опираемся на критерий верности анзатца, связанный со скоростью убывания его невязки в уравнении Шрёдингера по сравнению со скоростью убывания потенциала. Предъявляя некоторый аналитический вид анзатца, мы убеждаемся, что он удовлетворяет выбранному критерию.

Вторая глава использует спектральное разложение для формирования нужного представления для приближенного решения. Затем, для поиска неизвестных плотностей, определяющих построенное нами представление, мы используем прием согласования двух различных приближенных решений в области конфигурационного пространства, где они оба верны. Для этого мы используем различные приемы для работы с интегралами, содержащими большой параметр, а также технику суммирования по Пуассону для обработки итогового результата. Отдельно стоит упомянуть использование результатов Ф. Трикоми для асимптотики полиномов Лагерра по значку.

Научная новизна

Автору не известно законченных результатов, касающихся исследуемых в работе вопросов. Современное положение дел рассмотрено в начале данного раздела, однако более ранних результатов, подобных полученному, не обнаружено. Работа развивает идеи дифракционного подхода к проблеме рассеяния нескольких кулоновских частиц и, формально, продолжает работы В. С. Буслаева и С. Б. Левина. Однако, в данной работе исследуются проблемы, не затронутые в указанных работах. Задача о трех трехмерных заряженных квантовых частицах при наличии парных потенциалов кулоновского притяжения – принципиально новая. Наличие бесконечного дискретного спектра в парной подсистеме делает задачу одновременно и более сложной и более интересной с точки зрения физических приложений.

Апробация работы

Основные результаты работы были представлены на международных конференциях и семинарах:

1. Международная конференция "Дни дифракции 2016", Санкт-Петербург, Россия, июнь 2016 г. (устный доклад).
2. Международная конференция "Mathematical Challenge of Quantum Transport in Nanosystems" Санкт-Петербург, Россия, 25–26 сентября 2018 г. (устный доклад).
3. Семинар сектора малочастичных систем Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Россия, 3 декабря 2013 г.
4. Семинар сектора малочастичных систем Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Россия, 3 октября 2017 г.

5. Городской семинар по вопросам теории распространения волн, рук. В. М. Бабич, ПОМИ, Санкт-Петербург, 15 мая 2018 г.

6. Петербургский семинар по квантовой теории поля, рук. М. А. Семенов-Тянь-Шанский, ПОМИ, Санкт-Петербург, 27 декабря 2018 г.

Публикации и личный вклад

Содержание диссертации полно изложено в 4 публикациях. Три работы являются статьями в рецензируемых научных журналах, рекомендуемых ВАК РФ (первые две работы опубликованы в журналах из списка Web of Science, третья работа опубликована в журнале из списка Scopus), четвертая работа опубликована в рецензируемом сборнике трудов конференции (входит в список Scopus):

· Koptelov Ya. Yu., Levin S. B. *On the asymptotic behavior in the scattering problem for several charged quantum particles interacting via repulsive pair potentials*, Physics of Atomic Nuclei, 2014 – V. 77(4) – P. 528–536. [32]

· Levin S. B., Koptelov Y. Y. *On asymptotics of the scattering problem solution of n like-charged quantum particles*, Few-Body Systems, 2014 – V. 55(8–10) – P. 809–812. [33]

· Будылин А. М., Коптелов Я. Ю., Левин С. Б., *Некоторые аспекты задачи рассеяния для системы трех заряженных частиц*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2017 – Т. 461 – С. 65–93. [3]

· Budylin A. M., Koptelov Ya. Yu., Levin S. B., *Days on Diffraction, On continuous spectrum eigenfunctions asymptotics of three three-dimensional unlike-charged quantum particles scattering problem*, Proceedings of the International Conference, 2016 – P. 89–94. [26]

К публикациям автора также относится следующая статья в журнале из перечня ВАК (входит в список Web of Science), тема которой близка теме диссертации, но не совпадает с ней непосредственно:

· Buslaev V. S., Koptelov Ya. Yu., Levin S. B., Strygina D. A., *Numerical construction of the continuous spectrum eigenfunctions of the three body Schrödinger operator: Three particles on the axis with short-range pair potentials*, Physics of Atomic Nuclei, 2013 – V. 76(2) – P. 208–218. [27]

Диссертация основана на совместных с С. Б. Левиным и А. М. Будылиным работах. В работах [32] и [33] С. Б. Левину принадлежит постановка задачи и построение общего плана исследований. Автору принадлежит реализация и развитие предложенного плана исследований. В работах [26] и [3] С. Б. Левину принадлежит постановка задачи, С. Б. Левину и А. М. Будылину принадлежит построение общего плана исследований, автору принадлежит реализация и развитие предложенного плана исследований.

Положения, выносимые на защиту

1. Для системы четырех одноименно заряженных частиц построена равномерная по угловой переменной в конфигурационном пространстве на бесконечности асимптотика собствен-

ных функций абсолютно непрерывного спектра.

2. Для системы с произвольным числом одноименно заряженных частиц сформулирована теорема о структуре анзаца для старшего члена асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра, обеспечивающего быстрое убывание невязки в уравнении Шрёдингера, непрерывно по всем угловым переменным в конфигурационном пространстве.

3. Для системы трех трехмерных заряженных кулоновских частиц с притяжением в парных подсистемах выделена асимптотика совокупного вклада высоковозбужденных (ридберговских) парных состояний в структуру асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера.

Объем и структура работы

Работа состоит из введения, двух глав и заключения. Полный объем диссертации 104 страницы текста. Список литературы содержит 37 наименований.

Формулировка основных результатов

Прежде чем обратиться к описанию результатов, рассмотрим подробнее упомянутый результат группы В. С. Буслаева и С. Б. Левина для системы трех одноименно заряженных квантовых частиц одинаковой массы. Рассмотрим систему трех одноименно заряженных квантовых частиц одинаковой массы. В конфигурационном пространстве, в предположении покоящегося центра масс, такая система описывается так называемым базисом Якоби, содержащим два трехмерных вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} . Для полного описания системы нам понадобятся так же переменные \mathbf{k} и \mathbf{p} , имеющие смысл импульсов.

Расстояния между частицами описываются векторами \mathbf{x}_j , $j = 1, 2, 3$. Для удобства, базис Якоби выбирается таким образом, чтобы \mathbf{x} совпадал с \mathbf{x}_1 . В таком случае, $\mathbf{x}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}$ (импульсы связаны между собой аналогичными соотношениями).

Уравнение Шрёдингера, описывающее эту систему, можно записать в следующем виде:

$$(-\Delta_{\mathbf{x}} - \Delta_{\mathbf{y}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_i|} - \mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2)\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = 0. \quad (0.1)$$

Нас интересует ситуация, когда $\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 \rightarrow \infty$.

Тогда в ситуации, когда все частицы хорошо разделены, выполняется приближение искаженных плоских волн

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle + i\langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) \Phi(\mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3), \quad (0.2)$$

где $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \equiv \Phi(-i\frac{\alpha}{2|\mathbf{k}|}, 1, i|\mathbf{x}||\mathbf{k}| - i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, а N_0 – некоторая нормировочная константа.

В случае, когда $|\mathbf{x}|$ становится много меньше, чем $|\mathbf{y}|$, указанный анзац перестаёт удовлетворять критерию скорости убывания невязки. Основным результатом группы В. С. Буслая и С. Б. Левина был вывод, что в такой области конфигурационного пространства анзац должен быть изменен следующим образом:

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle + i\langle \mathbf{y}, \mathbf{p} \rangle} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) \Phi(\tilde{\mathbf{x}}_2, \mathbf{k}_2) \Phi(\tilde{\mathbf{x}}_3, \mathbf{k}_3), \quad (0.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \frac{\nabla_{\mathbf{k}_1} \psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}{\psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \frac{\nabla_{\mathbf{k}_1} \psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}{\psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}, \\ \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) &= N_2 e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (0.4)$$

В первой главе работы мы рассматриваем систему четырех одноименно заряженных частиц. Изучаются все возможные асимптотические конфигурации, при условии, что сумма квадратов координат Якоби должна стремиться к бесконечности, мы в каждой из них предъявляем анзац, родственной указанному выше, порождающий невязку уравнения Шрёдингера, убывающую быстрее потенциала. В конце главы мы обобщаем результат на случай произвольной асимптотической конфигурации в системе n одноименно заряженных квантовых частиц одинаковой массы.

Предположим, что система n частиц содержит l асимптотических "кластеров", каждый из которых состоит из m_j частиц, $j = 1, 2, \dots, l$.

Введем в рассмотрение базисы Якоби, руководствуясь следующей схемой: сначала внутри каждого из l кластеров мы вводим базис Якоби $\mathbf{y}_i^{(j)}$, состоящий из $m_j - 1$ вектора, j нумерует кластер. Составной базис Якоби мы формируем после этой процедуры для системы из $n - \sum_{j=1}^l m_j$ частиц, находящихся далеко друг от друга и от любого из упомянутых кластеров, и для l "квазичастиц", отвечающих кластерам (имеющих массу, равную сумме масс частиц в кластере и находящихся в его центре масс). Обозначим эти вектора за \mathbf{z}_i , всего таких базисных векторов будет $n - \sum_{j=1}^l m_j + l - 1$.

Набор локальных базисов Якоби $\{\{\mathbf{y}^{(1)}\}, \{\mathbf{y}^{(2)}\}, \dots, \{\mathbf{y}^{(l)}\}, \{\mathbf{z}\}\}$ формирует базис координат для всей системы из n частиц.

Рассмотрим функции, описывающие решение свободного уравнения Шрёдингера для "кластеров":

$$\chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j), \quad \mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{(j)} \\ \mathbf{y}_2^{(j)} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{m_j-1}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{(j)} \\ \mathbf{p}_2^{(j)} \\ \dots \\ \mathbf{p}_{m_j-1}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, l, \quad (0.5)$$

они удовлетворяют следующему уравнению:

$$-\sum_{\beta=1}^{m_j-1} \Delta_{\mathbf{y}_\beta^{(j)}} \chi_j + \sum_{\alpha=1}^{\frac{m_j(m_j-1)}{2}} \frac{a_0}{|\mathbf{x}_\alpha^{(j)}|} \chi_j = \sum_{\beta=1}^{m_j-1} |\mathbf{p}_\beta^{(j)}|^2 \chi_j. \quad (0.6)$$

Тогда анзац, описывающий асимптотику собственных функций абсолютно непрерывного спектра, в такой конфигурации дается следующими формулами:

$$\Psi_{\text{mod}} \sim e^{i(\mathbf{Q}_0, \mathbf{X}_0)} \prod_{j=1}^l \chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j) \prod_{i=M+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{k}_i), \quad (0.7)$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{N+1} \\ \mathbf{z}_{N+2} \\ \dots \\ \mathbf{z}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{N+1} \\ \mathbf{q}_{N+2} \\ \dots \\ \mathbf{q}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad N = \sum_{j=1}^l (m_j - 1), \quad M = \sum_{j=1}^l \frac{m_j(m_j - 1)}{2}.$$

Здесь обозначено

$$\tilde{\Phi}_j(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{k}_j) \equiv \Phi(-i\eta_j, 1, i(|\mathbf{k}_j| |\tilde{\mathbf{x}}_j| - \langle \mathbf{k}_j, \tilde{\mathbf{x}}_j \rangle)). \quad (0.8)$$

В терминах базиса Якоби для \mathbf{x}_i можно записать разложение по этому базису:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\nu=1}^{m_j-1} \zeta_{i\nu}^{(j)} \mathbf{y}_\nu^{(j)} + \sum_{\nu=N+1}^{n-1} \zeta_{i\nu}^{(0)} \mathbf{z}_\nu. \quad (0.9)$$

Здесь под $\zeta_{i\nu}^{(j)}$ понимаются соответствующие коэффициенты разложения. При этом все переменные из набора \mathbf{y}_ν^j , $j = 1, 2, \dots, l$, $\nu = 1, 2, \dots, m_j - 1$ являются малыми (в соответствии с построением базиса), а переменные \mathbf{z}_ν , $\nu = N + 1, N + 2, \dots, n - 1$ наоборот являются большими (отвечают расстояниям между частицами из разных "кластеров").

В таком случае, модификация будет состоять в следующей замене:

$$\mathbf{y}_\nu^{(j)} \rightarrow \mathbf{u}_\nu^{(j)} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{p}_\nu^{(j)}} \chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j)}{\chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, l; \quad \nu = 1, 2, \dots, m_j - 1. \quad (0.10)$$

Где $\tilde{\mathbf{x}}_i$, $i = M + 1, M + 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$, задается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\nu=1}^{m_j-1} \zeta_{i\nu}^{(j)} \mathbf{u}_\nu^{(j)} + \sum_{\nu=N+1}^{n-1} \zeta_{i\nu}^{(0)} \mathbf{z}_\nu. \quad (0.11)$$

Теорема 0.0.1. *Указанный анзац для асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра системы n одинаково заряженных квантовых частиц порождает в уравнении Шрёдингера невязку, убывающую на бесконечности в конфигурационном пространстве быстрее кулоновского потенциала.*

Замечание 0.0.2. Все результаты, указанные в первой главе, являются частным случаем этой конструкции.

Во второй главе мы изучаем систему трех трехмерных заряженных частиц с кулоновским притяжением в некоторых из парных подсистем. Базис Якоби вводится таким образом, чтобы координата \mathbf{x} соответствовала разноименно заряженным частицам. На заряды в этой паре частиц накладывается требование не равенства нулю суммарного заряда.

В области конфигурационного пространства, где в старшем порядке в уравнении Шрёдингера допускается разделение переменных, мы ищем приближенное решение Ψ^{sep} в виде спектрального разложения по решениям парной задачи с некоторой неизвестной плотностью

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{sep}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = & \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(k'^2 + p'^2 - E) R(\mathbf{q}, \mathbf{q}') + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(p'^2 - \frac{\alpha_1^2}{4n^2} - E) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \quad (0.12)$$

Здесь используются обозначения: $\mathbf{q} = (\mathbf{k}, \mathbf{p})^t$, $\mathbf{q}' = (\mathbf{k}', \mathbf{p}')^t$, $q^2 = E$, а $\psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ и $\psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ удовлетворяют уравнениям Шрёдингера:

$$(-\Delta_{\mathbf{x}} + v_1(x)) \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = k^2 \psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}),$$

$$(-\Delta_{\mathbf{y}} + v^{\text{eff}}(y)) \psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = p^2 \psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}).$$

Во втором слагаемом, отвечающем дискретному спектру парной подзадачи, связанной с переменной \mathbf{x} , $\psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}')$ – функция, полученная путем аналитического продолжения $\psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}')$ по модулю переменной \mathbf{k} в точку комплексной плоскости импульса $i \frac{|\alpha_1|}{2n}$ (тем самым эта функция остается решением уравнения Шрёдингера, но отвечает точке дискретного спектра по энергии).

$$\psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n} x} L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{n} x \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle}{2}, \quad (0.13)$$

здесь $L_n(x)$ – полином Лагерра.

Причиной выбора такого вида для спектрального разложения является желание упростить задачу путем перехода от тройной бесконечной суммы, возникающей в классическом разложении, обычно встречающемся в физике, к однократному суммированию и интегрированию по сфере.

Нас в данной работе интересует асимптотика слагаемого, отвечающего дискретному спектру. Для этого, нам нужно было найти неизвестное ядро $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$, что получается путем согласования решения $\Psi^{\text{sep}}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ с известным приближением $\Psi^{\text{BBK}}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$

$$\Psi^{\text{BBK}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) \Phi(\mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3), \quad (0.14)$$

которое нас связывает с первой частью работы.

Теорема 0.0.3. Ядро $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$ имеет следующий вид при $n \gg 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(\mathbf{q}, t, \varphi, \hat{\mathbf{k}}') &= \frac{\varpi_0^{(\text{in})}(\mathbf{q})}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib} ce_{2l}(\varphi, s) Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') + \\ &+ \frac{\varpi_0^{(\text{out})}(\mathbf{q})}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib} ce_{2l}(\varphi, s) Z^{\text{out}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \quad (0.15)$$

Здесь использовано обозначение

$$\begin{aligned} Z^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') &= - \frac{N_c^{(1)} \Gamma(3 + i\eta)}{k^{4+i\eta}} \left[e^{\frac{\pi\eta}{2}} \langle \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\text{in(out)}}(\mathbf{q}) \rangle \Phi \left(3 + i\eta, 1, i \frac{|\alpha_1|}{2k} (1 + \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}} \rangle) \right) - \right. \\ &\left. - e^{-\frac{\pi\eta}{2}} H^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') \right], \end{aligned} \quad (0.16)$$

где

$$H^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in(out)}}(\mathbf{q}) \rangle \Phi \left(3 + i\eta, 1, -i \frac{|\alpha_1|}{2k} (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) s_c(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}),$$

а также $t = \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'_n \rangle$, переменная φ – угол между векторами $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{k}}]$ и $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'_n]$, отсчитываемый в положительном направлении при условии, что тройка векторов $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{k}}]$, $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'_n]$ и $\hat{\mathbf{p}}$ является положительно ориентированной,

$$\varpi_0^{(\text{in,out})}(\mathbf{q}) = B_0^{\text{in,out}}(\mathbf{q}) \frac{|\alpha_1|^3 E^{1+i\frac{b}{2}} e^{\frac{\pi b}{2}}}{2^5 \pi^2 A_0^{(2l)} \Gamma(1 + ib)},$$

$$B_0^{\text{in}}(\mathbf{q}) = A_0 \Gamma(-i\eta_2) \Gamma(-i\eta_3) e^{-\frac{\pi\omega}{2}} (1 - e^{2\pi\eta_2}) (1 - e^{2\pi\eta_3}) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle) \right]^{i\eta_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle) \right]^{i\eta_3},$$

$$\mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\eta_2 \frac{\hat{\mathbf{k}}_2 - \hat{\mathbf{p}}}{1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle} + \eta_3 \frac{\hat{\mathbf{k}}_3 + \hat{\mathbf{p}}}{1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle} \right),$$

$$B_0^{\text{out}}(\mathbf{q}) = A_0 \Gamma(-i\eta_2) \Gamma(-i\eta_3) e^{-\frac{\pi\omega}{2}} (1 - e^{2\pi\eta_2}) (1 - e^{2\pi\eta_3}) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle) \right]^{i\eta_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle) \right]^{i\eta_3},$$

$$\mathbf{L}_{\text{out}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\eta_2 \frac{\hat{\mathbf{k}}_2 + \hat{\mathbf{p}}}{1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle} + \eta_3 \frac{\hat{\mathbf{k}}_3 - \hat{\mathbf{p}}}{1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle} \right).$$

Где $\omega = \eta_2 + \eta_3$, $A_0 = -\frac{1}{4\pi^2} N_0^{(23)}$, $b = \eta^{\text{eff}} - \omega$, α_1 – параметр кулоновского потенциала, $\eta_j = \frac{|\alpha_j|}{2|k_j|}$ – параметр Зоммерфельда, ψ_c обозначает двухчастичное состояние рассеяния, функция $s_c(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$ – двухчастичная кулоновская матрица рассеяния. Обозначение $\left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib}$ введено для обобщенной функции χ_+^λ . Функция $ce_{2l}(\varphi, s)$ – функция Матье, $A_0^{(2l)}$ – известный коэффициент разложения $ce_{2l}(\varphi, s)$ по косинусам.

В соответствии с найденным ядром, можно записать интересующее нас слагаемое в спектральном разложении, как сумму следующего вида:

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{n'=M}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{E + \frac{|\alpha_1^2|}{4n'^2}}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}'_n \psi_{n'}^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) R_{n'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (0.17)$$

где M – некоторое большое число, определяемое из условий задачи.

Замечание 0.0.4. В данной работе мы построили асимптотику вклада по парной переменной x , поэтому эффективно это выражение может быть сведено к следующему виду:

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{2n} x (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (0.18)$$

где $U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}')$ – некоторая известная гладкая функция переменной $\hat{\mathbf{k}}'$, а параметр x принимает произвольные значения на положительной полуоси ($x \in [0, \infty)$).

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\hat{\Upsilon}(R) \equiv -ie^{2iR} \int_0^{\infty} \frac{dt e^{-\frac{t}{3}}}{C(R) - D \ln t} \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right). \quad (0.19)$$

Здесь использованы обозначения

$$C(R) = B_1 + \frac{3}{2}B_2 \ln R - B_2 \ln 2 + iB_2 \frac{\pi}{4}, \quad D = \frac{1}{2}B_2. \quad (0.20)$$

Постоянные B_1 и B_2 – известные числа, с точностью до тысячной, $B_1 = -0.315$, а $B_2 = -\frac{2}{3}$.

Теорема 0.0.5. Совокупный вклад парных кулоновских возбужденных состояний в асимптотику состояния рассеяния в задаче трех заряженных квантовых частиц имеет следующий вид при больших значениях $|\mathbf{x}|$:

$$\Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{4\sqrt{\pi}R^{\frac{5}{2}}} \left(\hat{\Upsilon}(R) + \hat{\Upsilon}^*(R) \right), \quad R = \sqrt{|\alpha_1|x}, \quad (0.21)$$

где функция $\hat{\Upsilon}(R)$ описана в уравнении (0.19). Старший член этого выражения может быть записан как:

$$\Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi}} U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{\sin(2R)}{C(R)R^{\frac{5}{2}}}. \quad (0.22)$$

Благодарности

Автор выражает благодарность кафедре высшей математики и математической физики Физического факультета Санкт-Петербургского государственного университета за полученные знания и возможность проведения исследований, которые легли в основу данной работы. Отдельная благодарность научному руководителю С. Б. Левину за общее руководство, критическое и тщательное курирование работы на всех ее этапах, а также обсуждение результатов. Также автор выражает глубокую признательность А. М. Будылину и А. А. Федотову за консультации, обсуждение методов и конструктивную критику. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00165, РНФ 17-11-01003 и стипендии им. В. А. Рохлина.

Глава 1

Асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра для задачи нескольких одноименно заряженных частиц

В этой главе рассматривается асимптотика собственных функций абсолютно непрерывного спектра для оператора Шрёдингера нескольких одноименно заряженных частиц. В конфигурационном пространстве для такой задачи выделяются области, где парные расстояния могут быть малы, по сравнению с "размерами" всей системы. Для подобных областей предложен явный вид приближенного решения, который порождает хорошо убывающую невязку для уравнения Шрёдингера на бесконечности. В конце главы формулируется результат для произвольного количества частиц в системе.

1.1 Общие сведения и постановка задачи

Рассмотрим систему n трехмерных частиц одинаковой массы, взаимодействующих посредством одинаковых парных кулоновских потенциалов. Предположение об одинаковости масс и потенциалов введено лишь для упрощения изложения. Эти ограничения легко снимаются, что ведет лишь к техническому, но не принципиальному, усложнению решения.

Конфигурационное пространство системы есть \mathbb{R}^{3n} . В предположении нулевого полного момента системы приходим к конфигурационному пространству

$$\Gamma = \{ \mathbf{r} : \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n}, \mathbf{r} = \{ \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n \}, \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j = 0 \}.$$

На Γ имеется скалярное произведение $\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle$, индуцированное скалярным произведением в \mathbb{R}^{3n} . Система на Γ описывается уравнением Шрёдингера

$$H\psi = E\psi, \quad \Psi = \Psi(\mathbf{r}) \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (1.1)$$

$$H = -\frac{1}{2}\Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) = \sum_{i,j=1;i < j}^n v(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{r}_l \in \mathbb{R}^3, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Здесь $\Delta_{\mathbf{r}}$ – оператор Лапласа на Γ .

Изучая систему n частиц, мы подразумеваем, что нам все известно про любую ее подсистему. В данной главе все частицы считаются одинаково зараженными, поэтому связанные состояния отсутствуют.

Для изучения подобных систем наиболее целесообразно использовать так называемые координаты Якоби. Перейдем к ним, используя описанную ниже схему (см., например, [14]).

Пусть ω_j – некоторая подсистема, состоящая из j частиц, тогда положение ее центра масс можно найти следующим образом:

$$\mathbf{y}_{\omega_j} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \mathbf{r}_{k_i}, \quad (1.3)$$

где индекс k_i нумерует частицы. Положение $j + 1$ частицы относительно подсистемы ω_j описывается координатой

$$\mathbf{x}_{\omega_j k_{j+1}} = \left(\frac{2j}{j+1} \right)^{\frac{1}{2}} (\mathbf{y}_{\omega_j} - \mathbf{r}_{k_{j+1}}). \quad (1.4)$$

Начиная с некоторой частицы ($j = 1$) и фиксируя порядок включения частиц в подсистему, мы введем на Γ набор из $n - 1$ ортогональных векторов – базис Якоби.

Наряду с введенными таким образом координатами $\mathbf{x}_{\omega_j k_{j+1}} \in \mathbb{R}^3$ ($j = 1, 2, \dots, n - 1$) будем рассматривать двойственные им по Фурье переменные, импульсы $\mathbf{k}_{\omega_j k_{j+1}} \in \mathbb{R}^3$.

Заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{x}_{\omega_1 m_2} = \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_{mj}^{(l)} \mathbf{x}_{\omega_j l_{j+1}}, \quad m = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{k}_{\omega_1 m_2} = \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_{mj}^{(l)} \mathbf{k}_{\omega_j l_{j+1}}, \quad m = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (1.6)$$

где индекс l фиксирует соответствующий базис Якоби, а параметры $\zeta_{mj}^{(l)}$ – коэффициенты перехода между различными базисами Якоби. Для определенных таким образом координат справедливо также соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\zeta_{mj}^{(l)})^2 = 1. \quad (1.7)$$

Мы будем считать, что $v(\mathbf{x}_{\beta_1 l_2}) = \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_{\beta_1 l_2}|}$, $\alpha > 0$, где $\mathbf{x}_{\beta_1 l_2}$ определяет относительную координату в произвольной парной подсистеме, отвечающей базису Якоби, фиксированному параметром β .

Перепишем, наконец, уравнение Шрёдингера (1.1) в координатах Якоби:

$$H\Psi = E\Psi, \quad \Psi = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad E = P^2, \quad (1.8)$$

$$H = -\Delta_{\mathbf{X}} + V(\mathbf{X}), \quad V(\mathbf{X}) = \sum_{\beta=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_{\beta_1 l_2}|}, \quad \mathbf{x}_{\beta_1 l_2} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.9)$$

Здесь $\Delta_{\mathbf{X}}$ – оператор Лапласа на Γ ,

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_{\omega_1 \gamma_2}, \mathbf{x}_{\omega_2 \gamma_3}, \dots, \mathbf{x}_{\omega_{n-1} \gamma_n})^t, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{k}_{\omega_1 \gamma_2}, \mathbf{k}_{\omega_2 \gamma_3}, \dots, \mathbf{k}_{\omega_{n-1} \gamma_n})^t,$$

где параметр γ фиксирует некоторый набор координат Якоби, связанный по построению с определенной двухчастичной подсистемой.

Определение 1.1.1. Невязка уравнения Шрёдингера $Q[\cdot]$ определяется следующим образом:

$$Q[\Psi(\mathbf{z})] = (-\Delta_{\mathbf{z}} + V(\mathbf{z}) - E)\Psi(\mathbf{z}).$$

Плоские волны являются точным решением однородного уравнения (без потенциала). При наличии же потенциала, анзац вида "плоская волна" порождает невязку, убывающую со скоростью потенциала, в силу того, что не аннулируется лишь слагаемое вида произведение потенциала на плоскую волну. Если же мы хотим "улучшать" качество анзаца (например, полагая плоскую волну нулевой итерацией в некоторой процедуре), то скорость убывания невязки такого анзаца должна быть более быстрой. На этом и основывается наш критерий проверки пригодности анзаца.

1.2 Построение анзаца

Рассмотрим анзац типа искаженных плоских волн:

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \underset{|\mathbf{X}| \rightarrow \infty}{\sim} N_0 e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \prod_{\beta=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{\beta}). \quad (1.10)$$

Мы воспользовались здесь обозначениями $\beta \equiv \beta_1 l_2$,

$$\Phi(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{\beta}) = \Phi(-i\eta_{\beta}, 1, i|\mathbf{x}_{\beta}| |\mathbf{k}_{\beta}| - i\langle \mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{\beta} \rangle), \quad \mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{\beta} \in \mathbb{R}^3, \quad \eta_{\beta} = \frac{\alpha}{2|\mathbf{k}_{\beta}|},$$

где Φ – вырожденная гипергеометрическая функция (см. [10]), а постоянная $N_0 = \prod_{\beta=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} N_2^{(\beta)}$ является произведением нормировочных постоянных $\frac{n(n-1)}{2}$ двухчастичных состояний рассеяния

$$N_2^{(\beta)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi\eta_{\beta}}{2}} \Gamma(1 + i\eta_{\beta}).$$

При этом, функция $\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера:

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|} \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = k^2 \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}). \quad (1.11)$$

$$\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = N_2 e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (1.12)$$

Такого рода представление описывает асимптотику собственной функции абсолютно непрерывного спектра для n -частичного оператора Шрёдингера только в случае, если все частицы хорошо разделены. В областях конфигурационного пространства, где расстояния между частицами могут быть много меньше гиперрадиуса системы ($R = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{x}_{\omega_j k_{j+1}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$), такое представление требует некоторой модификации, так как скорость убывания невязки указанного Ansatzа сравнивается с кулоновским убыванием. Рассмотрим подробнее такую модификацию на примере системы четырех частиц.

1.3 Система четырех квантовых кулоновских одноименно заряженных частиц

Рассмотрим все возможные асимптотические конфигурации для системы четырех частиц. Принципиально различных конфигураций может быть три: все частицы хорошо разделены, есть парные сближения (один или два "кластера" по две частицы) и "кластер" из трех частиц и удаленная от него частица.

Определение 1.3.1. Под m -частичным "кластером" в системе n частиц мы понимаем здесь конфигурацию, в которой все межчастичные расстояния в системе m частиц много меньше гиперрадиуса системы.

Замечание 1.3.2. Обратим внимание на то, что заряды частиц одинаковые, поэтому речи о кластере в привычном значении этого слова здесь не идет.

Также напомним, что мы изначально рассматриваем только такие конфигурации, где $R \rightarrow \infty$, соответственно максимальный размер кластера в системе n частиц может быть только $n - 1$.

Для начала, в соответствии с формулами для координат Якоби (1.5), построим базисы для четырех частиц.

В системе n частиц есть $\frac{n(n-1)}{2}$ парных взаимодействий. Соответственно, в случае четырех частиц есть шесть отвечающих им переменных \mathbf{x}_j , $j = 1, 2, \dots, 6$.

Каждая из этих переменных принадлежит своему базису Якоби и может быть выражена в терминах любого другого фиксированного базиса. Зафиксировав для удобства один базис, перепишем через него все переменные, отвечающие расстоянию между частицами (внутри одного базиса есть 3 переменные, в целях упрощения обозначений, мы обозначим их буквами \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z}):

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}, \\
\mathbf{x}_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_1}{2}, \\
\mathbf{x}_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z}_1 - \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{3}}, \\
\mathbf{x}_4 &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z}_1 - \frac{\mathbf{y}_1}{2\sqrt{3}} - \frac{\mathbf{x}_1}{2}, \\
\mathbf{x}_5 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z}_1 + \frac{\mathbf{y}_1}{2\sqrt{3}} - \frac{\mathbf{x}_1}{2}, \\
\mathbf{x}_6 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{x}_1}{2}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Для удобства приведем наглядный пример, отвечающий указанному выбору ориентации векторов \mathbf{x}_j и фиксированного базиса Якоби, см. рисунки (1.1)–(1.2).

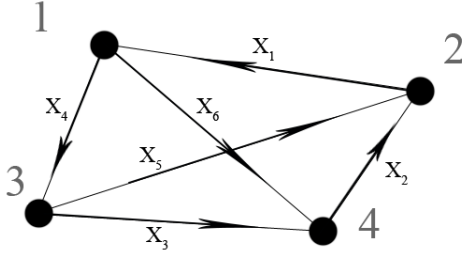


Рисунок 1.1: Выбор ориентации векторов \mathbf{x}_j

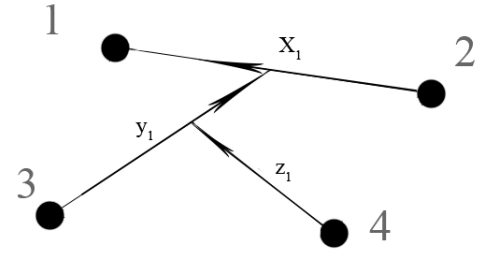


Рисунок 1.2: Пример базиса Якоби

Переменным \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z} соответствуют двойственные импульсы, которые мы обозначим $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y$ и \mathbf{k}_z . Для них связь абсолютно аналогична (1.13). Индекс "1" мы будем в дальнейшем опускать.

Теперь мы сможем перейти к описанию всех асимптотических конфигураций в этой системе. Для начала рассмотрим самый простой случай, когда все частицы хорошо разделены.

1.3.1 Случай хорошо разделенных частиц

Упомянутый ранее анзац (1.10) для четырех частиц выглядит следующим образом:

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \prod_{\beta=1}^6 \Phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{x_{\beta}}), \tag{1.14}$$

нормировочную постоянную мы позволим себе опустить. Здесь $\Phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{x_{\beta}})$ – вырожденная гипергеометрическая функция

$$\Phi_{\beta}(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{x_{\beta}}) = \Phi\left(-i\frac{\alpha}{2|\mathbf{k}_{x_{\beta}}|}, 1, i|\mathbf{k}_{x_{\beta}}||\mathbf{x}_{\beta}| - i\langle \mathbf{k}_{x_{\beta}}, \mathbf{x}_{\beta} \rangle\right). \tag{1.15}$$

Предложение 1.3.3. Анзац (1.14) порождает на бесконечности в конфигурационном пространстве невязку уравнения Шрёдингера, убывающую быстрее кулоновского потенциала.

Доказательство. Для доказательства мы подставим анзац (1.14) в уравнение Шрёдингера и удостоверимся, что невязка убывает достаточно быстро.

Необходимо заметить, что в конфигурационном пространстве нашей задачи, подпространства отвечающие $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$ и \mathbf{z}_i есть ортогональные подпространства. Соответственно можно отдельно исследовать выражения вида:

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}_1}, \nabla_{\mathbf{x}_1} \Psi \rangle,$$

так как вектора, соответствующие градиентам по \mathbf{x} , \mathbf{y} и \mathbf{z} попадают в отдельные подпространства.

