Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института имени
В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Мингазов Альберт Айдарович

О комплексе Герстена в равнохарактеристическом случае

Специальность 01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Панин Иван Александрович

Санкт-Петербург
2015

Содержание

Введение

Комплекс Герстена — один из важнейших вычислительных инструментов $\mathbb{A}^1$-гомотопической топологии. Комплекс Герстена имеет множество различных вариантов. Объединены они тем, что позволяют вычислять глобальные инварианты схем или многообразий через значения на общих точках неприводимых замкнутых подсхем. Другими словами, зная значения или свойства какого-либо инварианта только на полях, в случае наличия для него резольвенты Герстена мы можем получить значение или какую-то иную информацию на глобальном уровне. Впервые комплекс Герстена был введен в контексте алгебраической K-теории в статье [3]. Для k-схемы X он имеет вид

$$0 \to (i_\xi)_*(\underline{\underline{K_n(k(X))}}) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_*(\underline{\underline{K_{n-1}(k(x))}}) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} (i_y)_*(\underline{\underline{K_{n-2}(k(y))}}) \to \dots$$

Через i_x здесь обозначены вложения общих точек соответствующих неприводимых подсхем, ξ — общая точка X, а через $\underline{\underline{K_{n-1}(k(x))}}$ обозначен постоянный пучок на точке $x \in X$. Соответственно, комплекс состоит из прямых сумм пучков-небоскребов. Он позволяет вычислять когомологии пучка $\underline{\underline{K_n}}$, ассоциированного с предпучком, ставящим в соответствие открытому множеству U его K-теорию $K_n(U)$, в случае, если для всех локальных колец схемы выполнена гипотеза Герстена.

Гипотеза Герстена. *Пусть $X = Spec\ S$, где S — регулярное локальное кольцо. Тогда комплекс Герстена, вычисленный на $Spec\ S$ является резольвентой группы $K_n(S)$. Другими словами, последовательность*

$$0 \to K_n(S) \to K_n(k(S)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{n-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} K_{n-2}(k(\mathfrak{q})) \to \dots$$

является точной.

Гипотеза Герстена доказана Квилленом для локального кольца простой точки многообразия над полем в статье [16]. Это ключевой шаг в доказательстве гипотезы Блоха, которая является одним из красивейших приложений алгебраической K-теории к алгебраической геометрии. Гипотеза Блоха состоит в следующем. Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие над полем

k. Тогда когомологии Зарисского $H^n(X, \underline{\underline{K_n}})$ совпадают с группами Чжоу $CH^n(X)$. Панин в статье [10] доказал гипотезу Герстена для произвольного регулярного равнохарактеристического кольца. В статье [2] выдвинут и доказан некоторый иной вариант гипотезы Герстена. А именно, для центральной простой алгебры D над полем k и локального кольца точки гладкого многообразия комплекс

$$0 \to K_n(D \bigotimes_k S) \to K_n(D \bigotimes_k k(S)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{n-1}(D \bigotimes_k k(\mathfrak{p})) \to \dots .$$

точен. В статье [30] доказывается точность такого комплекса для произвольной алгебры Адзумая над полулокальным кольцом.

В статье [20] Воеводским введен комплекс Герстена для пучков с трансферами и доказан аналог гипотезы Герстена. Она утверждает, что для предпучка с трансферами $\mathcal{F}$ и локального кольца S простой точки многообразия над совершенным полем имеется точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(S) \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} \mathcal{F}_{-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} \mathcal{F}_{-2}(k(\mathfrak{q})) \to \dots .$$

Близким понятием является комплекс Кузена. Ограничимся случаем пучка с трансферами, хотя это понятие гораздо шире. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами, X — гладкое многообразие; комплексом Кузена называется комплекс вида

$$0 \to H^n_\xi(X, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{n+1}_x(X, \mathcal{F}) \to \bigoplus_{x \in X^{(2)}} H^{n+1}_y(X, \mathcal{F}) \to \dots ,$$

дифференциал в котором получается путем перехода к пределу по системе открытых множеств из дифференциала в последовательности тройки. Фактически Воеводский в [20] доказывает два утверждения: точность комплекса Кузена и канонический способ отождествления членов комплекса Кузена и членов комплекса Герстена. Работа [20] является важнейшим этапом в построении категории мотивов. A posteriori, когда категория мотивов Воеводского уже построена, отождествление членов комплекса Кузена и комплекса Герстена соответствует изоморфизму Гизина для замкнутого вложения в мотивах алгебраических многообразий. Поэтому существенная часть данной диссертационной работы посвящена доказательству некоторых свойств гомоморфизма Гизина.

В книге Мореля [8] используется обобщение комплекса Герстена, называемое комплексом Роста – Шмидта. Строго $\mathbb{A}^1$-инвариантные пучки, которые он использует, обобщают пучки с трансферами, используемые для построения категории мотивов, поэтому утверждение из леммы 5.24, доказанное в книге [8], обобщает теорему 12.3 диссертации, являющуюся одним из главных результатов данной диссертационной работы. Но наше доказательство, заключающееся в использовании свойств гомоморфизма Гизина в мотивах алгебраических многообразий, является более прямым, хотя и работает только для этого частного случая.

Целью диссертационной работы является доказательство гипотезы Герстена для равнохарактеристического кольца в двух случаях: для K-теории алгебр Адзумая и для пучков с трансферами. Вот основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту:

- Доказана гипотеза Герстена для алгебр Адзумая для регулярного равнохарактеристического кольца.

- Доказана теорема о согласованности гомоморфизма Гизина и трансфера для пучков с трансферами.

- Доказана теорема о вычисление дифференциала Герстена с помощью раздутия.

- Определен канонический дифференциал Герстена на регулярной локальной нетеровой k-схеме.

- Доказана гипотеза Герстена для пучков с трансферами в случае локального кольца точки регулярной нетеровой k-схемы.

Апробация результатов. Результаты диссертации были изложены на следующих семинарах и конференциях:

1. Семинар кафедры алгебры и геометрии Самарского государственного университета.

2. Пятая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов".

3. Гомотопический семинар факультета математики НИУ ВШЭ.

4. Санкт-Петербургский городской алгебраический семинар имени Д. К. Фадеева.

Научная новизна и публикации. Результаты диссертации являются новыми. Опубликованы в печатных работах автора [25]—[29]. Работы [25], [26], [29] вышли в журналах из списка ВАК.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в области K-теории и теории мотивов Воеводского. Результаты второй главы позволяют вычислять когомологические инварианты на нетеровых k-схемах с помощью пучковой резольвенты Герстена.

Методы исследований. Для доказательства гипотез Герстена в теоремах А и В используются методы статьи [10]. Для построения дифференциала в комплексе Герстена для пучков с трансферами в случае нетеровой схемы мы используем представление локального кольца точки нетеровой k-схемы в виде индуктивного предела колец функций гладких многообразий. Для доказательства теоремы В мы используем методы теории относительных мотивов.

Степень достоверности результатами. Результаты диссертационной работы подтверждены строгими математическими доказательствами и опубликованы в рецензируемых журналах.

Содержание работы. Кратко опишем содержание работы и приведем формулировки основных теорем. Первая глава посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема A. *Пусть R — равнохарактеристическое регулярное кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $X = Spec\ R$. Тогда комплекс Герстена для алгебры $\mathcal{A}$*

$$0 \to K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(X)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} K_{*-2}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(\mathfrak{q})) \to \dots$$

является резольвентой $K_*(\mathcal{A})$, то есть он точен во всех членах кроме нулевого, а ядро первого отображения совпадает с $K_*(\mathcal{A}) \subset K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(X))$.

Согласно нумерации диссертации, эта теорема имеет номер 5.2. Результаты первой главы опубликованы в статье [26].

В первом параграфе мы напоминаем основные понятия алгебраической K-теории и вводим комплекс Герстена для алгебр Адзумая. В следующем параграфе формулируется теорема Попеску, которая позволяет представить регулярное равнохарактеристическое кольцо R в виде индуктивного предела локальных колец R^α точек гладких k-многообразий. В параграфе 3 доказывается лемма, которая утверждает, что для алгебры Адзумая $\mathcal{A}$ можно найти алгебру Адзумая $\mathcal{A}^\alpha$ над R^α для некоторого индекса α, что $\mathcal{A}^\alpha \otimes R = \mathcal{A}$. Далее вычисляются $K_*^{\mathcal{A}}$-когомологии на схеме X_f, где X — спектр локального кольца точки гладкого многообразия, а f — локальный параметр. И в пункте 4.2 с помощью предельного перехода устанавливается справедливость аналогичного утверждения для спектра равнохарактеристического кольца. В параграфе 5 завершается доказательство теоремы A.

Вторая глава посвящена определению канонического дифференциала Герстена для гомотопически инвариантных непрерывных пучков с трансферами на категории регулярных нетеровых k-схем и доказательству гипотезы Герстена в этом случае. Вторая глава, как и первая, начинается с вводного параграфа, в котором вводятся комплекс Кузена, комплекс Герстена для пучков с трансферами, а также основные понятия связанные с мотивами Воеводского алгебраических многообразий. Основной результат второй главы — это следующая теорема, доказанная в параграфе 14.

Теорема B. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, содержащее поле k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный непрерывный пучок с трансферами, определенный на категории нетеровых k-схем. Тогда комплекс Герстена для $\mathcal{F}$*

$$0 \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} \mathcal{F}_{-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} \mathcal{F}_{-2}(k(\mathfrak{q})) \to \dots$$

является резольвентой группы $\mathcal{F}(R)$, то есть он точен во всех членах кроме нулевого, а ядро первого отображения совпадает с $\mathcal{F}(R) \subset \mathcal{F}(K)$.

Согласно нумерации диссертации, эта теорема имеет номер 14.3. Этот результат опубликован в работах автора [27] и [27].

Наиболее нетривиальным моментом доказательства является определение дифференциала Герстена в случае регулярной локальной нетеровой схемы над полем k. Построению дифференциалов в этом комплексе и проверке свойства $\partial^2 = 0$ посвящены параграфы 7—13. В параграфе 7 дается определение пучка с трансферами на категории регулярных нетеровых k-схем, поскольку определение Воеводского пучка с трансферами не совсем подходит к ситуации, когда рассматриваются не только гладкие многообразий, но и регулярные k-схемы. Кроме того, в этом же параграфе мы доказываем существование канонических прямых образов (трансферов) для таких пучков для конечного расширения полей, содержащих поле k. В параграфе 8 мы доказываем несколько технических следствий теоремы Попеску, позволяющих представить раздутие регулярной локальной равнохарактеристической схемы в виде предела раздутий спектров локальных колец точек гладких k-многообразий. В параграфе 9 мы строим канонический дифференциал

Герстена для равнохарактеристического кольца дискретного нормирования с помощью деформации к нормальному расслоению. В параграфе 10 сформулированы теоремы, которые аналогичны доказанным в статьях [12], [7] и [18]. Параграф 11 посвящен доказательству теоремы о согласованности гомоморфизма Гизина в мотивах и трансфера, которое опубликовано в статье автора [26] и в сборнике тезисов [28].

Теорема C. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— конечный морфизм гладких многообразий над полем* k *характеристики* 0*,* $\mathcal{F}$ *— гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами,* $G(f)\colon M(Y) \to M(X)$ *— гомоморфизм Гизина для* f*,* $Tr(f)$ *— трансфер для конечного морфизма* f*. Тогда отображения*

$$\mathcal{F}(G(f)), Tr(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

совпадают.

В диссертации эта теорема является следствием аналогичного утверждения 11.30 для отображения спектров полей. Сама теорема согласно нумерации диссертационной работы, названа следствием 11.31. Его доказательству посвящен параграф 11 в главе 2.

В параграфе 13 определяется дифференциал для регулярного локального равнохарактеристического кольца после предварительной технической работы, выполненной в параграфах 10—11, а также доказывается свойство $\partial^2 = 0$ дифференциала. Для доказательства того, что квадрат дифференциала Герстена в равнохарактеристическом случае равен нулю, требуется сравнить его с пределом дифференциалов в геометрическом случае. Это в свою очередь использует следствие из теоремы Попеску о представление раздутия равнохарактеристической схемы в виде предела раздутий спектров локальных колец гладких многообразий и следующую теорему.

Теорема D. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Пусть также $Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подмногообразия, $\operatorname{codim}_X Z = i+1$, $\operatorname{codim}_X Y = i$. Кроме того, пусть $p\colon \widetilde{X} \to X$ — раздутие X в подмногообразии Z, $\widetilde{Y}$ — собственный прообраз Y, $\widetilde{Z}$ — пересечение $\widetilde{Y}$ с исключительным дивизором. Обозначим через $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(Y-Z) \to \mathcal{F}_{-i-1}(Z)$ — дифференциал Герстена на X, $\widetilde{\partial}\colon \mathcal{F}_{-i}(\widetilde{Y}-\widetilde{Z}) \to \mathcal{F}_{-i-1}(\widetilde{Z})$ — дифференциал Герстена на $\widetilde{X}$. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{-i}(\widetilde{Y}-\widetilde{Z}) \arrow[r, "\widetilde{\partial}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}_{-i-1}(\widetilde{Z}) \arrow[d, "Tr(p|_{\widetilde{Z}})"] \\
\mathcal{F}_{-i}(Y-Z) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{F}_{-i-1}(Z)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Согласно нумерации диссертационной работу эта теорема имеет номер 12.3. Ее доказательство приведено в параграфе 13, оно использует теорему C.

Глава 1. Гипотеза Герстена для алгебр Адзумая в равнохарактеристическом случае

§1. Комплекс Герстена для алгебр Адзумая

В этом параграфе мы определим комплекс Герстена для алгебры Адзумая $\mathcal{A}$ над нетеровым кольцом S. Подробнее об алгебрах Адзумая можно узнать в [23]. Сначала мы напомним некоторые определения.

Определение 1.1. Пусть X — схема над полем k. Алгеброй Адзумая $\mathcal{A}$ на X называется локально свободный пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр такой, что для любой замкнутой точки $x \in X$ слой $\mathcal{A}_x$ является центральной простой алгеброй над полем $k(x)$.

Замечание 1.2. Алгебра Адзумая $\mathcal{A}$ на аффинной схеме $Spec\ S$ определяется алгеброй своих глобальных сечений, поэтому говоря об аффинных схемах мы часто будем считать, что алгебра Адзумая является просто S-алгеброй, имея ввиду кольцо глобальных сечений над $Spec\ S$.

Определение 1.3. Если $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на X, $f\colon Y \to X$, то можно определить алгебру Адзумая $f^*\mathcal{A}$ на Y. Для морфизма аффинных схем $f\colon Spec\ A \to Spec\ B$ алгебра $f^*\mathcal{A}$ совпадает с тензорным произведением $\mathcal{A} \otimes_B A$. Для отображения произвольных схем $f^*\mathcal{A}$ получается склеиванием пучков на аффинных подсхемах. Если Y — замкнутая подсхема X, то вместо $f^*\mathcal{A}$ мы будем снова писать $\mathcal{A}_Y$, для открытой подсхемы U в X отображение f^* — это ограничение пучка, будем обозначать его $\mathcal{A}|_U$.

Замечание 1.4. Иногда, чтобы не усложнять обозначения, мы будем использовать символ $\mathcal{A}$ для обозначения $f^*\mathcal{A}$ на некоторой подсхеме X.

Пусть S — нетерово кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над S. Напомним, что K-группами алгебры Адзумая $K_i(\mathcal{A})$ называются K-группы $K_i(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$ категории $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ конечно-порожденных проективных $\mathcal{A}$-модулей. Аналогично $K_i'(\mathcal{A})$ определяются как K-группы категории всех конечно порожденных $\mathcal{A}$-модулей $Mod(\mathcal{A})$. Если S — кольцо функций гладкого аффинного многообразия над k или локальное кольцо точки гладкого многообразия, то $K_i'(\mathcal{A}) = K_i(\mathcal{A})$.

Теорема 1.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на регулярной схеме X, $Z \subset X$ — замкнутая подсхема, $U = X - Z$ — дополнение. Тогда имеется длинная точная последовательность K-групп*

$$\ldots \to K_{n+1}(\mathcal{A}|_U) \xrightarrow{d} K_n(\mathcal{A}_Y) \to K_n(\mathcal{A}) \to K_n(\mathcal{A}|_U) \xrightarrow{d} \ldots.$$

Доказательство. Теорема доказана в [4]. □

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на регулярной X. Допустим, что $Z_1 \subset Y \subset X$ — замкнутые подсхемы в схеме X, $\operatorname{codim}_X Y = i$, $\operatorname{codim}_X Z_1 = i+1$. По предыдущей теореме для пары $Z_1 \subset Y$ дифференциал d действует из $K_n(\mathcal{A}|_{Y-Z_1})$ в $K_{n-1}(\mathcal{A}_{Z_1})$. Будем наращивать Z_1, заменяя его на $Z_1 \cup \ldots \cup Z_l$, где Z_i — подсхемы той же размерности, что и Z_1, и выбрасывать подсхемы меньшей размерности. В результате, переходя к пределу, мы получим отображение

$$\partial\colon K_n(\mathcal{A}_y) \to \bigoplus_{z \in Y^{(1)}} K_{n+1}(\mathcal{A}_z),$$

где $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{A}_z$ — слои пучка $\mathcal{A}$ в соответствующих точках, $Y^{(1)}$ — множество точек Y коразмерности 1. Рассматривая такие отображения для всех неприводимых подсхем, мы получим комплекс Герстена для схемы X

$$g_*^{\mathcal{A}}(X) = \left(0 \to K_n(\mathcal{A}_\eta) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{n-1}(\mathcal{A}_x) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{y \in X^{(2)}} K_{n-2}(\mathcal{A}_y) \to \ldots\right),$$

где η — общая точка X.

Утверждение 1.6. *Квадрат дифференциала в комплексе Герстена является нулевым.*

Доказательство. Пусть $Z \subset Y \subset X$, $\operatorname{codim}_X Y = 1$, $\operatorname{codim}_X Z = 2$. Рассмотрим отображение длинных точных последовательностей K-групп для вложения пар $(X - Z, X - Y) \subset (X, X - Y)$:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & K_{n+1}(\mathcal{A}_{X-Y}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, equal] & K_n(\mathcal{A}_Y) \arrow[r] \arrow[d] & K_n(\mathcal{A}_X) \arrow[r] \arrow[d] & K_n(\mathcal{A}_{X-Y}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, equal] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & K_{n+1}(\mathcal{A}_{X-Y}) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & K_n(\mathcal{A}_{Y-Z}) \arrow[r] & K_n(\mathcal{A}_{X-Z}) \arrow[r] & K_n(\mathcal{A}_{X-Y}) \arrow[r, "\partial_n"] & \ldots.
\end{tikzcd}$$

Из этой диаграммы дифференциал $\partial_{n+1} \colon K_{n+1}(\mathcal{A}_{X-Y}) \to K_n(\mathcal{A}_{Y-Z})$ пропускается через $K_n(\mathcal{A}_Y)$, а значит, композиция

$$K_{n+1}(\mathcal{A}_{X-Y}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n(\mathcal{A}_{Y-Z}) \xrightarrow{\partial_n} K_{n-1}(\mathcal{A}_Z)$$

является нулевой. Переходя к пределу, мы получим, что композиция дифференциалов Герстена $\partial \circ \partial \colon K_{n+1}(\mathcal{A}_x) \to \bigoplus_{z \in X^{(2)}} K_{n-1}(\mathcal{A}_z)$ нулевая. □

Теорема 1.7. *Пусть S — полулокальное регулярное кольцо геометрического типа, то есть кольцо рациональных функций регулярных в нескольких точках гладкого k-многообразия. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над S. Тогда комплекс Герстена для алгебры $\mathcal{A}$*

$$0 \to K_n(\mathcal{A}_\eta) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{n+1}(\mathcal{A}_x) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} K_{n+2}(\mathcal{A}_y) \to \ldots$$

является резольвентой группы $K_n(\mathcal{A})$.

