«УТВЕРЖДАЮ»
Зам. директора Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

член-корр. РАН Д. О. Орлов
«26» мая 2016 года

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации БЕЛОВА Юрия Сергеевича

«Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)»

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Теория гильбертовых пространств целых функций представляет собой обширный и активно развивающийся раздел современного математического анализа. Такие пространства часто возникают как образы функциональных гильбертовых пространств при унитарных спектральных преобразованиях (таких, как преобразование Фурье, преобразование Крейна–де Бранжа, преобразование Баргмана и др.). Во многих случаях эти пространства могут быть заданы явно, как подпространства целых функций, принадлежащих пространству $L^2(\mu)$ для некоторой локально конечной меры μ в $\mathbb{C}$. Интерес к изучению этих пространств связан с тем, что многие задачи анализа и математической физики решаются проще и, в определенном смысле, более естественно именно в подходящем пространстве целых функций, а не в исходном функциональном гильбертовом пространстве. В рамках этой идеологии Л. де Бранж получил решение обратной спектральной задачи для класса всех канонических систем (к каноническим системам относятся многие классические уравнения математической физики, такие, как уравнение Штурма–Лиувилля, уравнение Шредингера, система Дирака и др.).

В диссертации рассматриваются гильбертовы пространства целых функций трех типов: пространства де Бранжа, пространства целых функций, обладающие базисами Рисса (безусловными базисами) из воспроизводящих ядер, и пространства фоковского типа.

Все эти пространства активно изучаются специалистами. Среди работ, опубликованных в последние 10-15 лет в связи с пространствами де Бранжа и модельными подпространствами K_Θ пространства Харди H^2 (напомним, что $K_\Theta = H^2 \ominus \Theta H^2$, и что для любого пространства де Бранжа существует естественный унитарный изоморфизм между ним и модельным пространством, порожденным подходящей мероморфной внутренней функцией Θ) отметим работы А. Б. Александрова, А. Д. Баранова, В. И. Васюнина, П. Горкин, В. В. Капустина, Р. Мортини, Н. К. Никольского, Д. Ортеги-Серды, Б. Росса, Д. Сарасона, К. Сейпа, Дж. Симы, Д. В. Якубовича и ряда других авторов (включая автора рассматриваемой диссертации).

Как известно, любое пространство де Бранжа обладает ортогональным базисом из воспроизводящих ядер, причем это свойство является характеристическим свойством пространств де Бранжа в обсуждаемом классе гильбертовых пространств целых функций. Таким образом, класс пространств де Бранжа — это подкласс класса пространств, обладающих базисом Рисса из воспроизводящих ядер. Пространства такого типа естественно возникают при изучении одномерных возмущений нормальных операторов. Они были введены К. Сейпом, Т. Менгстэ и автором рассматриваемой диссертации. Пространство Фока естественно возникает во многих задачах современной математической физики. В нем нет базиса Рисса из воспроизводящих ядер (это известный результат К. Сейпа). Однако в этом пространстве существуют системы из воспроизводящих ядер, близкие по своим свойствам к базисам Рисса. Таким образом, ряд методов из теории пространств де Бранжа применимы для изучения пространства Фока.

Обсуждаемые направления исследований содержат много интересных и важных открытых задач. Это, в частности, описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер, задачи о полноте смешанных систем (часть элементов такой системы — это воспроизводящие ядра, а остальные элементы берутся из соответствующей биортогональной системы) и связанные задачи о спектральном синтезе для линейных операторов по Дж. Вермеру. В частности, спектральный синтез для экспоненциальных систем — известная и долгое время остававшаяся открытой задача гармонического анализа. Можно отметить также вопрос о нахождении взаимно однозначных соответствий между классами пространств де Бранжа и классами канонических систем.

Эти вопросы рассматриваются в диссертации Ю. С. Белова. Таким образом, можно сделать вывод об *актуальности* темы диссертации.

В диссертации получен ряд важных новых результатов в упомянутых выше направлениях исследований, связанных с теорией пространств де Бранжа. Кроме того, при помощи теории пространств де Бранжа, решено несколько известных открытых вопросов теории функций. В качестве основных результатов рассматриваемой диссертации можно выделить следующие:

1. Получено полное описание базисов Рисса из воспроизводящих ядер для так называемых «малых» пространств де Бранжа.

2. Дан отрицательный ответ на известный вопрос Н. К. Никольского о полноте системы, биортогональной к системе из воспроизводящих ядер в модельных пространствах K_Θ.

3. Решена известная задача спектрального синтеза для системы экспонент в пространстве $L^2(-\pi,\pi)$ и для системы воспроизводящих ядер в пространствах де Бранжа.

4. Доказана гипотеза Карлсона–Сандберга об описании системы из сдвигов.

5. Получен ответ на вопрос Б. И. Коренблюма об описании подпространств пространства $C^\infty(\mathbb{R})$, инвариантных относительно оператора дифференцирования.

6. Получено описание пространств де Бранжа, соответствующих каноническим системам, чей гамильтониан состоит из неделимых интервалов, сгущающихся влево, и пространств де Бранжа, изоморфных пространствам фоковского типа.

Все эти результаты являются *новыми* и *значимыми* для современного анализа и математической физики.

Все основные результаты диссертации изложены с полными доказательствами и своевременно опубликованы в центральных российских и ведущих зарубежных математических журналах (отметим статьи в таких журналах, как Advances of Mathematics, Geometric and Functional Analysis, International Mathematics Research Notices, Journal of Functional Analysis и др.).

Совокупность полученных в диссертации результатов и развитые для их получения методы могут быть квалифицированы как крупное достижение в математическом анализе.

Основные положения и выводы диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете. Ряд разделов диссертации могут быть включены в специальные курсы, читаемые на математических факультетах университетов.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации. В автореферате и самой диссертации имеются опечатки и незначительные погрешности редакционного характера, неизбежные в работе значительного объема.

Таким образом, диссертация Ю. С. Белова «Гильбертовы пространства целых функций (системы из воспроизводящих ядер, базисность, полнота смешанных систем, задачи спектрального синтеза)» соответствует всем требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор, Белов Юрий Сергеевич, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Отзыв заслушан и одобрен на заседании отдела комплексного анализа Математического института им. В. А. Стеклова РАН 23 мая 2016 года.

Сведения об организации:

ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
Адрес: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8
Телефон: +7(495) 984 81 41
E-mail: steklov@mi.ras.ru

Заведующий отделом
член-корр. РАН, д.ф.-м.н. Е. М. Чирка

Главный научный сотрудник
член-корр. РАН, д.ф.-м.н. С. Ю. Немировский