Рассмотрим действие $\nabla_{\mathbf{x}_1}$ на Φ_β , отметив, что от \mathbf{x}_i зависит только аргумент вырожденной гипергеометрической функции (он зависит только от \mathbf{x}_β). Для упрощения вычислений перепишем градиент по \mathbf{x}_1 через \mathbf{x}_i , для этого рассмотрим:

$$\nabla_{\mathbf{x}_1} f(\mathbf{x}_i) = \nabla_{\mathbf{x}_i} f(\mathbf{x}_i) \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial \mathbf{x}_1}. \quad (1.16)$$

Тогда, переобозначив коэффициенты разложения (1.5) через $\kappa_{\beta,j}$, можно записать

$$\mathbf{x}_\beta = \kappa_{\beta,1} \mathbf{x}_1 + \kappa_{\beta,2} \mathbf{y}_1 + \kappa_{\beta,3} \mathbf{z}_1. \quad (1.17)$$

Для градиента, учтя $\nabla = \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}_1} \\ \nabla_{\mathbf{y}_1} \\ \nabla_{\mathbf{z}_1} \end{pmatrix}$, можем найти следующее:

$$\nabla \Phi_\beta = i \Phi'_\beta \begin{pmatrix} \kappa_{\beta,1} (|\mathbf{k}_\beta| \frac{\mathbf{x}_\beta}{|\mathbf{x}_\beta|} - \mathbf{k}_\beta) \\ \kappa_{\beta,2} (|\mathbf{k}_\beta| \frac{\mathbf{x}_\beta}{|\mathbf{x}_\beta|} - \mathbf{k}_\beta) \\ \kappa_{\beta,3} (|\mathbf{k}_\beta| \frac{\mathbf{x}_\beta}{|\mathbf{x}_\beta|} - \mathbf{k}_\beta) \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Для градиента экспоненты легко находится

$$\nabla e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} = i \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{x_1} \\ \mathbf{k}_{y_1} \\ \mathbf{k}_{z_1} \end{pmatrix} e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle}. \quad (1.19)$$

Также можно найти выражение для $\langle \nabla, \nabla e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \rangle$:

$$\langle \nabla, \nabla e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \rangle = -(\mathbf{k}_{x_1}^2 + \mathbf{k}_{y_1}^2 + \mathbf{k}_{z_1}^2) e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle}, \quad (1.20)$$

а сумма квадратов импульсов есть энергия E . Для $\langle \nabla, \nabla \Phi_\beta \rangle$, учитывая ортогональность подпространств:

$$\langle \nabla, \nabla \Phi_\beta \rangle = -\Phi''_\beta \left[\sum_{j=1}^3 \kappa_{\beta,j}^2 \right] (|\mathbf{k}_\beta| \frac{\mathbf{x}_\beta}{|\mathbf{x}_\beta|} - \mathbf{k}_\beta)^2 + i \Phi'_\beta \left[\sum_{j=1}^3 \kappa_{\beta,j}^2 \right] |\mathbf{k}_\beta| \frac{2}{|\mathbf{x}_\beta|}. \quad (1.21)$$

Рассмотрим следующую сумму:

$$\langle \nabla, \nabla e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle} \rangle \prod_{\beta=1}^6 \Phi_{\beta} + \langle \nabla, \nabla \Phi_{\beta} \rangle e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle} \prod_{j=1, j \neq \beta}^6 \Phi_j + 2 \langle \nabla e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle}, \nabla \Phi_{\beta} \rangle \prod_{j=1, j \neq \beta}^6 \Phi_j - (V - E)\Psi, \quad (1.22)$$

и подробно взглянем на последнее слагаемое. В силу ортогональности, верно следующее:

$$2 \langle \nabla e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle}, \nabla \Phi_{\beta} \rangle \prod_{j=1, j \neq \beta}^6 \Phi_j = \quad (1.23)$$

$$= -2 \sum_{\beta=1}^6 \left[\Phi'_{\beta} \left(|\mathbf{k}_{\beta}| \frac{\mathbf{x}_{\beta}}{|\mathbf{x}_{\beta}|} - \mathbf{k}_{\beta} \right) [\kappa_{\beta,1} \mathbf{k}_{x_1} + \kappa_{\beta,2} \mathbf{k}_{y_1} + \kappa_{\beta,3} \mathbf{k}_{z_1}] \prod_{j=1, j \neq \beta}^6 \Phi_j e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle} \right]. \quad (1.24)$$

В силу соотношений для импульсов, получаем

$$2 \langle \nabla e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle}, \nabla \Phi_{\beta} \rangle \prod_{j=1, j \neq \beta}^6 \Phi_j = -2 \sum_{\beta=1}^6 \left[\Phi'_{\beta} \left[\left(|\mathbf{k}_{\beta}| \frac{\mathbf{x}_{\beta}}{|\mathbf{x}_{\beta}|} - \mathbf{k}_{\beta} \right) \mathbf{k}_{\beta} \right] \prod_{j=1, j \neq \beta}^6 \Phi_j e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle} \right]. \quad (1.25)$$

Согласно (1.7):

$$\sum_{j=1}^3 \kappa_{\beta,j}^2 = 1. \quad (1.26)$$

В невязку анзатца войдут члены двух типов указанные ниже и перекрестные, содержащие производные от двух разных вырожденных гипергеометрических функций, как оказывается, первая сумма аннулируется, а вторая и определяет скорость убывания невязки. Для пояснения первого утверждения, вынесем за скобку $e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{P} \rangle}$:

$$\sum_{\beta=1}^6 \left(\left[-2 \left(|\mathbf{k}_{\beta}|^2 - \frac{|\mathbf{k}_{\beta}|}{|\mathbf{x}_{\beta}|} \langle \mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{\beta} \rangle \right) \Phi''_{\beta} + i2 \Phi'_{\beta} \frac{|\mathbf{k}_{\beta}|}{|\mathbf{x}_{\beta}|} - 2 \left(|\mathbf{k}_{\beta}| \frac{\langle \mathbf{k}_{\beta}, \mathbf{x}_{\beta} \rangle}{|\mathbf{x}_{\beta}|} - |\mathbf{k}_{\beta}|^2 \right) \Phi'_{\beta} + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_{\beta}|} \Phi_{\beta} \right] \prod_{j=1, j \neq \beta}^6 \Phi_j \right). \quad (1.27)$$

Если разделить данное выражение на $-\frac{2|\mathbf{k}_{\beta}|}{i|\mathbf{x}_{\beta}|}$, мы получим сумму, удовлетворяющую гипергеометрическому уравнению с параметрами, соответствующими, выбранным в исходном анзатце. Тем самым данная сумма аннулируется.

Рассмотрим невязку анзатца:

$$Q = (H - E)\Psi. \quad (1.28)$$

Учитывая вышенаписанное, сохраняются только перекрестные члены, содержащие $\Phi'_{\alpha} \Phi'_{\beta}$. Рассмотрим подробнее, какой коэффициент будет перед ними. Из (1.18) мы приходим к

$$|\mathbf{k}_{\alpha}| |\mathbf{k}_{\beta}| \langle \hat{\mathbf{x}}_{\alpha} - \hat{\mathbf{k}}_{\alpha}, \hat{\mathbf{x}}_{\beta} - \hat{\mathbf{k}}_{\beta} \rangle,$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ – единичный вектор $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.

Такие члены имеют порядок убывания $|\mathbf{x}|^{-2}$ вне малых угловых окрестностей рассеяния вперед, поведение внутри окрестностей тоже может быть оценено (подробнее об этом написано в более общем случае, см. (1.107)–(1.122), но в любом случае убывание будет быстрее кулоновского). Тем самым, предложение доказано. \square

Замечание 1.3.4. Далее для случая четырех частиц мы будем опускать рассмотрение членов невязки такого рода, в силу отсутствия различия в их анализе, проверяя лишь то, что остальные члены невязки, которые могут убывать не быстрее кулоновского потенциала, в сумме аннулируются.

1.3.2 Парное сближение

В случае, когда одна из координат становится малой (или ограниченной), мы должны некоторым образом модифицировать анзатц (1.14). Выберем координаты Якоби, но сделаем это таким образом, что малой (ограниченной) координате будет соответствовать индекс "1". Следуя идеям [6], в разложении по базису Якоби для каждого из векторов \mathbf{x}_β , $\beta = 2, 3, \dots, 6$, мы должны заменить вектор \mathbf{x}_1 на $\tilde{\mathbf{x}}_1$ и подставить это в аргумент соответствующей вырожденной гипергеометрической функции. Замена описывается следующей формулой:

$$\mathbf{x}_1 \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_1 = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_1} \psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}{\psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}, \quad (1.29)$$

где $\psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)$ – решение "парного уравнения", индекс "2" показывает для какого количества частиц в подсистеме эта функция является решением, аргумент функции в дальнейшем может быть опущен:

$$(-\Delta_{\mathbf{x}_1} + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_1|} - \mathbf{k}_1^2) \psi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) = 0, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{x}_\beta = \kappa_{\beta,1} \mathbf{x}_1 + \kappa_{\beta,2} \mathbf{y}_1 + \kappa_{\beta,3} \mathbf{z}_1, \quad (1.31)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_\beta = \kappa_{\beta,1} \tilde{\mathbf{x}}_1 + \kappa_{\beta,2} \mathbf{y}_1 + \kappa_{\beta,3} \mathbf{z}_1.$$

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim N_1 e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) \prod_{\beta=2}^6 \Phi(\tilde{\mathbf{x}}_\beta, \mathbf{k}_\beta). \quad (1.32)$$

Существенное отличие этого случая от случая трехчастичного "кластера" заключается в том, что явный вид решения нам известен и представляет из себя, с точностью до константы, произведение экспоненты на вырожденную гипергеометрическую функцию.

Предложение 1.3.5. Модифицированный таким образом (1.29)–(1.32), анзатц (1.14) порождает на бесконечности в конфигурационном пространстве невязку уравнения Шрёдингера, убывающую быстрее кулоновского потенциала.

Доказательство. Первым шагом в доказательстве будет выделение в (1.14) большей части

$$\mathbf{x}_j = -\frac{1}{2} \mathbf{x} + \mathbf{w}_j, \quad (1.33)$$

при этом справедливо $|\mathbf{w}_j| \gg \mathbf{x}$. Для переменных \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_6 большей частью будет \mathbf{y} . Для \mathbf{x}_4 и \mathbf{x}_5 большей частью же будет линейная комбинация \mathbf{y} и \mathbf{z} .

Заметим, что для $\tilde{\mathbf{x}}_1$ справедливо следующее представление:

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 - i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_1} \Phi_1}{\Phi_1} \equiv \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_1} \Phi_1}{\Phi_1}. \quad (1.34)$$

Тут и далее под \mathbf{k}_1 подразумевается \mathbf{k}_x для первого базиса Якоби.

Говорить отдельно про действие градиентов по переменным \mathbf{y} и \mathbf{z} нет особого смысла. Полностью повторяется вычисление для предыдущего случая, в силу того, что они остаются большими. Теперь посмотрим на действие градиента по переменной \mathbf{x} .

Для дальнейших вычислений нам понадобятся разложения для величин $|\mathbf{x}_\beta|$. Они могут быть получены из представления

$$|\mathbf{x}_\beta| = \langle \mathbf{x}_\beta, \mathbf{x}_\beta \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.35)$$

Для примера рассмотрим координату \mathbf{x}_6 :

$$|\mathbf{x}_6| = \langle \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_6 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{y}_1 - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{y}_1 - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}_1 \right\rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (1.36)$$

Раскрывая скалярное произведение и раскладывая в ряд до членов порядка $O(\frac{1}{y^2})$ получаем

$$|\hat{\mathbf{x}}_6| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\mathbf{y}| \left(1 - i \frac{\langle \hat{\mathbf{y}}, \nabla_k \psi_2 \rangle}{\sqrt{3} |\mathbf{y}| \psi_2} - \frac{1}{6 |\mathbf{y}|^2} \frac{\langle \nabla_k \psi_2, \nabla_k \psi_2 \rangle}{\psi_2^2} \right), \quad (1.37)$$

где $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}_1}{|\mathbf{y}_1|}$, а у \mathbf{y} опущен индекс "1", далее везде подразумевается, что он равен 1.

Аналогично для остальных можно получить:

$$|\mathbf{x}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\mathbf{y}| \left(1 + i \frac{\langle \hat{\mathbf{y}}, \nabla_k \psi_2 \rangle}{\sqrt{3} |\mathbf{y}| \psi_2} - \frac{1}{6 |\mathbf{y}|^2} \frac{\langle \nabla_k \psi_2, \nabla_k \psi_2 \rangle}{\psi_2^2} \right), \quad (1.38)$$

$$|\mathbf{x}_4| = \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right| \left(1 + i \frac{\langle -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}}, \nabla_k \psi_2 \rangle}{2 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|^2 \psi_2} - \frac{1}{8 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|^2} \frac{\langle \nabla_k \psi_2, \nabla_k \psi_2 \rangle}{\psi_2^2} \right), \quad (1.39)$$

$$|\mathbf{x}_5| = \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right| \left(1 - i \frac{\langle -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}}, \nabla_k \psi_2 \rangle}{2 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|^2 \psi_2} - \frac{1}{8 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|^2} \frac{\langle \nabla_k \psi_2, \nabla_k \psi_2 \rangle}{\psi_2^2} \right). \quad (1.40)$$

Так как \mathbf{x}_3 не зависит от \mathbf{x} , то нет нужды что-то пересчитывать. Окончательно, учитывая наше желание удерживать члены до второго порядка, можно записать, используя обозначение $\mathbf{u} := -i \frac{\nabla_k \psi_2}{\psi_2}$:

$$|\mathbf{x}_6| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\mathbf{y}| + \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{4\sqrt{3} |\mathbf{y}|} \mathbf{u}^2, \quad (1.41)$$

$$|\mathbf{x}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2} |\mathbf{y}| - \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{4\sqrt{3} |\mathbf{y}|} \mathbf{u}^2, \quad (1.42)$$

$$|\mathbf{x}_4| = \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right| - \frac{\langle -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}}, \mathbf{u} \rangle}{2 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|} - \frac{1}{8 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|} \mathbf{u}^2, \quad (1.43)$$

$$|\mathbf{x}_5| = \left| -\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right| + \frac{\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}}, \mathbf{u} \rangle}{2 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|} - \frac{1}{8 \left| -\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}} \right|} \mathbf{u}^2. \quad (1.44)$$

Далее найдем $\nabla_{\mathbf{x}}\Psi$, для этого нам понадобится сосчитать члены вида

$$\nabla_{\mathbf{x}} (|\mathbf{x}_\beta| |\mathbf{k}_{x_\beta}| - \langle \mathbf{x}_\beta, \mathbf{k}_{x_\beta} \rangle). \quad (1.45)$$

Вычислим их отдельно:

$$\nabla_{\mathbf{x}} (|\mathbf{x}_2| |\mathbf{k}_{x_2}| - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_{x_2} \rangle) = \nabla_{\mathbf{x}} \left(\left[\frac{\sqrt{3}}{2} |\mathbf{y}| - \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{4\sqrt{3}|\mathbf{y}|} \mathbf{u}^2 \right] |\mathbf{k}_{x_2}| - \langle \mathbf{x}_\beta, \mathbf{k}_{x_\beta} \rangle \right). \quad (1.46)$$

С учетом формулы для \mathbf{x}_2 это приведет к выражению

$$\nabla_{\mathbf{x}} (|\mathbf{x}_2| |\mathbf{k}_{x_2}| - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{k}_{x_2} \rangle) = \frac{|\mathbf{k}_{x_2}|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_2} - \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2\sqrt{3}|\mathbf{y}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (1.47)$$

Абсолютно аналогично, для переменной \mathbf{x}_6 получим

$$\nabla_{\mathbf{x}} (|\mathbf{x}_6| |\mathbf{k}_{x_6}| - \langle \mathbf{x}_6, \mathbf{k}_{x_6} \rangle) = \frac{|\mathbf{k}_{x_6}|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_6} + \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2\sqrt{3}|\mathbf{y}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (1.48)$$

Для \mathbf{x}_4 и \mathbf{x}_5 верно следующее:

$$\nabla_{\mathbf{x}} (|\mathbf{x}_4| |\mathbf{k}_{x_4}| - \langle \mathbf{x}_4, \mathbf{k}_{x_4} \rangle) = \frac{|\mathbf{k}_{x_4}|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{4|\mathbf{w}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad (1.49)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} (|\mathbf{x}_5| |\mathbf{k}_{x_5}| - \langle \mathbf{x}_5, \mathbf{k}_{x_5} \rangle) = \frac{|\mathbf{k}_{x_5}|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_5} + \hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{4|\mathbf{w}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (1.50)$$

Здесь под \mathbf{w} понимается $-\sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{z} - \frac{\mathbf{y}}{2\sqrt{3}}$, а $\hat{\mathbf{w}}$ – соответствующий единичный вектор. Далее естественно обозначить:

$$\Omega_2 = \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_2} - \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2\sqrt{3}|\mathbf{y}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad (1.51)$$

$$\Omega_4 = \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{4|\mathbf{w}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad (1.52)$$

$$\Omega_5 = \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_5} + \hat{\mathbf{w}} + \frac{1}{4|\mathbf{w}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad (1.53)$$

$$\Omega_6 = \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_6} + \hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2\sqrt{3}|\mathbf{y}|} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (1.54)$$

Таким образом, для выражения $\nabla_{\mathbf{x}}\Psi$ можно найти

$$\nabla_{\mathbf{x}}\Psi = i\mathbf{k}_{x_1}\Psi + i|\mathbf{k}_{x_1}| \left(\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_{x_1} \right) e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{q} \rangle} \Phi'_1 \prod_{\beta=2}^6 \Phi_\beta + e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{q} \rangle} \sum_{j=2, j \neq 3}^6 i \frac{|\mathbf{k}_{x_j}|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \Omega_j \Phi'_j \prod_{\beta=1, \beta \neq j}^6 \Phi_\beta. \quad (1.55)$$

Это позволяет определить $\langle \nabla_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}}\Psi \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}} \Psi \rangle &= -\mathbf{k}_{x_1}^2 \Psi - e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} \sum_{j=2, j \neq 3, i < j, i \neq 3}^6 \frac{|\mathbf{k}_{x_j}| |\mathbf{k}_{x_i}|}{4} \langle \nabla_{\mathbf{x}} \Omega_j, \nabla_{\mathbf{x}} \Omega_i \rangle \Phi'_j \Phi'_i \prod_{\beta=1, \beta \neq j, \beta \neq i}^6 \Phi_{\beta-} \\
&- e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} \sum_{j=2, j \neq 3}^6 \frac{|\mathbf{k}_{x_j}|^2}{4} |\nabla_{\mathbf{x}} \Omega_j|^2 \Phi''_j \prod_{\beta=1, \beta \neq j}^6 \Phi_{\beta} - e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} \sum_{j=2, j \neq 3}^6 \frac{|\mathbf{k}_{x_j}|}{2} \langle \mathbf{k}_{x_1}, \nabla_{\mathbf{x}} \Omega_j \rangle \Phi'_j \prod_{\beta=1, \beta \neq j}^6 \Phi_{\beta+} \\
&+ e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} \sum_{j=2, j \neq 3}^6 i \frac{|\mathbf{k}_{x_j}|}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \Omega_j \Phi'_j \prod_{\beta=1, \beta \neq j}^6 \Phi_{\beta} - e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} |\mathbf{k}_{x_1}|^2 |\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_{x_1}|^2 \Phi''_1 \prod_{\beta=2}^6 \Phi_{\beta-} \\
&- e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} \sum_{j=2, j \neq 3}^6 \frac{|\mathbf{k}_{x_1}| |\mathbf{k}_{x_j}|}{2} \langle \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_{x_1}, \nabla_{\mathbf{x}} \Omega_j \rangle \Phi'_1 \Phi'_j \prod_{\beta=2, \beta \neq j}^6 \Phi_{\beta-} \\
&- e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} |\mathbf{k}_{x_1}| \langle \mathbf{k}_{x_1}, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_{x_1} \rangle \Phi'_1 \prod_{\beta=2}^6 \Phi_{\beta} + e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{q})} i |\mathbf{k}_{x_1}| \frac{2}{|\mathbf{x}_1|} \Phi'_1 \prod_{\beta=2}^6 \Phi_{\beta}.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Пользуясь предыдущим результатом, заметим, что конструкция разделяется на суммы по каждой переменной. Поэтому рассмотрим только одну из них. В конце главы, где речь идет про обобщения, содержится общая формула, подтверждающая эти соображения (см. (1.127) и далее).

Для примера мы рассмотрим переменную \mathbf{x}_4 . В невязку войдут члены следующих трех типов: Φ_4, Φ'_4 и Φ''_4 . Часть из них образует гипергеометрическое уравнение для Φ_4 и аннулируется в силу определения Φ_4 , но останутся еще и другие слагаемые, анализом которых мы и займемся.

Распишем подробно выражения для Ω_4 :

$$\Omega_4 = \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{x} \rangle + \frac{\mathbf{x}^2}{4|\mathbf{w}|} + \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{2|\mathbf{w}|} \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{4|\mathbf{w}|} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle. \tag{1.57}$$

Нам нужно сохранять члены порядка $O\left(\frac{1}{|\mathbf{w}|}\right)$, поэтому

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Omega_4 = \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}} + \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{v} \rangle + O\left(\frac{1}{|\mathbf{w}|}\right). \tag{1.58}$$

Теперь заметим, что $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{x}}_4 + O\left(\frac{1}{|\mathbf{w}|}\right)$. Таким образом, мы можем записать

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Phi_4 = i \Phi'_4 \frac{|\mathbf{k}_{x_4}|}{2} \left(\hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{x}}_4 \right) + i \Phi'_4 \frac{|\mathbf{k}_{x_4}|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{v} \rangle. \tag{1.59}$$

Заметим, что первое слагаемое в точности соответствует градиенту из случая хорошо разделенных частиц, а это значит, что оно является частью гипергеометрического уравнения и дальнейшей роли не сыграет, аннулируясь как и ранее.

Полезное наблюдение состоит в том, что

$$\Delta_{\mathbf{x}} \Omega_4 = \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{v} \rangle + O\left(\frac{1}{|\mathbf{w}|}\right). \tag{1.60}$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{a} = \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}}, \quad (1.61)$$

$$g = \langle \hat{\mathbf{k}}_{x_4} - \hat{\mathbf{w}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle. \quad (1.62)$$

Запишем невязку в этих терминах, выделим только члены, содержащие Φ'_4 :

$$\begin{aligned} & - \Phi'_4 \Phi_1 \left[i \frac{|\mathbf{k}_{x_4}|}{2} \Delta_{\mathbf{x}} g - |\mathbf{k}_{x_1}| |\mathbf{k}_{x_4}| \langle \nabla_{\mathbf{x}} g, \hat{\mathbf{k}}_{x_1} \rangle \right] + \\ & \Phi'_4 \Phi'_1 \left[|\mathbf{k}_{x_1}| |\mathbf{k}_{x_4}| \langle \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{k}}_{x_1}, \mathbf{a} \rangle + |\mathbf{k}_{x_1}| |\mathbf{k}_{x_4}| \langle \nabla_{\mathbf{x}} g, \hat{\mathbf{k}}_{x_1} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Мы хотим обращения этих членов в 0, получаем уравнение на g :

$$\Phi_1 \left[i \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{x}} g - |\mathbf{k}_{x_1}| \langle \nabla_{\mathbf{x}} g, \hat{\mathbf{k}}_{x_1} \rangle \right] = \Phi'_1 \left[|\mathbf{k}_{x_1}| \langle \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{k}}_{x_1}, \mathbf{a} \rangle + |\mathbf{k}_{x_1}| \langle \nabla_{\mathbf{x}} g, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_{x_1} \rangle \right]. \quad (1.64)$$

Поделим это равенство на $|\mathbf{k}_{x_1}| \Phi_1$ и обозначим:

$$\varphi = \langle \mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{k}_{x_1}} \Phi_1 \rangle. \quad (1.65)$$

Тогда мы приходим к выражению

$$0 = -\Delta_{\mathbf{x}_1} \varphi - 2i \langle \mathbf{k}_1, \nabla_{\mathbf{x}_1} \varphi \rangle + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_1|} \varphi + 2k \Phi'_1 \langle \mathbf{a}, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1 \rangle. \quad (1.66)$$

Рассмотрим уравнение Шрёдингера для системы двух заряженных частиц :

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \psi_2 + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|} \psi_2 = k^2 \psi_2. \quad (1.67)$$

Применим слева к уравнению (1.67) оператор $\nabla_{\mathbf{k}_1}$ и спроецируем результат на постоянный вектор \mathbf{a} . Запишем полученное выражение в терминах переменной $\varphi \equiv \langle \mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{k}_1} D_1 \rangle$:

$$-\Delta_{\mathbf{x}_1} \varphi - 2i \langle \mathbf{k}_1, \nabla_{\mathbf{x}_1} \varphi \rangle + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_1|} \varphi = -2k \Phi'_1 \langle \mathbf{a}, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1 \rangle. \quad (1.68)$$

Сравнивая выражения, приходим к тому, что (1.66) есть верное тождество. Соответственно, модифицированный анзац порождает хорошо убывающую невязку, аналогично случаю хорошо разделенных частиц. \square

Замечание 1.3.6. *Случай двух парных сближений ничем технически не отличается, поэтому опустим его здесь, отметив, что в конце главы (предложение 1.4.4) приведено вычисление для произвольного количества сближений в системе n частиц, которое перекрывает этот случай.*

1.3.3 Трехчастичный "кластер" в системе четырех частиц

Последней и наиболее сложной конфигурацией в случае четырех частиц является ситуация, когда существует трехчастичный кластер. Эта конфигурация отличается существенно от описанных в случае трех частиц (в то время как предыдущие ничем существенно не отличались от случая трех частиц, (см.[5, 6, 12])). В этом месте мы воспользуемся аналогичной модификацией анзатца, заменяя по предложенной выше схеме малые (ограниченные) переменные из базиса Якоби на соответствующие градиенты трехчастичного решения по двойственному импульсу.

Мы можем записать уравнение Шрёдингера для системы трех частиц, определяющее функцию $\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$:

$$(-\Delta_x - \Delta_y + v)\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y) = (\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2)\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y), \quad (1.69)$$

где $v = \left(\frac{\alpha}{|\mathbf{x}_1|} + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_2|} + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_6|}\right)$.

Если обозначить переменные из базиса Якоби буквами \mathbf{x}, \mathbf{y} и \mathbf{z} (а соответствующие им двойственные переменные – импульсы $\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y$ и \mathbf{k}_z), то соответствующая модификация анзатца будет представлять из себя замену в выражениях для "больших" координат, переменных \mathbf{x} и \mathbf{y} на соответствующие им выражения:

$$\tilde{\mathbf{x}} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)}{\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)}, \quad (1.70)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_y} \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)}{\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)}, \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\beta &= \kappa_{\beta,1}\mathbf{X} + \kappa_{\beta,2}\mathbf{Y} + \kappa_{\beta,3}\mathbf{Z}, \\ \tilde{\mathbf{x}}_\beta &= \kappa_{\beta,1}\tilde{\mathbf{X}} + \kappa_{\beta,2}\tilde{\mathbf{Y}} + \kappa_{\beta,3}\mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

В данном случае "большими" переменными будут $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5$. И в замене в (1.10) произведения вырожденных гипергеометрических функций, отвечающих расстояниям между частицами из ограниченной области, на явное решение свободной трехчастичной задачи

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \sim N_1 e^{i(\mathbf{z}, \mathbf{k}_z)} \Phi(\tilde{\mathbf{x}}_3, \mathbf{k}_3) \Phi(\tilde{\mathbf{x}}_4, \mathbf{k}_4) \Phi(\tilde{\mathbf{x}}_5, \mathbf{k}_5) \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y). \quad (1.73)$$

Предложение 1.3.7. *Модифицированный таким образом (1.70)–(1.73), анзатц (1.14) порождает на бесконечности в конфигурационном пространстве невязку уравнения Шрёдингера, убывающую быстрее кулоновского потенциала.*

Доказательство. Для доказательства мы пойдем по тому же самому пути, как и ранее. Воспользуемся малостью переменных \mathbf{x} и \mathbf{y} относительно \mathbf{z} и напишем разложения для неограниченных переменных с точностью до $O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}|}\right)$:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{x}_3| &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\mathbf{z}| - \frac{1}{\sqrt{3}}\langle \hat{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}|}\right), \\
|\mathbf{x}_4| &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\mathbf{z}| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\langle \hat{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle + \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}|}\right), \\
|\mathbf{x}_5| &= \sqrt{\frac{2}{3}}|\mathbf{z}| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\langle \hat{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{y}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + O\left(\frac{1}{|\mathbf{z}|}\right).
\end{aligned} \tag{1.74}$$

Так же будут полезны градиенты от аргументов вырожденных гипергеометрических функций:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}(|\mathbf{x}_3||\mathbf{k}_3| - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3 \rangle) &= -\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \\
\nabla_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}_3||\mathbf{k}_3| - \langle \mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3 \rangle) &= -\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \\
\nabla_{\mathbf{x}}(|\mathbf{x}_4||\mathbf{k}_4| - \langle \mathbf{x}_4, \mathbf{k}_4 \rangle) &= -\frac{|\mathbf{k}_4|}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\langle -\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{x}}\langle -\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \\
\nabla_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}_4||\mathbf{k}_4| - \langle \mathbf{x}_4, \mathbf{k}_4 \rangle) &= -\frac{|\mathbf{k}_4|}{2}\nabla_{\mathbf{y}}\langle -\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle - \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{y}}\langle -\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \\
\nabla_{\mathbf{x}}(|\mathbf{x}_5||\mathbf{k}_5| - \langle \mathbf{x}_5, \mathbf{k}_5 \rangle) &= -\frac{|\mathbf{k}_5|}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \\
\nabla_{\mathbf{y}}(|\mathbf{x}_5||\mathbf{k}_5| - \langle \mathbf{x}_5, \mathbf{k}_5 \rangle) &= -\frac{|\mathbf{k}_5|}{2}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle.
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Теперь мы можем непосредственно подставить анзац в невязку. Запишем

$$(H - E)\Psi = -\langle \nabla_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}}\Psi \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}}\Psi \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{z}}, \nabla_{\mathbf{z}}\Psi \rangle + (V - E)\Psi. \tag{1.76}$$

В силу того, что \mathbf{z} остается неограниченной, то член $\langle \nabla_{\mathbf{z}}, \nabla_{\mathbf{z}}\Psi \rangle$ останется таким же, как и в случае хорошо разделенных частиц, за исключением наличия там не явного решения ψ_3 (аргументы для краткости мы будем опускать). Члены $\langle \nabla_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}}\Psi \rangle$ и $\langle \nabla_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}}\Psi \rangle$ будут устроены одинаково, в силу их громоздкости выпишем только один из них.

Сначала запишем равенства для градиентов:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{x}}\Psi &= e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi'_3\Phi_4\Phi_5\psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi'_4\Phi_3\Phi_5\psi_3 \left(\frac{|\mathbf{k}_4|}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi'_5\Phi_3\Phi_4\psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{x}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi_3\Phi_4\Phi_5\nabla_{\mathbf{x}}\psi_3,
\end{aligned} \tag{1.77}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{y}}\Psi &= e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi'_3\Phi_4\Phi_5\psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi'_4\Phi_3\Phi_5\psi_3 \left(\frac{|\mathbf{k}_4|}{2}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi'_5\Phi_3\Phi_4\psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}}\nabla_{\mathbf{y}}\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i\Phi_3\Phi_4\Phi_5\nabla_{\mathbf{y}}\psi_3,
\end{aligned} \tag{1.78}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{z}}\Psi &= i\mathbf{k}_z e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3\Phi_4\Phi_5\psi_3 + i\sqrt{\frac{2}{3}}|\mathbf{k}_3|e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} (\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3) \Phi'_3\Phi_4\Phi_5\psi_3 + \\
&+ i\sqrt{\frac{2}{3}}|\mathbf{k}_5|e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} (\hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5) \Phi'_5\Phi_3\Phi_4\psi_3 + i\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)|\mathbf{k}_4|e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} (\hat{\mathbf{x}}_4 - \hat{\mathbf{k}}_4) \Phi'_4\Phi_3\Phi_5\psi_3.
\end{aligned} \tag{1.79}$$

Заметим, что выражения для градиентов по \mathbf{x} и \mathbf{y} одинаковы с точностью до замены в самих градиентах переменной. Значит и для лапласианов выражения будут совпадать. Учитывая написанное выше, верно, что

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{z}}, \nabla_{\mathbf{z}} \Psi) = & -\mathbf{k}_z^2 e^{i\langle \mathbf{k}_z, \hat{\mathbf{z}} \rangle} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5 \psi_3 - 2e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} \langle \mathbf{k}_z, \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} |\mathbf{k}_3| \Phi_3' \Phi_4 \Phi_5 \psi_3 + \\
& 2e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} \langle \mathbf{k}_z, \hat{\mathbf{x}}_4 - \hat{\mathbf{k}}_4 \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} |\mathbf{k}_4| \Phi_3 \Phi_4' \Phi_5 \psi_3 - 2e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} \langle \mathbf{k}_z, \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle \sqrt{\frac{2}{3}} |\mathbf{k}_5| \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \psi_3 - \\
& - \frac{4}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_3| |\mathbf{k}_5| \langle \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3, \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle \Phi_3' \Phi_4 \Phi_5' \psi_3 + \frac{4}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_4| |\mathbf{k}_5| \langle \hat{\mathbf{x}}_4 - \hat{\mathbf{k}}_4, \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle \Phi_3 \Phi_4' \Phi_5' \psi_3 + \\
& + \frac{4}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_3| |\mathbf{k}_4| \langle \hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3, \hat{\mathbf{x}}_4 - \hat{\mathbf{k}}_4 \rangle \Phi_3' \Phi_4' \Phi_5 \psi_3 - \\
& - \frac{2}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_3|^2 \left(\hat{\mathbf{x}}_3 - \hat{\mathbf{k}}_3 \right)^2 \Phi_3'' \Phi_4 \Phi_5 \psi_3 + i \frac{2}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_3| \frac{2}{|\mathbf{x}_3|} \Phi_3' \Phi_4 \Phi_5 \psi_3 - \\
& - \frac{2}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_4|^2 \left(\hat{\mathbf{x}}_4 - \hat{\mathbf{k}}_4 \right)^2 \Phi_3 \Phi_4'' \Phi_5 \psi_3 + i \frac{2}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_4| \frac{2}{|\mathbf{x}_4|} \Phi_3 \Phi_4' \Phi_5 \psi_3 - \\
& - \frac{2}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_5|^2 \left(\hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \right)^2 \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5'' \psi_3 + i \frac{2}{3} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} |\mathbf{k}_5| \frac{2}{|\mathbf{x}_5|} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \psi_3,
\end{aligned} \tag{1.80}$$

что полностью соответствует невязке из ранее рассмотренной ситуации хорошо разделенных частиц. Недостаточно быстро убывают лишь члены вида $\langle \nabla_{\mathbf{z}} e^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle}, \nabla_{\mathbf{z}} \Phi_\beta \rangle$, они и войдут в итоговое выражение для невязки. Первый член сокращается с соответствующим слагаемым

в выражении для энергии. Для лапласианов по "малым" переменным можно найти

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}} \Psi \rangle &= e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} i \Phi'_3 \Phi_4 \Phi_5 \psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}} \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) - \\
&- 2e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi'_3 \Phi'_4 \left(-\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) \left(\frac{|\mathbf{k}_4|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) \Phi_5 \psi_3 - \\
&- 2e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi'_3 \Phi'_5 \left(-\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) \Phi_4 \psi_3 + \\
&+ 2ie^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi'_3 \Phi_4 \Phi_5 \left\langle -\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \nabla_{\mathbf{x}} \psi_3 \right\rangle - e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi'_3 \Phi_4 \Phi_5 \left(-\frac{|\mathbf{k}_3|}{\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_3, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right)^2 \psi_3 - \\
&- e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5 \left(\frac{|\mathbf{k}_4|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right)^2 \psi_3 - \\
&- 2e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi'_4 \Phi'_5 \psi_3 \left(\frac{|\mathbf{k}_4|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) \times \\
&\times \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ 2ie^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi'_4 \Phi_5 \left\langle \frac{|\mathbf{k}_4|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \nabla_{\mathbf{x}} \psi_3 \right\rangle + \\
&+ ie^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi'_4 \Phi_5 \psi_3 \left(\frac{|\mathbf{k}_4|}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_4|}{2\sqrt{3}} \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{k}}_4, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) - \\
&- e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5 \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right)^2 \psi_3 + \\
&+ ie^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi_4 \Phi'_5 \psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
&+ 2ie^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi_4 \Phi'_5 \left\langle -\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \nabla_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \nabla_{\mathbf{x}} \psi_3 \right\rangle + \\
&+ e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{k}_z \rangle} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5 \Delta_{\mathbf{x}} \psi_3.
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Напомним, что ψ_3 удовлетворяет уравнению (1.69). Воспользуемся гипергеометрическим уравнением и установим, что с необходимой нам точностью (до порядка R^{-2} , где $R^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2$, так как везде мы боремся лишь за убывание быстрее потенциала) выполняется

$$\frac{\alpha}{|\mathbf{x}_\beta|} \Phi_\beta = 2|\mathbf{k}_\beta|^2 \left(\langle \hat{\mathbf{x}}_\beta - \hat{\mathbf{k}}_\beta, \hat{\mathbf{x}}_\beta \rangle \right) \Phi'_\beta. \tag{1.82}$$

Зафиксируем β равным 5. Дальнейшее рассуждение возможно описать в общем виде, но так будет нагляднее, в силу наиболее сложной структуры получаемых уравнений. Выделим из невязки $(\Delta - V + E)\Psi$ слагаемые, содержащие производные от Φ_5 и саму Φ_5 , если отсутствуют производные от любых других вырожденных гипергеометрических функций (настоящая невязка содержит еще наборы таких же слагаемых, соответствующих индексам всех "больших" парных переменных). Тогда эту часть невязки можно записать в виде:

$$\tilde{Q}_5 = ie^{i\langle \mathbf{k}_z, \mathbf{z} \rangle} \Phi_3 \Phi_4 \Phi'_5 \psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \Delta_{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +ie^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \psi_3 \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \Delta_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \Delta_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle \right) + \\
& + 2ie^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \langle \nabla_x \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle, \nabla_x \psi_3 \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \langle \nabla_x \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \nabla_x \psi_3 \rangle \right) + \\
& + 2ie^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \left(-\frac{|\mathbf{k}_5|}{2} \langle \nabla_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{x}} \rangle, \nabla_y \psi_3 \rangle + \frac{|\mathbf{k}_5|}{2\sqrt{3}} \langle \nabla_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \tilde{\mathbf{y}} \rangle, \nabla_y \psi_3 \rangle \right) + \\
& ie^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \psi_3 \frac{4|\mathbf{k}_5|}{3|\mathbf{x}_5|} - \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_5|} e^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5 \psi_3 - 2e^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} |\mathbf{k}_5| \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \psi_3 \langle \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{k}_z, \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle.
\end{aligned}$$

Заметим, что слагаемое $ie^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' \psi_3 \frac{4|\mathbf{k}_5|}{3|\mathbf{x}_5|}$ на порядок меньше остальных, тем самым его нужно отбросить. Также вспомним, что в последнем слагаемом \mathbf{k}_z можно выразить из формулы (1.6) и импульсного аналога для (1.13).