Доказательство. Теорема доказана в [30]. □

Введем еще некоторое обозначение. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на многообразии $X = Spec\ S$. Через $\underline{\underline{K}}_n^{\mathcal{A}}$ будем обозначать пучок, ассоциированный с предпучком, который ставит в соответствие аффинному открытому $U = Spec\ B$ на X группу $K_n(\mathcal{A}(U))$. Из теоремы 1.7 нетрудно вывести

Следствие 1.8. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая на неприводимом многообразии X. Тогда комплекс пучков*

$$0 \to (i_\eta)_*(\underline{\underline{K_n(\mathcal{A}_\eta)}}) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_*(\underline{\underline{K_{n-1}(\mathcal{A}_x)}}) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} (i_y)_*(\underline{\underline{K_{n-2}(\mathcal{A}_y)}}) \to \ldots,$$

где через $\underline{\underline{K_{n-1}(\mathcal{A}_x)}}$ *обозначен постоянный пучок на точке* $x \in X$, *а отображение* $i_x \colon x \hookrightarrow X$ *— вложение точки, является резольвентой пучка* $\underline{\underline{K}}_n^{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Вычисляя данный комплекс на слоях, получим комплекс Герстена из 1.7. □

Лемма 1.9. *Пусть* X *— спектр регулярного локального кольца* R, $f \in R$ *— локальный параметр,* $\mathcal{A}$ *— алгебра Адзумая над* X, Z *— неприводимая замкнутая регулярная подсхема. Тогда имеет место расщепимая точная последовательность комплексов Герстена*

$$0 \to g_{*-1}^{\mathcal{A}}(Z)[-1] \to g_*^{\mathcal{A}}(X) \to g_*^{\mathcal{A}}(X_f) \to 0,$$

где $[-1]$ *означает сдвиг градуировки на единицу так, что для комплекса* V_* *верно* $V[-1]_i = V_{i-1}$.

Доказательство. Лемма очевидно следует из определения комплекса Герстена. □

Определение 1.10. Пусть X — схема, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над X. Определим пучок на категории схем над X следующим образом. Морфизму $f \colon Y \to X$ сопоставим группы $K_n(f^*\mathcal{A})$ и рассмотрим ассоциированный пучок в топологии Зарисского. Его мы тоже будем обозначать $\underline{\underline{K_n^{\mathcal{A}}}}$, поскольку в ограничении на малый сайт Зарисского X этой пучок совпадает с $\underline{\underline{K_n^{\mathcal{A}}}}$, который определялся ранее.

§2. Теорема Попеску

Определение 2.1. Пусть R — нетерово локальное кольцо. Оно называется равнохарактеристическим, если характеристика его поля вычетов совпадает с характеристикой его поля частных.

Важнейшим фактом о равнохарактеристических кольцах является следующая теорема Попеску.

Теорема 2.2. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо. Тогда существует совершенное поле k, содержащееся в R, и для каждого такого поля k кольцо R представимо в виде направленного индуктивного предела $R = \varinjlim R^\alpha$, где R^α — гладкие конечно порожденные k-алгебры.*

Доказательство. См. [13],[14],[15]. $\square$

Замечание 2.3. Пусть $R = \varinjlim S^\alpha$ — представление равнохарактеристического кольца в виде индуктивного предела колец функций гладких k-алгебр, $\varphi_{\alpha\beta}\colon S^\alpha \to S^\beta$ — связывающие гомоморфизмы, $\varphi_\alpha\colon S^\alpha \to R$ — отображения в предел, $\mathfrak{m}_R$ — максимальный идеал R. Локализуя кольца S^α по идеалам $(\varphi_\alpha)^{-1}(\mathfrak{m}_R)$, можем считать S^α локальными, максимальные идеалы будем обозначать $\mathfrak{m}_{S^\alpha}$. Нетрудно понять, что $\mathfrak{m}_R = \varinjlim \mathfrak{m}_{S^\alpha}$. Пусть $f \in R$ — локальный параметр, то есть $f \in \mathfrak{m}_R$, но $f \notin \mathfrak{m}_R^2$. Тогда можно выбрать индекс α так, чтобы

1) для любого $\beta \geq \alpha$ у f существует прообраз f_β, то есть элемент S^β такой, что $\varphi_\beta(f_\beta) = f$, $\varphi_{\beta\gamma}(f_\beta) = f_\gamma$,

2) каждое f_β является локальным параметром в S^β.

В самом деле, $\mathfrak{m}_R^2 = \varinjlim \mathfrak{m}_{S^\alpha}^2$, и так как $f \notin \mathfrak{m}_R^2$, то существует α такой, что $f_\beta \notin \mathfrak{m}_{S_\beta}^2$ для любого $\beta \geq \alpha$. Потому имеем еще индуктивный предел $R_f = \varinjlim S^\alpha_{f_\alpha}$, где f_α — локальный параметр в S^α. Это будет существенно в дальнейшем.

Замечание 2.4. Все сказанное можно переформулировать на языке аффинных схем. А именно, имеем проективный предел $X = \varprojlim X_\alpha$, где $X = Spec\ R$, $X_\alpha = Spec\ S^\alpha$. Кроме того, выбрав локальные параметры $f_\alpha \in S^\alpha$ такие, что $\varphi_\alpha(f_\alpha) = f$, получаем предел $X_f = \varprojlim X_{\alpha,f_\alpha}$.

§3. Одна лемма об алгебрах Адзумая

Схема нашего доказательства совпадает с рассуждением статьи [10]. Отличие состоит в том, что для представления $R = \varinjlim S_\alpha$ и алгебры Адзумая $\mathcal{A}$ в данном случае требуется найти алгебру Адзумая $\mathcal{A}_\alpha$ над S_α, для которой $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha \otimes_{S_\alpha} R$. Нельзя просто рассмотреть алгебру $\mathcal{A}$ как алгебру над S_α, поскольку в этом случае алгебра $\mathcal{A}$, вообще говоря, не будет алгеброй Адзумая над S_α. Это видно даже в случае центральных простых алгебр. Действительно, пусть D — центральная простая алгебра над K. Любое поле, очевидно, является индуктивным пределом своих подполей относительно вложения. Будучи рассмотренной над подполем $k \subset K$, она, вообще говоря, перестанет быть центральной. Утверждение о существовании алгебры Адзумая $\mathcal{A}_\alpha$ над S_α будет доказано в лемме 3.1.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра Адзумая над равнохарактеристическим кольцом R. Представим R в виде индуктивного предела локальных колец точек гладких многообразий $R = \varinjlim S^\alpha$. Тогда существует индекс α и алгебра Адзумая $\mathcal{A}_\alpha$ такие, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\alpha \otimes_{S_\alpha} R$.*

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — система образующих алгебры $\mathcal{A}$ над кольцом R, а соотношения имеют вид

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k e_k,$$

где $a_{ij}^k \in R$. Пусть индекс α такой, что все они имеют некоторый прообраз при гомоморфизме $S^\alpha \xrightarrow{\varphi_\alpha} R$ (поскольку набор $\{a_{ij}^k\}$ конечен, такой индекс всегда можно выбрать). Тогда можно спустить алгебру $\mathcal{A}$ до S^α-алгебры $\mathcal{A}_\alpha$ с образующими $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и соотношениями

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \widehat{a}_{ij}^k e_k,$$

где $\widehat{a}_{ij}^k$ таковы, что $\varphi_\alpha(\widehat{a}_{ij}^k) = a_{ij}^k$. При этом если для некоторого индекса α такой спуск возможен, то то же верно и для любого $\beta \geq \alpha$, причем

$\mathcal{A}_\beta = \mathcal{A}_\alpha \bigotimes\limits_{S_\alpha} S^\beta$. Поскольку из теоремы Попеску следует, что $R = \varinjlim\limits_{\beta \geq \alpha} S^\beta$, мы можем считать, что алгебру $\mathcal{A}$ можно спустить на любой уровень. По теореме 2.1.3 нам достаточно доказать, что существует α такое, что отображение $\mathcal{A}_\alpha \bigotimes\limits_{S_\alpha} \mathcal{A}_\alpha^{op} \xrightarrow{f_\alpha} End_{S^\alpha}\mathcal{A}_\alpha$ является изоморфизмом. Из коммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Kerf_\alpha & \longrightarrow & \mathcal{A}_\alpha \bigotimes\limits_{S_\alpha} \mathcal{A}_\alpha^{op} & \xrightarrow{f_\alpha} & End_{S^\alpha}\mathcal{A}_\alpha \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} \bigotimes\limits_{R} \mathcal{A}^{op} & \xrightarrow{\sim} & End_R\mathcal{A}
\end{array}$$

заключаем, что $\varinjlim Kerf_\alpha = 0$. Из-за конечной порожденности существует номер β такой, что $Kerf_\gamma$ нулевое для любого $\gamma \geq \beta$, а потому f_γ, инъективны для $\gamma \geq \beta$. Аналогичные рассуждения проводим для коядра. $\square$

Всюду далее мы будем рассматривать схемы над кольцом S_α, где индекс α удовлетворяет условию предыдущей леммы. Алгебру Адзумая $\mathcal{A}_\alpha$ мы можем поднять на любую S_α-схему. Алгебру $\mathcal{A}_\alpha \bigotimes\limits_{S_\alpha} S_\beta$ по прежнему будем обозначать $\mathcal{A}_\beta$. Рассмотрим пучок на категории схем, ставящий в соответствие аффинной схеме $U = Spec\ B$ группу $K_*(\mathcal{A}_\alpha \bigotimes\limits_{S_\alpha} B)$. Его мы тоже будем обозначать $\underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}$, поскольку, ограничив его на категорию R-схем, мы получим в точности пучок, рассматривавшийся ранее. В следующем параграфе мы, применив теорему Гротендика для этого пучка, выведем утверждения о когомологиях пучка $\underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}$, аналогичные имевшим место в параграфе 2.3.

Для обоснования предельного перехода нам потребуется более общая формулировка теоремы Гротендика, чем та, что используется в статье [10]. А именно, нам будет нужно перейти от категории Sch/k схем над полем k к категории схем над S_α. Сформулируем нужную нам версию теоремы Гротендика.

Теорема 3.2. *Пусть A — кольцо и Sch/A — категория нетеровых схем над A. Пусть F — предпучок абелевых групп на Sch/A, перестановочный с проективными пределами нетеровых аффинных схем, то есть каноническое отображение $\varinjlim F(S^\alpha) \to F(\varinjlim S^\alpha)$ является изоморфизмом для каждой индуктивной системы нетеровых A-алгебр с пределом $S = \varinjlim S^\alpha$. Пусть $\widetilde{F}$ — пучок на сайте Зарисского, ассоциированный с F. Тогда для индуктивного предела нетеровых A-алгебр R^β с нетеровым пределом $R = \varinjlim R^\beta$ и любого целого $p \geq 0$, каноническое отображение $\varinjlim H^p_{Zar}(X^\beta, \widetilde{F}) \to H^p_{Zar}(X, \widetilde{F})$ является изоморфизмом (здесь $X^\beta = Spec\ S^\beta$ и $X = Spec\ S$).*

Доказательство. Можно найти в [5]. Набросок доказательства есть также в [10]. $\square$

§4. Несколько лемм о $K^{\mathcal{A}}$-когомологиях

Этот параграф посвящен вычислению когомологий Зарисского пучка $\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*$ над схемой $X_f = Spec\ R_f$, где R — равнохарактеристическое кольцо. В первом пункте мы вычисляем аналогичные когомологии в геометрическом случае, во втором мы доказываем требуемое утверждение с помощью предельного перехода.

4.1. $K^{\mathcal{A}}$-когомологии в геометрическом случае.

Сначала мы докажем две леммы, справедливые для произвольных локальных колец.

Лемма 4.1. *Пусть R — регулярное локальное кольцо, $X = Spec\ R$, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, K — поле частных R, $Z = V(f)$ — замкнутая подсхема в X. Предположим, что для алгебры Адзумая $\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR$ гипотеза Герстена выполняется. Тогда каноническое отображение $K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR)$ в $K_{*-1}\big(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(Z)\big)$ является вложением и композиция*

$$\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*(X_f) \to K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} K) \xrightarrow{\partial_Z} K_{*-1}\big(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(Z)\big)$$

принимает значения в подгруппе $K_{*-1}(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} R/fR) \subset K_{*-1}\big(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} k(Z)\big)$. *(отображение* $\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f) \to K_*(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} K)$ *возникает из пучкового варианта комплекса Герстена на* X_f *после взятия глобальных сечений.)*

Доказательство. Квадрат дифференциала в комплексе равен 0. Отсюда заключаем, что для любого дивизора Y в Z отображение

$$\sum_{X\supset Z'\supset Y} \partial^{Z'}_{Y} \circ \partial_{Z'} \colon K_*(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} K) \to K_{*-2}\big(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} k(Y)\big),$$

где сумма берется по всем неприводимым дивизорам Z' в X, содержащим Y, является нулевым. Для любого дивизора Z', отличного от Z, композиция

$$\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f) \to K_*(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} K) \xrightarrow{\partial_{Z'}} K_{*-1}\big(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} k(Z')\big)$$

зануляется, поскольку это композиция отображений в дополненном пучковом комплексе Герстена $0 \to K_*(\mathcal{A}_f) \to g_*(X_f)$. Теперь, ограничивая отображение $\sum\limits_{X\supset Z'\supset Y} \partial^{Z'}_{Y} \circ \partial_{Z'}$ на $\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)$, получаем что $\partial^{Z}_{Y} \circ \partial_{Z}$ действует из $\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)$ в $K_{*-2}\big(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} k(Y)\big)$, а значит, эта композиция зануляется для любого Y. Поэтому имеем вложение

$$\partial_Z(\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)) \subset \bigcap_{Y} Ker[\partial_Y \colon K_{*-1}\big(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} k(Z)\big) \to K_{*-2}\big(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} k(Y)\big)].$$

Поскольку для Z гипотеза Герстена выполняется, подгруппа справа в точности совпадает с $K_{*-1}(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} R/fR)$. $\square$

Заметим, что для кольца R и алгебры Адзумая $\mathcal{A}$ над R есть каноническое отображение $K_*(\mathcal{A}) \xrightarrow{can} \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_{*}(X)$, где $X = Spec\ R$. Оно получается как отображение глобальных сечений предпучка $U = Spec\ B \mapsto K_*(\mathcal{A}\underset{R}{\otimes} B)$ в его пучковизацию $\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_{*}$. Кроме того, для любого открытого аффинного подмножества в X (например, для X_f) имеем аналогичное отображение.

Лемма 4.2. *В условиях предыдущей леммы диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f) & \xrightarrow{\partial_Z} & K_{*-1}(\mathcal{A}\bigotimes_R R/fR) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle can} & & \Big\uparrow{\scriptstyle id} \\ K_*(\mathcal{A}_f) & \xrightarrow{d_Z} & K_{*-1}(\mathcal{A}\bigotimes_R R/fR) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} = (f)$ — идеал подсхемы Z; $R_\mathfrak{p}$ является кольцом дискретного нормирования, поскольку Z является дивизором. Спектр $R_\mathfrak{p}$ состоит из двух точек: общей и замкнутой. Поэтому общая точка является дополнением замкнутой, а значит, вложение общей точки $Spec\ K \hookrightarrow Spec\ R_\mathfrak{p}$ является открытым, а его дополнение — это $Spec\ k(Z)$. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} Spec\ k(Z) & \longrightarrow & Spec\ R_\mathfrak{p} & \longleftarrow & Spec\ K \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ Z & \longrightarrow & Spec\ R & \longleftarrow & Spec\ R_f. \end{array}$$

Горизонтальные стрелки являются вложениями, слева — замкнутыми, справа — открытыми. Все схемы, участвующие в коммутативной диаграмме, являются схемами над R, поэтому на каждую из них можем поднять алгебру Адзумая $\mathcal{A}$. Получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}\bigotimes_R k(Z) & \longleftarrow & \mathcal{A}_\mathfrak{p} & \longrightarrow & \mathcal{A}\bigotimes_R K \\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\ \mathcal{A}\bigotimes_R R/fR & \longleftarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}_f\ , \end{array}$$

которая дает коммутативную диаграмму K-групп

$$\begin{array}{ccc} K_*(\mathcal{A}\bigotimes_R K) & \xrightarrow{\partial_Z} & K_{*-1}\big(\mathcal{A}\bigotimes_R k(Z)\big) \\ \Big\uparrow & & \Big\uparrow \\ K_*(\mathcal{A}_f) & \xrightarrow{d_Z} & K_{*-1}(\mathcal{A}\bigotimes_R Z). \end{array}$$

Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} K) \arrow[rrr, "\partial_Z"] & & & K_{*-1}\big(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(Z)\big) \\
& \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*(X_f) \arrow[ul] \arrow[r, "\partial_Z"] & K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR) \arrow[ur, hook] & \\
& K_*(\mathcal{A}_f) \arrow[u, "can"] \arrow[r, "d_Z"] \arrow[dl] & K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR) \arrow[u, "id"'] \arrow[dr, hook] & \\
K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} K) \arrow[uuu, "id"] \arrow[rrr, "\partial_Z"] & & & K_{*-1}\big(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(Z)\big). \arrow[uuu, "id"']
\end{tikzcd}$$

Коммутативность нижней трапеции мы только что доказали, остальные трапеции, очевидно, коммутативны. Докажем коммутативность внутреннего квадрата. «Угловое» отображение

$$K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR) \to K_{*-1}\big(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(Z)\big)$$

инъективно, поскольку по предположению леммы гипотеза Герстена для Z выполняется. Теперь диаграммным поиском устанавливаем коммутативность внутреннего квадрата. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть S — локальное кольцо точки гладкого многообразия, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над S, $X = Spec\ S$, $f \in S$ — локальный параметр. Тогда $H^p_{Zar}(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*) = 0$ для $p \geq 1$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность комплексов Герстена

$$0 \to g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1] \to g^{\mathcal{A}}_*(X) \to g^{\mathcal{A}}_*(X_f) \to 0.$$

Комплексы $g^{\mathcal{A}}_*(Z)$ и $g^{\mathcal{A}}_*(X)$ — резольвенты групп $K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS)$ и $K_*(\mathcal{A})$ соответственно. Потому $H^p(g^{\mathcal{A}}_*(X_f)) = 0$ для $p \geq 1$. С другой стороны, $g^{\mathcal{A}}_*(X_f)$ — комплекс глобальных сечений пучка $\underline{\underline{g}}^{\mathcal{A}}_*(X_f)$, который является вялой резольвентой пучка $\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*$ на схеме X_f. Значит, $H^p_{Zar}(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_*) = H^p(g^{\mathcal{A}}_*(X_f)) = 0$ для любого $p \geq 0$. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть S — локальное кольцо точки гладкого многообразия, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над S, $X = Spec(S)$, $f \in S$ — локальный параметр, $X_f = X - V(f)$. Тогда каноническое отображение*

$$K_*(\mathcal{A}_f) \xrightarrow{can} \underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}(X_f)$$

является изоморфизмом, то есть $H^0(X_f, \underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}) = K_*(\mathcal{A}_f)$.