Подставляя значения для $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\mathbf{y}}$ и вынося за скобку $e^{i(\mathbf{k}_z, \mathbf{z})} \psi_3 \Phi_3 \Phi_4 \Phi_5' |\mathbf{k}_5|$, приходим к следующему выражению для исследуемой части невязки:

$$\begin{aligned}
Q_{fin} = & -\frac{1}{2} \Delta_x \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}} \Delta_x \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_y} \psi_3}{\psi_3} \rangle - \\
& -\frac{1}{2} \Delta_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle + \frac{1}{2\sqrt{3}} \Delta_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_y} \psi_3}{\psi_3} \rangle - \\
& - 2\frac{1}{2} \langle \nabla_x \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle, \frac{\nabla_x \psi_3}{\psi_3} \rangle + 2\frac{1}{2\sqrt{3}} \langle \nabla_x \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_y} \psi_3}{\psi_3} \rangle, \frac{\nabla_x \psi_3}{\psi_3} \rangle - \\
& - 2\frac{1}{2} \langle \nabla_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle, \frac{\nabla_y \psi_3}{\psi_3} \rangle + 2\frac{1}{2\sqrt{3}} \langle \nabla_y \langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_y} \psi_3}{\psi_3} \rangle, \frac{\nabla_y \psi_3}{\psi_3} \rangle - \\
& - 2|\mathbf{k}_5| \langle \hat{\mathbf{k}}_5 - \hat{\mathbf{x}}_5, \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle - 2 \langle \mathbf{k}_5 - \frac{\mathbf{k}_y}{2\sqrt{3}} + \frac{\mathbf{k}_x}{2}, \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle.
\end{aligned}$$

Последние два слагаемых, очевидно, подобные и легко упрощаются. По аналогии с предыдущими разделами, введем обозначения:

$$\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5 = \mathbf{a}, \quad (1.83)$$

$$\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \nabla_{\mathbf{k}_y} \psi_3 \rangle = \mathbf{v}, \quad (1.84)$$

$$\langle \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5, \nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3 \rangle = \mathbf{u}. \quad (1.85)$$

В таких обозначения легко получить формулы для входящих в невязку слагаемых:

$$\nabla_x \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle = \frac{\nabla_x \mathbf{u}}{\psi_3} - \frac{\mathbf{u} \nabla_x \psi_3}{\psi_3^2}, \quad (1.86)$$

$$\langle \nabla_x, \nabla_x \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle \rangle = \frac{\Delta_x \mathbf{u}}{\psi_3} - 2 \frac{\langle \nabla_x \mathbf{u}, \nabla_x \psi_3 \rangle}{\psi_3^2} - \mathbf{u} \frac{\Delta_x \psi_3}{\psi_3^2} + 2\mathbf{u} \frac{(\nabla_x \psi_3)^2}{\psi_3^3}. \quad (1.87)$$

И совершенно аналогичные им:

$$\nabla_y \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle = \frac{\nabla_y \mathbf{u}}{\psi_3} - \frac{\mathbf{u} \nabla_y \psi_3}{\psi_3^2}, \quad (1.88)$$

$$\langle \nabla_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3}{\psi_3} \rangle \rangle = \frac{\Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{u}}{\psi_3} - 2 \frac{\langle \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}, \nabla_{\mathbf{y}} \psi_3 \rangle}{\psi_3^2} - \mathbf{u} \frac{\Delta_{\mathbf{y}} \psi_3}{\psi_3^2} + 2 \mathbf{u} \frac{(\nabla_{\mathbf{y}} \psi_3)^2}{\psi_3^3}, \quad (1.89)$$

$$\nabla_{\mathbf{y}} \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_z} \psi_3}{\psi_3} \rangle = \frac{\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}}{\psi_3} - \frac{\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{y}} \psi_3}{\psi_3^2}, \quad (1.90)$$

$$\langle \nabla_{\mathbf{y}}, \nabla_{\mathbf{y}} \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_z} \psi_3}{\psi_3} \rangle \rangle = \frac{\Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}}{\psi_3} - 2 \frac{\langle \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{y}} \psi_3 \rangle}{\psi_3^2} - \mathbf{v} \frac{\Delta_{\mathbf{y}} \psi_3}{\psi_3^2} + 2 \mathbf{v} \frac{(\nabla_{\mathbf{y}} \psi_3)^2}{\psi_3^3}, \quad (1.91)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_z} \psi_3}{\psi_3} \rangle = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}}{\psi_3} - \frac{\mathbf{v} \nabla_{\mathbf{x}} \psi_3}{\psi_3^2}, \quad (1.92)$$

$$\langle \nabla_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{a}, \frac{\nabla_{\mathbf{k}_z} \psi_3}{\psi_3} \rangle \rangle = \frac{\Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v}}{\psi_3} - 2 \frac{\langle \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{x}} \psi_3 \rangle}{\psi_3^2} - \mathbf{v} \frac{\Delta_{\mathbf{x}} \psi_3}{\psi_3^2} + 2 \mathbf{v} \frac{(\nabla_{\mathbf{x}} \psi_3)^2}{\psi_3^3}. \quad (1.93)$$

После подстановки в невязку Q_{fin} формул (1.86)–(1.93), мы получаем итоговое выражение для Q_{fin} :

$$Q_{fin} = -\frac{1}{2} \left(\frac{(\Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}) \mathbf{u}}{\psi_3} - \mathbf{u} \frac{(\Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}) \psi_3}{\psi_3^2} + 2 \langle \mathbf{k}_x, \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{(\Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}) \mathbf{v}}{\psi_3} - \mathbf{v} \frac{(\Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}) \psi_3}{\psi_3^2} + 2 \langle \mathbf{k}_y, \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5 \rangle \right). \quad (1.94)$$

Пользуясь (1.69), приходим к:

$$(\Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}) \psi_3 = v \psi_3 - (\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2) \psi_3, \quad (1.95)$$

где v – потенциал из уравнения Шрёдингера.

Для первого члена может быть найдено:

$$(\Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}) \mathbf{u} = \langle \mathbf{a}, v \nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3 - (\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2) \nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3 - 2 \mathbf{k}_x \psi_3 \rangle, \quad (1.96)$$

$$\frac{(\Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}) \mathbf{u}}{\psi_3} = \frac{v \mathbf{u}}{\psi_3} - \frac{\langle \mathbf{a}, (\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2) \nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3 \rangle}{\psi_3} - 2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{k}_x \rangle. \quad (1.97)$$

Учитывая, что по построению $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{k}}_5 \sim \hat{\mathbf{x}}_5 - \hat{\mathbf{k}}_5$ с необходимой нам точностью, приходим к тому, что в первых скобках сумма записывается как

$$\frac{v \mathbf{u}}{\psi_3} - \frac{\langle \mathbf{a}, (\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2) \nabla_{\mathbf{k}_x} \psi_3 \rangle}{\psi_3} - 2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{k}_x \rangle = \frac{v \mathbf{u}}{\psi_3} + \mathbf{u} \frac{(\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2)}{\psi_3} + 2 \langle \mathbf{a}, \mathbf{k}_x \rangle. \quad (1.98)$$

Возвращаясь к (1.85), приходим к тому, что данная сумма обращается в тождественный ноль. Аналогично и для вторых скобок. Тем самым невязка в старшем порядке обращается в ноль. Предложение доказано. \square

Замечание 1.3.8. Стоит отметить, что в терминах выбранных обозначений, невязка сводится к набору одинаковых (принципиально) уравнений, соответственно получается механизм обобщения на случаи "кластеров" большего размера, так как основная структура уравнений от количества переменных меняться не будет.

1.3.4 О равномерности асимптотики

Осталось лишь ответить на вопрос, почему построенные в разных асимптотических конфигурация модернизированные анзатцы дадут равномерную по конфигурационному пространству асимптотику.

Сначала покажем, что парное сближение согласуется со случаем удаленных частиц. Для этого заметим, что

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 \xrightarrow{|\mathbf{x}_1| \rightarrow \infty} \mathbf{x}_1 \left(1 + O\left(\frac{\log |\mathbf{x}_1|}{|\mathbf{x}_1|}\right) \right). \quad (1.99)$$

Это связано с тем, что у вырожденной гипергеометрической функции асимптотика как раз и является логарифмом (вне малой окрестности направления рассеяния вперед), а исходя из (1.34) можно легко убедиться в том, что предложенное поведение верно.

Нетрудно увидеть, следуя процедуре "сшивки", описанной в [5, 6], что поправочное слагаемое в выражении (1.99) не влияет на предположение о том, что невязка анзатца, согласованного в разных асимптотических областях (величина $|\mathbf{x}_1|$ велика и величина $|\mathbf{x}_1|$ ограничена), убывает быстрее потенциала всюду за исключением, может быть, сколь угодно узких угловых окрестностей направлений рассеяния вперед, где невязка также убывает быстрее потенциала, но не отделена от кулоновского убывания оценкой снизу.

Вопрос о "сшивке" случая трехчастичного "кластера" с остальными конфигурациями может быть решен следующим образом: так как сшивка происходит в области, где верны оба представления, то для решения ψ_3 мы знаем асимптотику, в силу того, что решение трехчастичной задачи в такой конфигурации найдено в работах [5, 6].

Также встает вопрос о равномерности допущений из предыдущего пункта в окрестностях нулей решения $\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p})$. Для доказательства быстрого убывания невязки мы пользуемся тем, что замена мала относительно характерной величины R . Чтобы приведенные доказательства сохраняли силу, нужно требовать, чтобы выполнялось

$$\left| \frac{\nabla_{\mathbf{k}} \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p})}{\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p})} \right| \leq R^{1-\epsilon}, \quad \left| \frac{\nabla_{\mathbf{p}} \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p})}{\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p})} \right| \leq R^{1-\epsilon}, \quad \epsilon > 0. \quad (1.100)$$

С учетом того, что изначально мы предполагаем, что $R \rightarrow \infty$, то нарушение этого требования может происходить лишь в бесконечно малой окрестности нулей функции $\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}, \mathbf{p})$. Тем самым, бесконечно малые окрестности нулей этой функции должны быть убраны из рассмотрения. Отметим, что в случае с $\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ такой проблемы не существовало в принципе, так как она в ноль не обращалась.

Замечание 1.3.9. Аналогичные ограничения следует накладывать и для систем с произвольным количеством частиц. Если соответствующая функция $\psi_n(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ обращается в какой-то точке конфигурационного пространства в ноль, то приведенная в конце главы модификация анзатца не работает в бесконечно малой окрестности этой точки. Однако в дальнейшем мы не будем акцентировать на этом внимание.

Таким образом, можно сформулировать окончательный результат для системы четырех одинаково заряженных кулоновских частиц:

Теорема 1.3.10. *На бесконечности в конфигурационном пространстве для системы четырех одинаково заряженных частиц равной массы анзаца (1.14) и его модификации в соответствующих областях конфигурационного пространства порождают равномерную по угловым переменным асимптотику собственных функций абсолютно непрерывного спектра.*

1.3.5 Согласование с известными ранее результатами

В работе [6] на примере задачи рассеяния в системе трех трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц была описана процедура построения анзаца, использованного в данной работе. Процедура сводится к согласованию ВВК-приближения [25] для асимптотики собственных функций непрерывного спектра трехчастичного гамильтониана (в области конфигурационного пространства, где все относительные парные координаты велики) и интегрального представления для той же асимптотики, записанного в терминах "почти разделения переменных". Это интегральное представление (с неизвестным изначально ядром) справедливо в области, где одна из координат Якоби по абсолютной величине много больше другой. Согласование проводится в параболической области, где оба представления справедливы. Провести процедуру согласования удастся лишь в терминах слабых асимптотик [4]. Это означает, что асимптотики собственных функций должны быть записаны в терминах распределений, действующих на гладких функциях угловых переменных большей координаты Якоби. Например, для получения слабых асимптотик ВВК-приближения (при условии $|y_\alpha| \gg |x_\alpha|$) нужно проинтегрировать ВВК-асимптотику с гладкой функцией переменной \hat{y}_α (индекс α в дальнейших формулах равен единице и опущен). Такой интеграл исследуется методом стационарной фазы и определяет структуру искомого распределения. В этом смысле формулы (4)–(5) из [6] могут быть записаны в старшем порядке следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{ВВК}} &\sim \delta(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{y}}) \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \frac{2\pi}{iyp} e^{iyp} e^{i(\eta_2 + \eta_3) \log |y|} \times \\ &\times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle) \right]^{i\eta_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle) \right]^{i\eta_3} \times \\ &\times \left\{ 1 + i \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x}{y} \left(\eta_2 \frac{\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle + \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}} \rangle}{1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle} + \eta_3 \frac{\langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle - \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}} \rangle}{1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle} \right) \right\} - \\ &- \delta(\hat{\mathbf{p}}, -\hat{\mathbf{y}}) \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \frac{2\pi}{iyp} e^{-iyp} \{ \hat{\mathbf{p}} \rightarrow -\hat{\mathbf{p}} \}. \end{aligned} \quad (1.101)$$

Процедура согласования ведет к отысканию сингулярного ядра в интегральном представлении, записанном в терминах "почти разделения переменных". Поскольку ядро найдено (предъявлено в работе [6]), асимптотика собственных функций может быть построена и

в остальных асимптотических областях конфигурационного пространства ($|\mathbf{x}|$ ограничен, $|\mathbf{y}| \gg 1$) и в поточечном смысле. Это доказывается непосредственной проверкой скорости убывания невязки для восстановленной асимптотики (подробнее см. [12]).

Переход в дополнительную асимптотическую область конфигурационного пространства ($|\mathbf{x}|$ ограничен, $|\mathbf{y}| \gg 1$) в слабом смысле ведет к замене в фигурных скобках в обоих слагаемых выражения (1.101) вектора \mathbf{x} на вектор $-i \frac{\nabla_{\mathbf{k}} \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})}{\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{k})}$. Заметим, что представление (1.101) является ничем иным, как старшим членом слабой асимптотики обыкновенного трехчастичного ВВК-приближения (уравнение (4) [6]). С другой стороны, вне особых областей (окрестностей парных и многочастичных направлений рассеяния вперед) представление (1.101) является одновременно слабой асимптотикой логарифмического представления (5) [20], на котором основываются Э. О. Альт и А. Мухамеджанов. В этом смысле вне особых областей наши представления совпадают. В этом можно убедиться, сравнив слабые асимптотики представлений (16)–(17) [20] с учетом (8)–(10) и слабую асимптотику (1.101) в настоящей работе.

1.4 О случае систем с произвольным числом частиц

В этой части работы речь пойдет про обобщение результата на случай произвольного количества частиц в системе, а также будут даны оценки скорости убывания невязки, опущенные ранее.

В соответствии с результатами работ [5, 6] мы предположим, что в случае, когда одна из относительных координат в парных подсистемах (назовем ее $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{\omega_1 \gamma_2}$) становится малой (ограниченной), анзац допускает простую модификацию. Все относительные координаты в парных подсистемах, по-прежнему остающиеся большими, должны быть модифицированы следующим образом:

$$\mathbf{x}_\beta \equiv \mathbf{x}_{\beta_1 l_2} = \zeta_{\beta_1}^{(\gamma)} \mathbf{x}_{\omega_1 \gamma_2} + \sum_{j=2}^{n-1} \zeta_{\beta_j}^{(\gamma)} \mathbf{x}_{\omega_j \gamma_{j+1}}, \quad (1.102)$$

в каждой функции $\Phi(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{k}_\beta)$ ($\beta \neq 1$, $\zeta_{\beta_1}^{(\gamma)} \neq 0$) должно быть заменено на выражение

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\beta_1 l_2} = \zeta_{\beta_1}^{(\gamma)} \tilde{\mathbf{x}}_{\omega_1 \gamma_2} + \sum_{j=2}^{n-1} \zeta_{\beta_j}^{(\gamma)} \mathbf{x}_{\omega_j \gamma_{j+1}}. \quad (1.103)$$

Как и выше, индекс β_1 фиксирует частицу, а составной индекс $\beta_1 l_2 = 2, 3, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ определяет способ образования парной подсистемы, отличной от парной подсистемы, фиксированной относительной координатой \mathbf{x}_1 . При этом

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\omega_1 \gamma_2} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_{\omega_1 \gamma_2}} \psi_2(\mathbf{x}_{\omega_1 \gamma_2}, \mathbf{k}_{\omega_1 \gamma_2})}{\psi_2(\mathbf{x}_{\omega_1 \gamma_2}, \mathbf{k}_{\omega_1 \gamma_2})}, \quad (1.104)$$

а функция ψ_2 , описывающая динамику двухчастичной подсистемы с относительной координатой $\mathbf{x}_{\omega_1 \gamma_2}$, является изученным объектом.

Покажем теперь, что невязка в уравнении Шрёдингера (1.8)–(1.9) для анзатца (1.10) убывает быстрее потенциала в упомянутых выше случаях асимптотических конфигураций:

- 1) все частицы хорошо разделены, то есть все относительные координаты в двухчастичных подсистемах велики;
- 2) одна из относительных координат в двухчастичных подсистемах мала или, даже, ограничена, остальные координаты по-прежнему велики;
- 3) разрешено любое количество парных сближений (однако тройные и более, по-прежнему, запрещены).

1.4.1 Случай хорошо разделенных частиц

Предложение 1.4.1. *Невязка анзатца (1.10) для уравнения Шрёдингера в случае хорошо разделенных частиц убывает быстрее кулоновского потенциала.*

Доказательство. Непосредственная подстановка анзатца (1.10) в уравнение Шрёдингера (1.9) дает следующее выражение для невязки $-Q = (H - E)\Psi$:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{N_0} = & (\Delta_{\mathbf{X}} e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle}) \prod_{\nu=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu} + e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \sum_{\mu=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} (\Delta_{\mathbf{X}} \Phi_{\mu}) \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu} + \\ & + 2 \sum_{\mu=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle \nabla_{\mathbf{X}} e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle}, \nabla_{\mathbf{X}} \Phi_{\mu} \rangle \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu} + 2e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \sum_{\mu=1, \sigma=1; \mu < \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle \nabla_{\mathbf{X}} \Phi_{\mu}, \nabla_{\mathbf{X}} \Phi_{\sigma} \rangle \prod_{\nu=1; \nu \neq \mu, \nu \neq \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu} - \\ & - (V(\mathbf{X}) - E) e^{i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} \prod_{\nu=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu}, \end{aligned}$$

где введено обозначение $\Phi_{\nu} \equiv \Phi(\mathbf{x}_{\nu}, \mathbf{k}_{\nu})$. Здесь и далее под \mathbf{k}_{ν} понимается $\mathbf{k}_{\mathbf{x}_{\nu}}$.

Пользуясь условием (1.5) $\nabla_{\mathbf{x}_{\omega_j \gamma_{j+1}}} \Phi(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{\beta}) = \zeta_{\beta j}^{(\gamma)} \nabla_{\mathbf{x}_{\beta}} \Phi(\mathbf{x}_{\beta}, \mathbf{k}_{\beta})$, а также условиями (1.6) и (1.7), получаем

$$\begin{aligned} \frac{Q}{N_0} e^{-i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} = & \tag{1.105} \\ = & \sum_{\mu=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(-2|\mathbf{k}_{\mu}|^2 (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}_{\mu}, \hat{\mathbf{x}}_{\mu} \rangle) \Phi_{\mu}'' + 2|\mathbf{k}_{\mu}|^2 (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}_{\mu}, \hat{\mathbf{x}}_{\mu} \rangle) \Phi_{\mu}' + 2i \frac{|\mathbf{k}_{\mu}|}{|\mathbf{x}_{\mu}|} \Phi_{\mu}' - \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_{\mu}|} \Phi_{\mu} \right) \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu} - \\ & - 2 \sum_{\mu=1, \sigma=1; \mu < \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} A_{\mu\sigma} |\mathbf{k}_{\mu}| |\mathbf{k}_{\sigma}| \langle \hat{\mathbf{x}}_{\mu} - \hat{\mathbf{k}}_{\mu}, \hat{\mathbf{x}}_{\sigma} - \hat{\mathbf{k}}_{\sigma} \rangle \Phi_{\mu}' \Phi_{\sigma}' \prod_{\nu=1; \nu \neq \mu, \nu \neq \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu}. \end{aligned}$$

Коэффициент $A_{\mu\sigma}$ определяется соотношением

$$A_{\mu\sigma} = \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_{\mu j} \zeta_{\sigma j}. \tag{1.106}$$

Заметим, что множитель в круглых скобках в первой сумме в уравнении (1.105) обращается в ноль, так как это выражение есть гипергеометрическое уравнение, которому удовлетворяет вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi_{\mu} \equiv \Phi(-i\eta_{\mu}, 1, i|\mathbf{x}_{\mu}| |\mathbf{k}_{\mu}| - i\langle \mathbf{x}_{\mu}, \mathbf{k}_{\mu} \rangle)$.

Таким образом, выражение для невязки (1.105) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{Q}{N_0} e^{-i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} = & \quad (1.107) \\ = -2 \sum_{\mu=1, \sigma=1; \mu < \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} A_{\mu\sigma} |\mathbf{k}_\mu| |\mathbf{k}_\sigma| \langle \hat{\mathbf{x}}_\mu - \hat{\mathbf{k}}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_\sigma - \hat{\mathbf{k}}_\sigma \rangle \Phi'_\mu \Phi'_\sigma \prod_{\nu=1; \nu \neq \mu, \nu \neq \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_\nu, \end{aligned}$$

где коэффициенты $A_{\mu\sigma}$ определяются выражением (1.106).

Заметим, что вне малых фиксированных угловых окрестностей парных направлений рассеяния вперед, то есть при условии

$$1 - \langle \hat{\mathbf{x}}_\rho, \hat{\mathbf{k}}_\rho \rangle \geq d > 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}, \quad (1.108)$$

абсолютные значения аргументов всех вырожденных гипергеометрических функций велики в области конфигурационного пространства, где все частицы хорошо разделены ($|\hat{\mathbf{x}}_\rho| \rightarrow \infty, \rho = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$). Тем самым, выполнено

$$\Phi'_\rho = \Phi'(-i\eta_\rho, 1, i|\mathbf{x}_\rho| |\mathbf{k}_\rho| - i\langle \mathbf{x}_\rho, \mathbf{k}_\rho \rangle) = O(|\mathbf{x}_\rho|^{-1}) = O(|\mathbf{X}|^{-1}).$$

Таким образом, невязка Q в выражении (1.107) убывает как $O(|\mathbf{X}|^{-2})$ при $|\mathbf{X}| \rightarrow \infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда в одной из парных подсистем разрешена угловая окрестность направления рассеяния вперед с ограниченным ростом параболической координаты. Это означает, что для некоторого фиксированного ρ

$$1 - \langle \hat{\mathbf{x}}_\rho, \hat{\mathbf{k}}_\rho \rangle = O(|\mathbf{x}_\rho|^{-1+\varepsilon}), \quad |\mathbf{x}_\rho| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.109)$$

При этом оценка для самой параболической координаты (аргумента вырожденной гипергеометрической функции) имеет вид

$$|\mathbf{x}_\rho| (1 - \langle \hat{\mathbf{x}}_\rho, \hat{\mathbf{k}}_\rho \rangle) = O(|\mathbf{x}_\rho|^\varepsilon). \quad (1.110)$$

Так как $|\mathbf{x}_\rho| \rightarrow \infty, \varepsilon > 0$, то $|\mathbf{x}_\rho|^\varepsilon \gg 1$. Таким образом, справедлива оценка

$$\Phi'_\rho = \Phi'(-i\eta_\rho, 1, i|\mathbf{x}_\rho| |\mathbf{k}_\rho| - i\langle \mathbf{x}_\rho, \mathbf{k}_\rho \rangle) = O(|\mathbf{x}_\rho|^{-\varepsilon}). \quad (1.111)$$

Заметим, что согласно предположению (1.109):

$$|\hat{\mathbf{x}}_\rho - \hat{\mathbf{k}}_\rho| = O\left(|\mathbf{x}_\rho|^{-\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}}\right). \quad (1.112)$$

Возвращаясь теперь к выражению для невязки (1.107), получаем, что согласно (1.111) и (1.112), для каждого слагаемого, в котором индексы μ или σ принимают значение ρ , справедлива оценка

$$Q_\rho = \langle \hat{\mathbf{x}}_\rho - \hat{\mathbf{k}}_\rho, \hat{\mathbf{x}}_\lambda - \hat{\mathbf{k}}_\lambda \rangle \Phi'_\rho \Phi'_\lambda = O\left(|\mathbf{X}|^{-\frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{2}}\right). \quad (1.113)$$

Мы также учли здесь, что

$$\lambda \in \left\{1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}\right\}, \quad \lambda \neq \rho, \quad |\mathbf{x}_\rho| = O(|\mathbf{X}|), \quad |\hat{\mathbf{x}}_\lambda - \hat{\mathbf{k}}_\lambda| = O(1), \quad \Phi'_\lambda = O(|\mathbf{X}|^{-1}).$$

Эта же оценка справедлива и для всей невязки (1.107).

Рассмотрим также ситуацию, когда угловые окрестности парных направлений рассеяния вперед с ограниченным ростом параболической координаты разрешены более чем в одной парной подсистеме. Это означает в частности, что для некоторых фиксированных ρ и λ выполняются оценки, аналогичные (1.109):

$$1 - \langle \hat{\mathbf{x}}_\rho, \hat{\mathbf{k}}_\rho \rangle = O(|\mathbf{x}_\rho|^{-1+\varepsilon}), \quad |\mathbf{x}_\rho| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.114)$$

$$1 - \langle \hat{\mathbf{x}}_\lambda, \hat{\mathbf{k}}_\lambda \rangle = O(|\mathbf{x}_\lambda|^{-1+\omega}), \quad |\mathbf{x}_\lambda| \rightarrow \infty, \quad \omega > 0. \quad (1.115)$$

При этом, аналогично (1.110), оценки для параболических координат имеют вид

$$|\mathbf{x}_\rho|(1 - \langle \hat{\mathbf{x}}_\rho, \hat{\mathbf{k}}_\rho \rangle) = O(|\mathbf{x}_\rho|^\varepsilon), \quad (1.116)$$

$$|\mathbf{x}_\lambda|(1 - \langle \hat{\mathbf{x}}_\lambda, \hat{\mathbf{k}}_\lambda \rangle) = O(|\mathbf{x}_\lambda|^\omega). \quad (1.117)$$

Поскольку $|\mathbf{x}_\rho| \rightarrow \infty$, $|\mathbf{x}_\lambda| \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$, $\omega > 0$, то, следовательно, $|\mathbf{x}_\rho|^\varepsilon \gg 1$, $|\mathbf{x}_\lambda|^\omega \gg 1$. Таким образом, справедливы оценки

$$\Phi'_\rho = \Phi'(-i\eta_\rho, 1, i|\mathbf{x}_\rho||\mathbf{k}_\rho| - i\langle \mathbf{x}_\rho, \mathbf{k}_\rho \rangle) = O(|\mathbf{x}_\rho|^{-\varepsilon}), \quad (1.118)$$

$$\Phi'_\lambda = \Phi'(-i\eta_\lambda, 1, i|\mathbf{x}_\lambda||\mathbf{k}_\lambda| - i\langle \mathbf{x}_\lambda, \mathbf{k}_\lambda \rangle) = O(|\mathbf{x}_\lambda|^{-\omega}). \quad (1.119)$$

Заметим, что согласно предположениям (1.114) и (1.115):

$$|\hat{\mathbf{x}}_\rho - \hat{\mathbf{k}}_\rho| = O(|\mathbf{x}_\rho|^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}), \quad (1.120)$$

$$|\hat{\mathbf{x}}_\lambda - \hat{\mathbf{k}}_\lambda| = O(|\mathbf{x}_\lambda|^{-\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2}}). \quad (1.121)$$

Возвращаясь теперь к выражению для невязки (1.107), получаем, что согласно (1.118)–(1.121), для слагаемого, в котором индексы μ и σ принимают значения ρ и λ , справедлива оценка

$$Q_\rho = \langle \hat{\mathbf{x}}_\rho - \hat{\mathbf{k}}_\rho, \hat{\mathbf{x}}_\lambda - \hat{\mathbf{k}}_\lambda \rangle \Phi'_\rho \Phi'_\lambda = O(|\mathbf{X}|^{-1-\delta}), \quad \delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\omega}{2} > 0. \quad (1.122)$$

Мы учли здесь, что $|\mathbf{x}_\rho| = O(|\mathbf{X}|)$, $|\mathbf{x}_\lambda| = O(|\mathbf{X}|)$. Эта же оценка справедлива и для всей невязки (1.107). \square

Параметр δ положителен, однако построить для него оценку снизу в рамках данного приближения не удастся. Это означает, что в окрестности направления рассеяния вперед необходимо более точное описание асимптотики. Это будет сделано отдельно, но не в рамках данной работы.

1.4.2 Малость одной парной координаты

Рассмотрим сначала область конфигурационного пространства вне парных направлений рассеяния вперед. Это означает, что справедлива оценка (1.108). Предположим также, что малой является координата $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{\omega_1\gamma_2}$. При этом остальные относительные парные координаты должны быть модифицированы согласно выражениям (1.102)–(1.103), то есть выражение

$$\mathbf{x}_\beta \equiv \mathbf{x}_{\beta_1 l_2} = \zeta_{\beta_1}^{(\gamma)} \mathbf{x}_{\omega_1\gamma_2} + \sum_{j=2}^{n-1} \zeta_{\beta_j}^{(\gamma)} \mathbf{x}_{\omega_j\gamma_{j+1}} \quad (1.123)$$

в каждой функции $\Phi(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{k}_\beta)$ ($\beta \neq 1$, $\zeta_{\beta_1}^{(\gamma)} \neq 0$) анзатца должно быть заменено на выражение

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\beta_1 l_2} = \zeta_{\beta_1}^{(\gamma)} \tilde{\mathbf{x}}_{\omega_1\gamma_2} + \sum_{j=2}^{n-1} \zeta_{\beta_j}^{(\gamma)} \mathbf{x}_{\omega_j\gamma_{j+1}},$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\omega_1\gamma_2} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_{\omega_1\gamma_2}} \psi_2(\mathbf{x}_{\omega_1\gamma_2}, \mathbf{k}_{\omega_1\gamma_2})}{\psi_2(\mathbf{x}_{\omega_1\gamma_2}, \mathbf{k}_{\omega_1\gamma_2})}. \quad (1.124)$$

Предложение 1.4.2. *Невязка уравнения Шрёдингера для предложенной модификации анзатца (1.123)–(1.124) в случае малости одной из парных переменных убывает быстрее кулоновского потенциала.*

Доказательство. Заметим, что для \mathbf{x}_β в выражении (1.123) справедливо представление:

$$\mathbf{x}_\beta = -\frac{1}{2} \mathbf{x}_1 + \mathbf{z}_\beta, \quad |\mathbf{x}_1| \ll |\mathbf{x}_j|, \quad j = 2, 3, \dots, n-1; \quad (1.125)$$

где

$$\mathbf{z}_\beta = \sum_{j=2}^{n-1} \zeta_{\beta_j} \mathbf{x}_j, \quad |\mathbf{z}_\beta| \gg |\mathbf{x}_1|. \quad (1.126)$$

В этих терминах невязка модифицированного анзатца представима в следующем виде:

$$\frac{Q}{N_0} e^{-i\langle \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle} = G_I^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + G_{II}^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + G_{II}^{(11)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + G_{II}^{(12)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + O\left(\frac{1}{|\mathbf{X}|^2}\right), \quad (1.127)$$

где

$$G_I^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \quad (1.128)$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(-2|\mathbf{k}_\mu|^2 (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_\mu \rangle) \Phi_\mu'' + 2|\mathbf{k}_\mu|^2 (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_\mu \rangle) \Phi_\mu' + 2i \frac{|\mathbf{k}_\mu|}{|\mathbf{x}_\mu|} \Phi_\mu' - \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_\mu|} \Phi_\mu \right) \prod_{\nu=1, \nu \neq \mu}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_\nu,$$

$$G_{II}^{(0)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \quad (1.129)$$

$$= -2 \sum_{\mu=2, \sigma=2; \mu < \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} B_{\mu\sigma} |\mathbf{k}_\mu| |\mathbf{k}_\sigma| \langle \hat{\mathbf{x}}_\mu - \hat{\mathbf{k}}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_\sigma - \hat{\mathbf{k}}_\sigma \rangle \Phi_\mu' \Phi_\sigma' \prod_{\nu=1; \nu \neq \mu, \nu \neq \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_\nu,$$

где

$$B_{\mu\sigma} = \sum_{j=2}^{n-1} \zeta_{\mu j} \zeta_{\sigma j},$$

$$G_{\Pi}^{(11)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \quad (1.130)$$

$$= - \sum_{\mu=2}^{\frac{n(n-1)}{2}} \left\{ i \frac{|\mathbf{k}_{\mu}|}{2} \Delta_{\mathbf{x}_1} g_{\mu} - |\mathbf{k}_{\mu}| |\mathbf{k}_1| \langle \nabla_{\mathbf{x}_1} g_{\mu}, \hat{\mathbf{k}}_1 \rangle \right\} \Phi'_{\mu} \Phi_1 \prod_{\nu=2; \nu \neq \mu}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu}.$$

Мы использовали здесь обозначение

$$g_{\mu} \equiv \langle \hat{\mathbf{k}}_{\mu} - \hat{\mathbf{z}}_{\mu}, \mathbf{v} \rangle.$$

Вектор \mathbf{z}_{μ} был определен в уравнениях (1.125), (1.126), а вектор \mathbf{v} определяется соотношением (1.124), согласно (1.12), как

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_1 - i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_1} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}{\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)} \equiv \mathbf{x}_1 + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_1} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}{\Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1)}.$$

Наконец, выражение $G_{\Pi}^{(12)}$ определяется соотношением

$$G_{\Pi}^{(12)}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \quad (1.131)$$

$$= \sum_{\mu=2}^{\frac{n(n-1)}{2}} |\mathbf{k}_{\mu}| |\mathbf{k}_1| \left\{ \langle \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1, \mathbf{a}_{\mu} \rangle + \langle \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1, \nabla_{\mathbf{x}_1} g_{\mu} \rangle \right\} \Phi'_{\mu} \Phi'_1 \prod_{\nu=2; \nu \neq \mu}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu},$$

где вектор \mathbf{a}_{μ} определяется выражением

$$\mathbf{a}_{\mu} \equiv \hat{\mathbf{k}}_{\mu} - \hat{\mathbf{z}}_{\mu}.$$

Заметим, что слагаемое $G_I^{(0)}$ уравнения (1.127), как и в предыдущем разделе, тождественно обращается в ноль, так как все функции Φ_{μ} удовлетворяют гипергеометрическому уравнению. Следующее слагаемое $G_{\Pi}^{(0)}$ имеет порядок малости $O(|\mathbf{X}|^{-2})$, так как аргументы всех дифференцируемых в этом выражении функций Φ_{μ} велики, а каждая такая производная дает убывание порядка $O(|\mathbf{X}|^{-1})$.

Напротив, два последних слагаемых на первый взгляд убывают на бесконечности по координате лишь как величины порядка $O(|\mathbf{X}|^{-1})$, то есть как потенциал, что явно не достаточно. Покажем, что тем не менее сумма слагаемых $G_{\Pi}^{(11)} + G_{\Pi}^{(12)}$, а тем самым и вся невязка в выражении (1.127), убывают на бесконечности по координате как величины порядка $O(|\mathbf{X}|^{-2})$.

Перепишем выражение $G_{\Pi}^{(11)} + G_{\Pi}^{(12)}$ в следующем виде:

$$G_{\Pi}^{(11)} + G_{\Pi}^{(12)} = - \sum_{\mu=2}^{\frac{n(n-1)}{2}} |\mathbf{k}_{\mu}| |\mathbf{k}_1| R_{\mu 1} \Phi'_{\mu} \Phi_1 \prod_{\nu=2; \nu \neq \mu}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_{\nu}, \quad (1.132)$$

где выражение $R_{\mu 1}$ определяется следующим соотношением:

$$R_{\mu 1} \equiv \frac{i}{2|\mathbf{k}_1|} \Delta_{\mathbf{x}_1} g_{\mu} - \left\langle \nabla_{\mathbf{x}_1} g_{\mu}, \hat{\mathbf{k}}_1 + \frac{\Phi'_1}{\Phi_1} (\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1) \right\rangle - \frac{\Phi'_1}{\Phi_1} \langle \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1, \mathbf{a}_{\mu} \rangle. \quad (1.133)$$

Введем следующее обозначение:

$$\varphi_{\mu} \equiv \langle \mathbf{a}_{\mu}, \nabla_{\mathbf{k}_1} \Phi_1 \rangle.$$

В этих терминах выражение $R_{\mu 1}$ в (1.133) с точностью до регулярного коэффициента имеет вид

$$R_{\mu 1} = -\Delta_{\mathbf{x}_1} \varphi_\mu - 2i \langle \mathbf{k}_1, \nabla_{\mathbf{x}_1} \varphi_\mu \rangle + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_1|} \varphi_\mu + 2k \Phi'_1 \langle \mathbf{a}_\mu, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1 \rangle. \quad (1.134)$$

Для того чтобы оценить выражение (1.134), рассмотрим уравнение Шрёдингера для системы двух заряженных частиц (1.12)–(1.11):

$$-\Delta_{\mathbf{x}} \psi_2 + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|} \psi_2 = k^2 \psi_2. \quad (1.135)$$

Применим слева к уравнению (1.135) оператор $\nabla_{\mathbf{k}_1}$ и спроецируем результат на постоянный вектор \mathbf{a} . Запишем полученное выражение в терминах переменной $\varphi \equiv \langle \mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{k}_1} \Phi_1 \rangle$:

$$-\Delta_{\mathbf{x}_1} \varphi - 2i \langle \mathbf{k}_1, \nabla_{\mathbf{x}_1} \varphi \rangle + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_1|} \varphi = -2k \Phi'_1 \langle \mathbf{a}, \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{k}}_1 \rangle. \quad (1.136)$$

Сравнивая выражения (1.136) и (1.134), получаем

$$R_{\mu 1} = 0.$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что невязка в многочастичном уравнении Шрёдингера, порожденная модифицированным анзацем, убывает вне окрестностей направлений рассеяния вперед как величина порядка $O(|\mathbf{X}|^{-2})$ в том числе и для тех асимптотических конфигураций, когда частицы в одной из пар могут сближаться. \square

Замечание 1.4.3. *Как и в предыдущем разделе, мы можем рассмотреть в том же подходе и особые области, то есть окрестности направлений рассеяния вперед. Как и в предыдущем разделе невязка убывает здесь быстрее потенциала, хотя мы и не можем написать оценку снизу для скорости убывания невязки в сколь угодно узких угловых окрестностях особых направлений.*

1.4.3 Малость нескольких парных координат одновременно

Рассмотрим теперь такую асимптотическую конфигурацию системы n кулоновских частиц, когда малыми (ограниченными) являются относительные координаты в m парах ($2m \leq n$), причем расстояния между центрами масс всех таких пар велики. Расстояния между оставшимися $n - 2m$ частицами также велики, как и расстояния между этими частицами и центрами масс упомянутых выше пар.

Введем систему так называемых "кластерных" координат в конфигурационном пространстве, которые являются одним из вариантов координат Якоби и сохраняют интересующие нас свойства. Рассмотрим m относительных координат

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m)^t, \quad \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3m}$$

в парных подсистемах, объединенных в вектор \mathbf{X} . Согласно предположению, эти координаты принимают малые (ограниченные) значения. Введем также базис Якоби (1.4), построенный

для $n - 2m$ изолированных, а также для m эффективных частиц с координатами центров тяжести парных подсистем и с массами, равными удвоенной массе одной частицы

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_{\omega_1\gamma_2}, \mathbf{y}_{\omega_2\gamma_3}, \dots, \mathbf{y}_{\omega_{n-m-1}\gamma_{n-m}})^t, \quad \mathbf{y}_{\omega_l\gamma_{l+1}} \in \mathbb{R}^3, \quad l = 1, 2, \dots, n - m - 1, \quad \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{3(n-m-1)}.$$

Будем в дальнейшем кратко обозначать компоненты $\mathbf{y}_{\omega_l\gamma_{l+1}}$ вектора \mathbf{Y} как \mathbf{y}_l , $l = 1, 2, \dots, n - m - 1$.

Построенная таким образом система ортогональных координат $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^t$ в конфигурационном пространстве размерности \mathbb{R}^{3n-3} порождает следующий набор $\frac{n(n-1)}{2}$ парных координат в системе n частиц

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \mathbf{x}_{m+2}, \dots, \mathbf{x}_{\frac{n(n-1)}{2}}. \quad (1.137)$$

При этом мы предполагаем, что

$$|\mathbf{x}_j| = O(1), \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad |\mathbf{x}_l| \gg 1, \quad l = m + 1, m + 2, \dots, n - 1. \quad (1.138)$$

Парные координаты \mathbf{x}_l , $l = m + 1, m + 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ связаны ортогональным преобразованием с набором координат вектора $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^t$:

$$\mathbf{x}_l = \sum_{j=1}^m \eta_j \mathbf{x}_j + \sum_{j=m+1}^{n-1} \eta_j \mathbf{y}_j, \quad l = m + 1, m + 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.139)$$

Аналогично для двойственных им импульсных переменных имеем аналогичное разложение

$$\mathbf{k}_l = \sum_{j=1}^m \eta_j \mathbf{k}_j + \sum_{j=m+1}^{n-1} \eta_j \mathbf{p}_j, \quad l = m + 1, m + 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.140)$$

В терминах построенных выше "кластерных" координат анзац для описания асимптотики на бесконечности в конфигурационном пространстве собственных функций абсолютно непрерывного спектра исходного многочастичного оператора Шрёдингера принимает вид:

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \Big|_{|\mathbf{X}| \rightarrow \infty} \sim \tilde{N}_0 \left(\exp \left\{ i \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{k}_j \rangle \right\} \prod_{j=1}^m \Phi(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_j) \right) \left(\exp \left\{ i \sum_{j=m+1}^{n-1} \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{p}_j \rangle \right\} \prod_{j=m+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi(\mathbf{x}_j, \mathbf{k}_j) \right). \quad (1.141)$$

Заметим, что в первой круглой скобке в выражении (1.141) все переменные \mathbf{x} , согласно уравнению (1.138), малы (ограничены). Напротив, во второй круглой скобке все переменные \mathbf{x} и \mathbf{y} велики. Как и в предыдущем разделе мы должны модифицировать анзац, добиваясь быстрого убывания невязки на бесконечности в конфигурационном пространстве. Модификация будет состоять в следующем: во второй круглой скобке все переменные \mathbf{x}_j , $j = m + 1, m + 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$, которые описываются уравнением (1.139), должны быть заменены на выражения

$$\tilde{\mathbf{x}}_l = \sum_{j=1}^m \eta_j \tilde{\mathbf{x}}_j + \sum_{j=m+1}^{n-1} \eta_j \mathbf{y}_j, \quad l = m + 1, m + 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}, \quad (1.142)$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}_l = -i \frac{\nabla_{\mathbf{k}_l} \psi_2(\mathbf{x}_l, \mathbf{k}_l)}{\psi_2(\mathbf{x}_l, \mathbf{k}_l)}, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (1.143)$$

а функция ψ_2 , описывающая динамику двухчастичной подсистемы с относительной координатой \mathbf{x}_l , была описана в (1.12).

Предложение 1.4.4. *Модифицированный анзац (1.141)–(1.143) порождает невязку уравнения Шрёдингера, убывающую быстрее кулоновского потенциала.*

Доказательство. Заметим, что выражение, стоящее в первой круглой скобке уравнения (1.141) и содержащее малые (ограниченные) переменные, само по себе не дает вклада в невязку, так как является произведением собственных функций m кулоновских двухчастичных гамильтонианов. На медленное (не быстрее потенциала) убывание в невязке могут "претендовать" только слагаемые вида:

$$\sum_{\sigma=1}^m \sum_{\mu=m+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} |\mathbf{k}_\mu| |\mathbf{k}_\sigma| R_{\mu\sigma} \Phi'_\mu \Phi_\sigma \prod_{\nu=1; \nu \neq \mu, \nu \neq \sigma}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi_\nu, \quad \sigma = 1, 2, \dots, m, \quad (1.144)$$

являющиеся аналогами слагаемых (1.132). При этом мы возвращаемся к случаю, описанному в предыдущем разделе, т. е. аналогичным образом мы показываем, что

$$R_{\mu\sigma} = 0. \quad (1.145)$$

Таким образом, невязка для анзаца (1.141) убывает как $O(|\mathbf{X}|^{-2})$, то есть быстрее потенциала вне особых областей. Оценки поведения невязки в особых областях по-прежнему не требуют дополнительной регуляризации анзаца. Невязка убывает быстрее потенциала вне сколь угодно узких угловых окрестностей направлений рассеяния вперед, хотя мы и не можем написать оценку снизу для скорости убывания невязки в этих окрестностях. \square

1.4.4 Произвольная асимптотическая конфигурация

Из предыдущих пунктов вытекает следующая схема для построения модифицированного анзаца в случае произвольного числа частиц в системе.

Предположим, что система n частиц содержит l асимптотических "кластеров", каждый из которых состоит из m_j частиц, $j = 1, 2, \dots, l$.

Введем в рассмотрение базисы Якоби, руководствуясь следующей схемой: сначала внутри каждого из l кластеров мы вводим базис Якоби $\mathbf{y}_i^{(j)}$, состоящий из $m_j - 1$ вектора, j нумерует кластер. Составной базис Якоби мы формируем после этой процедуры для системы из $n - \sum_{j=1}^l m_j$ частиц, находящихся далеко друг от друга и от любого из упомянутых кластеров, и для l "квазичастиц", отвечающих кластерам (имеющих массу, равную сумме масс частиц в кластере и находящихся в его центре масс) по указанной в начале главы схеме. Обозначим эти вектора за \mathbf{z}_i , всего таких базисных векторов будет $n - \sum_{j=1}^l m_j + l - 1$.

Набор локальных базисов Якоби $\{\{\mathbf{y}^{(1)}\}, \{\mathbf{y}^{(2)}\}, \dots, \{\mathbf{y}^{(l)}\}, \{\mathbf{z}\}\}$ формирует базис координат для всей системы из n частиц.

Рассмотрим функции, описывающие решение свободного уравнения Шрёдингера для "кластеров":

$$\chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j), \mathbf{X}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{(j)} \\ \mathbf{y}_2^{(j)} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{m_j-1}^{(j)} \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^{(j)} \\ \mathbf{p}_2^{(j)} \\ \dots \\ \mathbf{p}_{m_j-1}^{(j)} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, l, \quad (1.146)$$

они удовлетворяют следующему уравнению:

$$-\sum_{\beta=1}^{m_j-1} \Delta_{\mathbf{y}_\beta^{(j)}} \chi_j + \sum_{\alpha=1}^{\frac{m_j(m_j-1)}{2}} \frac{a_0}{|\mathbf{x}_\alpha^{(j)}|} \chi_j = \sum_{\beta=1}^{m_j-1} |\mathbf{p}_\beta^{(j)}|^2 \chi_j. \quad (1.147)$$

Тогда анзац, описывающий асимптотику собственных функций абсолютно непрерывного спектра в такой конфигурации, дается следующими формулами:

$$\Psi_{\text{mod}} \sim e^{i(\mathbf{Q}_0, \mathbf{X}_0)} \prod_{j=1}^l \chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j) \prod_{i=M+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \tilde{\Phi}_i(\tilde{\mathbf{x}}_i, \mathbf{k}_i), \quad (1.148)$$

$$\mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{N+1} \\ \mathbf{z}_{N+2} \\ \dots \\ \mathbf{z}_{n-1} \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{N+1} \\ \mathbf{q}_{N+2} \\ \dots \\ \mathbf{q}_{n-1} \end{pmatrix}, N = \sum_{j=1}^l (m_j - 1), M = \sum_{j=1}^l \frac{m_j(m_j - 1)}{2}.$$

Здесь N отвечает количеству векторов базиса Якоби, описывающих "внутреннюю структуру" "квазичастиц", M – суммарное количество межчастичных векторов в каждой из "квазичастиц", также обозначено

$$\tilde{\Phi}_j(\tilde{\mathbf{x}}_j, \mathbf{k}_j) \equiv \Phi(-i\eta_j, 1, i(|\mathbf{k}_j| |\tilde{\mathbf{x}}_j| - \langle \mathbf{k}_j, \tilde{\mathbf{x}}_j \rangle)). \quad (1.149)$$

Дадим точное описание объекта $\tilde{\mathbf{x}}_i$ – замены, использованной ранее для модификации. В терминах введенного нами базиса Якоби для \mathbf{x}_i , можно записать разложение по этому базису:

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\nu=1}^{m_j-1} \zeta_{i\nu}^{(j)} \mathbf{y}_\nu^{(j)} + \sum_{\nu=N+1}^{n-1} \zeta_{i\nu}^{(0)} \mathbf{z}_\nu. \quad (1.150)$$

Здесь под $\zeta_{i\nu}^{(j)}$ понимаются соответствующие коэффициенты разложения. При этом все переменные из набора \mathbf{y}_ν^j , $j = 1, 2, \dots, l$, $\nu = 1, 2, \dots, m_j - 1$ являются малыми (в соответствии с построением базиса), а переменные \mathbf{z}_ν , $\nu = N + 1, N + 2, \dots, n - 1$ наоборот являются большими (отвечают расстояниям между частицами из разных "кластеров").

В таком случае, модификация будет состоять в следующей замене:

$$\mathbf{y}_\nu^{(j)} \rightarrow \mathbf{u}_\nu^{(j)} = -i \frac{\nabla_{\mathbf{p}_\nu^{(j)}} \chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j)}{\chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, l; \quad \nu = 1, 2, \dots, m_j - 1. \quad (1.151)$$

Тогда выражение для $\tilde{\mathbf{x}}_i$, $i = M + 1, M + 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$, задается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1}^l \sum_{\nu=1}^{m_j-1} \zeta_{i\nu}^{(j)} \mathbf{u}_\nu^{(j)} + \sum_{\nu=N+1}^{n-1} \zeta_{i\nu}^{(0)} \mathbf{z}_\nu. \quad (1.152)$$

Замечание 1.4.5. Отметим, что из приведенных ранее рассуждений следует, что при $|\mathbf{x}_i^{(j)}| \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, \frac{m_j(m_j-1)}{2}$

$$\chi_j(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j) \rightarrow e^{i(\mathbf{X}_j, \mathbf{Q}_j)} \prod_{i=1}^{\frac{m_j(m_j-1)}{2}} \Phi_i(\mathbf{x}_i^{(j)}, \mathbf{k}_i^{(j)}).$$

Теорема 1.4.6. Анзатц для асимптотики собственных функций абсолютно непрерывного спектра системы n одинаково заряженных квантовых частиц, описываемый формулами (1.146)–(1.152) порождает в уравнении Шрёдингера невязку, убывающую на бесконечности в конфигурационном пространстве быстрее кулоновского потенциала.

Замечание 1.4.7. Отметим, что невязка убывает быстрее потенциала вне сколь угодно малых угловых окрестностей направлений рассеяния вперед, хотя мы и не можем написать оценку снизу для скорости убывания невязки в этих окрестностях. Также напомним, что если существуют нули функции χ_j , то их бесконечно малые окрестности необходимо выколоть.

1.4.5 Обсуждение теоремы 1.4.6

Вернемся к случаю хорошо разделенных частиц. В этом случае асимптотику собственных функций абсолютно непрерывного спектра описывает приближение искаженных плоских волн, которое представляет из себя произведение плоской волны на вырожденные гипергеометрические функции, каждая из которых отвечает взаимодействию какой-то из пар частиц:

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \underset{|\mathbf{X}| \rightarrow \infty}{\sim} N_0 e^{i(\mathbf{X}, \mathbf{P})} \prod_{\beta=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \Phi(\mathbf{x}_\beta, \mathbf{k}_\beta). \quad (1.153)$$

Что происходит с этим анзатцем в ситуации, когда какие-то из парных координат становятся много меньше других? Для получившихся "кластеров" мы должны заменить в исходном анзатце асимптотику собственной функции абсолютно непрерывного спектра на точное

решение (в нашем случае это функции χ_j , см. (1.146)), а в аргументах, оставшихся не затронутыми вырожденных гипергеометрических функций, заменить малые переменные на соответствующий градиент (1.151).

Подобную процедуру можно проводить в произвольно выбранном базисе, однако мы выбираем, на наш взгляд, наиболее удобный для описания базис Якоби, который позволяет записывать выражения в достаточно компактной форме.

Все асимптотические конфигурации согласуются между собой и, в частности, со случаем хорошо разделенных частиц (1.4.5). Модифицированные "большие" переменные аналогично переходят в исходные выражения, если устремить "малые" переменные к бесконечности. Это ясно из замечания 1.4.5 и асимптотики замены (1.151).

Теперь обратимся к вопросу, почему невязка этого анзатца убывает быстрее потенциала? Не вдаваясь в подробности, дадим указание на основные моменты, которые приводят к этому.

Рассмотрим введенный выше анзатц, допускающий сближение частиц в "кластерах". В качестве примера зафиксируем одну из асимптотических конфигураций, отвечающую некоторой "кластеризации". Выберем набор ортогональных координат Якоби в соответствии с определением в начале пункта 1.4.4. Согласно замечанию 1.4.5, старший порядок асимптотики анзатца при $x_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, \dots, \frac{m_j(m_j-1)}{2}$, $j = 1, 2, \dots, l$ совпадает с представлением (1.153). Явная подстановка представления (1.148) в уравнение Шрёдингера приводит к вычислениям, аналогичным вычислениям, проведенным для системы 4-х частиц. Это доказывает справедливость утверждения теоремы 1.4.6.

Глава 2

Система трех трехмерных кулоновских квантовых частиц при наличии парного потенциала притяжения

В этой части работы мы рассмотрим систему трех трехмерных заряженных квантовых частиц. В области конфигурационного пространства, допускающей "почти разделение переменных" в уравнении Шрёдингера, мы построим приближенное решение этого уравнения в виде спектрального разложения по собственным функциям парной подсистемы с некоторой плотностью. Затем мы построим интегральное уравнение для неизвестной плотности $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$, $n \geq M \gg 1$, исходя из процедуры согласования двух приближенных решений $\Psi^{\text{ВВК}}$ и Ψ^{sep} уравнения Шрёдингера в асимптотической области конфигурационного пространства, в которой оба представления являются справедливыми. Далее мы предъявим асимптотику решения построенного интегрального уравнения. Затем, пользуясь полученными результатами, найдем вклад спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра парного оператора Шрёдингера в структуру асимптотики (при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$) собственной функции абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора. В конце главы мы сформулируем наиболее важные результаты.

2.1 Описание модели

Предполагается, что все частицы в системе имеют равные массы. На заряды накладывается условие: полный заряд в каждой парной подсистеме отличен от нуля (это связано с необходимостью иметь дело с эффективным кулоновским потенциалом подсистемы, а не с дипольным, что было бы в случае равенства зарядов).

Конфигурационное пространство системы трех трехмерных частиц есть \mathbb{R}^9 . Полагая систему покоящейся как целое, сводим конфигурационное пространство к шестимерному

$$\Gamma = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbb{R}^9, \mathbf{z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}, \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 = 0, \mathbf{z}_j \in \mathbb{R}^3\}.$$

На Γ имеется скалярное произведение $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle$, индуцированное скалярным произведением на \mathbb{R}^9 . Система на Γ описывается уравнением Шрёдингера

$$H\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi = \Psi(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{z} \in \Gamma, \quad H = -\Delta_{\mathbf{z}} + V(\mathbf{z}),$$

$$V(\mathbf{z}) = v_1(\mathbf{x}_1) + v_2(\mathbf{x}_2) + v_3(\mathbf{x}_3), \quad \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь $\Delta_{\mathbf{z}}$ – оператор Лапласа на Γ ,

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3), \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1).$$

Ясно, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0$. Введем также $\mathbf{y}_j = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{z}_j$. Нетрудно убедиться, что на Γ справедливо уравнение $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 = 0$, а также

$$\mathbf{z}^2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_j \rangle, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\Delta_{\mathbf{z}} = \Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}.$$

Отметим, что переменные \mathbf{x}_j и \mathbf{y}_j являются для системы трех частиц так называемым базисом Якоби.

Вместе с $\mathbf{z} \in \Gamma$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ будем рассматривать двойственные переменные, импульсы $\mathbf{q} \in \Gamma$, $\mathbf{k}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$.

Двойственность по Фурье переменных можно понимать так: решение парной подзадачи, отвечающей выбранной координатной переменной имеет асимптотику типа искаженной плоской волны. Тогда векторная величина, параметризующая решение и стоящая в скалярном произведении с координатой в фазе экспоненты, будет нести физический смысл импульса. Или, математически, преобразование Фурье осуществляет переход от координатного к импульсному представлению, порождая набор импульсных переменных, о которых и идет речь.

Для потенциала можно записать следующее выражение:

$$v_l(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_l}{x}, \quad \alpha_l = q_i q_j,$$

где $\{ijl\}$ – фиксированная четная перестановка чисел 1, 2, 3, q_i, q_j – заряды i -й и j -й частиц. Возможно также обобщение на случай, когда потенциал содержит короткодействующую составляющую

$$v_l(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_l}{x} + w_l(\mathbf{x}), \quad xw_l(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad l = 1, 2, 3.$$

Однако, в дальнейшем, мы будем описывать лишь чисто кулоновское взаимодействие.

2.1.1 ВВК-приближение

Собственные функции абсолютно непрерывного спектра $\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ при асимптотическом (при $z \rightarrow \infty$) описании вне малых угловых окрестностей областей $\sigma_j = \{\mathbf{z} \in \Gamma, \mathbf{x}_j = 0\}$,

$j = 1, 2, 3$ (в дальнейшем мы будем называть эти области "экранами"), описывается ВВК-приближением $\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$. Это приближение было исследовано в [25], см. также [14], хотя использовалось и ранее (см., например, [29, 30]). Оно имеет вид:

$$\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle} \Phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) \Phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) \Phi(\mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3), \quad (2.1)$$

где

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \Phi(-i\eta, 1, i\mathbf{x}\mathbf{k} - i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle), \quad \mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3, \quad \eta = \frac{\alpha}{2k}, \quad (2.2)$$

Φ – вырожденная гипергеометрическая функция, см. [10]. Постоянная $N_0 = \prod_{j=1}^3 N_c^{(j)}$ является произведением нормировочных постоянных трех двухчастичных состояний рассеяния $N_c^{(j)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi\eta_j}{2}} \Gamma(1+i\eta_j)$. Переменные $\mathbf{k}_j, \mathbf{p}_j; j = 1, 2, 3$ являются соответственно сопряженными по Фурье якобиевым переменным $\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j$.

Стоит отметить, что функция

$$\Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = N_c e^{i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \quad (2.3)$$

удовлетворяет двухчастичному уравнению Шрёдингера (или же уравнению, описывающему частицу в кулоновском потенциале):

$$(-\Delta_{\mathbf{x}} + \frac{\alpha}{x} - k^2) \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.4)$$

Решение $\Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ является точным решением задачи рассеяния квантовой частицы на кулоновском потенциале.

Заметим также, что ВВК-приближение справедливо лишь в области, в которой обе якобиевы координаты, отвечающие выбранной парной подсистеме, оказываются велики. Опираясь на [6], [12], [14], [25], введем область:

$$\Omega_\mu = \bigcup_{j=1}^3 \Omega_j, \quad (2.5)$$

$$\Omega_j = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j), y_j^\mu < x_j < y_j, \frac{1}{2} < \mu < 1, y_j \rightarrow \infty\}. \quad (2.6)$$

Отметим, что ВВК-приближение перестает быть справедливым в асимптотических (при $R = \sqrt{x_j^2 + y_j^2} \rightarrow \infty, j = 1, 2, 3$) областях конфигурационного пространства, в которых якобиева координата $\mathbf{x}_j, j = 1, 2, 3$ становится малой (ограниченной). Основной результат работ [6], [12], [20] и [21] заключается как раз в построении непрерывного продолжения ВВК-приближения в асимптотические области конфигурационного пространства при ограниченных и в том числе малых значениях якобиевой координаты $\mathbf{x}_j, j = 1, 2, 3$. Заметим, однако, что эти результаты были получены в предположении одинаковости знака заряда всех частиц входящих в систему, то есть только для случая парных потенциалов отталкивания. Случай, который мы собираемся рассматривать сейчас, является более богатым, и более сложным, поскольку предполагает наличие в некоторых парных подсистемах (с кулоновским притягивающим парным потенциалом) бесконечного дискретного спектра.

Руководствуясь теми же идеями, что лежали в основе работ, описывающих поведение одинаково заряженных частиц, начнем с "почти разделения переменных".

2.1.2 Асимптотическое "почти разделение" переменных

Зафиксируем пару разноименно заряженных частиц. Как и оговаривалось в начале, их суммарный заряд предполагается отличным от нуля. Все дальнейшие построения будем вести, полагая, что базис Якоби строится, начиная с этих двух частиц (\mathbf{x}_1 имеет смысл расстояния между этими частицами). Индекс "1" мы будем в дальнейшем опускать.

Заметим, что в асимптотической "параболической" окрестности каждого "экрана" $\sigma_j = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) : x_j = 0\}$, $j = 1, 2, 3$ уравнение Шрёдингера допускает серьезное упрощение, после которого становится возможным разделение переменных в уравнении. Полный потенциал, стоящий в уравнении Шрёдингера

$$V(\mathbf{z}) = v_1(\mathbf{x}_1) + v_2(\mathbf{x}_2) + v_3(\mathbf{x}_3), \quad v_i(\mathbf{x}_i) = \frac{\alpha_i}{x_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

в асимптотической окрестности экрана σ_1 ($y \gg 1$) при помощи формул, выражающих \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 через базис Якоби

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_1,$$

при $y \gg x$ может быть представлен в виде:

$$V = V_{\text{sep}} + O\left(\frac{x}{y^2}\right), \quad V_{\text{sep}} = v_1(x_1) + v^{\text{eff}}(y_1), \quad v^{\text{eff}}(y_1) = \frac{\alpha_{\text{eff}}}{y_1}, \quad \alpha_{\text{eff}} = \frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sqrt{3}}. \quad (2.7)$$

Тем самым, первое слагаемое в выражении (2.7) хорошо описывают потенциал V до тех пор, пока поправка $O\left(\frac{x}{y^2}\right)$ убывает быстрее кулоновского потенциала. Таким образом, нас интересует асимптотическая область

$$\Omega_1^+ : \{x \leq y^\nu, \quad 0 < \nu < 1, \quad y \rightarrow \infty\}. \quad (2.8)$$

Очевидно, аналогичные утверждения о почти разделении переменных справедливы во всех асимптотических областях

$$\Omega_j^+ : \{x_j \leq y_j^\nu, \quad 0 < \nu < 1, \quad y_j \rightarrow \infty\}, \quad (2.9)$$

в окрестностях экранов σ_j при $y_j \gg x_j$.

Возвращаясь к области Ω_1^+ , отметим, что уравнение с приближенным потенциалом V_{sep} допускает разделение переменных в старшем порядке

$$[-\Delta_{\mathbf{z}} + v_1(x) + v^{\text{eff}}(y)] \Psi^{\text{sep}} = E \Psi^{\text{sep}}.$$

В таком случае для Ψ^{sep} естественно искать решение в виде разложения по собственным функциям оператора Шрёдингера парной подсистемы с некоторыми неизвестными плотностями $R(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ и $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$:

$$\Psi^{\text{sep}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(k'^2 + p'^2 - E) R(\mathbf{q}, \mathbf{q}') + \quad (2.10)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(p'^2 - \frac{\alpha_1^2}{4n^2} - E) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}').$$

Здесь используются обозначения

$$\mathbf{q} = (\mathbf{k}, \mathbf{p})^t, \quad \mathbf{q}' = (\mathbf{k}', \mathbf{p}')^t, \quad q^2 = E,$$

а $\Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ – собственная функция абсолютно непрерывного спектра двухчастичного оператора Шрёдингера с потенциалом $v_1(x)$, $\Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p})$ – собственная функция абсолютно непрерывного спектра двухчастичного оператора Шрёдингера с эффективным потенциалом $v^{\text{eff}}(y)$:

$$(-\Delta_{\mathbf{x}} + v_1(x)) \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = k^2 \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}),$$

$$(-\Delta_{\mathbf{y}} + v^{\text{eff}}(y)) \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}) = p^2 \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}).$$

Во втором слагаемом в (2.10), отвечающем дискретному спектру парной подзадачи, связанным с переменной \mathbf{x} , $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}')$ – функция, полученная путем аналитического продолжения $\Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}')$ по модулю переменной \mathbf{k} в точку комплексной плоскости импульса $i \frac{|\alpha|}{2n}$ (тем самым эта функция остается решением уравнения Шрёдингера, но отвечает точке дискретного спектра по энергии). Оправдание такого представления для приближенного решения мы дадим ниже.

Отметим, что чаще для подобных задач используется естественное представление в виде спектрального разложения по нормированным собственным функциям парной подсистемы

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{sep}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(k'^2 + p'^2 - E) R(\mathbf{q}, \mathbf{q}') + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_{n,l,m}(x) Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}) \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(p'^2 - \frac{|\alpha_1|^2}{4n^2} - E) R_{n,l,m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\psi_{n,l,m}(x) Y_l^m(\hat{\mathbf{x}})$ – собственная функция дискретного спектра оператора Шрёдингера $h = -\Delta_{\mathbf{x}} + \frac{\alpha}{|\mathbf{x}|}$, отвечающая квантовым числам n, l, m . Y_l^m – некоторая сферическая функция.

Работа с таким представлением сложна, в силу наличия тройной вложенной бесконечной суммы по квантовым числам. Покажем, как можно построить "производящую" функцию $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}')$ и установим, что указанное выше представление является разложением по ненормированным собственным функциям дискретного спектра парной подсистемы.

2.1.3 Построение $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}')$ и оправдание представления для Ψ^{sep}

Предложение 2.1.1. *Представление (2.10) является разложением по ненормированным собственным функциям дискретного спектра парной подзадачи и эквивалентно (2.11).*

Доказательство. Для доказательства этого факта мы сначала подробно опишем способ получения функции $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}')$.