Доказательство. По теореме 1.7 гипотеза Герстена верна для полулокальных колец геометрического типа. В частности, она верна для алгебр Адзумая над локальными кольцами простых точек многообразий. Таким образом, комплексы Герстена $g_{*-1}^{\mathcal{A}}(Z)$ и $g_*^{\mathcal{A}}(X)$ являются резольвентами групп $K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS)$ и $K_*(\mathcal{A})$. Пучковый комплекс Герстена $\underline{\underline{g}}_*^{\mathcal{A}}(X_f)$ — резольвента пучка $\underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}$ на схеме X_f по доказанному в упомянутой выше статье случаю. Так как $\Gamma(X_f, \underline{\underline{g}}_*^{\mathcal{A}}(X_f)) = g_*^{\mathcal{A}}(X_f)$, заключаем $H^0(g_*^{\mathcal{A}}(X_f)) = \underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}(X_f)$. По лемме 1.9 мы имеем точную последовательность комплексов Герстена

$$0 \to g_{*-1}^{\mathcal{A}}(Z)[-1] \to g_*^{\mathcal{A}}(X) \to g_*^{\mathcal{A}}(X_f) \to 0,$$

которая при переходе к глобальным сечениям с учетом предыдущих замечаний дает короткую точную последовательность групп

$$0 \to K_*(\mathcal{A}) \to \underline{\underline{K}}_*^{\mathcal{A}}(X_f) \xrightarrow{\partial_Z} K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS) \to 0. \tag{1.1}$$

С другой стороны, мы можем рассмотреть длинную точную последовательность локализации алгебры $\mathcal{A}$ по системе $\{1, f, f^2, \ldots\}$, что возможно, поскольку эта мультипликативная система лежит в центре алгебры $\mathcal{A}$:

$$\ldots \to K_{n+1}(\mathcal{A}_f) \xrightarrow{d_Z} K_n(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} /fS) \to K_n(\mathcal{A}) \to \ldots.$$

Нам известно, что гипотезы Герстена справедлива для алгебр Адзумая над локальным кольцом точки гладкого многообразия, из нее, в частности, следует инъективность отображения $K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f)$. Действительно, инъективное в силу гипотезы Герстена отображение $K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} K)$ является композицией отображений $K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f)$ и $K_*(\mathcal{A}_f) \to K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} K)$, индуцированных вложениями $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_f$ и $\mathcal{A}_f \subset \mathcal{A} \underset{R}{\otimes} K$ соответственно. Исходя из этого, последовательность K-групп расщепляется на «кусочки» вида

$$0 \to K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f) \xrightarrow{d_Z} K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS) \to 0. \qquad (1.2)$$

Каноническое отображение $K_*(\mathcal{A}_f) \xrightarrow{can} \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X_f)$ индуцирует морфизм точных последовательностей (1.2) $\to$ (1.1), причем группу $K_*(\mathcal{A})$ нам сейчас удобнее воспринимать как $\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X)$ (на что мы имеем право, поскольку каноническое отображение $K_*(\mathcal{A}) \xrightarrow{can} \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X)$ в силу справедливости для схемы X гипотезы Герстена является изоморфизмом):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_*(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "can"] & K_*(\mathcal{A}_f) \arrow[r, "d_Z"] \arrow[d, "can"] & K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X) \arrow[r] & \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X_f) \arrow[r, "\partial_Z"] & K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{S}{\otimes} S/fS) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Действительно, так как схема X локальна и для нее выполняется гипотеза Герстена, каноническое отображение $K_*(\mathcal{A}) \xrightarrow{can} \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X)$ также является изоморфизмом. Потому коммутативность левого квадрата очевидна. А из предыдущей леммы следует коммутативность правого. Значит, отображение $K_*(\mathcal{A}_f) \xrightarrow{can} \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X_f)$ является изоморфизмом. $\square$

4.2. $K^{\mathcal{A}}$-когомологии в равнохарактеристическом случае.

В этом параграфе вычисляются когомологии пучка $\underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*$ на X_f в равнохарактеристическом случае.

Лемма 4.5. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $X = Spec\ R$, f — локальный параметр. Тогда каноническое отображение*

$$K_*(\mathcal{A}_f) \xrightarrow{can} \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X_f)$$

является изоморфизмом. Другими словами, $H^0(X_f, \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*) = K_*(\mathcal{A}_f)$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\varinjlim\limits_{\beta\geq\alpha} K_*(\mathcal{A}_{\beta,f_\beta}) & \longrightarrow & \varinjlim\limits_{\beta\geq\alpha} \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X_{\beta,f_\beta}) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
K_*(\mathcal{A}_f) & \longrightarrow & \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*(X_f).
\end{array}$$

Левая вертикальная стрелка является изоморфизмом, поскольку тензорное произведение и K-функторы перестановочны с индуктивными пределами. Правая вертикальная стрелка является изоморфизмом в силу теоремы Гротендика о предельном переходе (используется частный случай, а именно, перестановочность с пределом H^0). Верхняя стрелка — изоморфизм, поскольку имеем изоморфизм для каждого β. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $f \in R$ — локальный параметр. Тогда*

$$H^p_{Zar}(X_f, \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*) = 0$$

для любого $p \geq 1$.

Доказательство. Из теоремы Гротендика и замечаний после теоремы Попеску имеем:

$$H^p(X_f, \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*) = \varinjlim_{\beta\geq\alpha} H^p(X_{\beta,f_\beta}, \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*).$$

Группы $H^p(X_{\beta,f_\beta}, \underline{\underline{K}}{}^{\mathcal{A}}_*)$ равны нулю при $p > 0$ по лемме 4.3, ибо S_β — локальные кольца точек гладких многообразий. Значит, правая часть равенства зануляется для $p > 0$. $\square$

§5. Доказательство гипотезы Герстена

Лемма 5.1. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R. Тогда последовательность*

$$0 \to K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f) \xrightarrow{d_Z} K_{*-1}(\mathcal{A} \otimes_R R/fR) \to 0$$

точна.

Доказательство. Это утверждение будет следовать из последовательности локализации, если мы докажем, что отображение $K_*(\mathcal{A}) \to K_*(\mathcal{A}_f)$ инъективно. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim\limits_{\beta\geq\alpha} K_*(\mathcal{A}_\beta) & \longrightarrow & \varinjlim\limits_{\beta\geq\alpha} K_*(\mathcal{A}_{\beta,f_\beta}) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ K_*(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K_*(\mathcal{A}_f). \end{array}$$

Вертикальные стрелки являются изоморфизмами, поскольку K-группы коммутируют с индуктивными пределами. Верхняя строка является инъекцией, поскольку $\mathcal{A}_\beta$ — алгебры Адзумая над локальными кольцами точек гладких многообразий, а значит, для них верна гипотеза Герстена, из которой следует инъективность $K_*(\mathcal{A}_\beta) \to K_*(\mathcal{A}_{\beta,f_\beta})$. $\square$

Теорема 5.2. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $\mathcal{A}$ — алгебра Адзумая над R, $X = Spec\ R$. Тогда комплекс Герстена для алгебры $\mathcal{A}$*

$$0 \to K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(X)) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} K_{*-2}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} k(\mathfrak{q})) \to \dots$$

является является резольвентой $K_*(\mathcal{A})$.

Доказательство. Мы будем проводить индукцию по круллевской размерности d кольца R.

1) База индукции. Пусть $\dim(R) = 1$, $f \in R$ — локальный параметр. Утверждение следует из леммы 5.1.

2) Переход индукции. Пусть $\dim(R) \geq 2$ и теорема выполняется для любого регулярного равнохарактеристического кольца размерности меньше, чем d.

Пусть, как обычно, $f \in \mathfrak{m}$ — локальный параметр, $Z = V(f)$ — множество нулей, $\dim(Z) = d - 1$, тогда дополнение X_f к Z до X изоморфно как схема $Spec\ R_f$. Размерность $\dim(X_f)$ меньше d, поскольку любая цепочка неприводимых подмногообразий X наибольшей длины заканчивалась точкой, соответствующей максимальному идеалу $\mathfrak{m}$, который не принадлежит X_f. Лемма 1.9 дает нам точную последовательность

$$0 \to g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1] \to g^{\mathcal{A}}_{*}(X) \to g^{\mathcal{A}}_{*}(X_f) \to 0.$$

Комплекс $g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)$ является резольвентой группы $K_*(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR)$, поскольку к схеме Z применимо предположение индукции. Отсюда $H^p(g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1]) = 0$ для $p \geq 2$ и $H^1(g^{\mathcal{A}}_{*-1}(Z)[-1]) = K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR)$. Схема X_f имеет размерность меньшую, чем X, но не является локальной. Тем не менее, поскольку размерность локальных колец схемы X_f меньше d, комплекс пучков $\underline{\underline{g}}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)$ является резольвентой пучка $\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_{*}$. Как упоминалось ранее, комплекс $\underline{\underline{g}}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)$ состоит из вялых пучков, а комплекс его глобальных сечений — это $g^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)$, потому заключаем, что $H^p(g^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)) = H^p(X_f, \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_{*})$.

Из лемм 4.5 и 4.6 мы знаем, что когомологии пучка $\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_{*}$ на X_f таковы: $H^p(g^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)) = 0$ для $p \geq 1$ и $H^0(g^{\mathcal{A}}_{*}(X_f)) = \underline{\underline{K}}_{*}(X_f)$. Рассматривая длинную точную последовательность когомологий, получаем, что $H^p(g^{\mathcal{A}}_{*}(X)) = 0$ для всех $p \geq 2$, а группы $H^0(g^{\mathcal{A}}_{*}(X))$ и $H^1(g^{\mathcal{A}}_{*}(X))$ связаны точной последовательностью

$$0 \to H^0(g^{\mathcal{A}}_{*}(X)) \to \underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f) \xrightarrow{\partial_Z} K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR) \to H^1(g^{\mathcal{A}}_{*}(X)) \to 0.$$

Лемма 4.1 утверждает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\underline{K}}^{\mathcal{A}}_{*}(X_f) & \xrightarrow{\partial_Z} & K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR) \\
\uparrow{\scriptstyle can} & & \uparrow{\scriptstyle id} \\
K_*(\mathcal{A}_f) & \xrightarrow{d_Z} & K_{*-1}(\mathcal{A} \underset{R}{\otimes} R/fR)
\end{array}$$

коммутативна. Из леммы 4.2 следует, что can — изоморфизм. Поскольку, как мы установили в предыдущей лемме $Ker(d_Z) = K_*(\mathcal{A})$ и $Coker(d_Z) = 0$, получаем равенства $H^0(g^{\mathcal{A}}_{*}(X)) = K_*(\mathcal{A})$, $H^1(g^{\mathcal{A}}_{*}(X)) = 0$. Это завершает доказательство. □

Глава 2. Гипотеза Герстена для пучков с трансферами в равнохарактеристическом случае

§6. Комплекс Герстена для пучков с трансферами

В начале мы определим некоторые понятия, которые будут использоваться в дальнейшем. Начнем с определения комплекса Кузена. Его членами являются когомологии Зарисского с носителями в общих точках подмногообразий. Пусть $\mathcal{F}\colon Sm_k \to Ab$ — пучок на категории гладких квазипроективных многообразий над полем k. Напомним, что когомологии пучка $\mathcal{F}$ на многообразии X с незамкнутым носителем W определяются как предел по открытым множествам U:

$$H^i_W(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{U \cap W \neq \emptyset} H^i_{W \cap U}(U, \mathcal{F}).$$

Для замкнутого подмножества $Y \subset X$ существует длинная точная последовательность когомологий Зарисского

$$\ldots \to H^n_Y(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{p_{X,Y}} H^n(X, \mathcal{F}) \to H^n(X - Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_{X,Y}} H^{n+1}_Y(X, \mathcal{F}) \to \ldots,$$

называемая последовательностью пары. Если зафиксирована пара замкнутых подмножеств $T \subset Y \subset X$, то имеет место точная последовательность тройки:

$$\ldots \to H^n_T(X, \mathcal{F}) \to H^n_Y(X, \mathcal{F}) \to H^n_{Y-T}(X - T, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_{X,Y,T}} H^{n+1}_T(X, \mathcal{F}) \to \ldots.$$

Обратим внимание на то, что дифференциал $d_{X,Y,T}$ в точной последовательности тройки является композицией дифференциала $d_{X,T}\colon H^n(X - T, \mathcal{F}) \to$

$H^{n+1}_T(X,\mathcal{F})$ и отображения $p_{X-T,Y-T}\colon H^n_{Y-T}(X-T,\mathcal{F})\to H^n(X-T,\mathcal{F})$ из точной последовательности пары $Y-T\subset X-T$.

Теперь допустим, что неприводимое подмногообразие Y имеет коразмерность n в X, $T_1\subset Y$ — замкнутое подмногообразие коразмерности $n+1$ в X. Дифференциал последовательности тройки действует так:

$$d_{X,Y,T_1}\colon H^n_{Y-T_1}(X,\mathcal{F})\to H^{n+1}_{T_1}(X,\mathcal{F}).$$

Если мы перейдем к пределу, заменяя T_1 на $T_1\cup T_2\cup\ldots\cup T_k$, где $T_i\subset Y$ — подмногообразия той же размерности, и выбрасывая подмногообразия большей коразмерности, то получим отображение

$$d\colon H^n_y(X,\mathcal{F})\to\bigoplus_{z\in Y^{(1)}}H^{n+1}_z(X,\mathcal{F}),$$

где y — общая точка Y. Проделывая такое же действие для всех подмногообразий неприводимого многообразия X, получим

$$0\to H^0_\eta(X,\mathcal{F})\to\bigoplus_{y\in X^{(1)}}H^1_y(X,\mathcal{F})\to\bigoplus_{z\in X^{(2)}}H^2_z(X,\mathcal{F})\to\ldots,$$

где η — общая точка X, $X^{(i)}$ — множество точек X коразмерности i.

Замечание 6.1. Это действительно комплекс, что легко увидеть из нашего определения. Если рассмотреть композицию двух дифференциалов тройки, окажется, что в нее входит композиция двух последовательных отображений в последовательности пары.

Замечание 6.2. Если пучок $\mathcal{F}$ определен на категории нетеровых k-схем, то комплекс Кузена таким же точно образом можно определить для любой нетеровой k-схемы.

Для определения комплекса Герстена для пучка с трансферами нам понадобятся некоторые факты о пучках с трансферами и мотивах Воеводского. Напомним основные понятия и определения. Подробности можно прочитать в статьях [18] или [21].

Определение 6.3. Введем категорию соответствий Cor_k над полем k. Ее объекты — это гладкие квазипроективные многообразия над полем k. Морфизмы $Cor_k(X, Y)$ между двумя гладкими многообразиями — это свободная абелева группа, порожденная подмногообразиями $Z \subset X \times Y$, которые конечны и сюръективны над X.

Помимо топологии Зарисского мы часто будем упоминать топологию Нисневича на категории гладких многообразий. Напомним ее определение.

Определение 6.4. Топология Нисневича на категории гладких многообразий Sm_k — это топология Гротендика, в которой покрытиями являются этальные морфизмы $t\colon U \to X$ такие, что для любой точки $x \in X$ существует точка $u \in U$, для которой t^* задает изоморфизм $k(x) \to k(u)$.

Определение 6.5. Предпучком с трансферами называется аддитивный функтор $\mathcal{F}\colon Cor_k^{op} \to Ab$. Будем называть $\mathcal{F}$ пучком Зарисского или Нисневича, если он является таковым при ограничении на категорию Sm_k гладких квазипроективных многообразий над k.

Определение 6.6. Предпучок $\mathcal{F}\colon Sm_k^{op} \to Ab$ называется гомотопически инвариантным, если для любого гладкого квазипроективного многообразия X отображение $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{p^*} \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1_k)$, где $p\colon X \times \mathbb{A}^1_k \to X$ — проекция на первый сомножитель, является изоморфизмом.

Определение 6.7. Пусть $\mathcal{F}\colon Sm_k^{op} \to Ab$ — гомотопически инвариантный предпучок абелевых групп на категории многообразий. Обозначим $\mathcal{F}_{-1}(X) = Ker(\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X \times \mathbb{G}_{m,k}))$. Заметим, что $\mathcal{F}_{-1}(X)$ является прямым слагаемым в $\mathcal{F}(X \times \mathbb{G}_{m,k})$, поскольку имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) & \mathcal{F}(X \times \mathbb{G}_{m,k}) \arrow[l, "\mathcal{F}(id\times 1)"'] \\
& \mathcal{F}(X \times \mathbb{A}^1). \arrow[ul, "id"] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Если $\mathcal{F}$ был пучком в некоторой топологии (Зарисского или Нисневича), то $\mathcal{F}_{-1}$ тоже является пучком в этой топологии. Для предпучка $\mathcal{F}$ предпучок

$\mathcal{F}_{-n}$ определяется индуктивно: $\mathcal{F}_{-n}(X) = (\mathcal{F}_{-n+1})_{-1}(X)$.

Лемма 6.8. *Категория пучков Нисневича с трансферами $NSwT$ является абелевой.*

Доказательство. Доказано в [20]. □

Эта лемма позволяет рассмотреть производную категорию пучков Нисневича с трансферами $D^-(NSwT)$. Категория мотивов Воеводского $DM^-(k)$ является полной триангулированной подкатегорией в $D^-(NSwT)$, состоящей из комплексов A^*, пучки когомологий $\underline{\underline{h^i(A^*)}}$ которых являются гомотопически инвариантными.

Определение 6.9. Определим функтор $C^*\colon NSwT \to D^-(NSwT)$ следующим образом. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок Нисневича с трансферами, тогда

$$(C^{-n}\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\Delta^n \times U),$$

где $\Delta^n \subset \mathbb{A}^{n+1}$ — гиперплоскость, заданная уравнением $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Дифференциалы в $C^*\mathcal{F}$ определяются следующим образом. Пусть $\partial_i\colon \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ — вложение i-й грани, то есть образ задается уравнением $x_i = 0$; оно индуцирует $\partial_i^*\colon Cor_k(\Delta^{n+1} \times U, X) \to Cor_k(\Delta^n \times U, X)$. Тогда дифференциал d имеет вид $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i^*$.

Лемма 6.10. *Образ функтора C^* лежит в категории $DM^-(k)$.*

Доказательство. Доказательство можно найти в [9]. □

Определение 6.11. Пусть X — гладкое квазипроективное многообразие над полем k. Обозначим предпучок $\mathbb{Z}_{tr}[X]\colon Cor_k^{op} \to Ab$, который на многообразии U принимает значение $Cor_k(U, X)$.

Лемма 6.12. *Предпучок $\mathbb{Z}_{tr}[X]$ является пучком в топологии Нисневича.*

Доказательство. Доказательство можно найти в [9]. Более того, $\mathbb{Z}_{tr}[X]$ является пучком и в этальной топологии. □

Определение 6.13. Мотивом $M(X)$ гладкого многообразия X называется комплекс $C^*\mathbb{Z}_{tr}[X]$. Если $Z \subset X$ — замкнутое подмногообразие, тогда мотивом с носителем $M_Z(X)$ называется комплекс $C^*(\mathbb{Z}_{tr}[X]/\mathbb{Z}_{tr}[X-Z])$.

Теорема 6.14. *Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Тогда $\mathcal{F}$ — элемент категории мотивов $DM^-(k)$.*

Доказательство. Доказано в [20]. □

Теорема 6.15. *Категория $DM^-(k)$ является тензорной триангулированной, причем $M(X) \otimes M(Y) = M(X \times_k Y)$.*

Доказательство. Доказательству этой теоремы посвящен второй параграф статьи [18]. □

Определение 6.16. Комплекс $C^*\big(Ker(\mathbb{Z}_{tr}[\mathbb{G}_{m,k}] \to \mathbb{Z}_{tr}[pt]\big)[-1]$ обозначим через $\mathbb{Z}(1)$. Для мотивного комплекса $A \in Ob\ DM^-(k)$ будем обозначать через $A(1)$ тензорное произведение $A \otimes \mathbb{Z}(1)$.