Рассмотрим собственную функцию абсолютно непрерывного спектра $\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$, определенную стандартным образом с точностью до нормировки (нормировочный коэффициент положен равным единице):

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle} \Phi(-i\gamma, 1, ikx(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle)), \quad (2.12)$$

кулоновского двухчастичного оператора Шрёдингера и проведем ее парциальный анализ (рассмотрим ее разложение по собственным функциям оператора Лапласа на сфере). Предварительно воспользуемся преобразованием Куммера (9.212.1) [10]

$$\Phi(a, c, z) = e^z \Phi(c - a, c, -z),$$

что позволяет переписать (2.12) в виде

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{ikx} \Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle)). \quad (2.13)$$

Теперь угловая зависимость сосредоточена только в вырожденной гипергеометрической функции. Проведем ее разложение в ряд по ортогональным полиномам Лежандра P_l . Согласно, например (8.904) [10], это разложение принимает вид:

$$\Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - t)) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \Phi_l(k, x) P_l(t). \quad (2.14)$$

Здесь введены обозначения: $t = \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle$, $\Phi_l(k, x)$ – парциальные компоненты функции $\Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - t))$, которые, согласно условиям ортогональности полиномов Лежандра, вычисляются следующим образом:

$$\Phi_l(k, x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt \Phi(1 + i\gamma, 1, -ikx(1 - t)) P_l(t). \quad (2.15)$$

Для вычисления интеграла в (2.15) воспользуемся гипергеометрическим разложением

$$\Phi(a, 1, b(1 - t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j}{(j!)^2} b^j (1 - t)^j, \quad a = 1 + i\gamma, \quad b = -ikx, \quad (a)_j = \frac{\Gamma(a + j)}{\Gamma(a)}, \quad (2.16)$$

в терминах которого

$$\Phi_l(k, x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j}{(j!)^2} b^j \int_{-1}^1 dt (1 - t)^j P_l(t). \quad (2.17)$$

Делая в интеграле замену переменной $s^2 = \frac{1-t}{2}$, вычислим его явно, и получим новое гипергеометрическое разложение, ведущее к следующему предельному соотношению для парциальной компоненты:

$$\Phi_l(k, x) = \frac{(-1)^l}{\Gamma(l + 2)} \lim_{u \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(u)} {}_2F_2(a, 1; u, l + 2; 2b), \quad m = l - 1. \quad (2.18)$$

Воспользуемся теперь уравнением

$$\lim_{u \rightarrow -m} \frac{1}{\Gamma(u)} {}_2F_2(A, B; u, D; z) = \frac{(A)_{m+1}(B)_{m+1}}{(D)_{m+1}} \frac{z^{m+1}}{(m+1)!} {}_2F_2(A+m+1, B+m+1; m+2, D+m+1; z), \quad (2.19)$$

где $A = a$, $B = 1$, $m = l - 1$, $D = l + 2$, $z = 2b$. Подставляя равенство (2.19) в (2.18), получим окончательное выражение для парциальной компоненты

$$\Phi_l(k, x) = \frac{\Gamma(i\gamma + l + 1)}{\Gamma(i\gamma + 1)\Gamma(2l + 2)} (2ikx)^l \Phi(i\gamma + l + 1, 2l + 2, -2ikx). \quad (2.20)$$

Подставляя полученное соотношение в разложение (2.13)–(2.14) для собственных функций абсолютно непрерывного спектра кулоновского двухчастичного оператора Шрёдингера, получаем

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = e^{ikx} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{\Gamma(i\gamma + l + 1)}{\Gamma(i\gamma + 1)\Gamma(2l + 2)} (2ikx)^l \Phi(i\gamma + l + 1, 2l + 2, -2ikx) P_l(t), \quad t = \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle. \quad (2.21)$$

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение построенной нами функции в верхнюю полуплоскость комплексной плоскости k :

$$k = k_n = i \frac{|\alpha|}{2n}, \quad \alpha < 0, \quad i\gamma = i \frac{\alpha}{2k} \Big|_{k=k_n} = i \frac{\alpha}{2k_n} = -n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В этом случае уравнение (2.21) принимает вид

$$\tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}_n) = e^{-\frac{|\alpha|}{2n}x} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_{nl} \frac{2l + 1}{\Gamma(2l + 1)} \left(-\frac{|\alpha|}{n}x\right)^l \Phi\left(-n + l + 1, 2l + 2, \frac{|\alpha|}{n}x\right) P_l(t), \quad t = \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle. \quad (2.22)$$

Мы понимаем здесь вектор \mathbf{k}_n как вектор с направлением, совпадающим с направлением исходного вектора \mathbf{k} ($\hat{\mathbf{k}}_n = \hat{\mathbf{k}}$), и длиной, принимающей чисто мнимое значение в верхней полуплоскости комплексной плоскости k ($k_n = i \frac{|\alpha|}{2n}$). Здесь коэффициент β_{nl} определяется следующим образом:

$$\beta_{nl} = (1 - n)(2 - n) \dots (l - n). \quad (2.23)$$

Отметим, что согласно уравнению (2.23), коэффициент β_{nl} обращается в ноль при $l \geq n$. Таким образом, выражение (2.22) оказывается конечной суммой слагаемых и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}_n) &= e^{-\frac{|\alpha|}{2n}x} \Phi\left(1 - n, 1, \frac{|\alpha|}{2n}x(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle)\right) = \\ &= 4\pi e^{-\frac{|\alpha|}{2n}x} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l \beta_{nl} \frac{1}{(2l + 1)!} \left(-\frac{|\alpha|}{n}x\right)^l x^l \Phi\left(-n + l + 1, 2l + 2, \frac{|\alpha|}{n}x\right) Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}) Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где Y_l^m – соответствующие сферические функции.

Наконец, введем функцию

$$\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) \equiv \tilde{\psi}_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}_n). \quad (2.25)$$

Согласно уравнению (2.24), мы предъявили функцию, парциальные компоненты которой с точностью до нормировки совпадают с кулоновскими собственными функциями дискретного

спектра при фиксированном главном квантовом числе n . Таким образом мы показали, из каких соображений строится функция $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$. Далее требуется лишь убедиться, что для нее выполнено соотношение

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\omega} \psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\omega}) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\omega}) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^l \psi_{n,l,m}(x) Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}) R_{n,l,m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'). \quad (2.26)$$

Его справедливость следует из следующих соображений: если в (2.11) мы определим радиальную часть собственных функций двухчастичного кулоновского оператора $\psi_{n,l,m}(x)$ стандартным образом [11]:

$$\psi_{n,l,m}(x) = N_{n,l,m} e^{-\frac{|\alpha|}{2n}x} x^l \Phi\left(-n+l+1, 2l+2, \frac{|\alpha|}{n}x\right),$$

где $N_{n,l,m}$ – нормировочная постоянная, зависящая только от квантовых чисел, то согласно (2.24)–(2.25) и (2.26), мы получим следующие выражения для ядер $R_{n,l,m}$:

$$R_{n,l,m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') = \frac{1}{N_{n,l,m}} \beta_{nl} \frac{1}{(2l+1)!} \left(-\frac{|\alpha|}{n}\right)^l \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\omega} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\omega}) Y_l^m(\hat{\omega}). \quad (2.27)$$

Таким образом, представление (2.10) оказывается разложением по ненормированным собственным функциям дискретного спектра парной подсистемы. При этом ядра $R_{n,l,m}$ "естественного" представления, возникающего при разделении переменных, могут быть получены из ядер R_n .

□

Следствие 2.1.2. *Определив, таким образом, "производящую" функцию $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\omega})$, мы заменяем в спектральном разложении тройную бесконечную сумму по квантовым числам на однократную сумму и интеграл по единичной сфере. Такое упрощение оказывается весьма существенным, поскольку позволяет заменить поиск набора из n^2 неизвестных коэффициентов $R_{n,l,m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}')$ при каждом фиксированном главном квантовом числе n поиском одной неизвестной функции $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\omega})$.*

Обозначение $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$ вызвано тем, что эта функция содержит информацию о наборе базисных функций дискретного спектра, отвечающих главному квантовому числу n . Отметим, что существует связь полиномов Лагерра и вырожденной гипергеометрической функции с целым отрицательным параметром, позволяющая от (2.24) перейти к полиному Лагерра $L_n(y)$:

$$\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x} L_{n-1}\left(\frac{|\alpha_1|}{n}x \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle}{2}. \quad (2.28)$$

2.2 Согласование представлений

Мы начнем с того, что выберем асимптотические области в конфигурационном пространстве, в которых одновременно справедливо представление для асимптотики собственных

функций абсолютно непрерывного спектра оператора Шрёдингера, записанное в терминах разделения переменных и работающее вблизи экрана с индексом "1", и ВВК-приближение. Введем область

$$\Omega_{\mu,\nu} = \{y^\mu < x < y^\nu, \frac{1}{2} < \mu < \nu < 1, y \rightarrow \infty\}, \quad (2.29)$$

которая возникает как пересечение областей Ω_1 (2.6) и Ω_1^+ (2.8). В этой области оба приближения Ψ^{sep} и $\Psi^{\text{ВВК}}$ для собственных функций абсолютно непрерывного спектра оператора Шрёдингера системы трех частиц оказываются одновременно справедливыми.

Отметим здесь, что в разложении (2.11) мы пренебрегаем формальным разложением по собственным функциям дискретного спектра двухчастичного оператора Шрёдингера с потенциалом $v^{\text{eff}}(\mathbf{y})$, вследствие специфики параболической области согласования $\Omega_{\mu,\nu}$, то есть неравноправности координат \mathbf{x} и \mathbf{y} в этой области (переменная \mathbf{y} может быть сделана неограниченно большой при сохранении условия $x \ll y$). Фактически мы пишем в каждой "параболической" области спектральное разложение лишь по тем асимптотическим каналам, которые в ней реализуются (дополнительным аргументом в пользу этого является результат работы, который согласуется с подобным предположением).

Теперь мы готовы перейти к процедуре восстановления ядер $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$. Мы будем интересоваться лишь большими значениями главного квантового числа $n \geq M \gg 1$, то есть окрестностью точки накопления дискретного кулоновского спектра оператора Шрёдингера, отвечающего подсистеме с индексом "1". Здесь M – некоторое большое целое число.

Для восстановления ядер $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$ мы воспользуемся процедурой согласования приближений $\Psi^{\text{ВВК}}$ (2.1) и Ψ^{sep} (2.10) для собственной функции абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора в области $\Omega_{\mu,\nu}$ (2.29), где оба приближения справедливы (для наглядности можно обратиться к рисунку (2.1), где в ободномеренном виде представлены рассматриваемые области, под $\Omega_{\text{ВВК}}$ здесь понимается Ω_1).

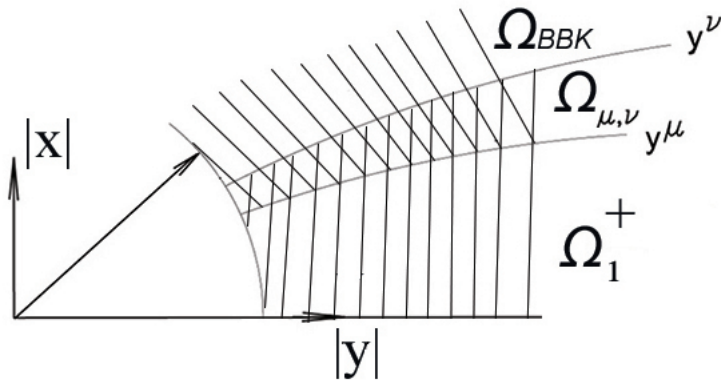


Рисунок 2.1: Иллюстрация области согласования

Нам понадобится предположение о "несингулярном поведении" и интегрируемости собственных функций абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора $\Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ в области Ω_1^+ .

Рассмотрим представление для $\Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ в виде спектрального разложения в асимптотической области Ω_1^+ (2.8):

$$\begin{aligned} \Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim & \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}') \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(k'^2 + p'^2 - E) R(\mathbf{q}, \mathbf{q}') + \\ & + \sum_{n'=1}^{\infty} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_{n'}^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}') \delta(p'^2 - \frac{\alpha_1^2}{4n'^2} - E) R_{n'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}'), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_1^+. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Домножим левую и правую часть равенства (2.30) на $\psi_n^{d*}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}'')$ (функция $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}'')$ вещественнозначная, поэтому сопряжение, вообще говоря, ни на что не влияет) и проинтегрируем по переменной \mathbf{x} в \mathbb{R}^3 . Воспользуемся ортогональностью собственных функций двухчастичного оператора $h = -\Delta_{\mathbf{x}} + \frac{\alpha_1}{x}$, отвечающих различным спектральным точкам.

Разобьем область изменения радиальной переменной x , $0 \leq x < \infty$ на три части:

$$D_I: 0 \leq x \leq y^\mu, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1, \quad y \gg 1,$$

$$D_{II}: y^\mu \leq x \leq y^\nu, \quad \mu < \nu < 1, \quad y \gg 1,$$

$$D_{III}: y^\nu \leq x < \infty, \quad y \gg 1.$$

Предложение 2.2.1. *Основной вклад в скалярное произведение $\langle \Psi_c, \psi_n^d \rangle|_{\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3}$ вносит область D_{II} .*

Доказательство. Отметим, что все функции $\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$ (2.28) экспоненциально затухают на бесконечности для любого фиксированного n . В то же время показатель экспоненты (иными словами, скорость затухания) зависит от главного квантового числа как $\frac{1}{n}$, $n \geq M \gg 1$, то есть для больших значений главного квантового числа затухание происходит лишь при асимптотически больших значениях x . Отсюда можно сделать вывод, что область D_{III} не дает вклада в интегрирование уравнения (2.30) с функциями $\psi_n^{d*}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}'')$. Определим отношение объемов областей D_{II} и D_I :

$$\frac{V_{D_{II}}}{V_{D_I}} = \frac{y^\nu - y^\mu}{y^\mu} = y^{\nu-\mu} \left(1 - O\left(\frac{1}{y^{\nu-\mu}}\right) \right) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \infty.$$

В совокупности с предположением о несингулярном характере функции $\Psi_c(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ во всей области интегрирования указанные выше рассуждения приводят к выводу о том, что основной и определяющий вклад в обсуждаемое скалярное произведение $\langle \Psi_c, \psi_n^d \rangle|_{\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3}$ вносит именно область D_{II} . □

Замечание 2.2.2.

$$\Omega_1^+|_{D_{II}} = \Omega_{\mu, \nu}.$$

В свою очередь, на области $\Omega_{\mu, \nu}$ функция Ψ_c хорошо описывается ВВК-приближением. Последнее заключение дает нам право переопределить скалярное произведение $\langle \Psi_c, \psi_n^d \rangle|_{\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3}$:

$$\langle \Psi_c, \psi_n^d \rangle|_{\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3} \sim \langle \tilde{\Psi}^{\text{ВВК}}, \psi_n^d \rangle|_{\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3}. \quad (2.31)$$

здесь обозначение $\tilde{\Psi}^{\text{BBK}}$ введено для функции Ψ^{BBK} , доопределенной регулярным образом в области ограниченных значений переменной \mathbf{x} .

Следствие 2.2.3. Уравнение (2.30) ведет к выражению

$$\langle \tilde{\Psi}^{\text{BBK}}, \psi_n^d \rangle_{\mathbb{R}^3}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') \sim \frac{1}{2\sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}'_n \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (2.32)$$

$$p'_n = \sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}, \quad n \geq M \gg 1.$$

Мы использовали здесь обозначение

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \equiv \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_n^{d*}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}''). \quad (2.33)$$

Полученное уравнение (2.32) представляет из себя интегральное уравнение для ядра R_n . Для решения этого уравнения нам нужно вначале определить объект Σ_n , который мы будем называть в дальнейшем нормировочным интегралом.

2.3 Нормировочный интеграл

Мы хотим найти левую и правую части уравнения (2.32). Начнем с рассмотрения правой части.

Оказывается, что верна следующая теорема:

Теорема 2.3.1.

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}') = n^3 (B_2 \ln n + B_1 + o(1)) \frac{2^5 \pi}{|\alpha_1|^3} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}''). \quad (2.34)$$

То есть действие нормировочного интеграла (2.33) на плотность $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$ при больших n эквивалентно в старшем порядке действию угловой дельта-функции с некоторым зависящим от n множителем.

В соответствии с выражениями (2.33) и (2.28):

$$\begin{aligned} \Sigma_m(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \psi_m^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \psi_m^{d*}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}'') = \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_0^\infty dx x^2 e^{-\frac{|\alpha_1|}{m}x} L_{m-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{m} x \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) L_{m-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{m} x \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad m \gg 1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь использованы обозначения $\cos \tilde{\theta} = \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}}'' \rangle$, $\cos \theta = \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{k}}' \rangle$.

После замены переменной $t = \frac{|\alpha_1|}{m}x$, выражение (2.35) сводится к следующему виду:

$$\Sigma_m(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') = \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_0^\infty dt t^2 e^{-t} L_{m-1} \left(t \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) L_{m-1} \left(t \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad m \gg 1. \quad (2.36)$$

Для доказательства теоремы 2.3.1 мы воспользуемся асимптотикой полиномов Лагерра по значку m , полученной Ф. Трикоми [36] и, в соответствии с его результатами, разделим область интегрирования по радиальной переменной на четыре части, отвечающие разным режимам асимптотического поведения, после чего оценим вклады каждой из областей. Кратко приведем основные из использованных нами результатов.

Общие сведения об асимптотике полинома Лагерра по значку

В этом пункте кратко изложены результаты работы Ф. Трикоми [36]. Они также изложены, например, в [2].

В зависимости от значений аргумента x выделяется четыре режима поведения такой асимптотики: окрестность нуля, область осцилляций, окрестность точки перехода $v = 4n + 2\alpha + 2$ и область монотонности.

В окрестности нуля верно следующее:

$$\begin{aligned} n!e^{-\frac{x}{2}}L_n^\alpha(x) &= \Gamma(\alpha + n + 1) \left(\frac{vx}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \left(\frac{x}{v}\right)^{\frac{m}{2}} J_{\alpha+m}(\sqrt{vx}), \\ A_0^* &= 1, \quad A_1^* = 0, \quad A_2^* = \frac{\alpha + 1}{2}, \\ (m + 2)A_{m+2}^* &= (m + \alpha + 1)A_m^* - \frac{v}{2}A_{m-1}^*, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{2.37}$$

При $x = O(n^\lambda)$, $\lambda < \frac{1}{3}$ разложение (2.37) носит асимптотический характер и описывает поведение полинома Лагерра в окрестности нуля.

В области колебаний $0 < x < v$ вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= v \cos^2 \theta_*, \quad 0 < \theta_* < \frac{\pi}{2}, \\ 4\Theta &= v(2\theta_* - \sin 2\theta_*) + \pi. \end{aligned} \tag{2.38}$$

При фиксированном θ_* Трикоми доказал, что справедливо разложение

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x}{2}}L_n^\alpha(x) &= 2(-1)^n (2 \cos \theta_*)^{-\alpha} (\pi v \sin 2\theta_*)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\sum_{m=0}^{K-1} A_m(\theta_*) \left(\frac{v}{4} \sin 2\theta_*\right)^{-m} \sin \left(\Theta + \frac{3m\pi}{2}\right) + O(n^{-K}) \right], \end{aligned} \tag{2.39}$$

где

$$A_0(\theta_*) = 1, \quad A_1(\theta_*) = \frac{1}{12} \left[\frac{5}{4 \sin^2 \theta_*} - (1 - 3\alpha^2) \sin^2 \theta_* - 1 \right].$$

Поведение вблизи точки перехода v можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) &= \gamma_1 \left[A(t) + \left(\frac{4}{3v^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{t^2}{5} A'(t) + \frac{3+5\alpha}{10} \left(t - \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \right) A(t) \right] + O(n^{-\frac{5}{3}}) \right], \\
t &= \left(\frac{4v}{3} \right)^{-\frac{1}{3}} (v-x), \quad \pi\gamma_1 = (-1)^n 2^{-\alpha} \left[6^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} + \frac{3+5\alpha}{5} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} v^{-1} + O(n^{-\frac{5}{3}}) \right], \\
A(t) &= \left(\frac{\pi}{3} \right) \sqrt{\frac{t}{3}} \left[J_{-\frac{1}{3}} \left(2\sqrt{\left(\frac{t}{3} \right)^3} \right) + J_{-\frac{1}{3}} \left(2\sqrt{\left(\frac{t}{3} \right)^3} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Следуя обозначениям Трикоми, в области монотонности $v < x < \infty$ введем следующие обозначения:

$$x = v \operatorname{ch}^2 \theta_*, \quad 0 < \theta_*, \tag{2.41}$$

$$4\Theta = v(\operatorname{sh} 2\theta_* - 2\theta_*).$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) &= (-1)^n e^{-\Theta} (2 \operatorname{ch} \theta_*)^{-\alpha} (\pi v \operatorname{sh} 2\theta_*)^{-\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left[\sum_{m=0}^{K-1} (-1)^m A_m^{[\alpha]}(\theta_*) \left(\frac{v}{4} \operatorname{sh} 2\theta_* \right)^{-m} + O(n^{-K}) \right],
\end{aligned} \tag{2.42}$$

где

$$A_0^{[\alpha]}(\theta_*) = 1, \quad A_1^{[\alpha]}(\theta_*) = \frac{1}{12} \left[\frac{5}{4 \operatorname{sh}^2 \theta_*} - (1 - 3\alpha^2) \operatorname{sh}^2 \theta_* + 1 \right].$$

2.3.1 Основной вклад

Вернемся к нормировочному интегралу. Сначала вычислим вклад области осцилляций, который, как окажется далее, является определяющим.

Лемма 2.3.2. *Вклад области осцилляций в нормировочный интеграл порождает следующий вид левой части уравнения (2.32):*

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}') = n^3 (B_2 \ln n + B_1 + o(1)) \frac{2^5 \pi}{|\alpha_1|^3} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}''), \tag{2.43}$$

где в определении (2.35) для $\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'')$ в качестве области интегрирования по радиальной переменной взята область осцилляций.

Доказательство. В терминах обозначений (2.38)

$$\sin 2\theta_* = 2 \sin \theta_* \cos \theta_* = 2 \left(\frac{x}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 - \frac{x}{v}}.$$

При этом старший член асимптотического ряда (2.39) принимает вид

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) = 2(-1)^n (2\pi v)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{v} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x}{v} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \tag{2.44}$$

$$\times \left(\sin \left(\frac{v\theta_*}{2} - \frac{v}{4} \sin 2\theta_* + \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{v}\right) \right).$$

Возвращаясь к нормировочному интегралу (2.36), мы положим $n = m - 1 \gg 1$ и рассмотрим асимптотику выражения вида:

$$\begin{aligned} & e^{-t} L_n \left(t \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) L_n \left(t \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \sim \\ & \sim \frac{1}{\pi \sqrt{vt}} \frac{e^{-t(1 - \frac{1}{2}(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}))}}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \left(1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ & \times \left\{ \cos \left(\frac{v}{2}(\theta_* - \tilde{\theta}_*) - \frac{v}{4}(\sin 2\theta_* - \sin 2\tilde{\theta}_*) \right) - \cos \left(\frac{v}{2}(\theta_* + \tilde{\theta}_*) - \frac{v}{4}(\sin 2\theta_* + \sin 2\tilde{\theta}_*) + \frac{\pi}{2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Мы пользуемся здесь обозначениями

$$\theta_* = \arccos \sqrt{\frac{t}{v}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \tilde{\theta}_* = \arccos \sqrt{\frac{t}{v}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}.$$

Таким образом, нормировочный интеграл (2.36) принимает вид

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') & \sim \frac{2^6 n^3}{\pi \sqrt{v} |\alpha_1|^3} \int_{\Delta}^{v-\Delta} dt t^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} e^{-t(1 - \frac{1}{2}(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}))} \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \left(1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ & \times \left\{ \cos \left(\frac{v}{4} \left(2(\theta_* - \tilde{\theta}_*) - (\sin 2\theta_* - \sin 2\tilde{\theta}_*) \right) \right) + \sin \left(\frac{v}{4} \left(2(\theta_* + \tilde{\theta}_*) - (\sin 2\theta_* + \sin 2\tilde{\theta}_*) \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь параметр Δ в пределах интегрирования связан с определением пределов области колебаний: $\Delta = O(v^\varrho)$, $0 < \varrho < \frac{1}{3}$. В декартовой системе координат (x, y, z) единичный вектор $\hat{\mathbf{k}}''$ направлен вдоль оси z , единичный вектор $\hat{\mathbf{x}}$ характеризуется парой углов (θ, φ) в соответствующей сферической системе координат. Единичный вектор $\hat{\mathbf{k}}'$ характеризуется парой углов $(\theta_{k'}, \varphi_{k'})$. При этом

$$\cos \tilde{\theta} = \sin \theta \sin \theta_{k'} \cos(\varphi - \varphi_{k'}) + \cos \theta \cos \theta_{k'}, \quad (2.46)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{k'} \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_{k'} \leq 2\pi,$$

Рассмотрим интеграл по угловым переменным (интеграл по $d\hat{\mathbf{x}}$) как интеграл, зависящий от внешней переменной t как от параметра. Рассмотрим аргумент синуса, являющийся множителем при большом параметре $\frac{v}{4}$ или, иначе говоря, фазовую функцию:

$$\begin{aligned} S(\theta, \varphi) & = 2 \arccos \left(\sqrt{\frac{t}{v}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + 2 \arccos \left(\sqrt{\frac{t}{v}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) - \\ & - 2 \sqrt{\frac{t}{v}} \sqrt{1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - 2 \sqrt{\frac{t}{v}} \sqrt{1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Отметим, что при малых аргументах ($0 < \frac{t}{v} < 1$) функция \arccos ведет себя следующим образом:

$$\arccos \left(\sqrt{\frac{t}{v}} f \right) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{t}{v}} f + O \left(\left(\frac{t}{v} \right)^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}} \right).$$

Таким образом, зависящая от углов функция в аргументе синуса и косинуса умножается на большой параметр \sqrt{vt} , где

$$\Delta < t < v - \Delta, \quad \Delta = O(v^e). \quad (2.48)$$

В то же время зависящая от углов функция в убывающей экспоненте умножается на параметр t . Очевидно, для того, чтобы большие параметры в показателях осциллирующей и убывающей экспонент как коэффициенты при выражениях, зависящих от угловых переменных, оказались равными (и в интеграле по угловым переменным возник бы единый большой параметр), мы должны потребовать

$$t = O(v), \quad v \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

Это условие, однако, как следует из структуры угловой функции в показателе убывающей экспоненты в выражении (2.45) – неотрицательная и обращающаяся в ноль только в точке на плоскости (θ, φ) , определяемой условием

$$\theta = \tilde{\theta} = \pi, \quad (2.50)$$

может реализовываться только внутри сколь угодно малой окрестности точки, определяемой условием (2.50).

В свою очередь, условие (2.50) в точке может реализоваться только при выполнении дополнительного условия уже на внешние параметры

$$\hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{k}}''.$$

В противном случае сходимость внешнего интеграла по переменной t в выражении (2.45) наступит значительно раньше, чем начнет выполняться условие (2.49) вследствие экспоненциального убывания подынтегрального выражения.

Отметим также, что в исходном представлении нормировочного интеграла (2.36) точка (2.50) в угловом подпространстве заведомо не является сингулярной для любого значения индекса m . Таким образом, выделим сколь угодно малую окрестность точки, определяемой условием (2.50), и будем понимать выражение (2.45) как интеграл по внешности этой окрестности там, где это потребуется.

Мы пришли к выводу, что большой параметр в интеграле по угловым переменным в выражении (2.45) содержится только в быстро осциллирующих функциях. Исходя из этих соображений, вычислим нормировочный интеграл. Проведем вычисление в 2 этапа: сначала вычислим интеграл по угловым переменным, а затем будем исследовать радиальную переменную.

Запишем нормировочный интеграл в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &\sim \frac{2^6 n^3}{\pi \sqrt{v} |\alpha_1|^3} \int_{\Delta}^{v-\Delta} dt t^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} e^{-t(1-\frac{1}{2}(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}))} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \left(1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{t}{v} \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ &\times \left\{ \cos \left(\frac{v}{4} (2(\theta_* - \tilde{\theta}_*) - (\sin 2\theta_* - \sin 2\tilde{\theta}_*)) \right) + \sin \left(\frac{v}{4} (2(\theta_* + \tilde{\theta}_*) - (\sin 2\theta_* + \sin 2\tilde{\theta}_*)) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Здесь параметр Δ в пределах интегрирования связан с определением пределов области колебаний: $\Delta = O(v^\varrho)$, $0 < \varrho < \frac{1}{3}$. В декартовой системе координат (x, y, z) единичный вектор $\hat{\mathbf{k}}''$ направлен вдоль оси z , единичный вектор $\hat{\mathbf{x}}$ характеризуется парой углов (θ, φ) в соответствующей сферической системе координат. Единичный вектор $\hat{\mathbf{k}}'$ характеризуется парой углов $(\theta_{k'}, \varphi_{k'})$. При этом

$$\cos \tilde{\theta} = \sin \theta \sin \theta_{k'} \cos(\varphi - \varphi_{k'}) + \cos \theta \cos \theta_{k'}, \quad (2.52)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{k'} \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi_{k'} \leq 2\pi, \quad (2.53)$$

После замены переменной $s = \frac{t}{v}$ выражение (2.45) принимает вид:

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &\sim \frac{2^4 n^5}{\pi |\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_{\delta}^{1-\delta} ds s^{\frac{3}{2}} e^{-4ns(1-\frac{1}{2}(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}))} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \left(1 - s \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - s \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ &\times \left\{ \cos \left(n(2(\theta_* - \tilde{\theta}_*) - (\sin 2\theta_* - \sin 2\tilde{\theta}_*)) \right) + \sin \left(n(2(\theta_* + \tilde{\theta}_*) - (\sin 2\theta_* + \sin 2\tilde{\theta}_*)) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Здесь

$$\theta_* = \arccos \left(\sqrt{s} \sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \tilde{\theta}_* = \arccos \left(\sqrt{s} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \right).$$

В дальнейшем мы будем пренебрегать малым параметром δ в пределах интегрирования по переменной s

$$\delta = O \left(\frac{1}{n^{1-\varrho}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad 0 < \varrho < \frac{1}{3},$$

интересуясь поведением нормировочного интеграла лишь в старшем порядке по n .

В общем виде интересующий нас интеграл может быть представлен как

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} f(\hat{\mathbf{x}}) e^{i\lambda S(\hat{\mathbf{x}})}, \quad \lambda \gg 1. \quad (2.55)$$

При наличии двумерной стационарной точки $\hat{\mathbf{x}}^0 = (\theta_0, \varphi_0)$ старший вклад в интеграл вида (2.55), согласно [17], дается выражением

$$F(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda} \exp \left\{ i\lambda S(\hat{\mathbf{x}}^0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S''_{xx}(\hat{\mathbf{x}}^0) \right\} |\det S''_{xx}(\hat{\mathbf{x}}^0)|^{-\frac{1}{2}} (f(\hat{\mathbf{x}}^0) + O(\lambda^{-1})), \quad (2.56)$$

где $S''_{xx}(\hat{\mathbf{x}}^0)$ – матрица вторых производных в точке стационарной фазы, а $\operatorname{sgn} S''_{xx}(\hat{\mathbf{x}}^0)$ – разность количества положительных и отрицательных собственных чисел этой матрицы в той же точке.

Предложение 2.3.3. *Интегрирование по угловым переменным приводит к следующему выражению для вклада области осцилляций полинома Лагерра в нормировочный интеграл:*

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \sim \Im \left\{ \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int_0^1 ds s e^{-4ns \sin^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{e^{inS(\theta_0, \varphi_0) + i\frac{\pi}{2}}}{\cos \frac{\theta_{k'}}{4} \sqrt{\cos \frac{\theta_{k'}}{2}} \sqrt{1 - s \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \sqrt{1 - s \cos \frac{\theta_{k'}}{2}}} \right\}, \quad (2.57)$$

где $\theta_0 = \pi - \frac{\theta_{k'}}{2}$, $\varphi_0 = \varphi_{k'} + \pi$.

Доказательство. Как уже было сказано, большой параметр, определяющий поведение интеграла по угловым переменным в выражении (2.54), эффективно содержится только в осциллирующих функциях. Мы проведем полные вычисления лишь для слагаемого в подынтегральном выражении в (2.54), содержащего синус. Забегая вперед, скажем, что проводя аналогичные вычисления для слагаемого, содержащего косинус, легко увидеть, что это слагаемое либо не порождает точки стационарной фазы, либо порождает заведомо меньший вклад в выражение (2.54).

Итак, рассмотрим аргумент синуса в выражении (2.54), являющийся множителем при большом параметре или, иначе говоря, фазовую функцию:

$$S(\theta, \varphi) = 2 \arccos \left(\sqrt{s} \sin \frac{\theta}{2} \right) + 2 \arccos \left(\sqrt{s} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) - \quad (2.58)$$

$$- 2\sqrt{s} \sqrt{1 - s \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - 2\sqrt{s} \sqrt{1 - s \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2},$$

при условиях связи (2.52).

Существование точки стационарной фазы (θ_0, φ_0) связано с решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial S(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} |_{(\theta_0, \varphi_0)} = 0 \\ \frac{\partial S(\theta, \varphi)}{\partial \theta} |_{(\theta_0, \varphi_0)} = 0 \end{cases}. \quad (2.59)$$

Первое из уравнений (2.59) принимает вид

$$2\sqrt{s} \sqrt{1 - s \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}} \frac{\partial \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}{\partial \varphi} = 0, \quad (2.60)$$

где $s \in [0, 1]$ – внешний параметр. Решение уравнения $\frac{\partial \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}{\partial \varphi} = 0$ в соответствии с условиями связи (2.52) дает

$$\sin(\varphi - \varphi_{k'}) = 0,$$

или, окончательно, два различных решения

$$\varphi = \varphi_{k'} \text{ или } \varphi = \varphi_{k'} + \pi. \quad (2.61)$$

Таким образом, согласно (2.52), получим

$$\cos \tilde{\theta} = \cos(\theta - \theta_{k'}) \text{ или } \cos \tilde{\theta} = \cos(\theta + \theta_{k'}). \quad (2.62)$$

При этом знак минус отвечает первому из условий (2.61), а знак плюс отвечает второму условию.

Второе из условий (2.59) приводится к виду

$$\cos \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - s \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \cos \frac{\tilde{\theta}}{2} \sqrt{1 - s \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}} = 0. \quad (2.63)$$

Решение этого уравнения устроено следующим образом:

$$\frac{\tilde{\theta}}{2} = \pi - \frac{\theta}{2}. \quad (2.64)$$

Это условие в совокупности с первым из условий (2.62) приводится к виду

$$\theta = \pi + \frac{\theta_{k'}}{2}. \quad (2.65)$$

Это условие противоречит условиям (2.53) на области определения угловых переменных.

Условие (2.64) в совокупности со вторым из условий (2.62) приводится к виду

$$\theta = \pi - \frac{\theta_{k'}}{2}. \quad (2.66)$$

Это условие удовлетворяет условиям (2.53) и определяет двумерную стационарную точку (θ_0, φ_0) :

$$\theta_0 = \pi - \frac{\theta_{k'}}{2}, \quad \varphi_0 = \varphi_{k'} + \pi. \quad (2.67)$$

Согласно, например [17], определим матрицу вторых производных фазовой функции. Матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} &= \sqrt{s} \sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2} \frac{\sqrt{1 - s \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}}}{\cos \frac{\theta_{k'}}{4}}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \theta} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} &= 0, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} &= \frac{2\sqrt{s} \cos \frac{\theta_{k'}}{4}}{\sqrt{1 - s \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}}} \left(1 - s \cos \frac{\theta_{k'}}{2} \right). \end{aligned}$$

Определитель матрицы вторых производных может быть вычислен как

$$\det(S''_{xx})|_{(\theta_0, \varphi_0)} = 2s \sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2} \left(1 - s \cos \frac{\theta_{k'}}{2} \right).$$

Наконец, разность количества положительных и отрицательных собственных чисел матрицы вторых производных в точке стационарной фазы

$$\text{sgn}(S''_{xx}(\theta_0, \varphi_0)) = \nu_+ - \nu_- = 2.$$

В соответствии с выражением (2.56), уравнение (2.54) принимает вид

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \sim \Im \left\{ \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int_0^1 ds s e^{-4ns \sin^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{e^{inS(\theta_0, \varphi_0) + i\frac{\pi}{2}}}{\cos \frac{\theta_{k'}}{4} \sqrt{\cos \frac{\theta_{k'}}{2} \sqrt{1 - s \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4} \sqrt{1 - s \cos \frac{\theta_{k'}}{2}}}} \right\}. \quad (2.68)$$

□

Возвращаясь к уравнению (2.32), мы можем теперь в силу возникших упрощений перейти к следующему шагу и вычислить интеграл по единичной сфере $d\hat{\mathbf{k}}'$:

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.69)$$

Для этого перейдем к переменной α , $\cos \alpha = \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'' \rangle$:

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{d\alpha \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{4} \sqrt{\cos \frac{\alpha}{2}}} \int_0^1 ds s \frac{\cos(nS(\theta_0, \varphi_0)) e^{-4ns \sin^2 \frac{\alpha}{4}}}{\sqrt{1 - s \cos^2 \frac{\alpha}{4} \sqrt{1 - s \cos \frac{\alpha}{2}}} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (2.70)$$

где $\hat{\mathbf{k}}' = (\alpha, \varphi)$, и $S(\theta_0, \varphi_0) = 4 \arccos(\sqrt{s} \cos \frac{\alpha}{4}) - 4\sqrt{s} \sqrt{1 - s \cos^2 \frac{\alpha}{4}} \cos \frac{\alpha}{4}$.

Следует понимать выражение (2.70) как двойной интеграл, выделяя явно окрестность точки $(0, 1)$ на плоскости (α, s) . Именно окрестность этой точки, как будет показано ниже, и вносит основной вклад в интеграл.

Основная идея следующего шага заключается в том, чтобы ввести наиболее удобным образом новые переменные на плоскости (α, s) так, чтобы описать вклад в интеграл окрестности этой точки. С помощью замены

$$s = 1 - \frac{\zeta^2}{16}, \quad 0 \leq \zeta \leq 4 \quad (2.71)$$

мы переведем в начало координат $(0, 0)$ на плоскости (α, ζ) точку $(0, 1)$ на плоскости (α, s) и введем полярную систему координат в единичной окрестности точки $(0, 0)$

$$\alpha = \rho \sin \omega, \quad \zeta = \rho \cos \omega, \quad (2.72)$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2}.$$

Нетрудно показать, что интеграл по внешности указанной окрестности точки $(0, 0)$ будет вносить в выражение (2.70) вклад следующего порядка малости. Отметим также, что при $\rho \ll 1$ выражение (2.70) имеет вид

$$T_n^\delta(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\delta \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \sin \omega \cos \omega \left(1 - \frac{\rho^2}{16} \cos^2 \omega\right) \times \quad (2.73)$$

$$\times \frac{\cos(n\rho^3 A(\omega))}{\sqrt{1 + \sin^2 \omega}} \exp \left\{ -n\rho^2 \sin^2 \omega \left(1 - \frac{\rho^2}{16} \cos^2 \omega\right) \right\} \tilde{R}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \rho \sin \omega, \varphi),$$

где $A(\omega) = \frac{1}{32}(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \omega \cos^2 \omega)$. Два последних аргумента функции \tilde{R}_n соответствуют угловым переменным вектора $\hat{\mathbf{k}}'$ в сферической системе координат, в которой ноль первой угловой переменной отвечает коллинеарности векторов $\hat{\mathbf{k}}'$ и $\hat{\mathbf{k}}''$. Значок \sim в обозначении \tilde{R}_n связан с переходом к угловым переменным, характеризующим третью векторную переменную функции R_n .

Мы не будем проводить указанную в (2.72) замену переменных явно, но проведем указанные выкладки в общем виде, переформулировав выражение (2.70) в следующей форме:

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 du \int_0^1 dv e^{-4n\beta uv f(u,v)} \cos(4nu^{\frac{3}{2}} g(u,v)) F(u,v). \quad (2.74)$$

Здесь

$$u = \rho^2, \quad v = \sin^2 \omega, \quad \beta = \frac{1}{16}. \quad (2.75)$$

Использованы также обозначения

$$f(u,v) = (1 + \phi(u,v))(1 - \beta u(1 - v)) \geq 0, \quad \phi(u,v) \underset{u,v \rightarrow 0}{=} O(uv), \quad (2.76)$$

$$g(u,v) = \frac{1}{96} + \sigma(u,v), \quad \sigma(u,v) \underset{u \rightarrow 0}{=} O(u^{\frac{1}{2}}). \quad (2.77)$$

Функции $F(u,v)$, $f(u,v)$ и $g(u,v)$ возникают в результате двух последовательных замен переменных (2.71)–(2.72) и (2.75) в выражении (2.70). Функции $F(u,v)$, $\phi(u,v)$ и $\sigma(u,v)$ – ограниченные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Мы полагаем здесь, что функция $F(u,v)$ содержит также ядро \tilde{R}_n ,

$$F(u,v) = \hat{F}(u,v) \tilde{R}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \sqrt{uv}, \varphi), \quad (2.78)$$

которое в свою очередь обладает ограниченными производными по всем переменным интегрирования. При этом выражение $\hat{F}(u,v)$ возникает собственно в связи с заменой переменных в ядре в интеграле (2.70). Как уже было сказано выше, два последних аргумента функции $\tilde{R}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \sqrt{uv}, \varphi)$ соответствуют угловым переменным вектора $\hat{\mathbf{k}}'$ в сферической системе координат, в которой ноль первой угловой переменной отвечает коллинеарности векторов $\hat{\mathbf{k}}'$ и $\hat{\mathbf{k}}''$.

Разложив в (2.74) косинус в виде суммы экспонент, рассмотрим следующий интеграл:

$$\Omega_n = \int_0^1 du \int_0^1 dv e^{-4n\beta uvf(u,v)} e^{4inu\frac{3}{2}g(u,v)} F(u, v), \quad (2.79)$$

как функцию большого параметра $n \gg 1$.

В качестве первого шага разделим интеграл (2.79) на две части

$$\Omega_n = \Omega_n^I + \Omega_n^{II}, \quad (2.80)$$

где

$$\Omega_n^I = \int_0^1 du \int_0^1 dv e^{-4n\beta uvf(u,v)} e^{4inu\frac{3}{2}g(u,v)} (F(u, v) - F(0, v)), \quad (2.81)$$

$$\Omega_n^{II} = \int_0^1 du \int_0^1 dv e^{-4n\beta uvf(u,v)} e^{4inu\frac{3}{2}g(u,v)} F(0, v). \quad (2.82)$$

Подынтегральное выражение в (2.81) обращается в ноль в точке $u = 0$. Будем интегрировать это выражение по частям по переменной v :

$$\begin{aligned} \Omega_n^I &= \frac{1}{4n} \int_0^1 du \int_0^1 dv \left(e^{-4n\beta uvf(u,v) + 4inu\frac{3}{2}g(u,v)} \right)'_v \frac{F(u, v) - F(0, v)}{-\beta u(vf)'_v + iu\frac{3}{2}g'_v} = \quad (2.83) \\ &= \frac{1}{4n} \int_0^1 du e^{-4n\beta uf(u,1) + 4inu\frac{3}{2}g(u,1)} \frac{F(u, 1) - F(0, 1)}{[-\beta u(vf)'_v + iu\frac{3}{2}g'_v]_{v=1}} - \\ &\quad - \frac{1}{4n} \int_0^1 du e^{4inu\frac{3}{2}g(u,0)} \frac{F(u, 0) - F(0, 0)}{[-\beta u(vf)'_v + iu\frac{3}{2}g'_v]_{v=0}} + \\ &\quad + \frac{1}{4n} \int_0^1 du \int_0^1 dv e^{-4n\beta uvf(u,v) + 4inu\frac{3}{2}g(u,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F(u, v) - F(0, v)}{\beta u(vf)'_v - iu\frac{3}{2}g'_v} \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что выражение в четвертой строке уравнения (2.83) имеет порядок $O(n^{-2})$, поскольку допускает повторную процедуру интегрирования по частям. Интегралы во второй и третьей строках имеют порядок заведомо $o(n^{-1})$, что определяется методом перевала или методом стационарной фазы.

Будем исследовать поведение интеграла Ω_n^{II} (2.82). Введем обозначение

$$G(u, v) \equiv \beta v f(u, v) - i\sqrt{u}g(u, v). \quad (2.84)$$

и выделим малую окрестность нуля по переменной u , проводя замену переменной $t = nu$

$$\Omega_n^{II} = \frac{1}{n} \int_0^1 dt \int_0^1 dv e^{-4tG(0,v)} F(0, v) + \int_{\frac{1}{n}}^1 du \int_0^1 dv e^{-4nuG(u,v)} F(0, v).$$

Интеграл в первом слагаемом не зависит от большого параметра. Интеграл во втором слагаемом будем интегрировать по частям по переменной v .

Таким образом

$$\Omega_n^{\text{II}} = \frac{1}{n} \varpi_1 + \int_{\frac{1}{n}}^1 du \int_0^1 dv \left(e^{-4nuG(u,v)} \right)'_v \frac{F(0,v)}{-4nuG'_v(u,v)}.$$

Здесь

$$\varpi_1 \equiv \int_0^1 dt \int_0^1 dv e^{-4tG(0,v)} F(0,v). \quad (2.85)$$

Интегрирование по частям приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \Omega_n^{\text{II}} = & \frac{1}{n} \alpha_1 - \frac{1}{4n} F(0,1) \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-4nuG(u,1)}}{G'_v(u,1)} + \frac{1}{4n} F(0,0) \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-4nuG(u,0)}}{G'_v(u,0)} + \\ & + \frac{1}{4n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \int_0^1 dv e^{-4nuG(u,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(u,v)} \right). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Для каждого из полученных в уравнении (2.86) интегралов введем свое обозначение:

$$\Omega_n^{\text{II}} = \frac{1}{n} \varpi_1 + \Omega_n^{\text{III}} + \Omega_n^{\text{IV}} + \Omega_n^{\text{V}}, \quad (2.87)$$

где постоянная ϖ_1 описана в выражении (2.85),

$$\Omega_n^{\text{III}} = -\frac{1}{4n} F(0,1) \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-4nuG(u,1)}}{G'_v(u,1)}, \quad (2.88)$$

$$\Omega_n^{\text{IV}} = \frac{1}{4n} F(0,0) \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-4nuG(u,0)}}{G'_v(u,0)}, \quad (2.89)$$

$$\Omega_n^{\text{V}} = \frac{1}{4n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \int_0^1 dv e^{-4nuG(u,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(u,v)} \right). \quad (2.90)$$

Предложение 2.3.4. В старшем порядке поведение выражения (2.88) определяется следующим образом:

$$\Omega_n^{\text{III}} = -\frac{1}{n} \varpi_2 + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где ϖ_2 – некоторая известная постоянная.

Доказательство. Рассмотрим выражение:

$$\Omega_n^{\text{III}} = -\frac{1}{4n} F(0,1) \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-4nuG(u,1)}}{G'_v(u,1)}. \quad (2.91)$$

Будем интегрировать по частям по переменной u , избавляясь от особенности в нуле:

$$\begin{aligned}\Omega_n^{\text{III}} &= -\frac{1}{4n}F(0,1) \int_{\frac{1}{n}}^1 du (\ln u)' \frac{e^{-4nuG(u,1)}}{G'_v(u,1)} = \\ &= -\frac{1}{4n}F(0,1) \left[\ln n \frac{e^{-4G(0,1)}}{G'_v(0,1)} - \int_{\frac{1}{n}}^1 du \ln u \left(\frac{e^{-4nuG(u,1)}}{G'_v(u,1)} \right)'_u \right] = \\ &= -\frac{\ln n}{4n}F(0,1) \frac{e^{-4G(0,1)}}{G'_v(0,1)} - F(0,1) \int_{\frac{1}{n}}^1 du \ln u \frac{G(u,1) + uG'_u(u,1)}{G'_v(u,1)} e^{-4nuG(u,1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $t = un$. Это ведет к следующему результату:

$$\Omega_n^{\text{III}} = -\frac{\ln n}{4n}F(0,1) \frac{e^{-4G(0,1)}}{G'_v(0,1)} - \frac{1}{n}F(0,1) \frac{G(0,1)}{G'_v(0,1)} \int_1^\infty dt (\ln t - \ln n) e^{-4tG(0,1)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Мы воспользовались здесь положительностью $G(0,1) > 0$ (2.76) и (2.77), (2.84) и, тем самым, экспоненциальным убыванием подынтегрального выражения. Это, в свою очередь, дало возможность заменить верхний предел на бесконечность. Второе слагаемое в подынтегральном выражении считается явно и сокращает старший член порядка $O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$:

$$\Omega_n^{\text{III}} = -\frac{1}{n}F(0,1) \frac{G(0,1)}{G'_v(0,1)} \int_1^\infty dt \ln t e^{-4tG(0,1)} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.92)$$

Окончательно

$$\Omega_n^{\text{III}} = -\frac{1}{n}\varpi_2 + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.93)$$

где

$$\varpi_2 \equiv F(0,1) \frac{G(0,1)}{G'_v(0,1)} \int_1^\infty dt \ln t e^{-4tG(0,1)}. \quad (2.94)$$

□

Будем исследовать выражение Ω_n^{IV} , определенное в уравнениях (2.86)–(2.87):

$$\Omega_n^{\text{IV}} = \frac{1}{4n}F(0,0) \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \frac{e^{-4nuG(u,0)}}{G'_v(u,0)}. \quad (2.95)$$

Предложение 2.3.5. В старшем порядке поведение выражения (2.89) определяется следующим образом:

$$\Omega_n^{\text{IV}} = \frac{1}{n}\varpi_3 + \frac{\ln n}{n}\Upsilon + \frac{1}{n}\varpi_4 + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где ϖ_3, ϖ_4 и Υ – некоторые известные постоянные.

Доказательство. Отметим, что выражение $G(u, 0)$, согласно (2.76)–(2.77), (2.84), является чисто мнимым. Тем самым, подынтегральное выражение в Ω_n^{IV} , в отличие от интеграла в Ω_n^{III} , содержит неубывающую, а лишь осциллирующую экспоненту. При этом старший порядок поведения G как функции от переменной u также меняется, что, как мы покажем, оказывается существенным для появления логарифмической зависимости от большого параметра n .

Итак, согласно (2.84) и (2.77):

$$G(u, 0) = -i\sqrt{u}g(u, 0), \quad g(u, 0) = \frac{1}{96} + O(u^{\frac{1}{2}}).$$

Введем переменную $t = u^{\frac{3}{2}}$, в ее терминах

$$\Omega_n^{\text{IV}} = \frac{1}{6n} F(0, 0) \int_{n^{-\frac{3}{2}}}^1 \frac{dt}{t} \frac{e^{4int\tilde{g}(t,0)}}{\tilde{G}'_v(t, 0)}. \quad (2.96)$$

Замена переменных $\rho = nt$ ведет к выражению

$$\Omega_n^{\text{IV}} = \frac{1}{6n} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} e^{4i\rho\tilde{g}(0,0)} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Полученный интеграл разобьем на два слагаемых

$$\frac{1}{6n} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} e^{4i\rho\tilde{g}(0,0)} = \frac{1}{n} \varpi_3 + \frac{1}{6n} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^1 \frac{d\rho}{\rho} e^{4i\rho\tilde{g}(0,0)}. \quad (2.97)$$

Здесь использовано обозначение

$$\varpi_3 \equiv \frac{1}{6} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} \int_1^{\infty} \frac{d\rho}{\rho} e^{4i\rho\tilde{g}(0,0)}. \quad (2.98)$$

Еще раз интегрируя по частям выражение в правой части уравнения (2.97), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{6n} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} \int_{n^{-\frac{1}{2}}}^1 \frac{d\rho}{\rho} e^{4i\rho\tilde{g}(0,0)} &= \frac{\ln n}{12n} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} - i \frac{2}{3n} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} \int_0^1 d\rho \ln \rho e^{4i\rho\tilde{g}(0,0)} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{\ln n}{n} \Upsilon + \frac{1}{n} \varpi_4 + o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \quad (2.99)$$

где

$$\Upsilon \equiv \frac{1}{12} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)}, \quad \varpi_4 \equiv -i \frac{2}{3} \frac{F(0, 0)}{\tilde{G}'_v(0, 0)} \int_0^1 d\rho \ln \rho e^{4i\rho\tilde{g}(0,0)}. \quad (2.100)$$

Мы получили окончательно следующее выражение для интеграла Ω_n^{IV}

$$\Omega_n^{\text{IV}} = \frac{1}{n} \varpi_3 + \frac{\ln n}{n} \Upsilon + \frac{1}{n} \varpi_4 + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.101)$$

где постоянные ϖ_3 , Υ и ϖ_4 даются выражениями (2.98) и (2.100).

□

Перейдем к рассмотрению последнего оставшегося вклада Ω_n^V в нормировочный интеграл.

Предложение 2.3.6. В старшем порядке поведение выражения (2.90) определяется следующим образом:

$$\Omega_n^V = \frac{1}{n} \varpi_5 + \frac{1}{n} \varpi_6 + \frac{1}{n} \varpi_7 + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где ϖ_5, ϖ_6 и ϖ_7 – некоторые известные постоянные.

Доказательство. Согласно определению (2.90):

$$\Omega_n^V = \frac{1}{4n} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{du}{u} \int_0^1 dv e^{-4nuG(u,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(u,v)} \right).$$

Введем новую переменную во внешнем интеграле $t = nu$ и будем интегрировать по частям во внутреннем интеграле

$$\begin{aligned} \Omega_n^V &= \frac{1}{4n} \int_1^n \frac{dt}{t} \int_0^1 dv e^{-4tG(\frac{t}{n},v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(\frac{t}{n},v)} \right) = \\ &= -\frac{1}{16n} \int_1^n \frac{dt}{t^2} \int_0^1 dv \frac{\left(e^{-4tG(\frac{t}{n},v)} \right)'_v}{G'_v(\frac{t}{n},v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(\frac{t}{n},v)} \right). \end{aligned}$$

Отметим следующие свойства функции $G(u, v)$:

$$\begin{aligned} \Re G(u, v) &\geq 0, \quad \forall u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1], \\ G'_v \left(\frac{t}{n}, v \right) &= \beta + O \left(\sqrt{\frac{t}{n}} \right), \quad \beta > 0. \end{aligned}$$

Отметим также, что достигнутая степенная зависимость подынтегрального выражения от переменной t , то есть t^{-2} , обеспечивает сходимость интеграла по dt на бесконечности и, тем самым, эффективную ограниченность области интегрирования по dt .

Исходя из этих соображений, получаем

$$\begin{aligned} \Omega_n^V &= -\frac{1}{16n} \frac{1}{G'_v(0,1)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(0,v)} \right) \Big|_{v=1} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-4tG(0,1)} + \frac{1}{16n} \frac{1}{G'_v(0,0)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(0,v)} \right) \Big|_{v=0} + \\ &+ \frac{1}{16n} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \int_0^1 dv e^{-4tG(0,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{G'_v(0,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(0,v)} \right) \right] + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Окончательно, мы приходим к заключению, что

$$\Omega_n^V = \frac{1}{n} \varpi_5 + \frac{1}{n} \varpi_6 + \frac{1}{n} \varpi_7 + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.102)$$

где использованы обозначения

$$\varpi_5 \equiv -\frac{1}{16} \frac{1}{G'_v(0,1)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(0,v)} \right) \Big|_{v=1} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-4tG(0,1)}, \quad \varpi_6 \equiv \frac{1}{16} \frac{1}{G'_v(0,0)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(0,v)} \right) \Big|_{v=0}, \quad (2.103)$$

$$\varpi_7 \equiv \frac{1}{16} \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \int_0^1 dv e^{-4tG(0,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{G'_v(0,v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F(0,v)}{G'_v(0,v)} \right) \right]. \quad (2.104)$$

□

В соответствии с предложением 2.3.4, предложением 2.3.5 и предложением 2.3.6, мы приходим к выводу, что асимптотика выражения

$$\Omega_n = \int_0^1 du \int_0^1 dv e^{-4n\beta uv f(u,v)} e^{4inu \frac{3}{2} g(u,v)} F(u,v),$$

как функция большого параметра $n \gg 1$, имеет вид

$$\Omega_n = \frac{1}{n} D_1(G) + \frac{\ln n}{n} D_2(G) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.105)$$

где коэффициенты

$$D_1(G) = \sum_{i=1}^7 \varpi_i, \quad D_2(G) = \Upsilon, \quad (2.106)$$

определены в выражениях (2.85), (2.94), (2.98), (2.100), (2.103), (2.104). Функция G определена в выражении (2.84).

Переобозначим коэффициенты $D_i(G)$, $i = 1, 2$, в соответствии с факторизацией (2.78):

$$D_i(G) = \hat{D}_i(G) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}''), \quad i = 1, 2. \quad (2.107)$$

Отметим, что факторизация (2.107) оказывается возможной, поскольку, согласно (2.78), выражение $F(0, v)$ (которое и определяет старший член асимптотики) содержит множитель $\tilde{R}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, 0, \varphi)$, не зависящий от переменных интегрирования u и v .

Введем также коэффициенты B_i , $i = 1, 2$ следующим образом:

$$B_i = \frac{1}{2} (\hat{D}_i(G) + \hat{D}_i(G^*)), \quad i = 1, 2. \quad (2.108)$$

Следуя указанному выше, можно явно выписать функции, входящие в определение неизвестных постоянных B_1 и B_2 :

$$f(u, v) = \frac{16 \left(1 - \frac{1}{16} u(1-v)\right) \sin^2 \left(\frac{\sqrt{uv}}{4}\right)}{uv}, \quad (2.109)$$

$$g(u, v) = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \left(\arccos \left(\sqrt{1 - \frac{u(1-v)}{16}} \cos \left(\frac{\sqrt{uv}}{4} \right) \right) - \sqrt{1 - \frac{u(1-v)}{16}} \sqrt{1 - \frac{u(1-v)}{16} \cos^2 \left(\frac{\sqrt{uv}}{4} \right)} \cos \left(\frac{\sqrt{uv}}{4} \right) \right), \quad (2.110)$$

$$F(u, v) = - \frac{\sqrt{u} \left(1 - \frac{u(1-v)}{16}\right) \sec \frac{\sqrt{uv}}{4} \sin \sqrt{uv}}{32\sqrt{v} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{u(1-v)}{16}\right) \cos^2 \frac{\sqrt{uv}}{4}} \cos^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{uv}}{2} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{u(1-v)}{16}\right) \cos \frac{\sqrt{uv}}{2}}}. \quad (2.111)$$

При помощи компьютерных средств численного интегрирования оказывается возможным сосчитать интегралы, входящие в определение постоянных и зависящие лишь только от указанных выше функций. Здесь мы приведем лишь конечный результат, с точностью до тысячной, $B_1 = -0.315$, а $B_2 = -\frac{2}{3}$ (выражение для нее не содержит интегрирования и поэтому может быть найдено точно). Для нас является важным в данной работе отличие найденных постоянных от нуля.

Вернемся к основному вычислению. Согласно (2.69), (2.74):

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}') = n^3 (B_2 \ln n + B_1 + o(1)) \frac{2^5 \pi}{|\alpha_1|^3} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}''). \quad (2.112)$$

Тем самым лемма 2.3.2 доказана. □

2.3.2 О вкладе других областей

Мы рассмотрим вклады окрестности нуля, окрестности точки перехода и области монотонности для аргумента полинома Лагерра и покажем, что они имеют следующий порядок малости n , чем вклад области осцилляций. Для этого мы в общих чертах повторим анализ, построенный для области осцилляций для каждой из оставшихся областей.

Для начала рассмотрим окрестность нуля.

Лемма 2.3.7. *Вклад окрестности нуля в нормировочный интеграл порождает выражение следующего порядка малости по n , чем (2.112) в левой части уравнения (2.32).*

Доказательство. Поведение в окрестности нуля полинома Лагерра описывается следующей формулой:

$$n! e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) = \Gamma(\alpha + n + 1) \left(\frac{vx}{4}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \left(\frac{x}{v}\right)^{\frac{m}{2}} J_{\alpha+m}(\sqrt{vx}), \quad (2.113)$$

где $A_0^* = 1$, $A_1^* = 0$. Так же требуется, чтобы $x = O(n^\lambda)$, $\lambda < \frac{1}{3}$. В нашем случае $\alpha = 0$, поэтому старший член асимптотики полинома Лагерра в окрестности начала координат принимает следующий вид:

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) = J_0(\sqrt{vx}). \quad (2.114)$$

С учетом такого поведения в окрестности нуля, запишем нормировочный интеграл в следующем виде:

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') = \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_0^{v^{\frac{1}{3}}} dt t^2 e^{-t} e^{\frac{1}{2}t(\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})} J_0\left(\sqrt{vt \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}}\right) J_0\left(\sqrt{vt \sin^2 \frac{\theta}{2}}\right). \quad (2.115)$$

Перейдем к интегрированию по конечной области, произведя замену $u = \frac{t}{v^{\frac{1}{3}}}$:

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') = v \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_0^1 du u^2 e^{-v^{\frac{1}{3}}(1 - \frac{1}{2}(\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}))} J_0\left(v^{\frac{2}{3}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \sqrt{u}\right) J_0\left(v^{\frac{2}{3}} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u}\right). \quad (2.116)$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится асимптотика функции Бесселя со значком 0 при больших значениях аргумента

$$J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right). \quad (2.117)$$

В таком случае, верно

$$J_0\left(v^{\frac{2}{3}} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u}\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi v^{\frac{2}{3}} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u}}} \cos\left(v^{\frac{2}{3}} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.118)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)), \quad (2.119)$$

приходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned} J_0\left(v^{\frac{2}{3}} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u}\right) J_0\left(v^{\frac{2}{3}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \sqrt{u}\right) &\sim \frac{1}{\pi v^{\frac{2}{3}} \sqrt{u} \sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \times \\ &\times \left[\cos\left(v^{\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \sqrt{u}\right) + \cos\left(v^{\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \sqrt{u} - \frac{\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Таким образом, для нормировочного интеграла получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &= \frac{v^{\frac{1}{3}}}{\pi} \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_0^1 du u^{\frac{3}{2}} e^{-v^{\frac{1}{3}}(1 - \frac{1}{2}(\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}))} \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \times \\ &\times \left(\cos\left(v^{\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \sqrt{u}\right) + \sin\left(v^{\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}\right) \sqrt{u}\right) \right). \end{aligned} \quad (2.121)$$

Действуем по аналогии со случаем области осцилляций и будем изучать интеграл по угловым переменным с помощью метода стационарной фазы. Так как аргумент тригонометрических функций содержит наибольший параметр $v^{\frac{2}{3}}$ (в соответствии с прежней идеологией), будем изучать только эту фазу.

Введем обозначение

$$\Phi_{\pm} = \left(\sin \frac{\theta}{2} \pm \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \sqrt{u}. \quad (2.122)$$

Пользуясь прежними соображениями, вспомним, что $\theta, \tilde{\theta} \in [0, \pi]$ являются углами между векторами в трехмерном пространстве, поэтому синусы половинных углов не отрицательны:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}, \\ \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \tilde{\theta}}{2}}, \\ \cos \tilde{\theta} &= \cos \theta_x, \\ \cos \theta &= \sin \theta_x \sin \theta_{k'} \cos(\varphi - \varphi_k) + \cos \theta_x \cos \theta_{k'}.\end{aligned}\tag{2.123}$$

Для поиска точки стационарной фазы (θ_0, φ_0) нам потребуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_{\pm}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} |_{(\theta_0, \varphi_0)} = 0 \\ \frac{\partial \Phi_{\pm}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} |_{(\theta_0, \varphi_0)} = 0 \end{cases}.\tag{2.124}$$

Не описывая подробности, заметим, что

$$\theta_0 = \pi - \frac{\theta_{k'}}{2}, \quad \varphi_0 = \varphi_{k'} + \pi,\tag{2.125}$$

по-прежнему является решением данной системы, а основной вклад порождает синус (то есть выбор знака плюс в фазе).

Для метода стационарной фазы нам необходимо сосчитать определитель второй производной $\det(\Phi''_{+xx})|_{(\theta_0, \varphi_0)}$. Перекрестная производная равна нулю и нам нужны только диагональные элементы – вторые производные по переменным φ и θ_x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial \varphi^2} |_{(\theta_0, \varphi_0)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{u} \sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{4}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial \theta^2} |_{(\theta_0, \varphi_0)} &= -\frac{\sqrt{u}}{2} \cos \frac{\theta_{k'}}{4}.\end{aligned}$$

Тем самым определитель получился равным $\frac{1}{8} \sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2} u$. С учетом того, что

$$\text{sgn}(\Phi''_{+xx}(\theta_0, \varphi_0)) = \nu_+ - \nu_- = -2,$$

получаем окончательный вклад

$$\begin{aligned}\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &= \frac{2}{v^{\frac{1}{3}} |\alpha_1|^3} \int_0^1 du u e^{-v^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{2} (\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})\right)} \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \times \\ &\times \cos \left(v^{\frac{2}{3}} \left(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \sqrt{u} \right) \frac{\sin \frac{\theta_{k'}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{8} \sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2}}},\end{aligned}\tag{2.126}$$

где θ и $\tilde{\theta}$ взяты в соответствующих фиксированных точках, иначе говоря

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') = \frac{8}{v^{\frac{1}{3}}} \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^1 du u e^{-v^{\frac{1}{3}} \sin^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{1}{\cos \frac{\theta_{k'}}{4}} \cos \left(v^{\frac{2}{3}} \cos \frac{\theta_{k'}}{4} \sqrt{u} \right) \frac{\sin \frac{\theta_{k'}}{2}}{\sqrt{\sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2}}}. \quad (2.127)$$

Дальше нас будет интересовать результат интегрирования данного выражения по внешней переменной $\theta_{k'}$. Возвращаясь к исходным интегралам, мы можем теперь вычислить интеграл по единичной сфере $d\hat{\mathbf{k}}'$

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.128)$$

Для этого перейдем к переменной α , $\cos \alpha = \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'' \rangle$

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') = \frac{8}{v^{\frac{1}{3}}} \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^1 du u e^{-v^{\frac{1}{3}} \sin^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{1}{\cos \frac{\theta_{k'}}{4}} \cos \left(v^{\frac{2}{3}} \cos \frac{\theta_{k'}}{4} \sqrt{u} \right) \frac{\sin \frac{\theta_{k'}}{2}}{\sqrt{\sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2}}}, \quad (2.129)$$

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \frac{64\pi n^3}{v^{\frac{1}{3}} |\alpha_1|^3} \int_0^\pi d\alpha \sin \frac{\alpha}{4} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\alpha}{4} - 1} \int_0^1 du u \cos(v^{\frac{2}{3}} \cos \frac{\alpha}{4} \sqrt{u}) e^{-v^{\frac{1}{3}} u \sin^2 \frac{\alpha}{4}} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (2.130)$$

заметим, что на отрезке $[0, \pi]$ функция $\cos \frac{\alpha}{4}$ монотонна, поэтому допустима замена переменных $t = \cos \frac{\alpha}{4}$, опуская константу, приходим к тому, что вклад окрестности нуля в нормировочном интеграле в старшем порядке может быть оценен выражением

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \frac{n^3}{v^{\frac{1}{3}}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dt \sqrt{2t^2 - 1} \int_0^1 du u \cos(v^{\frac{2}{3}} t \sqrt{u}) e^{-v^{\frac{1}{3}} u (1-t^2)} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.131)$$

Вспоминая, что $v = 4n + 2$, приходим к тому, что очень грубая оценка интеграла заменой константами выражений, зависящих от большого параметра, даст вклад порядка $n^{\frac{8}{3}}$, что степенным образом меньше младшего члена итогового вклада в области осцилляций. \square

Лемма 2.3.8. *Вклад окрестности точки перехода в нормировочном интеграле в уравнение (2.32) может быть оценен выражением*

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = n^{\frac{8}{3}} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'') \int_0^{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} dt \text{Ai}^2(-t). \quad (2.132)$$

Доказательство. Запишем асимптотику полинома Лагерра вблизи точки перехода

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) = \gamma_1 \left[A(t) + \left(\frac{4}{3\nu^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{t^2}{5} A'(t) + \frac{3+5\alpha}{10} \left(t - \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \right) A(t) \right] + O\left(n^{-\frac{5}{3}}\right) \right], \quad (2.133)$$

где

$$t = \left(\frac{4v}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} (v - x),$$

$$\pi\gamma_1 = (-1)^n 2^{-\alpha} \left[6^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} + \frac{3 + 5\alpha}{10} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} v^{-1} + O\left(n^{-\frac{5}{3}}\right) \right],$$

$$A(t) = \left(\frac{\pi}{3}\right) \sqrt{\frac{t}{3}} \left[J_{-\frac{1}{3}} \left(2\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^3} \right) + J_{\frac{1}{3}} \left(2\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^3} \right) \right].$$

Обратимся к формуле связи функции Эйри и функции Бесселя

$$\text{Ai}(-z) = \frac{1}{3}\sqrt{z} \left[J_{\frac{1}{3}}(\xi) + J_{-\frac{1}{3}}(\xi) \right], \quad \xi = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}, \quad (2.134)$$

поэтому легко выявить, что функция $A(t)$ не что иное, как функция Эйри специально выбранного аргумента

$$A(t) = \frac{\pi}{3^{\frac{5}{6}}} \text{Ai} \left(-\frac{t}{3^{\frac{1}{3}}} \right). \quad (2.135)$$

С учетом этого, можно описать поведение полинома Лагерра в нужных нам терминах

$$L_n(x \sin^2 \frac{\theta}{2}) = e^{\frac{1}{2}x \sin^2 \frac{\theta}{2}} \gamma_1 \frac{\pi}{3^{\frac{1}{3}}} \text{Ai} \left(-\frac{\left(\frac{4v}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} \left(v - x \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right). \quad (2.136)$$

Замечание 2.3.9. Обратим внимание на то, что в окрестности точки перехода $x \in [v - v^{\frac{1}{3}}, v]$ вся зависимость от большого параметра сосредоточена в экспоненте, тогда как аргумент функции Эйри принимает, вообще говоря, конечные значения и роли в оценке интеграла не сыгрывает.

С учетом замечания, упомянутые выше разложения (2.133) являются асимптотическими и для наших целей достаточно взять лишь главные члены. Вернемся к нормировочному интегралу

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') = \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} dx x^2 e^{-x} 6^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{3^{\frac{1}{3}}} \text{Ai}(-t_1) \text{Ai}(-t_2), \quad (2.137)$$

где t_1 и t_2 зависят от x и на отрезке $[\delta_1, \delta_2]$ принимают конечные значения,

$$t_1 = \frac{\left(\frac{4v}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} (v - x \sin^2 \frac{\theta}{2})}{3^{\frac{1}{3}}}, \quad t_2 = \frac{\left(\frac{4v}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} (v - x \sin^2 \frac{\hat{\theta}}{2})}{3^{\frac{1}{3}}}. \quad (2.138)$$

Основной вклад дает окрестность фиксированного угла, отвечающего равенству $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\hat{\theta}}{2} = 1$, в силу наличия экспоненциальной малости выражения вне этой окрестности.