Теорема 6.17. *Пусть A, B — элементы категории $DM^-(k)$. Тогда справедливо равенство*

$$Hom_{DM^-(k)}(A(1), B(1)) = Hom_{DM^-(k)}(A, B).$$

Доказательство. Доказано в статье [22]. □

Теорема 6.17 позволяет достаточно просто определить категорию $DM(k)$. Ее объектами являются пары (A, n), где $A \in Ob\ DM^-(k)$, $n \in \mathbb{Z}$. Морфизмы определяются формулой

$$Hom_{DM(k)}((A, n), (B, m)) = \varinjlim_{l \to +\infty} Hom_{DM^-(k)}(A(n+l), B(m+l)).$$

Группа морфизмов справа может быть определена только для достаточно больших l, и все отображения в пределе являются изоморфизмами по предыдущей теореме. Категория $DM^-(k)$ является полной подкатегорией в $DM(k)$, и объект $A(n)$ для $n \geqslant 0$ соответствует объекту (A, n) в категории $DM(k)$. Другими словами, чтобы получить категорию $DM(k)$ из $DM^-(k)$, мы формально добавляем «подкрутки» на отрицательные n.

Важнейшей теоремой в теории мотивов Воеводского является теорема о представимости когомологий мотивных комплексов.

Теорема 6.18. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k, $A \in Ob\ DM(k)$. Тогда*

$$Hom_{DM(k)}(M(X), A[n]) = H^n_{Nis}(X, A),$$

где $H^n_{Nis}(X, A)$ — гиперкогомологии комплекса A на многообразии X.

Доказательство. Доказательство можно найти в [18]. □

Следствие 6.19. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Тогда*

$$Hom_{DM(k)}(M(X), \mathcal{F}[n]) = H^n_{Nis}(X, \mathcal{F}).$$

□

Теорема 6.20. *Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок с трансферами. Обозначим $\mathcal{F}_{Zar}$ — его пучковизацию в топологии Зарисского, $\mathcal{F}_{Nis}$ — в топологии Нисневича. Тогда*

$$\mathcal{F}_{Zar} = \mathcal{F}_{Nis},$$

более того, для гладкого многообразия X верно

$$H^i_{Nis}(X, \mathcal{F}_{Nis}) = H^i_{Zar}(X, \mathcal{F}_{Zar}).$$

Доказательство. Доказательство можно найти в [20]. □

Утверждение 6.21. *Пусть X — гладкое многообразие над k, $\mathcal{F}$ — пучок Нисневича с трансферами. Тогда*

$$Hom_{DM(k)}(M(X)(n)[n], \mathcal{F}) = \mathcal{F}_{-n}(X).$$

Доказательство. Легко доказывается по индукции. □

Следствие 6.22. *Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. В категории мотивов Воеводского $DM(k)$ верно равенство $\mathcal{F}_{-i} = \mathcal{F}(-i)[-i]$.* $\square$

Определение 6.23. Мотивными когомологиями $H^{n,m}(X, \mathbb{Z})$ называются n-ые гиперкогомологии комплекса $\mathbb{Z}(m) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes m} \in Ob\ DM(k)$. По теореме о представимости 6.18,

$$H^{n,m}(X, \mathbb{Z}) = Hom_{DM(k)}(M(X), \mathbb{Z}(m)[n]).$$

Мотив гладкого алгебраического многообразия ковариантно зависит от многообразия, но для достаточно широкого класса проективных морфизмов можно определить отображения контравариантные мотивов, которые называются гомоморфизмами Гизина. Для определения комплекса Герстена требуются только гомоморфизмы Гизина для замкнутых вложений, но позже нам понадобятся гомоморфизмы Гизина и в общем случае, так что мы сразу определим их в полной общности.

Пусть $f\colon X \to Y$ — проективный морфизм квазипроективных многообразий, гладких над полем k, $l = \dim Y - \dim X$ — относительная размерность f. Тогда существует гомоморфизм Гизина $G(f)\colon M(Y) \to M(X)(l)[2l]$. Опишем, как он строится. Мы используем конструкцию, аналогичную использованной в статье [12], для этого достаточно [11] наличия первого класса Черна линейного расслоения L в мотивных когомологиях. В мотивах аналогом первого класса Черна является отображение $M(X) \to \mathbb{Z}(1)[2]$, соответствующее (по теореме 6.18) классу $[L]$ линейного расслоения L в группе $Pic\ X = H^{2,1}(X, \mathbb{Z})$. Разложим f в композицию $X \xrightarrow{i} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p} Y$, где i — замкнутое вложение, p — проекция на первый сомножитель. Мы определим гомоморфизм Гизина отдельно для замкнутых вложений и проекций, то есть $G(f) = G(p) \circ G(i)$, где $G(p)\colon M(Y)(-n)[-2n] \to M(Y \times \mathbb{P}^n)$, $G(i)\colon M(Y \times \mathbb{P}^n) \to M(X)(m)[2m]$, а m — коразмерность X в $Y \times \mathbb{P}^n$.

Гомоморфизм Гизина для замкнутого вложения. Пусть $i\colon X \to Y$ — замкнутое вложение коразмерности n с нормальным расслоением $N = N_{Y/X}$. Обозначим класс Тома в мотивных когомологиях через $th(N) \in H_X^{2n,n}(N,\mathbb{Z})$ (определен в [11]). По теореме о представимости 6.18, имеем

$$H_X^{2n,n}(N,\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M_X(N),\mathbb{Z}(n)[2n]).$$

Значит, класс Тома $th(N)$ однозначно определяет отображение мотивных комплексов $M_X(N) \to \mathbb{Z}(n)[2n]$, которое мы тоже будем обозначать $th(N)$.

Определим гомоморфизм Гизина $G(i)\colon M(Y) \to M(X)$ как следующую композицию:

$$M(Y) \to M_X(Y) \xrightarrow{M(i_0)} M_{X\times\mathbb{A}^1}(Y_t) \xrightarrow{(M(i_1))^{-1}} \\ \longrightarrow M_X(N) \xrightarrow{(th\otimes M(p))\circ M(\Delta)} M(X)(n)[2n],$$

где Y_t — пространство деформации к нормальному расслоению [11], а отображение $\Delta\colon X \to X \times X$ — вложение диагонали.

Гомоморфизм Гизина для проекции. Пусть $\pi\colon X \times \mathbb{P}^n \to X$ — проекция на первый сомножитель. По теореме 4.4 из [18], имеет место канонический изоморфизм

$$M(X\times\mathbb{P}^n) \xrightarrow{\sim} M(X) \oplus M(X)(1)[2] \oplus \ldots \oplus M(X)(n)[2n],$$

и гомоморфизм Гизина $G(p)\colon M(X) \to M(X\times\mathbb{P}^n)(-n)[-2n]$ — это просто вложение прямого слагаемого.

Теорема 6.24. *Гомоморфизм Гизина для проективного морфизма $f\colon X \to Y$ не зависит от от разложения f в композицию $X \xrightarrow{i} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{p} Y$.*

Доказательство. Доказательство аналогично теореме 2.12 из [12]. □

Теорема 6.25. *Пусть $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to W$ — проективные морфизмы относительной размерности n и m соответственно. Тогда*

$$G(g\circ f) = G(f)\circ G(g)\colon M(W) \to M(X)(n+m)[2n+2m].$$

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству свойства 2.2.1 из [12]. $\square$

Аналогичным образом определяется гомоморфизм Гизина с носителем, то есть для проективного морфизма $f\colon X \to Y$ замкнутого подмножества $Z \subset Y$ гомоморфизм Гизина действует $G_Z(f)\colon M_Z Y(n)[2n] \to M_{Z'}X$, где $Z' = f^{-1}(Z)$.

Теорема 6.26. *Пусть $i\colon Y \to X$ — замкнутое вложение гладких многообразий коразмерности n. Тогда гомоморфизм Гизина индуцирует изоморфизм $G(i)\colon M_Y(X) \xrightarrow{\sim} M(Y)(n)[2n]$.*

Доказательство. Доказано в [18]. $\square$

Вернемся к определению дифференциала в комплексе Герстена. Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Зарисского с трансферами (по теореме 6.20, он является пучком с Нисневича). Как и в случае комплекса Кузена, рассмотрим неприводимое подмногообразие Y коразмерности n в X и замкнутое подмногообразие $Z \subset Y$ коразмерности $n+1$ в X. Дифференциал последовательности тройки действует так:

$$d_{X,Y,Z}\colon H^n_{Y-Z}(X, \mathcal{F}) \to H^{n+1}_Z(X, \mathcal{F}).$$

Если $Y - Z$ является гладким многообразием, благодаря гомоморфизму Гизина $M_{Y-Z}(X - Z) \xrightarrow{\sim} M(Y - Z)(n)[2n]$, а также теореме 6.18 и лемме 6.21, получаем изоморфизм $H^n_{Y-Z}(X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}_{-n}(Y - Z)$. Аналогично, если Z — гладкое многообразие, то имеется изоморфизм $H^{n+1}_Z(X, \mathcal{F}) \simeq \mathcal{F}_{-n-1}(Z)$. Но даже если многообразия $Y - Z$ и Z не гладки, при переходе к пределу (наращивая Z и выкидывая подмногообразия меньшей размерности), поскольку подмногообразие особенностей имеет большую коразмерность, мы получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^n_y(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & \bigoplus\limits_{z\in Y^{(1)}} H^{n+1}_z(X,\mathcal{F}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{F}_{-n}(y) \arrow[r, dashed, "\partial"] & \bigoplus\limits_{z\in Y^{(1)}} \mathcal{F}_{-n-1}(z),
\end{tikzcd}$$

которая определяет нижнее отображение ∂, называемое дифференциалом Герстена. Рассматривая дифференциалы для каждого неприводимого подмногообразия X, получим комплекс

$$g(X,\mathcal{F}) = \left(0 \to \mathcal{F}(\eta) \to \bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathcal{F}_{-1}(k(x)) \to \bigoplus_{x\in X^{(2)}} \mathcal{F}_{-2}(k(y)) \to \dots\right).$$

Замечание 6.27. Он действительно является комплексом, поскольку дифференциалы Герстена индуцированы дифференциалами в комплексе Кузена.

В отличие от комплекса Кузена, комплекс Герстена a priori существует только на гладких многообразиях, поскольку в определении задействованы гомоморфизмы Гизина. Рассматривая пределы, можно распространить определение на локальные кольца точек гладких многообразий.

Замечание 6.28. Напомним, что для пучков с трансферами верна лемма об инъективности (доказана в [20]). А именно для неприводимого многообразия Y абелева группа $\mathcal{F}(Y)$ вложена в группу $\mathcal{F}(k(Y))$. В связи с этим мы иногда будем говорит о дифференциале Герстена ∂ действующим из $\mathcal{F}_i(Y)$ в $\mathcal{F}_{-i-1}(Z)$, имея в виду, что левая часть является подгруппой в $\mathcal{F}_{-i}(k(Y))$, правая — в $\mathcal{F}_{-i-1}(Z)$ и ограничение дифференциала $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(Z))$ на $\mathcal{F}_{-i}(Y)$ попадает в $\mathcal{F}_{-i-1}(Z)$.

Замечание 6.29. Иногда мы будем говорить о дифференциале Герстена ∂, действующим из $\mathcal{F}_i(Y)$ в $\mathcal{F}_{-i-1}(Z)$, причем Z будет является несвязным объединением своих неприводимых компонент. Это нужно понимать следующим образом. Пусть $Z_1,\dots,Z_l$ — все неприводимые компоненты. Тогда для каждого j существует дифференциал Герстена $\partial_j\colon \mathcal{F}_i(Y) \to \mathcal{F}_{-i-1}(Z_j)$. Дифференциал ∂ в этом случае совпадает с их прямой суммой по всем j.

Теорема 6.30. *Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами, $\mathcal{O}$ — локальное точки гладкого многообразия над полем k. Тогда комплекс Герстена для схемы $X = Spec\ \mathcal{O}$*

$$0 \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} \mathcal{F}_{-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} \mathcal{F}_{-2}(k(\mathfrak{q})) \to \dots,$$

где K — поле частных $\mathcal{O}$, ht — высота идеала, является резольвентой группы $\mathcal{F}(\mathcal{O})$.

Доказательство. Доказано в статье [20]. □

Теперь, рассматривая дифференциал Герстена для каждого открытого подмножества многообразия X, мы можем построить вялую резольвенту пучка $\mathcal{F}$.

Следствие 6.31. *Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами, X — неприводимое гладкое многообразие над совершенным полем k. Обозначим через $\underline{\underline{\mathcal{F}_{-i}(k(z))}}$ постоянный пучок на точке $z \in X$, $i_z\colon z \to X$ — вложение точки, η — общая точка X. Тогда комплекс пучков*

$$\underline{\underline{g}}(X, \mathcal{F}) = \left(0 \to (i_\eta)_* \left(\underline{\underline{\mathcal{F}(\eta)}}\right) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} (i_x)_* \left(\underline{\underline{\mathcal{F}_{-1}(k(x))}}\right) \to \bigoplus_{y \in X^{(2)}} (i_y)_* \left(\underline{\underline{\mathcal{F}_{-2}(k(y))}}\right) \to \dots\right)$$

является резольвентой пучка $\mathcal{F}$ на X.

Доказательство. Вычисляя комплекс пучков $\underline{\underline{g}}(X, \mathcal{F})$ на локальном кольце точки многообразия, получим комплекс из предыдущей теоремы. □

Замечание 6.32. Пучки $(i_z)_* \left(\underline{\underline{\mathcal{F}_{-i}(k(z))}}\right)$ в комплексе $\underline{\underline{g}}(X, \mathcal{F})$ являются пучками-небоскребами. В частности, члены комплекса являются вялыми пучками, то есть для открытых множеств $U \subset V$ отображения ограничения $G(V) \to G(U)$ являются сюръективными. Отсюда следует, что $H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma(X, \underline{\underline{g}}(X, \mathcal{F})))$ для любого p.

Лемма 6.33. *Пусть S — локальное кольцо точки гладкого многообразия над k, $f \in S$ — локальный параметр, $Z = Spec\ (S/fS)$. Тогда имеет место точная последовательность комплексов Герстена*

$$0 \to g(Z, \mathcal{F}_{-1})[-1] \to g(X, \mathcal{F}) \to g(X_f, \mathcal{F}) \to 0.$$

Доказательство. Следует из определения комплекса Герстена. □

§7. Непрерывные пучки с трансферами на нетеровых схемах.

Пусть R — равнохарактеристическое кольцо. Из теоремы Попеску 2.2 следует, что существует совершенное поле $k \subset R$ и для каждого такого поля, кольцо R представимо в виде предела колец функций гладких аффинных многообразий над полем k. Мы будем дополнительно предполагать, что поле k зафиксировано и имеет характеристику 0 (это будет важно в параграфе 11). Говоря о представлении кольца R из теоремы Попеску, мы будем иметь в виду представление в виде предела k-алгебр. Заметим, что при этих ограничениях понятие равнохарактеристического кольца совпадает с понятием локальной нетеровой k-схемы.

Наша цель — доказать гипотезу Герстена в равнохарактеристическом случае. Для этого необходимо в первую очередь построить дифференциал Герстена в равнохарактеристическом случае. При этом требуется, чтобы пучок с трансферами $\mathcal{F}$ был определен на равнохарактеристической схеме $X = Spec\ R$ и ее открытых и замкнутых подсхемах. Чтобы не усложнять определение, мы просто будем предполагать, что пучок определен на всех нетеровых k-схемах для фиксированного поля k. Кроме того, необходимо некоторое условие непрерывности, поскольку доказательство осуществляется за счет обоснования предельного перехода. Приведем определение, с которым мы в дальнейшем будем работать. Категорию регулярных нетеровых схем над полем k характеристики 0 мы будем обозначать через Sch_k.

Определение 7.1. Непрерывным пучком с трансферами на категории регулярных нетеровых схем над k мы будем называть пучок Зарисского $\mathcal{F}\colon (Sch_k)^{op} \to Ab$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

1) Для представления кольца в виде индуктивного предела $S = \varinjlim S^\alpha$ выполнено $\mathcal{F}(Spec\ S) = \varinjlim \mathcal{F}(Spec\ S^\alpha)$;

2) Существует пучок Зарисского с трансферами $\mathcal{G}\colon Cor_k \to Ab$ такой, что ограничение $\mathcal{F}$ на категорию Sm_k гладких многообразий над k совпадает с ограничением $\mathcal{G}$ на ту же категорию.

Этих двух условий достаточно для наличия трансферов (прямых образов для конченых морфизмов) в случае регулярных k-схем. Мы будем использовать их для случая конечного расширения полей. Докажем соответствующее утверждение.

Утверждение 7.2. *Пусть $E \subset F$ — конечное расширение полей функций схем над k, $f\colon Spec\ F \to Spec\ E$ — соответствующее отображение схем, $\mathcal{F}$ — непрерывный пучок с трансферами на категории Sch_k. Тогда существует каноническое отображение $Tr(f)\colon \mathcal{F}(Spec\ F) \to \mathcal{F}(Spec\ E)$.*

Доказательство. Предположим, что для отображения $p\colon X \to Y$ имеются представления $X = \varprojlim X^\alpha$, $Y = \varprojlim Y^\alpha$, где X^α, Y^α — гладкие многообразия, причем для $\alpha > \beta$ имеют место коммутативные диаграмма

$$\begin{tikzcd} X^\alpha \arrow[d, "p^\alpha"] & X^\beta \arrow[l] \arrow[d, "p^\beta"] \\ Y^\alpha & Y^\beta, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

где все p^α — конечные морфизмы гладких многообразий. Тогда данное представление индуцирует отображение $Tr(p)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$. Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что для отображения f такое представление существует и, что любые два представления f индуцируют один и тот же морфизм $Tr(f)$.

В начале решим вопрос о существовании. Поскольку мы предположили, что основное поле имеет характеристику 0, будем считать, что поле E совпадает с $F[t]/f$, где g — неприводимый многочлен над F. Представим F в виде индуктивного предела колец функций гладких k-алгебр A^α. Существует номер α_0 такой, что все коэффициенты многочлена f имеют прообразы в A^{α_0}. Обозначим через g^α — многочлен в $A^\alpha[t]$, который отображается в g. Тогда поле E представимо в виде предела $\varinjlim A^\alpha[t]/g^\alpha$ для $\alpha > \alpha_0$. Отображение $f^\alpha\colon Spec\,(A^\alpha[t]/g^\alpha) \to Spec\,A^\alpha$ является конечным для достаточно большого α, и отображения $Tr(f^\alpha)$ в пределе индуцируют отображение $Tr(f)$.