Тогда становится ясно, что $\delta_1 = \frac{v - v^{\frac{1}{3}}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$, $\delta_2 = \frac{v}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$, при этом

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \sim \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^\pi d\theta_x \sin \theta_x \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\delta_1}^{\delta_2} dx x^2 e^{-x(1-\frac{1}{2}(\sin^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}))} v^{-\frac{2}{3}} \text{Ai}(t_1) \text{Ai}(t_2), \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} \cos \tilde{\theta} &= \cos \theta_x, \\ \cos \theta &= \sin \theta_x \sin \theta_{k'} \cos(\varphi - \varphi_k) + \cos \theta_x \cos \theta_{k'}. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Сделаем замену переменных $x = vu$ и применим к интегралу метод Лапласа, так как большой параметр будет содержаться лишь в экспоненте. Опуская аналогичное приведенному ранее вычисление, приходим к той же точке максимума, что давала основной вклад и в предыдущих областях

$$\theta_0 = \pi - \frac{\theta_{k'}}{2}, \quad \varphi_0 = \varphi_{k'} + \pi. \quad (2.141)$$

Вторые производные

$$\frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial \varphi^2} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} = \frac{1}{4} u \sin \theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_+}{\partial \theta^2} \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} = \frac{1}{2} u \cos \frac{\theta_{k'}}{2}.$$

Определитель матрицы вторых производных

$$\det(\Phi''_+) \Big|_{(\theta_0, \varphi_0)} = \frac{1}{16} u^2 \sin^2 \theta_{k'}.$$

Тогда, окончательно, опуская числовой множитель, получаем

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \sim \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\frac{\delta_1}{v}}^{\frac{\delta_2}{v}} du u e^{-vu(1-\cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4})} v^{\frac{4}{3}} \frac{\sin \frac{\theta_{k'}}{2}}{\sin \theta_{k'}} \text{Ai}(-\tilde{t}_1) \text{Ai}(-\tilde{t}_2), \quad (2.142)$$

где волна в аргументах функции Эйри подразумевает замену переменных, которую мы не выписываем явно. С учетом того, что в искомой точке по угловым переменным верно

$$t_1 = t_2 = \frac{\left(\frac{4v}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(v - x \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}\right)}{3^{\frac{1}{3}}}, \quad (2.143)$$

сначала вернемся к прежней переменной интегрирования t :

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \sim v^{-\frac{2}{3}} \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\delta_1}^{\delta_2} dt t e^{-t \sin^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{\sin \frac{\theta_{k'}}{2}}{\sin \theta_{k'}} \text{Ai}(-t_1) \text{Ai}(-t_2), \quad (2.144)$$

Вспомним, что

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.145)$$

При таком интегрировании, естественно воспользоваться заменой переменных для интеграла по модулю $t \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4} = x$

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \sim v^{-\frac{2}{3}} \frac{n^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^\pi d\theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2} \int_{v-v^{\frac{1}{3}}}^v dx \frac{x}{\cos^4 \frac{\theta_{k'}}{4}} e^{-x \tan^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \text{Ai}^2 \left(\frac{\left(\frac{4v}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \left(v - x \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}\right)}{3^{\frac{1}{3}}} \right) R_n, \quad (2.146)$$

аргумент ядра R_n мы здесь опускаем для простоты записи.

Далее следует сделать замену $\cos \frac{\theta_{k'}}{2} = u$, пользуясь монотонностью функции $\cos \frac{\theta_{k'}}{2}$ при $\theta_{k'} \in [0, \pi]$. Анализируя получившийся интеграл по угловой переменной u , приходим к интегралу с большим параметром так как радиальная переменная при этом имеет порядок v на все области своего изменения. Фаза экспоненты, порождаемая заменой из $-x \tan^2 \frac{\theta_{k'}}{4}$ принимает вид

$$-x \left(\frac{2}{1+u} - 1 \right). \quad (2.147)$$

В таком случае вклад дает краевая точка, отвечающая $u = 1$. Что фиксирует аргумент R_n нужным нам образом. Остается лишь интеграл по радиальной переменной, который в соответствии с заменой

$$t = \frac{\left(\frac{4v}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} (v-x)}{3^{\frac{1}{3}}}, \quad (2.148)$$

приводит нас окончательно к

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = n^{\frac{8}{3}} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'') \int_0^{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} dt \text{Ai}^2(-t). \quad (2.149)$$

□

Лемма 2.3.10. *Вклад области монотонности в нормировочный интеграл может быть оценен выражением*

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}') \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} n^3 R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}''), \quad (2.150)$$

и тем самым убывает степенным образом (в $n^{\frac{1}{3}}$ раз быстрее), чем основной вклад.

Доказательство. Следуя обозначениям Трикоми в области монотонности $v < x < \infty$ введем следующие обозначения:

$$x = v \text{ch}^2 \theta_*, \quad 0 < \theta_*, \quad (2.151)$$

$$4\Theta = v(\text{sh} 2\theta_* - 2\theta_*).$$

В этих обозначениях

$$e^{-\frac{x}{v}} L_n(x) = (-1)^n e^{-\Theta} (\pi v \text{sh} 2\theta_*)^{-\frac{1}{2}} \times \left[\sum_{m=0}^{K-1} (-1)^m A_m(\theta_*) \left(\frac{v}{4} \text{sh} 2\theta_*\right)^{-m} + O(n^{-K}) \right], \quad (2.152)$$

где

$$A_0(\theta_*) = 1, \quad A_1(\theta_*) = \frac{1}{12} \left[\frac{5}{4 \operatorname{sh}^2 \theta_*} - \operatorname{sh}^2 \theta_* + 1 \right].$$

В терминах обозначений (2.152)

$$\operatorname{sh} 2\theta_* = 2 \operatorname{sh} \theta_* \operatorname{ch} \theta_* = 2 \left(\frac{x}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{v} - 1}.$$

При этом старший член асимптотического ряда принимает вид

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) = \frac{1}{2} e^{-\Theta} (-1)^n (\pi v)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{v} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{x}{v} - 1 \right)^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.153)$$

Подставляя асимптотику в нормировочный интеграл, получаем следующее:

$$\Sigma_m(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') = \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_{\frac{v}{\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}}}^{\infty} dt t^2 e^{-t} L_{m-1} \left(t \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) L_{m-1} \left(t \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_m(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &= \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_{\frac{v}{\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}}}^{\infty} dt t^2 e^{-t \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} \right)} e^{-(\Theta + \tilde{\Theta})} \times \\ &\times \frac{1}{\left(\frac{t \sin^2 \frac{\theta}{2}}{v} \right)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\frac{t \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}}{v} \right)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\frac{t \sin^2 \frac{\theta}{2}}{v} - 1 \right)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\left(\frac{t \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}}{v} - 1 \right)^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Обозначив $t = vu$, приводим интеграл к

$$\begin{aligned} \Sigma_m(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &= v^2 \frac{1}{2\pi} \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \int_{\frac{1}{\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2}}}^{\infty} du u^{\frac{3}{2}} e^{-vu \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} \right)} e^{-(\Theta + \tilde{\Theta})} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2}}} \frac{1}{(u \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{(u \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} - 1)^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Рассмотрим подробнее выражение $-(\Theta + \tilde{\Theta})$, стоящее в экспоненте:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{v}{4} (\operatorname{sh} 2\theta_* - 2\theta_*), \\ -(\Theta + \tilde{\Theta}) &= -\frac{v}{4} (\operatorname{sh} 2\theta_* + \operatorname{sh} 2\tilde{\theta}_* - 2\theta_* - 2\tilde{\theta}_*) \\ \operatorname{Arsh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \end{aligned} \quad (2.157)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} -(\Theta + \tilde{\Theta}) &= -\frac{v}{2} \left(\sqrt{u} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1} + \sqrt{u} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \sqrt{u \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} - 1} - \right. \\ &\left. - \ln \left(\sqrt{u \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1} + \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u} \right) - \ln \left(\sqrt{u \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} - 1} + \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \sqrt{u} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.158)$$

Обратим внимание, что выражение $\text{sh } y - y$ при $y > 0$ положительно. С учетом этого, вклад может давать лишь малая окрестность точки $u = 1$, в которой и обращается в ноль Θ .

Как и ранее, мы будем сначала интегрировать по угловым переменным

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{x}} &= d\theta_x \sin \theta_x d\varphi, \\ \cos \tilde{\theta} &= \cos \theta_x, \\ \cos \theta &= \sin \theta_x \sin \theta_{k'} \cos(\varphi - \varphi_k) + \cos \theta_x \cos \theta_{k'}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Мы имеем фазу в экспоненте, зависящую от большого параметра v

$$\begin{aligned} v\Phi &= -vu \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2} \right) - \frac{v}{2} \left((\sqrt{u} \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1} + \sqrt{u} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \sqrt{u \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} - 1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v}{2} \left(\ln \left(\sqrt{u \sin^2 \frac{\theta}{2} - 1} + \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{u} \right) + \ln \left(\sqrt{u \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} - 1} + \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \sqrt{u} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.160)$$

Для поиска точки максимума (θ_0, φ_0) в методе Лапласа нам потребуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} |_{(\theta_0, \varphi_0)} = 0 \\ \frac{\partial \Phi(\theta, \varphi)}{\partial \theta} |_{(\theta_0, \varphi_0)} = 0 \end{cases}. \quad (2.161)$$

По тем же соображениям, что и ранее, нужная точка определяется

$$\theta_0 = \pi - \frac{\theta_{k'}}{2}, \quad \varphi_0 = \varphi_{k'} + \pi. \quad (2.162)$$

Запишем модуль определителя

$$|\det(\Phi'')|_{(\theta_0, \varphi_0)} = \frac{u}{8} \left(\sqrt{-2 + 2u \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} - \sqrt{u} \right)^2 \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4} \sin^2 \theta_{k'}. \quad (2.163)$$

Подставляя в начальный интеграл, приходим к

$$\begin{aligned} \Sigma_m(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &= v \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\theta_{k'}}{2}} \int_{\frac{1}{\cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}}}^{\infty} du u e^{-vu \sin^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} e^{-v \left(\sqrt{u} \cos \frac{\theta_{k'}}{4} \sqrt{u \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4} - 1} - \ln \left(\sqrt{u \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4} - 1} + \cos \frac{\theta_{k'}}{4} \sqrt{u} \right) \right)} \\ &\quad \times \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{1}{\left(u \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left| \sqrt{-2 + 2u \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} - \sqrt{u} \right|}. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Сделаем замену переменных $t = u \cos^2 \frac{\theta_{k'}}{4}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_m(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') &= v \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\theta_{k'}}{2}} \int_1^{\infty} dt t e^{-vt \tan^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} e^{-v(\sqrt{t} \sqrt{t-1} - \ln(\sqrt{t-1} + \sqrt{t}))} \\ &\quad \times \frac{1}{\cos^6 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{1}{\sqrt{t-1}} \frac{1}{\left| \sqrt{2t-2} - \frac{\sqrt{t}}{\cos \frac{\theta_{k'}}{4}} \right|}. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Вспомним, что

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (2.166)$$

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = 2\sqrt{2}\pi v \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^\pi d\theta_{k'} \sin \frac{\theta_{k'}}{2} \int_1^\infty dt t e^{-vt \tan^2 \frac{\theta_{k'}}{4}} e^{-v(\sqrt{t}\sqrt{t-1} - \ln(\sqrt{t-1} + \sqrt{t}))} \times \\ \times \frac{1}{\cos^6 \frac{\theta_{k'}}{4}} \frac{1}{\sqrt{t-1}} \frac{1}{|\sqrt{2t-2} - \frac{\sqrt{t}}{\cos \frac{\theta_{k'}}{4}}|} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.167)$$

Также сделаем замену переменных $\cos \frac{\theta_{k'}}{2} = u$:

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = 32\sqrt{2}\pi v \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^1 du \int_1^\infty dt t e^{-vt \frac{1-u}{1+u}} e^{-v(\sqrt{t}\sqrt{t-1} - \ln(\sqrt{t-1} + \sqrt{t}))} \times \\ \times \frac{1}{(1+u)^3} \frac{1}{\sqrt{t-1}} \frac{1}{|\sqrt{2t-2} - \sqrt{\frac{2t}{u+1}}|} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.168)$$

Заметим, что основной вклад должны давать окрестности точек $u = 1$ и $t = 1$. Поэтому, для упрощения, отбросим не влияющие на поведение множители и получим

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \sim v \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^1 du \int_1^\infty dt t e^{-vt \frac{1-u}{1+u}} e^{-v(\sqrt{t}\sqrt{t-1} - \ln(\sqrt{t-1} + \sqrt{t}))} \frac{1}{\sqrt{t-1}} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.169)$$

Выделив вклад по угловой переменной u вида "краевая точка", напомним, что $u = 1$ отвечает $\hat{\mathbf{k}}'' = \hat{\mathbf{k}}'$:

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \sim R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'') \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_1^\infty dt e^{-v(\sqrt{t}\sqrt{t-1} - \ln(\sqrt{t-1} + \sqrt{t}))} \frac{1}{\sqrt{t-1}}. \quad (2.170)$$

Обозначая $u = t - 1$, приходим к

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \sim R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'') \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^\infty du e^{-v(\sqrt{u+1}\sqrt{u} - \ln(\sqrt{u} + \sqrt{u+1}))} \frac{1}{\sqrt{u}}. \quad (2.171)$$

Сделаем замену $\sqrt{u} = t$:

$$T_n(\hat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \sim R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'') \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int_0^\infty dt e^{-v(t\sqrt{t^2+1} - \ln(t + \sqrt{t^2+1}))}. \quad (2.172)$$

Разложим в ряд фазу $-(t\sqrt{t^2+1} - \ln(t + \sqrt{t^2+1}))$ в окрестности нуля

$$-(t\sqrt{t^2+1} - \ln(t + \sqrt{t^2+1})) \sim -\frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + O(t^7). \quad (2.173)$$

Таким образом, лишь третья производная будет отлична от нуля. Следуя методу Лапласа, приходим к тому, что порядок такого интеграла (в силу того, что первая и вторая производная фазы аннулируются в критической точке), будет $\frac{1}{v^{\frac{1}{3}}}$.

Окончательно, мы получили, что вклад области монотонности в $v^{\frac{1}{3}}$ убывает быстрее, чем вклад области осцилляций, а также оценили его сверху. \square

Тем самым мы доказали теорему 2.3.1. Это означает, что уравнение (2.32) принимает вид

$$\langle \tilde{\Psi}^{\text{BVK}}, \psi_n^{\text{d}} \rangle_{\mathbb{R}_x^3}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') \sim n^3 \frac{(B_2 \ln n + B_1)}{2\sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}} \frac{2^5 \pi}{|\alpha_1|^3} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}'_n \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}''). \quad (2.174)$$

$$p'_n = \sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}, \quad n \geq M \gg 1.$$

Уравнение (2.112) демонстрирует эффективно сингулярную по угловой переменной $\hat{\mathbf{k}}'$ структуру нормировочного интеграла (2.35). Иными словами, мы можем сказать, что при больших значениях n нормировочный интеграл как обобщенная функция ведет себя как дельта-функция угловой переменной

$$\Sigma_n(\hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}}'') \sim \delta(\hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.175)$$

Результат этот на первый взгляд является удивительным, поскольку в выражении (2.35) мы нормируем функции дискретного спектра. Объяснение этого факта связано с тем условием, что мы нормируем в выражении (2.35) функции из спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра двухчастичного кулоновского оператора Шрёдингера ($n \gg 1$). Следовательно, в спектральном смысле эти функции близки функциям абсолютно непрерывного спектра, которые нормированы именно на δ -функцию и являются обобщенными функциями угловой переменной.

Рассмотрим теперь поведение левой части уравнения (2.174).

2.4 Поведение свободного члена уравнения для ядра R_n

Мы исследуем здесь асимптотику скалярного произведения $\langle \tilde{\Psi}^{\text{BVK}}, \psi_n^{\text{d}} \rangle_{\mathbb{R}_x^3}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'')$ при больших значениях переменной $y \gg 1$ и больших значениях индекса $n \gg 1$.

Мы будем исследовать здесь асимптотику скалярного произведения $\langle \tilde{\Psi}^{\text{BVK}}, \psi_n^{\text{d}} \rangle_{\mathbb{R}_x^3}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'')$ при больших значениях переменной $y \gg 1$ и больших значениях индекса $n \gg 1$.

Введем обозначение

$$Q \equiv \langle \tilde{\Psi}^{\text{BVK}}, \psi_n^{\text{d}} \rangle_{\mathbb{R}_x^3}. \quad (2.176)$$

Выражение Ψ^{BVK} определено выше в уравнениях (2.1)–(2.2) для области $x \gg 1$, $y \gg 1$. Напомним, что выражение $\tilde{\Psi}^{\text{BVK}}$ определено для продолжения Ψ^{BVK} в область ограниченных значений переменной x . Выражение ψ_n^{d} определено в уравнении (2.28).

Как уже обсуждалось ранее, мы имеем право заменить в интеграле (2.176) выражение $\tilde{\Psi}^{\text{ВВК}}$ на $\Psi^{\text{ВВК}}$, исходя из того, что в области, дающей определяющий вклад, ВВК-приближение ведет себя указанным в начале работы образом. Таким образом,

$$Q \equiv \langle \Psi^{\text{ВВК}}, \psi_n^{\text{d}} \rangle_{\mathbb{R}_x^3} + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.177)$$

Воспользуемся слабой асимптотикой при $y \gg 1$ функции $\Psi^{\text{ВВК}}$ [5]:

$$\begin{aligned} \Psi^{\text{ВВК}} \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} & B_0^{\text{in}}(\mathbf{q}) \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \delta(\hat{\mathbf{y}}, -\hat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iy\rho} \left(1 + i\frac{x}{y} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle \right) e^{-iy\rho + i\omega \ln y} - \\ & - B_0^{\text{out}}(\mathbf{q}) \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \delta(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{p}}) \frac{2\pi}{iy\rho} \left(1 + i\frac{x}{y} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{out}}(\mathbf{q}) \rangle \right) e^{iy\rho + i\omega \ln y}. \end{aligned} \quad (2.178)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} B_0^{\text{in}}(\mathbf{q}) &= A_0 \Gamma(-i\eta_2) \Gamma(-i\eta_3) e^{-\frac{\pi\omega}{2}} (1 - e^{2\pi\eta_2}) (1 - e^{2\pi\eta_3}) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle) \right]^{i\eta_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle) \right]^{i\eta_3}, \\ \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\eta_2 \frac{\hat{\mathbf{k}}_2 - \hat{\mathbf{p}}}{1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle} + \eta_3 \frac{\hat{\mathbf{k}}_3 + \hat{\mathbf{p}}}{1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle} \right), \\ B_0^{\text{out}}(\mathbf{q}) &= A_0 \Gamma(-i\eta_2) \Gamma(-i\eta_3) e^{-\frac{\pi\omega}{2}} (1 - e^{2\pi\eta_2}) (1 - e^{2\pi\eta_3}) \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_2 (1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle) \right]^{i\eta_2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_3 (1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle) \right]^{i\eta_3}, \\ \mathbf{L}_{\text{out}}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\eta_2 \frac{\hat{\mathbf{k}}_2 + \hat{\mathbf{p}}}{1 + \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_2 \rangle} + \eta_3 \frac{\hat{\mathbf{k}}_3 - \hat{\mathbf{p}}}{1 - \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{k}}_3 \rangle} \right). \end{aligned}$$

Где $\omega = \eta_2 + \eta_3$, $A_0 = -\frac{1}{4\pi^2} N_0^{(23)}$, $\eta_j = \frac{|\alpha|}{2|\mathbf{k}_j|}$ – параметр Зоммерфельда, а Ψ_c обозначает двухчастичное состояние рассеяния. Постоянная $N_0^{(23)} = N_c^{(2)} N_c^{(3)}$ выражается через составляющие $N_c^{(j)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi\eta_j}{2}} \Gamma(1 + i\eta_j)$.

Подставляя выражение (2.178) в уравнение (2.177) и воспользовавшись ортогональностью функций $\Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ и $\psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$, получим

$$\begin{aligned} Q &= iB_0^{\text{in}}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iy\rho} \delta(\hat{\mathbf{y}}, -\hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{-iy\rho + i\omega \ln y} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}'') - \\ & - iB_0^{\text{out}}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iy\rho} \delta(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{iy\rho + i\omega \ln y} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{L}_{\text{out}}(\mathbf{q}) \rangle \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}''). \end{aligned} \quad (2.179)$$

Для вычисления интегралов в выражении (2.179) вновь воспользуемся слабой асимптотикой уже для функции $\Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k})$. Мы вновь апеллируем здесь к тому факту, что функция ψ_n^{d} хотя и является функцией дискретного спектра двухчастичного кулоновского оператора, фактически принадлежит спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра этого оператора. Таким образом, убывание этой функции на бесконечности в конфигурационном пространстве происходит очень медленно (показатель убывающей экспоненты ведет себя как

$\frac{1}{n}$, $n \gg 1$). В этом смысле основной вклад в интегралы в выражении (2.179) вносят большие значения переменной x , что и позволяет воспользоваться слабыми асимптотиками

$$\Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \sim N_c^{(1)} \left(\frac{e^{-ikx+i\eta \ln x}}{ikx} \delta(\hat{\mathbf{x}}, -\hat{\mathbf{k}}) - \frac{e^{ikx+i\eta \ln x}}{ikx} s_c(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) \right), \quad (2.180)$$

где $s_c(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}})$ – двухчастичная кулоновская матрица рассеяния.

Определим интегральные вклады в сходящейся и расходящейся волнах в уравнении (2.179) следующим образом:

$$Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}''), \quad (2.181)$$

$$Z^{\text{out}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{L}_{\text{out}}(\mathbf{q}) \rangle \Psi_c(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi_n^{\text{d}}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}''). \quad (2.182)$$

Начнем с вычисления интеграла (2.181)

$$\begin{aligned} Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') &= N_c^{(1)} \int_0^\infty x^3 dx \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x} L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{2n}x(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) \times \\ &\times \left(\frac{e^{-ikx+i\eta \ln x}}{ikx} \delta(\hat{\mathbf{x}}, -\hat{\mathbf{k}}) - \frac{e^{ikx+i\eta \ln x}}{ikx} s_c(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}) \right). \end{aligned}$$

Это выражение в свою очередь делится на два слагаемых, которые мы определим следующим образом:

$$Z^{\text{in}} = Z_1^{\text{in}} + Z_2^{\text{in}}, \quad (2.183)$$

где

$$Z_1^{\text{in}} \equiv \frac{N_c^{(1)}}{ik} \int_0^\infty x^{2+i\eta} dx \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x-ikx} L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{2n}x(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) \delta(\hat{\mathbf{x}}, -\hat{\mathbf{k}}), \quad (2.184)$$

$$Z_2^{\text{in}} \equiv \frac{N_c^{(1)}}{ik} \int_0^\infty x^{2+i\eta} dx \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x+ikx} L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{2n}x(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) s_c(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}). \quad (2.185)$$

Перейдем непосредственно к вычислению радиального интеграла в выражении Z_1^{in} (2.184), проинтегрировав предварительно по единичной сфере

$$Z_1^{\text{in}} = \frac{N_c^{(1)}}{ik} \langle -\hat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle \int_0^\infty dx x^{2+i\eta} e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x-ikx} L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{2n}x(1 + \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{k}} \rangle) \right).$$

После замены переменной $t = \frac{x}{n}$, получаем

$$Z_1^{\text{in}} = -C_n(\mathbf{q}) \int_0^\infty dt t^{2+i\eta} e^{-\frac{|\alpha_1|}{2}t-iknt} L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{2}t(1 + \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{k}} \rangle) \right),$$

где использовано обозначение $C_n(\mathbf{q}) = n^{3+i\eta} \frac{N_c^{(1)}}{ik} \langle \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle$. Согласно (7.414.7) [10], последний интеграл берется явно

$$Z_1^{\text{in}} = -C_n(\mathbf{q}) \frac{\Gamma(3+i\eta)}{\left(\frac{|\alpha_1|}{2} + ikn\right)^{3+i\eta}} {}_2F_1\left(1-n, 3+i\eta; 1; \frac{r}{\frac{|\alpha_1|}{2} + ikn}\right). \quad (2.186)$$

Мы используем здесь обозначение $r = \frac{|\alpha_1|}{2}(1 + \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{k}} \rangle)$.

Воспользуемся следующим асимптотическим представлением для гипергеометрической функции ${}_2F_1$ (2.1.13) [1]:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \left(1 + O\left(\frac{1}{b}\right)\right) \Phi(a, c, bz).$$

Здесь $c \neq 0, -1, -2, \dots$, $0 < |z| < 1$, $|b| \rightarrow \infty$ так, что $-\frac{3}{2}\pi < \arg(bz) < \frac{\pi}{2}$. В нашем случае

$$a = 3 + i\eta, \quad b = 1 - n, \quad c = 1, \quad z = \frac{r}{\frac{|\alpha_1|}{2} + ikn}.$$

В этом смысле выражение (2.186) принимает вид

$$Z_1^{\text{in}} = -\frac{N_c^{(1)} e^{\frac{\pi\eta}{2}}}{k^{4+i\eta}} \langle \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle \Gamma(3+i\eta) \Phi\left(3+i\eta, 1, i\frac{|\alpha_1|}{2k}(1 + \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{k}} \rangle)\right). \quad (2.187)$$

Выражение Z_2^{in} (2.185) может быть получено аналогичным образом при изменении порядка интегрирования. После интегрирования по dx приходим к выражению

$$Z_2^{\text{in}} = -\frac{N_c^{(1)} e^{-\frac{\pi\eta}{2}}}{k^{4+i\eta}} \Gamma(3+i\eta) H^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}''), \quad (2.188)$$

где функция $H(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'')$ определена следующим образом:

$$H^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in}}(\mathbf{q}) \rangle \Phi\left(3+i\eta, 1, -i\frac{|\alpha_1|}{2k}(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{x}} \rangle)\right) s_c(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}). \quad (2.189)$$

Мы определили, таким образом, интегральный вклад $Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'')$ (2.181) в сходящейся волне в уравнении (2.179) как сумму выражений, описанных в уравнениях (2.187) и (2.188)–(2.189). Аналогичным образом определяется интегральный вклад $Z^{\text{out}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'')$ (2.182).

Сформулируем окончательный результат вычисления.

Предложение 2.4.1. *Выражение $\langle \tilde{\Psi}^{\text{BBK}}, \psi_n^{\text{d}} \rangle|_{\mathbb{R}_x^3}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'')$ из (2.176) описывается следующим образом:*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Psi}^{\text{BBK}}, \psi_n^{\text{d}} \rangle|_{\mathbb{R}_x^3}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') &\sim iB_0^{\text{in}}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iy\rho} \delta(\hat{\mathbf{y}}, -\hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{-iy\rho + i\omega \ln y} Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') - \\ &- iB_0^{\text{out}}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iy\rho} \delta(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{iy\rho + i\omega \ln y} Z^{\text{out}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}''). \end{aligned} \quad (2.190)$$

В соответствии со сказанным выше, обозначено

$$Z^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') = - \frac{N_c^{(1)} \Gamma(3 + i\eta)}{k^{4+i\eta}} \left[e^{\frac{\pi\eta}{2}} \langle \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\text{in(out)}}(\mathbf{q}) \rangle \Phi \left(3 + i\eta, 1, i \frac{|\alpha_1|}{2k} (1 + \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{k}} \rangle) \right) - e^{-\frac{\pi\eta}{2}} H^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') \right], \quad (2.191)$$

где

$$H^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'') \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in(out)}}(\mathbf{q}) \rangle \Phi \left(3 + i\eta, 1, -i \frac{|\alpha_1|}{2k} (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}'', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) s_c(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}).$$

Таким образом выражение (2.190) описывает поведение левой части уравнения (2.174) для ядра $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'')$.

2.5 Решение уравнения для $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$

В соответствии со структурой выражения (2.190) будем искать структуру ядра $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$ в виде суммы двух слагаемых, соотносящихся соответственно со сходящейся и расходящейся волнами. Будем искать ядро $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$ в следующем виде:

$$R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}') = r_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n) Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') + r_n^{\text{out}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n) Z^{\text{out}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.192)$$

Перепишем уравнение (2.174) в виде системы двух уравнений для ядер $r_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n)$ и $r_n^{\text{out}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n)$

$$w_n \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}'_n \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) r_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n) = i B_0^{\text{in}}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iyp} \delta(\hat{\mathbf{y}}, -\hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{-iyp + i\omega \ln y}, \quad (2.193)$$

$$w_n \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}'_n \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) r_n^{\text{out}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n) = i B_0^{\text{out}}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iyp} \delta(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{iyp + i\omega \ln y}, \quad (2.194)$$

где введено обозначение

$$w_n \equiv n^3 \frac{(B_2 \ln n + B_1) 2^5 \pi}{2\sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}} |\alpha_1|^3}.$$

Начнем с решения уравнения (2.193). Введем декартову систему координат, в которой вектор $\hat{\mathbf{p}}$ направлен вдоль оси Z . Пусть направление оси X совпадает с направлением проекции вектора \mathbf{k} на плоскость, ортогональную вектору \mathbf{p} . Полагая $y \gg 1$, перепишем левую часть уравнения (2.193) в сферической системе координат, соответствующей данной декартовой системе:

$$L^{\text{in}} \equiv w_n \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dt e^{iy\sqrt{E}(t \cos \theta_{yp} + \sqrt{1-t^2} \sin \theta_{yp} \cos(\varphi - \varphi_{yk}))} e^{i\eta^{\text{eff}} \ln y} \tilde{r}_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, t, \varphi). \quad (2.195)$$

Здесь введены обозначения $t = \cos \theta = \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'_n \rangle$, $\cos \theta_{yp} = \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{y}} \rangle$. Углы φ и φ_{yk} – азимутальные углы, соответствующие векторам $\hat{\mathbf{p}}'_n$ и $\hat{\mathbf{y}}$ соответственно. Ядро $\tilde{r}_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, t, \varphi)$ порождается ядром $r_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n)$ при переходе к сферическим координатам вектора $\hat{\mathbf{p}}'_n$. Будем искать функцию

$\tilde{r}_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, t, \varphi)$ в следующем виде:

$$\tilde{r}_n^{\text{in}}(\mathbf{q}, t, \varphi) = \kappa_0^{(\text{in})} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib} \text{ce}_{2l}(\varphi, s). \quad (2.196)$$

Здесь $\kappa_0^{(\text{in})}$ – нормировочная постоянная, b – параметр, $b = \eta^{\text{eff}} - \omega$, обозначение $\left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib}$ введено для обобщенной функции χ_+^λ [9]. Функция $\text{ce}_{2l}(\varphi, s)$ – функция Матье [13]

$$\text{ce}_{2l}(\varphi, s) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2l)} \cos 2r\varphi, \quad (2.197)$$

коэффициенты разложения $A_{2r}^{(2l)}$ определяются рекуррентным образом согласно (8.60) [10], s – некоторый вещественный параметр. Отметим, что возникновение функций Матье в структуре ядра (2.196) связано с необходимостью погасить высокочастотные колебания, порожденные не совпадением направлений единичных векторов $\hat{\mathbf{p}}'_n$ и $\hat{\mathbf{p}}$. Это отклонение, в свою очередь, связано с тем, что двухчастичные базисные функции $\psi^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n)$, отвечающие "большой" переменной \mathbf{y} , соответствуют спектральной окрестности точки $\mathbf{p}'_n{}^2 = E$. В то же время абсолютная величина момента, сопряженного переменной \mathbf{y} в выражении трехчастичной искаженной волны Ψ^{BBK} , равна p ($p^2 < E$). Как мы видели выше, функции $\psi^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n)$, отвечающие окрестности точки накопления кулоновского спектра дают вклад в приближение трехчастичной волны Ψ^{BBK} лишь поправочного порядка ($\frac{1}{y^2}$ в обобщенном смысле). Для выделения этого вклада оказывается необходимым провести усреднение по азимутальному углу с функциями Матье. Отметим, что функции Матье, согласно (2.197), представляют собой разложения в том числе по быстро осциллирующим функциям.

Подставим ядро (2.196) в уравнение (2.195) и проинтегрируем по переменной φ , воспользовавшись уравнениями [10] (6.925.1)–(6.925.2):

$$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{ce}_{2l}(\varphi, s) d\varphi = 0, \quad (2.198)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \text{ce}_{2l}(\varphi, s) d\varphi = \frac{2\pi A_0^{(2l)}}{\text{ce}_{2l}(0, s) \text{ce}_{2l}(\frac{\pi}{2}, s)} \text{Ce}_{2l}(\zeta, s) \text{ce}_{2l}(\vartheta, s). \quad (2.199)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \text{Ce}_{2l}(\zeta, s) &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2l)} \text{ch } 2r\zeta, \\ z_1 &= 2\sqrt{s} \sqrt{\text{ch}^2 \zeta - \sin^2 \vartheta}, \quad \text{tg } \alpha = \text{th } \zeta \text{ tg } \vartheta. \end{aligned} \quad (2.200)$$

Функция $\text{Ce}_{2l}(\zeta, s)$ – присоединенная функция Матье первого рода, вводя следующие обозначения:

$$z_1 = y\sqrt{E}\sqrt{1-t^2} \sin \theta_{yp}, \quad \alpha = \varphi_{yk}. \quad (2.201)$$

Мы фиксируем параметры ζ и ϑ в соответствии с уравнениями (2.200). Сделав в уравнении (2.195) замену переменной $\sigma = t - \frac{p}{\sqrt{E}}$, перепишем (2.195) в виде

$$L^{\text{in}} \sim \kappa_0^{(\text{in})} y^{i\eta^{\text{eff}}} \frac{2\pi w_n A_0^{(2l)}}{\text{ce}_{2l}(0, s) \text{ce}_{2l}(\frac{\pi}{2}, s)} e^{iyp \cos \theta_{yp}} \int_0^\infty d\sigma \sigma_+^{ib} e^{iy\sqrt{E}\sigma \cos \theta_{yp}} \text{Ce}_{2l}(\tilde{\zeta}, s) \text{ce}_{2l}(\tilde{\vartheta}, s). \quad (2.202)$$

Переменные $\tilde{\zeta}$ и $\tilde{\vartheta}$ порождаются исходными переменными ζ и ϑ при замене $\sigma = t - \frac{p}{\sqrt{E}}$.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (2.202) с бесконечно дифференцируемой функцией $H(\hat{\mathbf{p}})$, заданной на единичной сфере:

$$\begin{aligned} \langle L^{\text{in}}, H \rangle_{\mathbb{S}_{\mathbf{p}}^2} &\sim \kappa_0^{(\text{in})} y^{i\eta^{\text{eff}}} \frac{2\pi w_n A_0^{(2l)}}{\text{ce}_{2l}(0, s) \text{ce}_{2l}(\frac{\pi}{2}, s)} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_{yp} \int_0^\pi d\theta_{yp} \sin \theta_{yp} \tilde{H}(\theta_{yp}, \varphi_{yp}) e^{iyp \cos \theta_{yp}} \int_0^\infty d\sigma \sigma_+^{ib} e^{iy\sqrt{E}\sigma \cos \theta_{yp}} \text{Ce}_{2l}(\tilde{\zeta}, s) \text{ce}_{2l}(\tilde{\vartheta}, s). \end{aligned} \quad (2.203)$$

Учитывая, что $\Im p < 0$, найдем, что старший вклад в интеграл по $d\theta_{yp}$ определяется точкой $\theta_{yp} = \pi$.

В соответствии с уравнением (2.201) в этом случае $z_1 = 0$. Из уравнения (2.200) следует, что

$$\zeta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

и, как следствие, $\alpha = \varphi_{yk} = \frac{\pi}{4}$ или $\alpha = \frac{5\pi}{4}$. Последнее утверждение позволяет делать выводы о геометрии проведенного усреднения.

Таким образом, уравнение (2.203) принимает вид

$$\langle L^{\text{in}}, H \rangle_{\mathbb{S}_{\mathbf{p}}^2} \sim \kappa_0^{(\text{in})} y^{i\eta^{\text{eff}}} \frac{4\pi^2 w_n A_0^{(2l)}}{-ipy} H(-\hat{\mathbf{y}}) e^{-iyp} \int_0^\infty d\sigma \sigma_+^{ib} e^{-iy\sqrt{E}\sigma}. \quad (2.204)$$

После замены переменной $\rho = y\sigma$, получаем, согласно (3.381.4) [10]:

$$\langle L^{\text{in}}, H \rangle_{\mathbb{S}_{\mathbf{p}}^2} \sim \kappa_0^{(\text{in})} \frac{4\pi^2 w_n A_0^{(2l)}}{-ip} \frac{\Gamma(1+ib)}{(i\sqrt{E})^{1+ib}} \frac{e^{-iyp+i\omega \ln y}}{y^2} H(-\hat{\mathbf{y}}). \quad (2.205)$$

Сравнивая полученное уравнение и уравнение (2.193), находим нормировочную постоянную

$$\kappa_0^{(\text{in})} = \frac{B_0^{\text{in}}(\mathbf{q}) \sqrt{E}^{1+ib} e^{\frac{\pi b}{2}}}{2\pi w_n A_0^{(2l)} \Gamma(1+ib)}.$$

Мы приходим к выводу, что в смысле обобщенных функций ядро (2.196) удовлетворяет уравнению (2.193).

Аналогичным образом мы можем определить ядро $r_n^{\text{out}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n)$:

$$\tilde{r}_n^{\text{out}}(\mathbf{q}, t, \varphi) = \kappa_0^{(\text{out})} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib} \text{ce}_{2l}(\varphi, s), \quad (2.206)$$

и показать, что оно удовлетворяет уравнению (2.194).

Сформулируем окончательный результат в виде теоремы.

Теорема 2.5.1. Ядро $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$ имеет следующий вид при $n \gg 1$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_n(\mathbf{q}, t, \varphi, \hat{\mathbf{k}}') &= \frac{\varpi_0^{(\text{in})}(\mathbf{q})}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib} ce_{2l}(\varphi, s) Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') + \\ &+ \frac{\varpi_0^{(\text{out})}(\mathbf{q})}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}} \right)_+^{ib} ce_{2l}(\varphi, s) Z^{\text{out}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \quad (2.207)$$

Здесь использовано обозначение

$$\begin{aligned} Z^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') &= - \frac{N_c^{(1)} \Gamma(3 + i\eta)}{k^{4+i\eta}} \left[e^{\frac{\pi\eta}{2}} \langle \hat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\text{in(out)}}(\mathbf{q}) \rangle \Phi \left(3 + i\eta, 1, i \frac{|\alpha_1|}{2k} (1 + \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{k}} \rangle) \right) - \right. \\ &\left. - e^{-\frac{\pi\eta}{2}} H^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') \right], \end{aligned} \quad (2.208)$$

где

$$H^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}') \equiv \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{x}} \langle \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\text{in(out)}}(\mathbf{q}) \rangle \Phi \left(3 + i\eta, 1, -i \frac{|\alpha_1|}{2k} (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) s_c(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}),$$

а также $t = \langle \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'_n \rangle$, переменная φ – угол между векторами $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{k}}]$ и $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'_n]$, отсчитываемый в положительном направлении при условии, что тройка векторов $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{k}}]$, $[\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{p}}'_n]$ и $\hat{\mathbf{p}}$ является положительно ориентированной,

$$\varpi_0^{(\text{in,out})}(\mathbf{q}) = B_0^{\text{in,out}}(\mathbf{q}) \frac{|\alpha_1|^3 E^{1+i\frac{b}{2}} e^{\frac{\pi b}{2}}}{2^5 \pi^2 A_0^{(2l)} \Gamma(1 + ib)}.$$

2.6 Изучение результата

Мы хотим выделить вклад спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра оператора Шрёдингера парной подсистемы в структуру собственных функций абсолютно непрерывного спектра трехчастичной задачи из полученного результата.

Вернемся к спектральному разложению (2.30) в области Ω_1^+ и выделим вклад окрестности точки накопления дискретного спектра парного кулоновского оператора. Этот вклад ограничивается суммированием по главному квантовому числу в выражении (2.30), от некоторого значения M , $M \gg 1$ до бесконечности. Значение параметра M диктуется распределением энергии между подсистемами в начальных условиях (соотношением значений k^2 и p^2):

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{n'=M}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{E + \frac{|\alpha_1^2|}{4n'^2}}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{p}}'_n \psi_{n'}^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}') \Psi_c^{\text{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) R_{n'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (2.209)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_1^+, \quad p'_n = \sqrt{E + \frac{|\alpha_1^2|}{4n'^2}}.$$

Выражение для ядра $R_{n'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \hat{\mathbf{k}}')$ определено в уравнении (2.207). В соответствии с выражением (2.28)

$$\psi_n^d(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = g_n(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{k}}) = e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n} x} L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{n} x \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \langle \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle}{2},$$

где $L_n(y)$ – полиномы Лагерра.

Замечание 2.6.1. В данной работе мы строим асимптотику вклада по парной переменной x , поэтому эффективно (2.209) может быть сведено к следующему виду:

$$\Psi_c^{acc}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|}{2n} x (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (2.210)$$

где $U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}')$ – гладкая функция переменной $\hat{\mathbf{k}}'$, а параметр x принимает произвольные значения на положительной полуоси ($x \in [0, \infty)$).

Введем новый параметр $t_n = \frac{x}{n^2}$. Пусть при этом значения параметра t_n таковы, что аргумент полинома Лагерра может быть достаточно велик

$$n^\delta < \frac{n|\alpha_1|}{2} t_n (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle) < 4n + 2, \quad n \geq M \gg 1, \delta > 0.$$

Иными словами, мы хотим рассматривать асимптотику полинома Лагерра в области колебаний. Эта асимптотика, согласно сказанному выше, описывается выражениями (2.38), (2.39) и (2.44). Согласно выражению (2.44):

$$e^{-\frac{r}{2}} L_n(r) = 2(-1)^n (2\pi v)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{v} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{r}{v} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sin \left(\frac{v\theta_*}{2} - \frac{v}{4} \sin 2\theta_* + \frac{\pi}{4} \right) + O\left(\frac{1}{v}\right) \right), \quad (2.211)$$

$$v = 4n + 2, \quad r = v \cos^2 \theta_*, \quad 0 < \theta_* < \frac{\pi}{2}$$

в области колебаний асимптотика полиномов Лагерра содержит экспоненциальный рост и быстро осциллирующую функцию. При этом, если мы находимся вне окрестности стационарной точки (при интегрировании по $d\hat{\mathbf{k}}'$ в уравнении (2.210)), точка $\langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle = -1$ соответствует одной из границ области интегрирования и, следовательно, дает один из основных вкладов в интеграл (2.210). Вместе с тем эта точка (в области колебаний полинома Лагерра) полностью компенсирует экспоненциальное убывание $e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x}$, присутствующее в уравнении (2.210) и отвечающее кулоновским функциям дискретного спектра.

Однако, эти рассуждения не переносятся на случай, когда выполнено

$$0 < \frac{n|\alpha_1|}{2} t_n (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \leq 1, \quad n \geq M \gg 1,$$

так как в такой ситуации отсутствует необходимое нам экспоненциальное убывание с большим параметром. В этом случае нужно использовать асимптотику полинома Лагерра в окрестности нуля. Как уже показывалось ранее, старший член асимптотики в окрестности нуля устроен следующим образом:

$$e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) = J_0(\sqrt{vx}), \quad v = 4n + 2. \quad (2.212)$$

Замечание 2.6.2. В силу того, что x изначально полагается большим, то вне малой угловой окрестности $\langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle = 1$, аргумент полинома Лагерра $\frac{|\alpha_1|x}{2n} \left(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle \right)$ приводит к большому аргументу в функции Бесселя, так как зависимость от n сокращается. Старшие же члены асимптотики в области осцилляций и в окрестности нуля переходят друг друга при этих условиях, что обеспечивает верность наших рассуждений при любом $\delta > 0$.

Для вычисления итогового вклада мы поступим следующим образом: добавим и вычтем выражение отвечающее области осцилляций для всех значений аргумента полинома Лагерра, а потом оценим порядок величины отвечающей вкладу выражения для области осцилляций в окрестности начала координат и порядок величины вклада самой окрестности начала координат.

Следствие 2.6.3. *В области осцилляций полиномов Лагерра совокупный вклад окрестности точки накопления дискретного спектра определяется лишь степенным убыванием по главному квантовому числу и содержит лишь осциллирующие (но не убывающие экспоненциально при достаточно больших аргументах) функции.*

Соответствующий вклад имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{n=M}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4(B_2 \ln n + B_1)} U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) (8\pi n |\alpha_1| t_n)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|\alpha_1| t_n}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{|\alpha_1| t_n}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ \times \cos \left(2n \left[\arccos \sqrt{\frac{|\alpha_1| t_n}{4}} - \sqrt{\frac{|\alpha_1| t_n}{4}} \sqrt{1 - \frac{|\alpha_1| t_n}{4}} \right] \right), \quad t_n = \frac{x}{n^2}. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Этим объясняется медленная сходимость многих вычислительных результатов, связанных с рассеянием заряженных кластеров выше порога развала.

Займемся суммированием ряда (2.213). Для этого введем следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \Theta(n) = \frac{(-1)^n}{n^4(B_2 \ln n + B_1)} U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) (8\pi n |\alpha_1| t_n)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|\alpha_1| t_n}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{|\alpha_1| t_n}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \\ \times \cos \left(2n \left[\arccos \sqrt{\frac{|\alpha_1| t_n}{4}} - \sqrt{\frac{|\alpha_1| t_n}{4}} \sqrt{1 - \frac{|\alpha_1| t_n}{4}} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.214)$$

Вычислим асимптотику выражения (2.213) при $x \gg 1$ с помощью метода Пуассона. Для этого рассмотрим обобщенную формулу разложения δ -периодической функции по плоским волнам:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n - u) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i l u}. \quad (2.215)$$

Домножим левую и правую части равенства (2.215) на функцию $\Theta(u)$ и проинтегрируем по du на вещественной оси. Функция Θ была определена в уравнении (2.213) при целочисленных аргументах. В данном случае мы полагаем $\Theta(u)$ функцией непрерывного аргумента, определенной нулем при $u < M - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

В результате интегрирования, мы перепишем выражение (2.213) в виде суммы интегралов

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_M^{\infty} e^{2\pi i l u} \Theta(u) du.$$

Делая замену переменной $s = \frac{1}{4}|\alpha_1|\frac{x}{u^2}$ и вводя обозначения $R \equiv \sqrt{|\alpha_1|x}$, $d \equiv \frac{R^2}{4M^2}$, $0 < d < 1$ приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^d ds \frac{\chi_d^\delta(s)}{B_1 + B_2 \ln\left(\frac{R}{2\sqrt{s}}\right)} \times \\ \times \frac{e^{i\pi\frac{R}{\sqrt{s}}(l+\frac{1}{2})}}{(1-s)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{R}{\sqrt{s}} \left[\arccos(\sqrt{s}) - \sqrt{s(1-s)} \right]\right) \end{aligned} \quad (2.216)$$

или, что то же самое

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^d ds \frac{e^{iR\Phi_l^+(s)} + e^{iR\Phi_l^-(s)}}{B_1 + B_2 \ln\left(\frac{R}{2\sqrt{s}}\right)} \frac{\chi_d^\delta(s)}{(1-s)^{\frac{1}{4}}}. \quad (2.217)$$

Мы используем здесь обозначения

$$\Phi_l^\pm(s) \equiv \frac{\pi}{\sqrt{s}} \left(l + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\arccos(\sqrt{s}) - \sqrt{s(1-s)} \right), \quad (2.218)$$

функция $\chi_d^\delta(s)$ является срезающей функцией в круге радиуса δ с центром в точке $s = d$ в комплексной плоскости s . Выход с вещественной оси в комплексную плоскость s окажется эффективным в дальнейших вычислениях. Нетрудно показать, что уравнение

$$\Phi_l^{\pm'}(s) = -\frac{1}{2s^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\pi}{2} + l\pi \pm \left(\arccos(\sqrt{s}) + \sqrt{s(1-s)} \right) \right\} = 0,$$

не имеет корней на промежутке $0 < s < d < 1$ ни при каких $l \in \mathbb{Z}$. Таким образом, фазовые функции не порождают стационарных точек. С другой стороны, интегрирование по частям в интегралах, содержащихся в выражении (2.217), невозможно из-за наличия логарифмических особенностей знаменателя, которые после дифференцирования становятся неинтегрируемыми.

Воспользовавшись тождеством

$$-\frac{\pi}{2} + \arccos(\sqrt{s}) - \sqrt{s(1-s)} = -\int_0^s \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} d\tau,$$

перепишем выражения (2.218) в виде интегральных представлений

$$\begin{aligned} \Phi_l^+ &= \frac{\pi(l+1)}{\sqrt{s}} - \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} d\tau, \\ \Phi_l^- &= \frac{\pi l}{\sqrt{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Мы собираемся теперь провести оценки выражения (2.217). Перепишем выражение (2.217) в следующем виде:

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \Psi_c^{\text{I}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) + \Psi_c^{\text{II}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) + \Psi_c^{\text{III}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) + \Psi_c^{\text{IV}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}), \quad (2.219)$$

где мы используем следующие обозначения:

$$\Psi_c^I(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^d ds \frac{e^{iR \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} d\tau + \frac{\pi l}{\sqrt{s}} \right]}}{B_1 + B_2 \ln \left(\frac{R}{2\sqrt{s}} \right)} \frac{\chi_d^\delta(s)}{(1-s)^{\frac{1}{4}}}, \quad (2.220)$$

$$\Psi_c^{II}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} \int_0^d ds \frac{e^{-iR \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} d\tau - \frac{\pi(l+1)}{\sqrt{s}} \right]}}{B_1 + B_2 \ln \left(\frac{R}{2\sqrt{s}} \right)} \frac{\chi_d^\delta(s)}{(1-s)^{\frac{1}{4}}}, \quad (2.221)$$

$$\Psi_c^{III}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=-\infty}^{-1} \frac{1}{2} \int_0^d ds \frac{e^{iR \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} d\tau + \frac{\pi l}{\sqrt{s}} \right]}}{B_1 + B_2 \ln \left(\frac{R}{2\sqrt{s}} \right)} \frac{\chi_d^\delta(s)}{(1-s)^{\frac{1}{4}}}, \quad (2.222)$$

$$\Psi_c^{IV}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{2\sqrt{\pi}R^{\frac{3}{2}}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^d ds \frac{e^{-iR \left[\frac{1}{\sqrt{s}} \int_0^s \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} d\tau - \frac{\pi(l+1)}{\sqrt{s}} \right]}}{B_1 + B_2 \ln \left(\frac{R}{2\sqrt{s}} \right)} \frac{\chi_d^\delta(s)}{(1-s)^{\frac{1}{4}}}. \quad (2.223)$$

Для вычисления вкладов первых двух интегралов следует деформировать контур интегрирования в верхнюю (или нижнюю, в зависимости от поведения фазовой функции) полуплоскость. Не трудно увидеть, что основной вклад при таком интегрировании будет давать окрестность точки ноль (но уже лежащая на мнимой оси).

Уводя контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получим, что основной вклад в выражение $\Psi_c^I(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ дает слагаемое, отвечающее $l = 0$. Этот вклад имеет вид

$$\Psi_c^I(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{4\sqrt{\pi}R^{\frac{5}{2}}} \hat{\Upsilon}(R), \quad (2.224)$$

где

$$\hat{\Upsilon}(R) \equiv -ie^{2iR} \int_0^\infty \frac{dt e^{-\frac{t}{3}}}{C(R) - D \ln t} \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right) \right). \quad (2.225)$$

Здесь использованы обозначения

$$C(R) = B_1 + \frac{3}{2}B_2 \ln R - B_2 \ln 2 + iB_2 \frac{\pi}{4}, \quad D = \frac{1}{2}B_2. \quad (2.226)$$

Старший член выражения (2.224) может быть записан в виде

$$\Psi_c^I(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{-3i}{4\sqrt{\pi}R^{\frac{5}{2}}} \frac{e^{2iR}}{C(R)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln R}\right) \right).$$

Уводя контур интегрирования в верхнюю полуплоскость, получим, что основной вклад в выражение $\Psi_c^{II}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ дает слагаемое, отвечающее $l = -1$. Этот вклад имеет вид

$$\Psi_c^{II}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{4\sqrt{\pi}R^{\frac{5}{2}}} \hat{\Upsilon}^*(R). \quad (2.227)$$

Старший член выражения (2.227) может быть записан в виде

$$\Psi_c^{II}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{3i}{4\sqrt{\pi}R^{\frac{5}{2}}} \frac{e^{-2iR}}{C^*(R)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln R}\right) \right).$$

Аналогично можно показать, что вклады в асимптотику выражений $\Psi_c^{\text{III}}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ и $\Psi_c^{\text{IV}}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ экспоненциально малы.

Это дает возможность утверждать, что суммарный вклад в асимптотику трехчастичной собственной функции абсолютно непрерывного спектра парных кулоновских возбуждений имеет вид

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{\sin(2R)}{C(R)R^{\frac{5}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln R}\right) \right), \quad R = \sqrt{|\alpha_1|x} \quad (2.228)$$

в области, ограниченной соотношением $1 \ll x \leq \frac{4M^2}{|\alpha_1|}$, $M \gg 1$.

Вернемся к опущенному нами вкладу окрестности начала координат (для аргумента полинома Лагерра). Напомним изначальное выражение

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} e^{-\frac{|\alpha_1|x}{2n}} \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}}' L_{n-1} \left(\frac{|\alpha_1|x}{2n} (1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle) \right) U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.229)$$

Теперь нас интересует случай, когда аргумент полинома Лагерра становится малым. Мы хотим повторить суммирование по Пуассону

$$\Psi_c^{\text{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_M^{\infty} e^{2\pi i l u} \Theta(u) du.$$

Однако, в этом случае мы не станем явно брать интеграл по угловой переменной $d\hat{\mathbf{k}}'$. Вне малой окрестности направления $\langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle = 1$, аргумент полинома Лагерра попадает в область окрестности начала координат только при n больших, чем некоторое число n_{max} , определяемое из соотношения $\frac{x}{n_{\text{max}}} = 1$. Тем самым, n_{max} пропорционально x . Для того, чтобы оценить вклад, отвечающий суммированию от n_{max} до бесконечности, мы рассмотрим следующее выражение:

$$\Xi = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_{n_{\text{max}}}^{\infty} du \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}} e^{2\pi i l u} \frac{1}{u^3 (B_2 \ln u + B_1)} e^{-x \frac{|\alpha_1|}{4u} (1 + \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle)} J_0(\sqrt{2|\alpha_1|x(1 - \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle)}) U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (2.230)$$

получаемое из (2.229) путем применения метода Пуассона.

Совершая замену переменных $t = \frac{1}{u}$ и делая оценку подынтегральных функций, мы сводим выражение к следующему:

$$\Xi = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{1}{n_{\text{max}}}} dt \int_{\mathbb{S}^2} d\hat{\mathbf{k}} e^{2\pi i l t} \frac{t}{(B_1 - B_2 \ln t)} e^{-xt \frac{|\alpha_1|}{4} (1 + \langle \hat{\mathbf{k}}', \hat{\mathbf{x}} \rangle)} U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{k}}'). \quad (2.231)$$

При $l \neq 0$ достаточно увести контур интегрирования в верхнюю (нижнюю) полуплоскость, чтобы выявить, что основной вклад дает как раз $l = 0$. Вклад этого интеграла может быть оценен величиной порядка $\frac{1}{n_{\text{max}}^2}$, что дает нам убывание порядка x^{-2} , когда основной вклад имеет порядок $x^{-\frac{5}{4}}$. То есть опущенный нами вклад имеет поправочный характер.

Аналогичным образом может быть оценена величина, которую мы добавляли и вычитали. Тем самым можно перейти к подведению итогов.

2.6.1 Обсуждение результатов

Отметим, что структура собственных функций дискретного спектра, входящих в сумму (2.209), изначально предполагает, что основной вклад с ростом переменной $|\mathbf{x}|$ дают слагаемые со все большими значениями индекса (большие значения n и $|\mathbf{x}|$ коррелируют в соответствии с результатами Трикоми для соответствующей асимптотики полиномов Лагерра). Функции, отвечающие меньшим значениям квантового числа n , в силу сказанного выше обладают экспоненциальным затуханием в данной асимптотической области. Отсутствие в явном виде параметра обрезания ряда M отвечает тому соображению, что основной вклад в асимптотику решения трехчастичного уравнения Шрёдингера при больших значениях $|\mathbf{x}|$ в данной асимптотической области конфигурационного пространства вносит набор состояний с большими значениями n . При этом величина $|\mathbf{x}|$ и n коррелируют между собой. Таким образом, уводя на бесконечность значение $|\mathbf{x}|$, мы, тем самым, уводим на бесконечность значение набора индексов n , дающих основной вклад. При этом утверждается, что основной вклад в асимптотику трехчастичной собственной функции абсолютно непрерывного спектра дают лишь состояния с главным квантовым числом, согласованным с величиной $|\mathbf{x}|$. Количественно это согласование выражается полученными в работе явными формулами.

Тем самым, если говорить об асимптотике всего ряда (2.209) при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, окажется, что выражение (2.228) будет играть роль старшего члена.

Отметим осцилляторный характер и медленное (степенное) убывание на бесконечности полученного выражения. Это делает необходимым учет данного асимптотического вклада в вычислительных схемах, строящихся с учетом ограниченного числа собственных функций дискретного спектра, поскольку их экспоненциальное убывание не может соперничать с медленным убыванием полученного совокупного вклада. Соответственно, если говорить, например, о выборе подходящего конечного базисного набора функций в вычислительной схеме, упомянем возможность расширения базисного набора за счет функции с указанной асимптотикой, отвечающей эффективному вкладу совокупности всех парных высоковозбужденных (ридберговских) состояний.

Сформулируем основной результат:

Теорема 2.6.4. *Совокупный вклад парных кулоновских возбужденных состояний в асимптотику состояния рассеяния в задаче трех заряженных квантовых частиц имеет следующий вид при больших значениях $|\mathbf{x}|$:*

$$\Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{4\sqrt{\pi}R^{\frac{5}{2}}} \left(\hat{\Upsilon}(R) + \hat{\Upsilon}^*(R) \right), \quad R = \sqrt{|\alpha_1|x}, \quad (2.232)$$

где функция $\hat{\Upsilon}(R)$ описана в уравнении (2.225).

Старший член этого выражения может быть записан как

$$\Psi_c(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi}} U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}}) \frac{\sin(2R)}{C(R)R^{\frac{5}{2}}}. \quad (2.233)$$

Функция $C(R)$ определена в (2.226), а $U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, -\hat{\mathbf{x}})$ – некоторая известная гладкая функция своих аргументов.

Замечание 2.6.5. Если каждое в отдельности двухчастичное кулоновское связанное состояние является экспоненциально убывающим на бесконечности в конфигурационном пространстве, совокупный вклад всех парных Ридберговских состояний осциллирует и убывает на бесконечности лишь степенным образом с дробным показателем степени и с логарифмической поправкой. Мы показываем, что такое принципиально новое (по сравнению с поведением отдельного парного кулоновского связанного состояния) поведение вклада Ридберговских состояний является настоящей асимптотикой совокупного вклада всех парных связанных состояний (в выделенной паре) в трехчастичное состояние рассеяния. Мы указываем также на связь полученного результата и аналогичных представлений, используемых в феноменологической Теории Квантового Дефекта и в приближении "closure approximation". В частности, полученные нами из общих принципов постоянные B_1 и B_2 имеют связь с параметрами упомянутых приближений. Комплекснозначная функция $C(R)$ в выражении (2.233) соотносится с комплекснозначной особенностью функции Грина, отвечающей суммированию по бесконечному набору квантовых чисел в упомянутых приближениях.

Замечание 2.6.6. Найденная нами асимптотика по якобиевой переменной x совокупного вклада парных состояний дискретного спектра с весовыми функциями (амплитудами) возникает как бесконечная сумма по главному квантовому числу n парной подсистемы (вырождение состояний с фиксированным n учитывается с помощью интеграла по единичной сфере). При этом основной вклад в эту сумму дают лишь состояния, с главными квантовыми числами функционально связанными с $|\mathbf{x}|$. Это означает, что при увеличении $|\mathbf{x}|$ диапазон главных квантовых чисел дающих основной вклад в асимптотику, также сдвигается в сторону увеличения. Этот факт имеет простое качественное объяснение: основной вклад в волновую функцию системы трех частиц на больших расстояниях $|\mathbf{x}|$ будут давать только связанные состояния, средний радиус которых сопоставим с $|\mathbf{x}|$.

Заключение

В работе рассмотрено применение дифракционного подхода к не решенным в достаточной мере ранее задачам рассеяния. В первой части работы показано, что предложенный ранее в работах [5, 6] анзац может быть модифицирован для описания старшего порядка асимптотики задачи рассеяния четырех одноименно заряженных квантовых частиц. С его использованием была построена равномерная по конфигурационному пространству асимптотика, за исключением, быть может, лишь малых окрестностей направлений рассеяния вперед. Также в данной работе были получены результаты для "кластера" произвольного размера в системе с произвольным числом частиц, что является оригинальным результатом (см. [32]).

Во второй главе рассмотрена система трех трехмерных квантовых частиц, взаимодействующих посредством кулоновских парных потенциалов. В двух парных подсистемах предполагается наличие разноименно заряженной пары частиц, заряды которых считаются не равными по абсолютному значению. Для такой системы предложено приближенное решение уравнения Шрёдингера (2.10) в области конфигурационного пространства, где допустимо "почти разделение переменных" (потенциал трехчастичной системы в старшем порядке допускает разделение переменных). Это означает, что в данной области конфигурационного пространства приближенное решение уравнения Шрёдингера может быть представлено в виде спектрального разложения по собственным функциям соответствующей парной подсистемы с некоторыми плотностями $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \hat{\mathbf{k}}')$ для дискретного спектра и $R(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$ для абсолютно непрерывного спектра. Путем согласования предложенного решения с известным ВВК-приближением в асимптотической области конфигурационного пространства, в которой оба представления справедливы, в работе построена асимптотика ядер R_n (2.207) при $n \gg 1$.

При помощи полученного представления исследован вклад спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра системы двух выделенных частиц в структуру асимптотики собственной функции абсолютно непрерывного спектра трехчастичного оператора Шрёдингера (2.213). При помощи метода Пуассона для анализа суммы ряда получен старший член асимптотики такого вклада (2.232).

Этот результат может быть использован в дальнейшем, например, для описания процессов диссоциативной рекомбинации, а также в вопросах электронной импульсной спектроскопии атомов и молекул.

Исследование квантовой задачи рассеяния трех заряженных кулоновских частиц может

быть продолжено. Например, можно в рамках построенного приближения попытаться найти асимптотику вклада абсолютно непрерывного спектра, попытавшись построить некоторый аналог результатов В. С. Буслаева и С. Б. Левина для одноименно заряженных частиц в области конфигурационного пространства, где допустимо "почти разделение" переменных. Интерес может представлять не только явный вид ядер, но и построение непрерывного продолжения ВВК-приближения в асимптотическую область конфигурационного пространства, аналогично тому, как это было сделано в упомянутых работах.

Литература

- [1] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, Том 1, Москва, Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1965 – 296с.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, Том 2, Москва, Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1966 – 296с.
- [3] Будылин А. М., Коптелов Я. Ю., Левин С. Б., *Некоторые аспекты задачи рассеяния для системы трех заряженных частиц*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2017 – Т. 461 – С. 65–93.
- [4] Буслаев В. С., *Формулы следов и некоторые асимптотические оценки ядра резольвенты для оператора Шрёдингера в трехмерном пространстве*, Проблемы математической физики, 1966 – Т. 1 – С. 82–101.
- [5] Буслаев В. С., Левин С. Б., *Асимптотическое поведение собственных функций трехчастичного оператора Шрёдингера. II. Одномерные заряженные частицы*, Алгебра и анализ, 2010 – Т. 22(3) – С. 60–79.
- [6] Буслаев В. С., Левин С. Б., *Система трех трехмерных заряженных квантовых частиц: асимптотическое поведение собственных функций непрерывного спектра на бесконечности*, Функциональный анализ и его приложения, 2012 – Т. 46(2) – С. 83–88.
- [7] Буслаев В. С., Меркурьев С. П., Саликов С. П., *Описание парных потенциалов, для которых рассеяние в квантовой системе трех одномерных частиц свободно от дифракционных эффектов*, Записки научных семинаров ЛОМИ, 1979 – Т. 84 – С. 16–22.
- [8] Буслаев В. С., Меркурьев С. П., Саликов С. П., *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц*, Проблемы математической физики, 1979 – Т. 9 – С. 14–30.
- [9] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, Гос. изд-во физико-мат. лит-ры, 1959. – 470с.
- [10] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963 – 1100с.

- [11] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика*, Том 3, Москва, Наука, 1989 – 768с.
- [12] Левин С. Б., *Об асимптотическом поведении собственных функций непрерывного спектра на бесконечности для системы трех трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц*, Записки научных семинаров ПОМИ, 2016 – Т. 451 – С. 79–115.
- [13] Мак-Лахлан Н., *Теория и приложения функций Маттье*, Москва, ИЛ, 1953 – 476с.
- [14] Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д., *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Москва, Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1985 – 400с.
- [15] Фаддеев Л. Д., *Теория рассеяния для системы из трех частиц*, Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1960 – Т. 39(5) – С. 1459–1467.
- [16] Фаддеев Л. Д., *Математические аспекты задачи трех тел в квантовой теории рассеяния*, Труды математического института АН СССР, 1963 – Т. 69 – С. 3–122.
- [17] Федорюк М. В. *Метод перевала*, Москва, Наука, 1977 – 366с.
- [18] Alt E. O., Graßberger P., Sandhas W., *Reduction of the three-particle collision problem to multi-channel two-particle Lippmann–Schwinger equations*, Nuclear Physics B, 1967 – V. 2(2) – P. 167–180.
- [19] Alt E. O., Levin S. B., Yakovlev S. L., *Coulomb Fourier transformation: A novel approach to three-body scattering with charged particles*, Physical Review C, 2004 – V. 69(3) – P. 034002.
- [20] Alt E. O., Mukhamedzhanov A. M., *Asymptotic solution of the Schrödinger equation for three charged particles*, JETP Lett., 1992 – V. 56(9) – P. 435–439.
- [21] Alt E. O., Mukhamedzhanov A. M., *Asymptotic solution of the Schrödinger equation for three charged particles*, Physical Review A, 1993 – V. 47(3) – P. 2004–2022.
- [22] Alt E. O., Mukhamedzhanov A. M., Nishonov M. M., Sattarov A. I., *Proton-deuteron elastic scattering from 2.5 to 22.7 MeV*, Physical Review C, 2002 – V. 65(6) – P. 064613.
- [23] Alt E. O., Sandhas W., Ziegelmann H., *Coulomb effects in three-body reactions with two charged particles*, Physical Review C, 1978 – V. 17(6) – P. 1981–2005.
- [24] Alt E. O., Sandhas W., in *Coulomb Interactions in Nuclear and Atomic Few-Body Collisions*, edited by F. S. Levin and D. Micha, Plenum, New York, 1996, P. 1.
- [25] Brauner M., Briggs J. S., Klar H., *Triply-differential cross sections for ionisation of hydrogen atoms by electrons and positrons*, Journal of Physics B, 1989 – V. 22 – P. 2265–2287.
- [26] Budylin A. M., Koptelov Ya. Yu., Levin S. B., *Days on Diffraction, On continuous spectrum eigenfunctions asymptotics of three three-dimensional unlike-charged quantum particles scattering problem*, Proceedings of the International Conference, 2016 – P. 89–94.

- [27] Buslaev V. S., Koptelov Ya. Yu., Levin S. B., Strygina D. A., *Numerical construction of the continuous spectrum eigenfunctions of the three body Schrödinger operator: Three particles on the axis with short-range pair potentials*, Physics of Atomic Nuclei, 2013 – V. 76(2) – P. 208–218.
- [28] Buslaev V. S., Levin S. B., *Asymptotic behavior of the eigenfunctions of the many-particle Schrödinger operator. I. One-dimensional particles*, Amer. Math. So. Transl., 2008 – V. 225 – P. 55–71.
- [29] Garibotti G., Miraglia J. E. *Ionization and electron capture to the continuum in the H^+ -hydrogen-atom collision*, Physical Review A, 1980 – V. 21 – P. 572–580.
- [30] Godunov A. L., Kunikeev Sh. D., Mileev V. N., Senashenko V. S., *Description of interaction in final state on the basis of the Fadeev–Mercuriev equations in the processes of ionization and charge transfer* ed. J.Eichler (Amsterdam: North Holland), Thirteenth International Conference on the Physics of Electronic and Atomic Collisions, Berlin, 1983 – P. 380.
- [31] Kievsky A., Viviani M., Rosati S., *Polarization observables in p - d scattering below 30 Me*, Physical Review C, 2001 – V. 64 – P. 024002.
- [32] Koptelov Ya. Yu., Levin S. B. *On the asymptotic behavior in the scattering problem for several charged quantum particles interacting via repulsive pair potentials*, Physics of Atomic Nuclei, 2014 – V. 77(4) – P. 528–536.
- [33] Levin S. B., Koptelov Y. Y. *On asymptotics of the scattering problem solution of n like-charged quantum particles*, Few-Body Systems, 2014 – V. 55(8–10) – P. 809–812.
- [34] Mukhamedzhanov A. M., Alt E. O., Avakov G. V., *Momentum space integral equations for three charged particles. II. Diagonal kernels*, Physical Review C, 2000 – V. 61(6) – P. 064006.
- [35] Peterkop R. K. *Interference effects in the ionization of hydrogen atoms by electron impact*, JETP, 1962 – V. 14(6) – P. 1377–1378.
- [36] Tricomi F. G., *Sul comportamento asintotico dei polinomi di Laguerre*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1949 – V. 28(4) – P. 263–289.
- [37] Yarevsky E., Yakovlev S. L., Larson E., Elander N. *Potential-splitting approach applied to the Temkin–Poet model for electron scattering off the hydrogen atom and the helium ion*, Journal of Physics B, 2015 – V. 48(11) – P. 115002.