Предположим, что есть две системы отображений $p^\alpha\colon S^\alpha \to R^\alpha$ и $\widetilde{p}^\beta\colon \widetilde{S}^\beta \to \widetilde{R}^\beta$, где S^α, R^α, $\widetilde{S}^\beta$, $\widetilde{R}^\beta$ — кольца функций гладких многообразий, p^α, $\widetilde{p}^\beta$ — индуцируют конечные морфизмы на спектрах, и $E = \varinjlim R^\alpha = \varinjlim \widetilde{R}^\beta$, $F = \varinjlim S^\alpha = \varinjlim \widetilde{S}^\beta$. Множества индексов предела по α и по β вообще говоря различны, обозначим их I и J. Мы можем считать, что все пределы берутся по одному множеству индексов $I \times J$, полагая отображения по незадействованным индексам тождественными. Чтобы акцентироваться на том, что предел рассматривается по множеству индексов $I \times J$, мы будем писать $S^{\alpha,\beta}$ вместо S^α. Построим еще одну системы отображений, положив $B^{\alpha,\beta} = S^\alpha \otimes_k \widetilde{S}^\beta$, $C^{\alpha,\beta} = R^\alpha \otimes_k \widetilde{R}^\beta$, $h^{\alpha,\beta} = p^\alpha \otimes \widetilde{p}^\beta\colon B^{\alpha,\beta} \to C^{\alpha,\beta}$. Определим отображения $\Phi^{\alpha,\beta}\colon B^{\alpha,\beta} \to E$ следующим образом, пусть $\varphi^\alpha\colon S^\alpha \to E$, $\widetilde{\varphi}^\beta\colon \widetilde{S}^\beta \to E$, тогда $\Phi^{\alpha,\beta}(u \otimes v) = \varphi^\alpha(u)\widetilde{\varphi}^\beta(v)$. Нетрудно проверить, что $\varinjlim B^{\alpha,\beta} = E$, $\varinjlim C^{\alpha,\beta} = F$. Достаточно понять совпадение отображений $Tr(f)$ индуцированных системами отображений $p^{\alpha,\beta}\colon S^{\alpha,\beta} \to R^{\alpha,\beta}$ и

$h^{\alpha,\beta}\colon B^{\alpha,\beta} \to C^{\alpha,\beta}$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} S^{\alpha} \arrow[r, "p^{\alpha}"] \arrow[d, "id\otimes 1"] & R^{\alpha} \arrow[d, "id\otimes 1"] \\ S^{\alpha} \otimes_k \widetilde{S}^{\beta} \arrow[r, "p^{\alpha}\otimes\widetilde{p}^{\beta}"] & R^{\alpha} \otimes_k \widetilde{R}^{\beta}, \end{tikzcd}$$

которая индуцирует отображение

$$\begin{tikzcd} S^{\alpha,\beta} \arrow[r, "p^{\alpha,\beta}"] \arrow[d] & R^{\alpha,\beta} \arrow[d] \\ B^{\alpha,\beta} \arrow[r, "h^{\alpha,\beta}"] & C^{\alpha,\beta}. \end{tikzcd}$$

Отсюда следует, что отображения трансфера индуцируемое обеими системами совпадают. $\square$

Замечание 7.3. Обратим внимание на то, что ограничение непрерывного пучка с трансферами на категории Sch_k на категорию гладких многообразий является пучком в топологии Нисневича по теореме 6.20.

Мы построим дифференциал Герстена на равнохарактеристической схеме для пучка с трансферами на категории Sch_k и докажем теорему аналогичную теореме 6.30 в этом случае.

§8. Некоторые леммы о равнохарактеристических кольцах

8.1. Гладкие дивизоры на равнохарактеристической схеме

Лемма 8.1. *Пусть R — нетерово кольцо, представленное в виде направленного индуктивного предела $\varinjlim R^{\alpha}$ нетеровых колец, обозначим через $\varphi_{\alpha\beta}\colon R^{\alpha} \to R^{\beta}$ — связывающие гомоморфизмы, $\varphi_{\alpha}\colon R^{\alpha} \to R$ — отображения в предел. Пусть $f \in R$ — любой элемент. Тогда существует α_0 такое, что для любого $\alpha > \alpha_0$ существует $f_{\alpha} \in R^{\alpha}$ такое что $\varphi_{\alpha}(f_{\alpha}) = f$, и $R/f = \varinjlim_{\alpha>\alpha_0} R^{\alpha}/f_{\alpha}$.*

Доказательство. Лемма очевидна. □

Пусть теперь $R = \varinjlim S^\alpha$ — представление равнохарактеристического кольца R в виде направленного индуктивного предела гладких k-алгебр, как и в лемме будем обозначать через $\varphi_{\alpha\beta}\colon S^\alpha \to S^\beta$ — связывающие гомоморфизмы, через $\varphi_\alpha\colon S^\alpha \to S$ — отображения в предел. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в R, обозначим $\mathfrak{p}^\alpha = (\varphi_\alpha)^{-1}(\mathfrak{m}) \subset S^\alpha$. В описанных условиях $R = \varinjlim S^\alpha_{\mathfrak{p}^\alpha}$. Обозначим теперь $R^\alpha = S^\alpha_{\mathfrak{p}^\alpha}$ — локальные кольца некоторых точек многообразий, гладких над k, связующие гомоморфизмы и отображения в предел будем обозначать так же, как и раньше. Пусть теперь $f \in \mathfrak{m}$ — локальный параметр. Существует индекс α_0 и элемент f_{α_0} такой, что $\varphi_{\alpha_0}(f_{\alpha_0}) = f$. Тогда для любого $\alpha > \alpha_0$ обозначим $f_\alpha = \varphi_{\alpha_0\alpha}(f_{\alpha_0})$, при этом все f_α являются локальными параметрами, и справедливо следующее

Утверждение 8.2. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, f — локальный параметр, $X = Spec\ R$. Кроме того, обозначим через Z замкнутую подсхему $Spec\ (R/fR)$. Тогда существует представление R в виде направленного индуктивного предела $\varinjlim R^\alpha$, где R^α — локальные кольца некоторых точек гладких k-многообразий, и локальные параметры $f_\alpha \in R^\alpha$ такие, что*

1) $\varprojlim X^\alpha_{f_\alpha} = X_f$,

2) $\varprojlim Z^\alpha = Z$,

где $Z^\alpha = Spec\ (R^\alpha/f_\alpha R^\alpha)$ — замкнутые подсхемы в X^α. □

8.2. Раздутие равнохарактеристической схемы

В этом пункте мы представим вложенное разрешение особенностей кривой на равнохарактеристической схеме X в виде проективного предела композиций раздутий спектров локальных колец гладких многообразий. Точное утверждение будет сформулировано в конце пункта.

Пусть $R = \varinjlim S^\alpha$ — представление регулярного равнохарактеристического кольца R в виде предела из теоремы Попеску, связующие гомоморфизмы и отображения в предел, как обычно, будем обозначать $\varphi_{\alpha\beta}$ и φ_α. Так же, как и в предыдущем пункте, обозначим $R^\alpha = S^\alpha_{\mathfrak{p}_\alpha}$, где $\mathfrak{p}_\alpha$ — прообраз максимального идеала $\mathfrak{m} \subset R$ при отображении φ_α. Кольца R^α являются локальными кольцами точек гладких k-многообразий.

Если $W = Spec\ R/\mathfrak{p}$ — неприводимая замкнутая подсхема в $X = Spec\ R$, то $\mathfrak{p}$ имеет конечное число образующих, обозначим их, например, $f_1, \ldots, f_n$. Пусть α_0 такое, что $f_1, \ldots, f_n$ имеют прообразы $f_1^{\alpha_0}, \ldots, f_n^{\alpha_0}$ в R_{α_0}, обозначим $f_i^\alpha = \varphi_{\alpha_0\alpha}(f_i^{\alpha_0})$, $\mathfrak{p}_\alpha = (f_1^\alpha, \ldots, f_n^\alpha)$, $W_\alpha = Spec\ R^\alpha/\mathfrak{p}_\alpha$. Тогда по лемме 8.1 верно $W = \varprojlim_{\alpha > \alpha_0} W_\alpha$.

Обозначим замкнутую точку равнохарактеристической схемы $X = Spec\, R$ через z, и пусть $Y \subset X$ — кривая, проходящая через точку z. Выберем какие-то образующие идеалов Y и z в кольце R. Используя процедуру выше, получим подмногообразия $Y^\alpha \subset X^\alpha$ и $Z^\alpha \subset X^\alpha$ той же коразмерности в X^α, что и Y и z в X соответственно. Для некоторого α_0 имеет место включение $Z^\alpha \subset Y^\alpha$ для $\alpha > \alpha_0$. Кроме того, $z = \varprojlim Z^\alpha$, $Y = \varprojlim Y^\alpha$.

Замечание 8.3. Подсхемы Z^α и Y^α выбраны неканонически и зависят от образующих выбранных идеалов z и Y. Нам это не помешает, но с этого момента Z^α и Y^α будут зафиксированы.

Замечание 8.4. Мы иногда будем предполагать, что выбрано некоторое α_0 и рассмотрен предел для всех $\alpha > \alpha_0$. Поскольку операция тривиальна, а предел от этого не меняется, мы не будем больше упоминать об этом.

Утверждение 8.5. *Замкнутые подсхемы $Z^\alpha \subset X^\alpha$ неособы.*

Доказательство. Действительно, выберем в качестве образующих идеала z полную систему локальных параметров $f_1, \ldots, f_n$ в этой точке. Далее заметим, что если мы рассматриваем неприводимый дивизор $D \subset X$, заданный f_1, то гладкость соответствующего дивизора D^α, заданного f_1^α, очевидна. После этого мы можем свести вопрос о гладкости Z^α как подсхемы X^α к вопросу о гладкости Z^α как подсхемы $Spec\ (R^\alpha/f_1^\alpha)$, причем на ней Z^α задается системой локальных параметров $f_2, \dots, f_n$. Продолжаем по индукции. $\square$

Замечание 8.6. Важнейшее наблюдение на данном этапе состоит в том, что отображение нормальных расслоений $d(\varphi^*_{\alpha\beta})\colon N_{X^\beta/Z^\beta} \to N_{X^\alpha/Z^\alpha}$ переводит ненулевые нормальные векторы в ненулевые. Действительно, поскольку $\varphi_{\alpha\beta}(f_i^\alpha) = f_i^\beta$, а образы элементов f_i^α в $\mathfrak{m}_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha^2$ как раз порождают кокасательное пространство. Благодаря этому $d(\varphi^*_{\alpha\beta})$ индуцирует отображение проективизированных нормальных расслоений, а значит, существует отображение раздутий $Bl(\varphi^*_{\alpha\beta})\colon Bl_{Z^\beta}X^\beta \to Bl_{Z^\alpha}X^\alpha$. После этого из определения раздутия достаточно просто устанавливается, что $Bl_z X = \varprojlim Bl_{Z^\alpha}X^\alpha$.

Раздутие мы будем использовать для разрешения особенностей кривой $Y \subset X$. Чтобы контролировать число раздутий, необходимых для разрешения особенностей, нам понадобится понятие кратности многообразия в подмногообразии. Кратность можно определить канонически с помощью класса Сегре нормального конуса к подсхеме, подробнее об этом можно найти в книге [31]. В нашем случае все немного проще, поскольку кратность нужно определять для подсхемы $Y^\alpha \subset X^\alpha$ в гладкой неприводимой подсхеме $Z^\alpha \subset X^\alpha$.

Определение 8.7. Пусть X — неприводимая регулярная схема над полем k, и $Z \subset X$ — неприводимая замкнутая подсхема, $Y \subset X$ — замкнутая подсхема. Обозначим через $\mathfrak{q}$ — идеал Z, через $\mathfrak{p}$ — идеал Y. Кратностью Y в подсхеме Z называется наибольшее натуральное число n такое, что $\mathfrak{q}^n \supset \mathfrak{p}$. Будем обозначать кратность $e_Z Y$.

Следующая теорема доказывается вычислением в локальных картах.

Теорема 8.8. *Пусть $X = Spec\ R$, где R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, пусть z — замкнутая точка на X, Y — кривая на X, схемы X^α, Y^α, Z^α — такие, как выше. Тогда существует α_0 такое, что для любого $\alpha > \alpha_0$ выполнены утверждения:*

1) $e_{Z^\alpha} Y^\alpha = e_z Y$.

2) *Квадраты*

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Z^\alpha \arrow[r, hook] & X^\alpha \end{tikzcd}$$

являются декартовыми.

3) $Bl_z X = \varprojlim Bl_{Z^\alpha} X^\alpha$.

4) *Пусть* $\widetilde{Y^\alpha}$ *— собственный прообраз* Y^α *при раздутии* $Bl_{Z^\alpha} X^\alpha$*. Обозначим через* $Z_1^\alpha, \ldots, Z_l^\alpha$ *неприводимые компоненты подсхемы* $Z^\alpha \times_{X^\alpha} \widetilde{Y^\alpha} \subset Bl_{Z^\alpha} X^\alpha$*. Аналогично, пусть* $\widetilde{Y}$ *собственный прообраз* Y *при раздутии* $Bl_z X$ *и* $z_1, \ldots, z_k$ *— пересечения* $\widetilde{Y}$ *с исключительным дивизором. Тогда* $l = k$ *и* $z_i = \varprojlim Z_i^\alpha$, $\widetilde{Y} = \varprojlim Y^\alpha$, *кроме того,* $e_{Z_i^\alpha} \widetilde{Y^\alpha} = e_{z_i} \widetilde{Y}$.

5) *Квадраты*

$$\begin{tikzcd} z_i \arrow[r] \arrow[d] & Z_i^\alpha \arrow[d] \\ z \arrow[r] & Z^\alpha \end{tikzcd}$$

являются декартовыми.

Если кривая Y имеет особенность в точке z, то последовательное применение предыдущей теоремы позволяет разрешить особенности кривой Y с помощью композиции раздутий $\widetilde{X} = X_n \to \ldots \to X_1 \to X_0 = X$ (схема X_{i+1} является раздутием X_i в замкнутой точке) и представить $\widetilde{X}$ как предел схем $\widetilde{X}^\alpha$. Схема $\widetilde{X}^\alpha$ для достаточно большого α представляется как $\widetilde{X}^\alpha = X_n^\alpha \to \ldots \to X_1^\alpha \to X_0^\alpha = X^\alpha$, где каждая схема в последовательности получается как раздутие в замкнутой подсхеме, соответствующей замкнутой точке, раздуваемой на том же уровне при конструкции $\widetilde{X}$.

Следствие 8.9. *Обозначим через* $\widetilde{Y}$ *— собственный прообраз* Y, $z_1, \ldots, z_k$ *— пересечения* $\widetilde{Y}$ *с исключительным дивизором,* $\widetilde{X^\alpha}$ *— композиция раздутий в соответствующих замкнутых подсхемах,* $\widetilde{Y^\alpha}$ *— собственный прообраз* Y^α, $Z_1^\alpha, \ldots, Z_n^\alpha$ *— собственные прообразы* Z^α*. Тогда* $\widetilde{X} = \varprojlim \widetilde{X^\alpha}$, $\widetilde{Y} = \varprojlim \widetilde{Y^\alpha}$, $z_i = \varprojlim Z_i^\alpha$. $\square$

§9. Дифференциал Герстена в частном случае

В этом параграфе мы определим дифференциал Герстена для некоторого частного случая. А именно, покажем, что для гомотопически инвариантного непрерывного пучка с трансферами $\mathcal{F}$, определенного на категории нетеровых k-схем, схемы $X = Spec\ R$, где R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, и локального параметра $f \in R$ существует канонический (то есть не зависящий от представления R в виде предела) дифференциал $\partial\colon \mathcal{F}(X_f) \to \mathcal{F}_{-1}(Z)$, где $Z = Spec\ (R/fR)$. В частности, это дает определение дифференциала для равнохарактеристического кольца дискретного нормирования.

Нам снова понадобится теорема Гротендика о предельном переходе в когомологиях, но на этот раз менее общая, чем та, что использовалась в первой главе. Набросок доказательства можно найти в [10], полное доказательство в [5]. Мы снова сформулируем теорему для интересующего нас случая.

Теорема 9.1. *Пусть k — поле и Sch_k — категория нетеровых схем над k. Пусть $\mathcal{F}$ — это предпучок абелевых групп на Sch_k, перестановочный с проективными пределами нетеровых аффинных схем, то есть каноническое отображение $\varinjlim \mathcal{F}(S^\alpha) \to \mathcal{F}(\varinjlim S^\alpha)$ является изоморфизмом для каждой индуктивной системы нетеровых k-алгебр с пределом $S = \varinjlim S^\alpha$. Пусть $\widetilde{\mathcal{F}}$ — пучок на сайте Зарисского, ассоциированный с $\mathcal{F}$. Тогда для любого индуктивного предела нетеровых k-алгебр R^β с нетеровым пределом $R = \varinjlim R^\beta$ и любого целого $p \geq 0$ каноническое отображение $\varinjlim H^p_{Zar}(X^\beta, \widetilde{\mathcal{F}}) \to H^p_{Zar}(X, \widetilde{\mathcal{F}})$ — изоморфизм, где $X^\beta = Spec\ S^\beta$ и $X = Spec\ S$.*

Следствие 9.2. *Пусть в условиях предыдущей теоремы заданы такие замкнутые* $Z^\alpha \subset X^\alpha$, $Z \subset X$, $Z = \varprojlim Z^\alpha$, *что квадраты*

$$\begin{tikzcd} Z^\alpha \arrow[r] \arrow[d] & X^\alpha \arrow[d] \\ Z^\beta \arrow[r] & X^\beta \end{tikzcd}$$

декартовы. Тогда каноническое отображение когомологий Зарисского

$$\varinjlim H^p_{Z^\beta}(X^\beta, \widetilde{\mathcal{F}}) \to H^p_Z(X, \widetilde{\mathcal{F}})$$

является изоморфизмом. $\square$

До конца параграфа R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $f \in R$ — локальный параметр, $X = Spec\ R$, $Z = Spec\ (R/fR)$ — замкнутая подсхема в X.

Лемма 9.3. *Пусть* $a \in \mathcal{O}^*(Z)$. *Рассмотрим отображение* $Z \times \mathbb{A}^1 \to Z \times \mathbb{A}^1$, *переводящее* (z,t) *в* (z, at), *которое будем обозначать тоже* a. *Тогда индуцированное отображение* $H^1_Z(Z \times \mathbb{A}^1_k, \mathcal{F}) \xrightarrow{a^*} H^1_Z(Z \times \mathbb{A}^1_k, \mathcal{F})$ *когомологий Зарисского тождественно.*

Доказательство. Вложим $Z \times \mathbb{A}^1 \subset Z \times \mathbb{P}^1$. Однородные координаты на $\mathbb{P}^1$ обозначим $(x : y)$, вложение отождествляет $Z \times \mathbb{A}^1$ с открытым подмножеством $y \neq 0$. Обозначим через A отображение из $Z \times \mathbb{P}^1$ в $Z \times \mathbb{P}^1$, действующее по правилу $(z, x : y) \mapsto (z, a(z)x : y)$. В силу изоморфизма вырезания достаточно доказать, что отображение $A^*\colon H^1_Z(Z \times \mathbb{P}^1, \mathcal{F}) \to H^1_Z(Z \times \mathbb{P}^1, \mathcal{F})$ тождественно.

Вложим проективную прямую $\mathbb{P}^1 = \{(x : y)\}$ в проективную плоскость $\mathbb{P}^2 = \{(x : y : w)\}$ как $w = 0$. И пусть $B\colon Z \times \mathbb{P}^2 \to Z \times \mathbb{P}^2$ — отображение, действующее $(z, x : y : w) \mapsto (z, a(z)x : y : a^{-1}(z)w)$. Заметим, что ограничение B на $Z \times \mathbb{P}^1$ совпадает с A.

Мы видим, что $H^1_Z(Z \times \mathbb{P}^1, \mathcal{F}) \hookrightarrow H^1_Z(Z \times \mathbb{P}^2, \mathcal{F})$. В случае, когда Z — гладкое многообразие, это утверждение следует из теоремы о совпадении когомологий Зарисского и Нисневича для пучка с трансферами 6.20, теоремы о представимости когомологий мотивных комплексов 6.18 и вычисления мотива проективного пространства [18]. Переходом к пределу по открытым подмножествам можно доказать аналогичное утверждение для замкнутого подмножества локальной схемы. Данный факт о замкнутом подмножестве равнохарактеристической схемы получается предельным переходом с помощью следствия 9.2 и утверждения 8.2. Таким образом, нам достаточно доказать, что отображение $B^*\colon H^1_Z(Z \times \mathbb{P}^2, \mathcal{F}) \to H^1_Z(Z \times \mathbb{P}^2, \mathcal{F})$ тождественно. Но $B \in SL_3(\mathcal{O}(Z))$, а значит, поскольку кольцо $\mathcal{O}(Z)$ локально, B является композицией элементарных матриц (доказано в [24]). Значит, B гомотопно единичной матрице, а из гомотопической инвариантности когомологий отображение B^* тождественно. $\square$

Лемма 9.4. *Существует изоморфизм* $\theta\colon H^1_Z(Z \times \mathbb{A}^1_k, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_{-1}(Z)$.

Доказательство. По определению $\mathcal{F}_{-1}$ существует точная последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(Z \times \mathbb{A}^1_k) \to \mathcal{F}(Z \times \mathbb{G}_{m,k}) \to \mathcal{F}_{-1}(Z) \to 0.$$

Из длинной точной последовательности когомологий с учетом локальности Z получаем:

$$0 \to \mathcal{F}(Z \times \mathbb{A}^1_k) \to \mathcal{F}(Z \times \mathbb{G}_{m,k}) \to H^1_0(Z \times \mathbb{A}^1_k, \mathcal{F}) \to 0.$$

Тождественные отображение на левом и среднем членах точной последовательности индуцируют изоморфмизм $\theta\colon H^1_Z(Z \times \mathbb{A}^1_k, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_{-1}(Z)$. $\square$

Поскольку Z — локальная схема, расслоение $N_{X/Z}$ изоморфно $Z \times \mathbb{A}^1_k$, и любая тривиализация отличается от фиксированной умножением на функцию $a \in \mathcal{O}^*(Z)$. Из лемм 9.3 и 9.4 выводим следующее утверждение.

Следствие 9.5. *Существует изоморфизм* $\theta\colon H^1_Z(N_{X/Z}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}_{-1}(Z)$, *не зависящий от тривиализации нормального расслоения.* $\square$

Лемма 9.6. *Для регулярного равнохарактеристического R и локального параметра f обозначим $X = Spec\ R$, $Z = Spec\ (R/fR)$. Деформация к нормальному расслоению (конструкция описана, например, в [11]) дает изоморфизмы когомологий Зарисского*

$$H^1_Z(X, \mathcal{F}) \xleftarrow{i_1^*} H^1_{Z\times\mathbb{A}^1}(X_t, \mathcal{F}) \xrightarrow{i_0^*} H^1_Z(N_{X/Z}, \mathcal{F}).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением кольца R в виде предела из утверждения 8.2, то есть в каждом R^α выберем локальные параметры $f_\alpha \in S^\alpha$ такие, что $\varphi_\alpha(f_\alpha) = f$ для $\alpha > \alpha_0$, $\varphi_{\alpha\beta}(f_\alpha) = f_\beta$. Обозначим через Z^α замкнутые подсхемы $Spec\ (R^\alpha/f_\alpha R^\alpha)$. Для $\beta > \alpha$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^1_{Z^\beta}(X^\beta, \mathcal{F}) & H^1_{Z^\beta\times\mathbb{A}^1}(X^\beta_t, \mathcal{F}) \arrow[l, "i_{1\beta}^*"'] \arrow[r, "i_{0\beta}^*"] & H^1_{Z^\alpha}(N_{X^\alpha/Z^\alpha}, \mathcal{F}) \\ H^1_{Z^\alpha}(X^\alpha, \mathcal{F}) \arrow[u] & H^1_{Z^\alpha\times\mathbb{A}^1}(X^\alpha_t, \mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[l, "i_{1\alpha}^*"'] \arrow[r, "i_{0\alpha}^*"] & H^1_{Z^\beta}(N_{X^\beta/Z^\beta}, \mathcal{F}). \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Это следует из коммутативной диаграммы отображения пар

$$\begin{tikzcd} (X^\beta, X^\beta - Z^\beta) \arrow[r, "i_{1\beta}"] \arrow[d] & (X^\beta_t, X^\beta_t - Z^\beta \times \mathbb{A}^1) \arrow[d] & (N_{X^\beta/Z^\beta}, N_{X^\beta/Z^\beta} - Z^\beta) \arrow[l, "i_{0\beta}"'] \arrow[d] \\ (X^\alpha, X^\alpha - Z^\alpha) \arrow[r, "i_{1\alpha}"] & (X^\alpha_t, X^\alpha_t - Z^\alpha \times \mathbb{A}^1) & (N_{X^\alpha/Z^\alpha}, N_{X^\alpha/Z^\alpha} - Z^\alpha). \arrow[l, "i_{0\alpha}"'] \end{tikzcd}$$

Диаграмма, очевидно, коммутативна при условии корректности вертикальных отображений. Они определены корректно. Действительно, левое отображение корректно: $X^\alpha - Z^\alpha = X^\alpha_{f_\alpha}$, $X^\beta - Z^\beta = X^\beta_{f_\beta}$, а $\varphi_{\alpha\beta}(X^\alpha_{f_\alpha}) \subset X^\beta_{f_\beta}$.

Отображение $\varphi_{\alpha\beta}$ переводит локальный параметр в локальный параметр, соответственно, отображение нормальных расслоений $N_{X^\beta/Z^\beta} \rightarrow N_{X^\alpha/Z^\alpha}$ невырождено.

Можно доказать, что среднее отображение также корректно. Неформально это можно объяснить тем, что его слои над точками $\mathbb{A}^1$ совпадают либо с правым, либо с левым отображением.

Из следствия 9.2 следует, что $H^1_Z(X,\mathcal{F}) = \varinjlim H^1_{Z^\beta}(X^\beta,\mathcal{F})$, $H^1_{Z\times\mathbb{A}^1}(X_t,\mathcal{F}) = \varinjlim H^1_{Z^\beta\times\mathbb{A}^1}(X^\beta_t,\mathcal{F})$, $H^1_Z(N_{X/Z},\mathcal{F}) = \varinjlim H^1_{Z^\beta}(N_{X^\beta/Z^\beta},\mathcal{F})$. Тогда мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^1_Z(X,\mathcal{F}) & H^1_{Z\times\mathbb{A}^1}(X_t,\mathcal{F}) \arrow[l, "i_1^*"'] \arrow[r, "i_0^*"] & H^1_Z(N_{X/Z},\mathcal{F}) \\
H^1_{Z^\alpha}(X_\alpha,\mathcal{F}) \arrow[u] & H^1_{Z^\alpha\times\mathbb{A}^1}(X^\alpha_t,\mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[l, "i_{1\alpha}^*"'] \arrow[r, "i_{0\alpha}^*"] & H^1_{Z^\alpha}(N_{X^\alpha/Z^\alpha},\mathcal{F}), \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

причем вертикальные стрелки в ней при переходе к пределу становятся изоморфизмами. Из теоремы 2.2 статьи [11] следует, что $i^*_{0\alpha}$, $i^*_{1\alpha}$ — изоморфизмы. Это не является утверждением этой теоремы, поскольку нас интересуют локальные кольца, а не гладкие многообразия, но оно легко получается из теоремы переходом к пределу по открытым подмножествам. Переходя к пределу в коммутативной диаграмме выше, получаем утверждение леммы. □

Теорема 9.7. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $f \in R$ — локальный параметр, $X = Spec\ R$, $Z = Spec\ (R/fR)$ — замкнутая подсхема в X. Тогда существует каноническое отображение $\partial\colon \mathcal{F}(X_f) \to \mathcal{F}_{-1}(Z)$ такое, что последовательность*

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_f) \xrightarrow{\partial} \mathcal{F}_{-1}(Z) \to 0$$

точна.

Доказательство. Комбинируя результаты двух предыдущих лемм, имеем канонический изоморфизм $\tau = \theta\circ i_0^*\circ(i_1^*)^{-1}\colon H^1_Z(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{-1}(Z)$. Теперь рассмотрим последовательность когомологий для пары $(X, X-Z)$:

$$\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_f) \xrightarrow{d} H^1_Z(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F}) = 0.$$

С учетом канонического изоморфизма τ получаем последовательность

$$\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_f) \xrightarrow{\partial} \mathcal{F}_{-1}(Z) \to 0,$$

где $\partial = \tau\circ d$. Последнее, что осталось установить, — это инъективность отображения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X_f)$. В случае локального кольца точки это утверждение доказано в [20]. Переходом к пределу получаем то же самое для равнохарактеристического случая. $\square$

Следствие 9.8. *Пусть R — равнохарактеристическое кольцо дискретного нормирования, K — поле частных, k — поле вычетов, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок с трансферами, определенный на категории нетеровых k-схем. Тогда существует канонический дифференциал $\partial\colon \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}_{-1}(k)$ такой, что последовательность*

$$0 \to \mathcal{F}(R) \to \mathcal{F}(K) \xrightarrow{\partial} \mathcal{F}_{-1}(k) \to 0$$

точна. $\square$

Замечание 9.9. Для определения дифференциала Герстена в пункте 13 достаточно последнего следствия. Но теорема 9.7 необходима для доказательства точности комплекса Герстена.

§10. Некоторые свойства гомоморфизма Гизина

Нашей целью является доказательство теоремы о вычислении дифференциала Герстена с помощью разрешения особенностей. Нам понадобятся некоторые утверждения о гомоморфизмах Гизина. В этом параграфе мы сформулируем свойства, аналогичные доказанным в статьях [12] и [7] для ориентированных теорий когомологий.

Теорема 10.1. *Пусть $f\colon X' \to X$ — гладкий проективный морфизм, $Z \subset X$ — замкнутое подмногообразие коразмерности c, обозначим $Z' = Z \times_X X'$. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
M_{Z'}(X') \arrow[r, "M(f)"] \arrow[d, "G(i')"] & M_Z X \arrow[d, "G(i)"] \\
M(Z')(c)[2c] \arrow[r, "M(f_{Z'})(c)[2c]"] & M(Z)(c)[2c]
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Теорема следует из конструкции гомоморфизма Гизина для вложения. □

Теорема 10.2. *Пусть $f\colon X' \to X$ — проективный морфизм гладких многообразий относительной размерности c. Обозначим $p\colon \mathbb{P}^n \times X \to X$, $p\colon \mathbb{P}^n \times X' \to X'$ — проекции на второй сомножитель. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
M(\mathbb{P}^n \times X')(-n)(-2n) \arrow[r, "M(id\times f)"] & M(\mathbb{P}^n \times X)(-n)[-2n] \\
M(X') \arrow[u, "G(p')"] \arrow[r, "M(f)"] & M(X) \arrow[u, "G(p)"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Теорема следует из конструкции гомоморфизма Гизина для проекции. □

Следствие 10.3. *Пусть имеется декартов квадрат*

$$\begin{tikzcd}
W' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"] & X' \arrow[d, "g'"] \\
W \arrow[r, "f"] & X,
\end{tikzcd}$$

в котором отображения g и g' конечны. Тогда квадрат

$$\begin{tikzcd}
M(W') \arrow[d, "G(g)"] & M(X') \arrow[l, "M(f')"'] \arrow[d, "G(g')"] \\
M(W) & M(X) \arrow[l, "M(f)"']
\end{tikzcd}$$

является коммутативным.

Доказательство. В условиях следствия можно согласовано представить морфизмы g и g' в виде композиции вложения и проекции, и применить две предыдущие теоремы. □

Теорема 10.4. *Пусть j_1, j_2 — естественные вложения гладких многообразий Y_1, Y_2 одинаковой размерности в $Y = Y_1 \sqcup Y_2$. Тогда для замкнутого вложения $i\colon Y \hookrightarrow X$ имеем*

$$G(i) = M(j_1) \circ G(i_1) + M(j_2) \circ G(i_1),$$

где $i_r = i \circ j_r$.

Доказательство. Аналогично доказательству свойства 2.2.3 гомоморфизма Гизина в статье [12]. □

Теорема 10.5. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— проективный морфизм гладких многообразий относительной размерности* l, $Z \subset Y$ *— замкнутое подмножество,* $Z' := f^{-1}(Z)$, *обозначим* $p_X\colon M(X) \to M_{Z'}(X)$, $p_Y\colon M(Y) \to M_Z(Y)$ *отображения ограничения носителя. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
M(X)(l)[2l] \arrow[r, "p_X"] & M_{Z'}(X)(l)[2l] \\
M(Y) \arrow[u, "G(f)"] \arrow[r, "p_Y"] & M_Z(Y) \arrow[u, "G_Z(f)"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Следует из конструкции гомоморфизма Гизина. □

Теорема 10.6. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— проективный морфизм гладких многообразий,* $l = \dim\ Y - \dim\ X$, $Z \subset Y$, $Z' = f^{-1}(Z)$, $U = X - Z$, $U' = Y - Z'$. *Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
M_Z(X)(l)[2l] \arrow[r, "d_X"] & M(U)(l)[2l+1] \\
M_{Z'}(Y) \arrow[u, "G(f)"] \arrow[r, "d_Y"] & M(U')(l)[2l+1] \arrow[u, "G(f|_U)"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Аналогично доказательству пункта 8 предложения 1.15 в статье [7]. □

Следствие 10.7. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— проективный морфизм гладких многообразий,* $W \subset Z \subset Y$ *— замкнутые подмножества. Обозначим через* $W' \subset Z' \subset X$ *замкнутые подмножества* $W' = f^{-1}(W)$, $Z' = f^{-1}(Z)$. *Пусть теперь* $d'\colon M_{Z'}X \to M_{W'-Z'}(X - Z')[1]$ *и* $d\colon M_Z Y \to M_{W-Z}(Y - Z)[1]$

— *дифференциалы в соответствующих последовательностях троек. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd} M_Z Y \arrow[r, "d"] \arrow[d, "G_Z(f)"] & M_{W-Z}(Y-Z)[1] \arrow[d, "G_{W-z}(f|_{Y-Z})"] \\ M_{Z'} X \arrow[r, "d'"] & M_{W'-Z'}(X-Z')[1] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Утверждение следует из того, что дифференциал в последовательности тройки является композицией дифференциала в последовательности пары и отображения p из теоремы 10.5. Как мы уже видели, оба этих отображения перестановочны с гомоморфизмом Гизина. $\square$

§11. Согласованность гомоморфизма Гизина и трансфера

Напомним, что в этой главе основное поле k имеет характеристику 0. В этом параграфе это требование будет существенным. Поскольку результат этого параграфа является ключевым для определения дифференциала Герстена, мы вынуждены предполагать, что равнохарактеристическое кольцо содержит поле характеристики 0 на протяжении всей главы.

Обозначение 11.1. Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм. График отображения $\Gamma_f \subset X \times Y$ можно рассматривать как элемент $Cor_k(X, Y)$. Тогда транспонированный график $(\Gamma_f)^t$ лежит в $Cor_k(Y, X)$, а значит, задает морфизм $M(Y) \to M(X)$, будем называть его трансфером. Если $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами, то отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$, индуцированное $(\Gamma_f)^t$, будем обозначать $Tr(f)$.

Весь этот параграфа посвящен доказательству следующего утверждения. Его можно назвать еще одним свойством гомоморфизма Гизина, и было бы логично включить его в предыдущий параграф. Мы не делаем этого по причине нетривиальности этой теоремы, доказательство приведено в пунктах 11.1–11.4 этого параграфа. Эта часть диссертационной работы опубликована в статье [25].

Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм гладких многообразий над полем k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Обозначим через $G(f)\colon M(Y) \to M(X)$ гомоморфизм Гизина для f. Тогда отображения*

$$\mathcal{F}(G(f)), Tr(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

совпадают.

11.1. Категория относительных мотивов

О категории относительных мотивов можно узнать из статьи [1], но мы введем основные понятия и сформулируем утверждения, которые нам понадобятся. Целью этого параграфа является доказательство утверждений 11.12, 11.16, 11.17. В этом параграфе S — неприводимое аффинное многообразие, гладкое над k.

Определение 11.2. Категорией соответствий Cor_S над многообразием S будем называть следующую категорию:

1) ее объекты — квазипроективные многообразия, гладкие над S;

2) для X, $Y \in Ob\ Cor_S$ морфизмы из X в Y — это свободная абелева группа, порожденная подмногообразиями $Z \subset X \times_S W$, конечными над X;

3) композиция морфизмов индуцирована расслоенным произведением.

Определение 11.3. Предпучком с S-трансферами будем называть функтор $\mathcal{F}\colon (Cor_S)^{op} \to Ab$.

Обозначим через $D(NShwT^S)$ производную категорию пучков Нисневича с S-трансферами на категории многообразий над S. Если X — гладкое многообразие над S, обозначим $\mathbb{Z}^S_{tr}[X](U) = Cor_S(U, X)$.

Утверждение 11.4. *Для любого* $X \in Sm/S$ *предпучок* $\mathbb{Z}_{tr}^S[X]$ *является пучком в топологии Нисневича на категории гладких многообразий над* S.

Доказательство. Аналогично доказательству утверждения 6.12. $\square$

Пусть $A(S)$ — толстая подкатегория в $D(NSwT^S)$, порожденная конусами морфизмов $\mathbb{Z}_{tr}^S[X \times 0] \to \mathbb{Z}_{tr}^S[X \times \mathbb{A}^1]$. Комплекс A пучков с S-трансферами будем называть $\mathbb{A}^1$-локальным, если его пучки когомологий $\underline{\underline{h^i(A)}}$ строго гомотопически инварианты (то есть для любого i все когомологии Нисневича пучков $\underline{\underline{h^i(A)}}$ гомотопически инварианты). Пусть $D_{\mathcal{M}}(S)$ — полная подкатегория в $D(NSwT^S)$, состоящая из $\mathbb{A}^1$-локальных объектов. Известно, что существует точный функтор $L_S^{\mathbb{A}^1} \colon D(NSwT^S) \to D_{\mathcal{M}}(S)$ такой, что он переводит подкатегорию $A(S)$ в 0 и отождествляет факторкатегорию $D(NSwT^S)/A(S)$ с категорией $D_{\mathcal{M}}(S)$. Функтор $L_S^{\mathbb{A}^1}$ является левым сопряженным к функтору вложения $i \colon D_{\mathcal{M}} \to D(NSwT^S)$, то есть для комплекса $B \in D(NSwT^S)$ имеется морфизм $B \to i \circ L_S^{\mathbb{A}^1}(B)$, функториальный по B, конус которого лежит в $A(S)$.

Теорема 11.5. 1) *Если* $T(X)$ — *любая* $\mathbb{A}^1$*-локальная замена (то есть комплекс в* $D(NSwT^S)$, *изоморфный* X *в факторкатегории* $D_{\mathcal{M}}(S)$), *то* $T(X) \simeq L(X)$ *в категории* $D(NSwT^S)$.

2) *Для гладкого* X *над* S, *отображение* $\mathbb{Z}_{tr}^S[X] \to C^*\mathbb{Z}_{tr}^S[X]$ *является изоморфизмом в* $D_{\mathcal{M}}(S)$.

3) *Пусть* $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — *морфизм пучков из* $D(NSwT^S)$. *Отображение* φ *является изоморфизмом в* $D_{\mathcal{M}}(S)$ *тогда и только тогда, когда* $C^*\varphi \colon C^*\mathcal{F} \to C^*\mathcal{G}$ — *изоморфизм в категории* $D(NSwT^S)$.

Доказательство. Пункты 1, 2 — стандартные факты о локализации категорий, доказательство можно найти в [6]. Доказательство пункта 3 можно найти, например, в параграфе 5.2 препринта [1]. $\square$

Теорема 11.6. *Пусть* X — *гладкое многообразие над* S, $Z \subset X$ — *замкнутое подмножество. Тогда в* $D_{\mathcal{M}}(S)$ *имеет место выделенный тре-*

угольник

$$M^S(X-Z) \to M^S(X) \to M^S_Z(X) \to M^S(X-Z)[1].$$

Доказательство. Пусть $Z \subset X$ — замкнутое подмножество, U — его дополнение. Последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}^S_{tr}[U] \to \mathbb{Z}^S_{tr}[X] \to \mathbb{Z}^S_{tr}[X]/\mathbb{Z}^S_{tr}[U] \to 0$$

по определению является точной. Благодаря точности функтора L получаем утверждение теоремы. □

Теорема 11.7. *Пусть $\pi\colon X' \to X$ — этальный морфизм, $Z \subset X$ — замкнутое подмножество и $\pi\colon \pi^{-1}(Z) \to Z$ — изоморфизм. Тогда отображение*

$$M^S(\pi)\colon M^S_Z(X') \to M^S_Z(X)$$

изоморфизм.

Доказательство. Аналогично доказательству соответствующего утверждения в случае мотивов над полем в [18]. □

Теорема 11.8. *В категории $D(NSwT^S)$ имеется тензорное произведение, которое мы будем обозначать $\otimes^S_{tr}$. При этом*

1) *функтор $A \otimes^S_{tr}$ – тензорного умножения на комплекс A является точным,*

2) $\mathbb{Z}^S_{tr}(X) \otimes^S_{tr} \mathbb{Z}^S_{tr}(W) = \mathbb{Z}^S_{tr}(X \underset{S}{\times} W)$.

Доказательство. Аналогично построению тензорного произведения в категории мотивов Воеводского $DM(k)$ в статье [18]. □

Следствие 11.9. *Тензорное произведение в категории $D(NSwT^S)$ индуцирует тензорное произведение в $D_{\mathcal{M}}(S)$, и функтор $L^{\mathbb{A}^1}_S$ согласован с тензорным произведением.* □

Утверждение 11.10. *Пусть X многообразие над S. Тогда существует изоморфизм*
$$M^S(X)(1)[2] \simeq M^S_X(X \times \mathbb{A}^1).$$

Доказательство. Легко получается из 11.6. $\square$

Лемма 11.11. *Пусть $f\colon X' \to X$ — покрытие Нисневича многообразия X над S. Тогда последовательность пучков Нисневича*
$$0 \leftarrow \mathbb{Z}^S_{tr}[X] \xleftarrow{f_*} \mathbb{Z}^S_{tr}[X] \xleftarrow{(p_2)_*-(p_1)_*} \mathbb{Z}^S_{tr}[X' \underset{X}{\times} X'] \leftarrow \dots$$
точна. $\square$

Аналогично доказательству соответствующего утверждения для случая поля в [18].

Теорема 11.12. *Пусть X конечно этально над S. Тогда мотив $M^S(X)$ квазиизоморфен пучку $\mathbb{Z}^S_{tr}[X]$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что пучок $\mathbb{Z}^S_{tr}[X]$ строго гомотопически инвариантен. Обозначим, структурный морфизм $f\colon X \to S$. Теперь заметим, что пучок $\mathbb{Z}^S_{tr}[X]$ совпадает с $f_*\mathbb{Z}$. Пусть S' гладкое над S, $X' = S' \times_S X$. Рассмотрим спектральную последовательность Лере:
$$H^p(S', R^q f_*\mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(X', \mathbb{Z}).$$
Росток $(R^q f_*\mathbb{Z})_{s'}$ для $s' \in S'$ совпадает с $H^q(X'_{s'}, \mathbb{Z})$, где $X'_{s'} = (S'_{s'})^h \times_{S'} X'$. Когомологии $H^q(X'_{s'}, \mathbb{Z})$ нулевые для $i > 0$, так как X' конечно над S'. Значит, когомологии $H^{p+q}(X', \mathbb{Z})$ просто совпадают с когомологиями $H^p(S', f_*\mathbb{Z})$. Откуда мы получаем гомотопическую инвариантность последних. $\square$

Следствие 11.13. *Пусть X, Y — многообразия, конечные и этальные над S. Тогда*
$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(X), M^S(Y)) = Cor_S(X, Y).$$

$\square$

Определение 11.14. Определим функтор $C^*\colon NSwT^S \to D(NSwT^S)$ следующим образом. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок с S-трансферами, тогда

$$(C^{-n}\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(\Delta^n \times U),$$

где $\Delta^n \subset \mathbb{A}^{n+1}$ — гиперплоскость, заданная уравнением $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Дифференциалы в комплексе $C^*\mathcal{F}$ определяются следующим образом. Пусть $\partial_i\colon \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ — вложение i-й грани, оно индуцирует отображение на соответствиях $\partial_i^*\colon Cor_S(\Delta^{n+1}\times U, X) \to Cor_S(\Delta^n \times U, X)$. Тогда дифференциал d имеет вид $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i^*$.

Теорема 11.15. *Пусть S — нормальная аффинная схема, X — гладкая аффинная неприводимая схема относительной размерности 1 над S. Предположим также, что существуют нормальная собственная S-схема $\overline{X}$ с одномерными слоями и вложение $X \hookrightarrow \overline{X}$, причем схема $Y = \overline{X} - X$ имеет аффинную окрестность. Рассмотрим комплекс*

$$\ldots \to C_n(X/S) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X/S) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X/S) \to 0,$$

где $C_n(X/S)$ — свободная абелева группа, порожденная неприводимыми замкнутыми подсхемами $Z \subset X \times \Delta^n$, конечными и сюръективными над $S \times \Delta^n$, дифференциал $\partial_n\colon C_n(X/S) \to C_{n-1}(X/S)$ является суммой $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i^*$, где $\partial_i\colon \Delta^n \to \Delta^{n+1}$ — вложение i-й грани. Тогда комплекс $C_*(X/S)$ точен во всех членах, кроме нулевого, и нулевые когомологии $H_0(C_*(X/S))$ изоморфены $Pic\,(\overline{X}, Y)$.

Доказательство. Доказано в параграфе 3 статьи [17]. □

Теорема 11.16. *Пусть S — аффинное многообразие над k, X аффинно, конечно и этально над S. Тогда $M(X \times \mathbb{G}_m^{\wedge 1})$ квазиизоморфен пучку, представимому в категории Sm/S многообразием $R_{X/S}(\mathbb{G}_{m,X})$.*

Доказательство. 1) Докажем, что комплекс пучков $C^*\mathbb{Z}_{tr}^S[X \times \mathbb{G}_m^{\wedge 1}]$ квазиизоморфен $R_{X/S}(\mathbb{G}_{m,X})$.

Пусть U — гладкое многообразие над S. Комплекс $C^*\mathbb{Z}^S_{tr}[X \times_S \mathbb{G}_m]$, вычисленный на U, это

$$\ldots \to Cor_S(\Delta^1 \times U, X \times \mathbb{G}_m) \to Cor_S(U, X \times \mathbb{G}_m) \to 0.$$

Обозначим для краткости $W = U \times_S X$. Тогда для относительной кривой $W \times \mathbb{G}_m \to U$ группа $C(W \times \mathbb{G}_m/U)$ в обозначениях статьи [17] совпадает с $Cor_S(U, X \times \mathbb{G}_m)$. По теореме 11.15 комплекс $(C^*\mathbb{Z}^S_{tr}[X \times \mathbb{G}_m])(U)$ точен во всех членах, кроме нулевого, а нулевые когомологии совпадают с $Pic(W \times \mathbb{P}^1, W \times \{0, \infty\})$. Относительная группа Пикара включается в длинную точную последовательность [17]

$$\Gamma(W \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) \to \Gamma(W \times \{0,\infty\}, \mathcal{O}^*) \to$$
$$\to Pic(W \times \mathbb{P}^1, W \times \{0,\infty\}) \to Pic(W \times \mathbb{P}^1) \to Pic(W \times \{0,\infty\}).$$

Нам известны четыре члена этой последовательности. Действительно, группа $Pic(W \times \mathbb{P}^1) \simeq Pic(W) \oplus \mathbb{Z}$ и $Pic(W \times \{0,\infty\}) \simeq Pic(W) \oplus Pic(W)$, причем отображение в точной последовательности переводит $\mathbb{Z}$ в нуль, а $Pic(W)$ отображается диагонально. Кроме того, $\Gamma(W \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*) = k[W]^*$, $\Gamma(W \times \{0,\infty\}, \mathcal{O}^*) = k[W]^* \oplus k[W]^*$ и первое отображение в точной последовательности также является диагонально. Значит, относительная группа Пикара включена в короткую точную последовательность

$$0 \to k[W]^* \to Pic(W \times \mathbb{P}^1, W \times \{0,\infty\}) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Так как $\mathbb{Z}$ — проективный модуль, расширение тривиально, то есть

$$Pic(U \underset{S}{\times} X \times \mathbb{P}^1, W \times \{0,\infty\}) = k[U \underset{S}{\times} X]^* \oplus \mathbb{Z}.$$

Обратим внимание на то, что расщепление функториально по U.

Теперь заметим, что дивизор $U \times_S X \times 1 \subset U \times_S X \times \mathbb{G}_m$ соответствует образующей $1 \in \mathbb{Z} = Pic(U \times_S X \times \mathbb{P}^1)$. Потому комплекс $C^*\mathbb{Z}^S_{tr}[X \times \mathbb{G}_m^{\wedge 1}]$

квазиизоморфен пучку $U \mapsto \mathcal{O}^*(U \times_S X)$, который совпадает с представимым пучком $\mathrm{Hom}_{Sm/S}(-, R_{X/S}(\mathbb{G}_{m,X}))$.

2) Пучок $R_{X/S}(\mathbb{G}_{m,X})$ является строго гомотопически инвариантным. Это можно доказать так же, как и в теореме 11.12. Поэтому он квазиизоморфен $M^S(X \times \mathbb{G}_m^{\wedge 1})$ по теореме 11.5. $\square$

Следствие 11.17. *Пусть X конечно и этально над S. Тогда*
1) $\mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(S)(1), M^S(X)(1)) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(S), M^S(X))$,
2) $\mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(X)(1), M^S(X)(1)) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(X), M^S(X))$.

Доказательство. Докажем пункт 1. Предположим для простоты, что X неприводимо. Для приводимых многообразий доказательство аналогично. В правой части по следствию 11.13 в этом случае стоит просто $\mathbb{Z}$. По предыдущей теореме мотив $M^S(X)(1)$ квазиизоморфен пучку, представимому схемой $R_{X/S}(\mathbb{G}_{m,X})$, а $M^S(S)(1)$ представим схемой $S \times \mathbb{G}_m$ в категории гладких многообразий над S. В результате группа из левой части вкладывается в $Hom_{Sm/S}(S \times \mathbb{G}_m, R_{X/S}(\mathbb{G}_{m,X}))$, что соответствует всем морфизмам пучков без учета трансферов и абелевой структуры. Это множество по свойству сопряженности функтора ограничения Вейля совпадает с $\mathbb{Z} \oplus k[X]^*$. Нетрудно понять, что морфизмы согласованные с абелевой структурой и трансферами — это просто группа $\mathbb{Z}$. Доказательство пункта 2 аналогично. $\square$

Теорема 11.18. *Существует изоморфизм*

$$M^S(S \times \mathbb{P}^1) \xrightarrow{1,\tau} M^S(S) \oplus M^S(S)(1)[2],$$

где отображение τ задается элементом $\mathcal{O}(1) \in Pic\ \mathbb{P}^1 = H^{2,1}(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы о вычислении мотива проективного пространства из [18]. Кроме того, может быть выведена из теоремы 11.15. $\square$

11.2. Согласованность в категории относительных мотивах

В этом параграфе мы докажем согласованность гомоморфизма Гизина и трансфера для конечного этального отображения достаточно малых многообразий в подходящей категории $D_{\mathcal{M}}(Y)$. В начале мы зафиксируем некоторое многообразие Y и построим гомоморфизмы Гизина для некоторых морфизмов в этой категории.

Теорема 11.19. *Пусть $char\ k = 0$, $f\colon X \to Y$ — конечный морфизм гладких неприводимых аффинных многообразий над k. Тогда существуют такие открытые подмножества $U \subset X$, $V \subset Y$, что $f|_U\colon U \to V$ и $k[U] = k[V][t]/F(t)$, где $F(t)$ — неприводимый многочлен со старшим коэффициентом* 1.

Доказательство. Поскольку $char\ k = 0$, расширение $k(X)/k(Y)$ сепарабельно и, значит, является простым. То есть $k(X) = k(Y)[t]/F(t)$, где $F(t)$ — многочлен от t с коэффициентами из $k(Y)$ и старшим коэффициентом 1. Выкинув из Y нули знаменателей коэффициентов $F(t)$ и старшего члена и их полные прообразы из X, получим то же соотношение для колец функций открытых подмножеств X и Y. В случае приводимого X перемножим многочлены для неприводимых компонент. □

Теорема 11.20. *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечный этальный морфизм, полученный в предыдущем утверждении, то есть $k[X] = k[Y][t]/F(t)$ для неприводимого многочлена $F(t)$ степени n со старшим коэффициентом* 1. *Тогда, уменьшая Y и, соответственно, $X = Spec\ k[Y][t]/F(t)$, можем считать, что существует конечный этальный морфизм $g\colon Z \to Y$ такой, что $Z \times_Y X \xrightarrow{\sim} \coprod_{i=1}^{n} Z$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни $F(t)$ в алгебраическом замыкании $k(Y)$. Для каждого α_i можно построить многообразие Z_i, конечное и этальное над Y_i ($Y_i \subset Y$ — открытое подмножество), так же, как и в предыдущем утверждении. Пересечем все Y_i и уменьшим Z_i, взяв прообраз пересечения всех Y_i. Возьмем в качестве Z расслоенное произведение всех Z_i над пересечением всех Y_i. $\square$

Далее мы будем считать, что $f\colon X \to Y$ и многообразие Z такие, как в предыдущем утверждении.

Замечание 11.21. Из построения видно, что поля $k(Y)$ и $k(X)$ можно представить в виде пределов $k(Y) = \varinjlim_\beta k[U_\beta]$, $k(X) = \varinjlim_\beta k[U_\beta][t]/F(t)$, где $F(t)$ — неприводимый многочлен со старшим коэффициентом 1. Причем пределы берутся по одному множеству индексов $\beta \in I$, и для конечного этального отображения $V_\beta = Spec\, k[U_\beta][t]/F(t) \to U_\beta$ существует многообразие Z_β такое, что $Z_\beta \times_U V \xrightarrow{\sim} \coprod_{i=1}^{n} Z_\beta$.

Конструкция. Мы построим гомоморфизм Гизина $G^Y(f)\colon M^Y(Y) \to M^Y(X)$ для морфизма $f\colon X \to Y$ в категории $D_{\mathcal{M}}(Y)$. По построению мы можем разложить отображение f в композицию $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^1 \to Y$, причем нормальное расслоение для вложения $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^1$ тривиализовано. Определим сначала подкрученный гомоморфизм Гизина $G^Y(f)(1)[2]$ как композицию

$$\begin{tikzcd}
M^Y(Y)(1)[2] \arrow[rr, "G(f)(1)[2]"] \arrow[d, "\alpha"] & & M^Y(X)(1)[2] \\
M^Y(Y \times \mathbb{P}^1) \arrow[d] & & \\
M^Y_X(Y \times \mathbb{P}^1) \arrow[d, "e^{-1}"] & & \\
M^Y_X(Y \times \mathbb{A}^1) \arrow[r, "(i_1)_*"] & M^Y_{X\times\mathbb{A}^1}((Y \times \mathbb{P}^1)_t) \arrow[r, "(i_0)_*^{-1}"] & M^Y_{X\times 0}(X \times \mathbb{A}^1), \arrow[uuu, "\varphi"']
\end{tikzcd}$$

где α — вложение прямого слагаемого из утверждения 11.18, отображение e — изоморфизм вырезания (теорема 11.7), $(Y \times \mathbb{P}^1)_t$ — пространство деформации к нормальному расслоению для вложения $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^1$ (его конструкция есть в статье [11]), φ — изоморфизм из теоремы 11.10. По пункту 1 следствия 11.17

имеется изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}(Y)}}(M^Y(Y)(1)[2], M^Y(X)(1)[2]) = \mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}(Y)}}(M^Y(Y), M^Y(X)),$$

и мы можем «открутить» отображение на (1)[2]. Это и будет $G^Y(f)$.

Нам потребуется отображение $G^Y(Z \times_Y f)\colon M^Y(Z) \to M^Y(Z \times_Y X)$ для морфизма $Z \times_Y f\colon Z \times_Y X \to Z$. Расслоенно умножая на Z разложение $X \hookrightarrow Y \times \mathbb{P}^1 \to Y$ морфизма f в композицию вложения и проекции, мы получим такое же разложение для $Z \times_Y f$. Подкрученный гомоморфизм Гизина $G^Y(Z \times_Y f)(1)[2]$ определяется той же конструкцией, а «открутить» позволяет пункт 2 следствия 11.17, поскольку $Z \times_Y X \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{i=1}^{n} Z$.

Теорема 11.22. *Гомоморфизм Гизина*

$$G^Y(Z \times_Y f)\colon M^Y(Z) \to \bigoplus_{i=1}^{n} M^Y(Z)$$

совпадает с диагональным отображением.

Доказательство. В случае гомоморфизма Гизина в ориентированных теориях когомологий [12] аналогичное утверждение следовало бы из следующих двух:

1) гомоморфизм Гизина для отображения приводимого многообразия является суммой гомоморфизмов Гизина его неприводимых компонент,

2) гомоморфизм Гизина для изоморфизма $u\colon Z \to Z$ — это обратный образ $(u^{-1})^*$.

Пункт 1 доказывается аналогично [12, п. 2.4.9]. Пункт 2 следует из свойства перестановочности гомоморфизмов Гизина с обратными образами для декартового квадрата. В интересующем нас случае можно действовать так же. Перестановочность требуется доказать для случая одного декартового квадрата

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "id"'] & Z \arrow[d, "u^{-1}"] \\ Z \arrow[r, "id"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Это доказывается аналогично свойству [12, 2.4.3]. □

Введем некоторые обозначения. Функтор расслоенного над Y умножения на Z индуцирует отображение $M^Y(Z)\otimes^Y_{tr}-\colon D_{\mathcal{M}}(Y)\to D_{\mathcal{M}}(Y)$. Для простоты его мы будем обозначать $Z\times_Y -$. Кроме того, пусть $(\Gamma^Y_f)^t\in Cor_Y(Y,X)$ — транспонированный график отображения f. Он задает морфизм мотивов $M^Y(Y)\to M^Y(X)$.

Теорема 11.23. *Умножение $Z\times_Y -$ индуцирует отображение*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(Y)}(M^Y(Y),M^Y(X)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(Y)}(M^Y(Z),M^Y(Z\underset{Y}{\times}X)). \arrow[d, equal] \\
\mathbb{Z} & \bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

При этом выполнено следующее:

1) $(\Gamma^Y_f)^t=1\in\mathbb{Z}$,

2) $Z\times_Y(\Gamma^Y_f)^t=(\Gamma^Y_{Z\times_Y f})^t=1\oplus1\oplus\ldots\oplus1\in\bigoplus\limits_{i=1}^{n}\mathbb{Z}$.

Доказательство. Пункт 1) — это утверждение следствия 1.2. Пункт 2) выполнен по выбору Z. □

Теорема 11.24. *Функтор $Z\times_Y -$ переводит гомоморфизм Гизина $G^Y(f)$ в гомоморфизм Гизина $G^Y(Z\times_Y f)$.*

Доказательство. Следует из конструкции гомоморфизма Гизина. Утверждение аналогично [18, Lemma 4.9 (1)]. □

Теорема 11.25. *Гомоморфизм Гизина $G^Y(f)$ совпадает с трансфером $(\Gamma^Y_f)^t$ в категории $D_{\mathcal{M}}(Y)$.*

Доказательство. Применим $Z\times_Y -$ к обоим отображениям. По теореме 11.23 отображение на группах морфизмов инъективно. Кроме того, гомоморфизм Гизина переходит в гомоморфизм Гизина, трансфер — в трансфер. После умножения они совпадают по теоремам 11.22 и 11.24. □

11.3. Функторы между категориями относительных мотивов

Теорема 11.26. *Существует функтор* $\Theta\colon D_{\mathcal{M}}(Y) \to DM(k)$ *такой, что*

1) $\Theta(M^Y(X)) = M(X)$,

2) *диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(Y)}(M^Y(X), M^Y(Z)) \arrow[r, "\Theta"] & \mathrm{Hom}_{D_{\mathcal{M}}(Y)}(M(X), M(Z)) \\
Cor_Y(X, Z) \arrow[u] \arrow[r, hook] & Cor(X, Z) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично построению тензорного произведения в категории $DM(k)$ в статье [18].

1) Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок с Y-трансферами. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \leftarrow \mathcal{F} \leftarrow \bigoplus_{X \in Sm/Y} \mathcal{F}(X) \otimes \mathbb{Z}_{tr}^Y[X] \leftarrow \bigoplus_{f \in Cor_Y(X,Z)} \mathcal{F}(Z) \otimes \mathbb{Z}_{tr}^Y[X]. \tag{2.1}$$

Определим функтор на представимых предпучках как $\Theta(\mathbb{Z}_{tr}^Y[X]) = \mathbb{Z}_{tr}[X]$ и $\Theta\colon \mathrm{Hom}_{PreShwT^Y}(\mathbb{Z}_{tr}^Y[X], \mathbb{Z}_{tr}^Y[Z]) \to \mathrm{Hom}_{PreShwT}(\mathbb{Z}_{tr}[X], \mathbb{Z}_{tr}[Z])$ вложением соответствий $Cor_Y(X, Z) \hookrightarrow Cor_k(X, Z)$. Точная последовательность (2.1) позволяет определить функтор Θ на всей категории предпучков с Y-трансферами.

2) Функтор $\Theta\colon PreShwT^Y \to PreShwT$ точен справа. В самом деле, пусть последовательность предпучков $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ точна, то есть последовательность сечений точна для любого $X \in Sm/Y$. Для каждого предпучка возьмем точную последовательность (1) и применим функтор Θ.

Получим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
\bigoplus\limits_{f\in Cor_Y(X,Z)} \mathcal{F}'(Z)\otimes\mathbb{Z}_{tr}[X] \arrow[r] \arrow[d] & & \bigoplus\limits_{X\in Sm/Y} \mathcal{F}'(X)\otimes\mathbb{Z}_{tr}[X] \arrow[r] \arrow[d] & & \Theta(\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bigoplus\limits_{f\in Cor_Y(X,Z)} \mathcal{F}(Z)\otimes\mathbb{Z}_{tr}[X] \arrow[r] \arrow[d] & & \bigoplus\limits_{X\in Sm/Y} \mathcal{F}(X)\otimes\mathbb{Z}_{tr}[X] \arrow[r] \arrow[d] & & \Theta(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\bigoplus\limits_{f\in Cor_Y(X,Z)} \mathcal{F}''(Z)\otimes\mathbb{Z}_{tr}[X] \arrow[r] \arrow[d] & & \bigoplus\limits_{X\in Sm/Y} \mathcal{F}''(X)\otimes\mathbb{Z}_{tr}[X] \arrow[r] \arrow[d] & & \Theta(\mathcal{F}'') \arrow[r] & 0. \\
0 & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Строки точны по определению. Заметим, что первые два столбца точны как произведения точных последовательностей на свободную группу. Точность справа функтора Θ следует из длинной точной последовательности когомологий для точной последовательности двучленных строк-комплексов.

3) Обозначим через $L_i\Theta\colon PreShwT^Y \to PreShwT$ левые производные функторы функтора Θ. Верно следующее

Утверждение. *Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок с Y-трансферами такой, что $\mathcal{F}_{Nis}^{\sim} = 0$. Тогда $L_i\Theta(\mathcal{F})_{Nis}^{\sim} = 0$ для любого $i \geq 0$.*

Доказательство утверждения.

Пусть $f\colon X' \to X$ — покрытие Нисневича над Y. Обозначим через $C_*(X'/X, Y)$ комплекс предпучков

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}^Y[X] \xleftarrow{f_*} \mathbb{Z}_{tr}^Y[X'] \xleftarrow{(p_2)_*-(p_1)_*} \mathbb{Z}_{tr}^Y[X' \times_X X'] \leftarrow \ldots,$$

и через $\mathcal{H}_i(X'/X)$ его предпучковые когомологии. По лемме 11.11 нам известно, что он точен как комплекс пучков, то есть $\mathcal{H}_i(X'/X)_{Nis}^{\sim} = 0$ для любого i. Для любого предпучка с Y-трансферами $\mathcal{F}$ такого, что $\mathcal{F}_{Nis}^{\sim} = 0$, существует сюръекция (в категории предпучков) из прямой суммы предпучков вида

$\mathcal{H}_i(X'/X)$ для некоторых X', X в предпучок $\mathcal{F}$. Мы будем доказывать утверждение индукцией по i. Для $i < 0$ утверждение очевидно. Предположим, что для всех i таких, что $i < j$, утверждение верно. Докажем, что оно верно для j. Достаточно доказать для случая $\mathcal{F} = \mathcal{H}_0(X'/X)$ (из-за существования сюръективного отображения из суммы пучков такого вида). Для этого рассмотрим спектральную последовательность

$$E^2_{pq} = L_p\Theta(\mathcal{H}_q(X'/X)) \Longrightarrow H_{p+q}(\Theta(C_*(X'/X))). \tag{2.2}$$

Последовательность $C_*(X'/X)$

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}_{tr}[X] \xleftarrow{f_*} \mathbb{Z}_{tr}[X'] \xleftarrow{(p_2)_*-(p_1)_*} \mathbb{Z}_{tr}[X' \underset{X}{\times} X'] \leftarrow \ldots .$$

точна по лемме 1.6 из [18]. Поскольку $\Theta(C_*(X'/X, Y)) = C_*(X'/X)$, если мы перейдем к пучковизациям в спектральной последовательности (2.2), то правая часть будет нулевой. То есть

$$E^2_{pq} = L_p\Theta(\mathcal{H}_q(X'/X))^{\sim}_{Nis} \Longrightarrow 0.$$

Применяя предположение индукции, получим $L_j\Theta(\mathcal{H}_0(X'/X)) = 0$. Утверждение доказано. □

4) Определим функтор на пучках с Y-трансферами как пучковизацию значения функтора для предпучка.

5) Пусть A_* — комплекс предпучков, ограниченный сверху, члены которого являются суммами предпучков вида $\mathbb{Z}^Y_{tr}[X]$. Предположим, что $H_i(A_*)^{\sim}_{Nis} = 0$ для всех i. Тогда $H_i(\Theta(A_*))^{\sim}_{Nis} = 0$ для любого i. Это следует из спектральной последовательности (2). Утверждение пункта 5 означает, что Θ задает функтор на уровне производных категорий, поскольку любой комплекс имеет резольвенту из предпучков вида $\mathbb{Z}_{tr}[X]$. Это позволяет определить функтор Θ на категории $D(NSwT^Y)$.

6) Композиция $C^* \circ \Theta$ переводит подкатегорию $A(S)$ в 0. Следовательно,

Θ индуцирует функтор $D_{\mathcal{M}}(Y) \to DM(k)$, который удовлетворяет условиям теоремы. $\Box$

Определение 11.27. Определим функтор $\Theta^*\colon PreShwT \to PreShwT^Y$ с помощью точной последовательности (1) из предыдущей теоремы, положив

$$\Theta^*(\mathbb{Z}_{tr}[X]) = \mathbb{Z}_{tr}^Y[X \times Y].$$

Аналогично предыдущей теореме, продолжим его до $\Theta^*\colon DM(k) \to D_{\mathcal{M}}(Y)$. Более того, функторы Θ и Θ^* связаны формулой проекции:

$$\Theta\left(M^Y(W) \otimes_{tr}^Y \Theta^*(M(Z))\right) = \Theta\left(M^Y(W)\right) \otimes_{tr} M(Z),$$

что доказывается на каждом этапе продолжения обоих функторов. Для представимых предпучков вида $\mathbb{Z}_{tr}[X]$ и $\mathbb{Z}_{tr}^Y[W]$ формула проекции очевидна.

Замечание 11.28. В препринте [1] вводится формализм шести функторов для категорий относительных мотивов. В частности, определяются функторы f_*, $f_!$, f^*, $f^!$, связанные с отображением сайтов Нисневича, индуцированным морфизмом многообразий $f\colon X \to Y$. Построенные здесь функторы Θ и Θ^* не совпадают с упомянутыми функторами для морфизма $f\colon Y \to Spec\ k$, кроме как в специальном случае, когда Y — спектр конечного расширения k.

Теорема 11.29. *Для функтора* Θ *верно следующее:*
1) $\Theta\left((\Gamma_f^Y)^t\right) = (\Gamma_f)^t$,
2) $\Theta\left(G^Y(f)\right) = G(f)$.

Доказательство. Пункт 1) следует из конструкции функтора Θ. Из определения гомоморфизма Гизина видно, что пункт 2) следует из наличия формулы проекции и изоморфизма

$$M^Y(Y \times \mathbb{P}^1) \xrightarrow{1,\tau} M^Y(Y) \oplus M^Y(Y)(1)[2]$$

в $D_{\mathcal{M}}(Y)$, где $\tau \in Pic(\mathbb{P}^1)$, под действием функтора Θ переходящего в изоморфизм

$$M(Y \times \mathbb{P}^1) \xrightarrow{1,\tau} M(Y) \oplus M(Y)(1)[2]$$

в категории $DM(k)$. Последнее проверяется непосредственно. $\square$

11.4. Совпадение гомоморфизма Гизина в трансфера в $DM(k)$

Пусть $f\colon X \to Y$ — конечное отображение, $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами. Для открытого $U \subset Y$, $V = f^{-1}(U)$ морфизм $f|_V\colon V \to U$ тоже конечен и индуцирует отображения $\mathcal{F}(G(f))$, $Tr(f) = \mathcal{F}((\Gamma_f)^t)\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$. Переходя к пределу, получим отображения $\mathcal{F}(G(f))$, $Tr(f)$, действующие на спектрах полей рациональных функций.

Теорема 11.30. *Пусть char $k = 0$, а $k(X)/k(Y)$ — конечное расширение полей функций многообразий над k. Тогда отображения гомоморфизма Гизина и трансфера $\mathcal{F}(G(f)), Tr(f)\colon \mathcal{F}(Spec\ k(X)) \to \mathcal{F}(Spec\ k(Y))$ совпадают.*

Доказательство. Как было упомянуто в замечании 11.21, поля $k(X)$ и $k(Y)$ являются пределами по одному и тому же множеству индексов, причем предел берется по отображениям открытых множеств $U \subset X$, $V \subset Y$ специального вида. Значит, нам достаточно доказать совпадение отображений $G(f)$ и $(\Gamma_f)^t$ для $f\colon X \to Y$ такого, что $k[X] = k[Y][t]/F(t)$ для неприводимого F со старшим коэффициентом 1 и существует Z такое, что $Z \times_U X \xrightarrow{\sim} \bigsqcup_{i=1}^{n} Z$. В этом случае нам известно по теореме 11.25, что отображения $G^Y(f)$ и $(\Gamma_f^Y)^t\colon M^Y(Y) \to M^Y(X)$ совпадают в категории $D_{\mathcal{M}}(Y)$. Применяя функтор Θ, получим совпадение этих отображений в $DM(k)$, а значит, и для пучков с трансферами. Переходя к пределу, получим утверждение теоремы. $\square$

Следствие 11.31. *Пусть $f\colon X \to Y$ — конечное отображение произвольных неприводимых многообразий, $\mathcal{F}$ — пучок с трансферами. Тогда отображения*

$$\mathcal{F}(G(f)), Tr(f)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$$

совпадают.

Доказательство. В силу леммы об инъективности [20],

$$\mathcal{F}(X) \hookrightarrow \mathcal{F}(k(X)),$$

$$\mathcal{F}(Y) \hookrightarrow \mathcal{F}(k(Y)).$$

Поэтому требуемое утверждение следует из теоремы. $\square$

§12. Дифференциал Герстена на раздутии

Доказанные свойства гомоморфизмов Гизина позволяют получить два утверждения, связанные с вычислением дифференциала Герстена. Оба понадобятся для определения дифференциала Герстена в равнохарактеристическом случае.

Лемма 12.1. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k, $Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подмногообразия, Z гладкое, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Тогда дифференциал Герстена $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(Y - Z) \to \mathcal{F}_{-i-1}(Z)$ индуцирован композицией отображений*

$$M(Z)(i+1)[i+1] \xrightarrow{(G(i))^{-1}} M_Z(Y)(i)[i-1] \xrightarrow{d} M(Y-Z)(i)[i],$$

где $i\colon Z \to Y$ — замкнутое вложение, d — дифференциал в последовательности пары $Z \subset Y$.

Доказательство. Напомним, что дифференциал Герстена определяется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
M_{Y-Z}(X-Z)[-i] \arrow[d] & M_Z(X)[-i-1] \arrow[l, "d_{X,Y,Z}"'] \arrow[d] \\
M(Y-Z)(i)[i] & M(Z)(i+1)[i+1]. \arrow[l, dashed, "\partial"']
\end{tikzcd}$$

Обозначим через $j\colon Y \to X$ — замкнутое вложение. Рассмотрим теперь диаграмму

$$\begin{tikzcd}
M(Y-Z)(i)[i] & & \\
M_{Y-Z}(X-Z)[-i] \arrow[u, "G_{Y-Z}(j|_{X-Z})"] \arrow[d, "G_{Y-Z}(j|_{X-Z})"'] & M_Z(X)[-i-1] \arrow[l, "d_{X,Y,Z}"'] \arrow[r, "G_Z(j)"'] \arrow[d, "G_Z(j\circ i)"'] & M_Z Y(i)[i-1] \arrow[llu, "d"'] \arrow[ld, "G_Z(i)"] \\
M(Y-Z)(i)[i] & M(Z)(i+1)[i+1], \arrow[l, dashed, "\partial"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой отображения $G_{Y-Z}(j|_{X-Z})$, $G_Z(j \circ i)$, $G_Z(i)$, $G_Z(j)$ являются изоморфизмами. Теорема утверждает, что проход по внешнему контуру этой диаграммы также совпадает с дифференциалом Герстена. Для этого достаточно доказать коммутативность верхнего квадрата (выглядящего как треугольник) и треугольника в той же диаграмме. Треугольник является коммутативным из-за согласованности гомоморфизма Гизина с композицией, а квадрат — по следствию 10.7. $\square$

Следствие 12.2. *Пусть X — гладкое многообразие над k, $Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подмногообразия, Z гладкое, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Нисневича с трансферами. Тогда последовательность отображений*

$$\mathcal{F}_{-i}(Y-Z) \xrightarrow{d} H^1_Z(Y, \mathcal{F}_{-i}) \xrightarrow{(\mathcal{F}_{-i}\left((G(i))^{-1}\right)} \mathcal{F}_{-i-1}(Z)$$

где d — дифференциал в последовательности пары, а отображение в мотивах $G(i)\colon M_Z(Y) \to M(Z)(1)[1]$ — это гомоморфизм Гизина для вложения, совпадает с дифференциалом Герстена $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(Y-Z) \to \mathcal{F}_{-i-1}(Z)$. $\square$

Теорема 12.3. *Пусть X — гладкое многообразие над полем k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок с трансферами. Пусть также $Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подмногообразия,* $\operatorname{codim}_X Z = i+1$,

$\operatorname{codim}_X Y = i$. *Кроме того, пусть* $p\colon \widetilde{X} \to X$ *— раздутие* X *в подмногообразии* Z, $\widetilde{Y}$ *— собственный прообраз* Y, $\widetilde{Z}$ *— пересечение* $\widetilde{Y}$ *с исключительным дивизором. Кроме того, обозначим через* $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(Y - Z) \to \mathcal{F}_{-i-1}(Z)$ *— дифференциал Герстена на* X, $\widetilde{\partial}\colon \mathcal{F}_{-i}(\widetilde{Y} - \widetilde{Z}) \to \mathcal{F}_{-i-1}(\widetilde{Z})$ *— дифференциал Герстена на* $\widetilde{X}$. *Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{-i}(\widetilde{Y} - \widetilde{Z}) \arrow[r, "\widetilde{\partial}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}_{-i-1}(\widetilde{Z}) \arrow[d, "Tr(p|_{\widetilde{Z}})"] \\
\mathcal{F}_{-i}(Y - Z) \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{F}_{-i-1}(Z)
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Напомним для начала определения дифференциалов ∂ и $\widetilde{\partial}$. Они индуцированы некоторыми морфизмами в мотивах алгебраических многообразий. Чтобы не усложнять обозначения, их мы тоже будем обозначать через ∂ и $\widetilde{\partial}$, так же, как и отображение в выделенном треугольнике тройки, соответствующее дифференциалу в последовательности тройки, тоже будем обозначать d. Итак, отображение ∂ определяется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
M_{Y-Z}(X - Z)[-i] \arrow[d] & M_Z(X)[-i-1] \arrow[l, "d_{X,Y,Z}"'] \arrow[d] \\
M(Y - Z)(i)[i] & M(Z)(i+1)[i+1], \arrow[l, dashed, "\partial"']
\end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки являются гомоморфизмами Гизина для вложения. Если мы применим к этому морфизму ∂ функтор $Hom_{DM(k)}(-, \mathcal{F})$, то получим дифференциал Герстена, который фигурирует в формулировке теоремы. Аналогично, дифференциал $\widetilde{\partial}$ определяется диаграммой

$$\begin{tikzcd}
M_{\widetilde{Y}-\widetilde{Z}}(\widetilde{X}-\widetilde{Z})[-i] \arrow[d] & M_{\widetilde{Z}}(\widetilde{X})[-i-1] \arrow[l, "d_{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}"'] \arrow[d] \\
M(\widetilde{Y}-\widetilde{Z})(i)[i] & M(\widetilde{Z})(i+1)[i+1]. \arrow[l, dashed, "\widetilde{\partial}"']
\end{tikzcd}$$

Чтобы доказать утверждение теоремы, нам нужно объединить две этих диаграммы с помощью гомоморфизма Гизина для раздутия $G(p)$. Получается следующая кубическая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M_{Y-Z}(X-Z)[-i] \arrow[rr] \arrow[dd, "G_{Y-Z}(p|_{\widetilde{X}-\widetilde{Z}})"'] & & M(Y-Z)(i)[i] \arrow[dd, "G(p|_{\widetilde{Y}-\widetilde{Z}})"] & \\
& M_Z(X)[-i-1] \arrow[ul, "d_{X,Y,Z}"] \arrow[rr] \arrow[dd, "G_Z(p)"] & & M(Z)(i+1)[i+1] \arrow[ul, "\partial"'] \arrow[dd, "G(p|_{\widetilde{Z}})"] \\
M_{\widetilde{Y}-\widetilde{Z}}(\widetilde{X}-\widetilde{Z})[-i] \arrow[rr] & & M(\widetilde{Y}-\widetilde{Z})(i)[i] & \\
& M_{\widetilde{Z}}(\widetilde{X})[-i-1] \arrow[ul, "d_{\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}}"] \arrow[rr] & & M(\widetilde{Z})(i+1)[i+1], \arrow[ul, "\widetilde{\partial}"']
\end{tikzcd}$$

в которой горизонтальные отображения являются изоморфизмами Гизина для соответствующих вложений. Нам нужно доказать коммутативность правой боковой грани. Это верно, если все остальные грани коммутативны. А это так. Действительно, левая боковая грань коммутативна по следствию 10.7, остальные три грани коммутативны благодаря согласованности гомоморфизмов Гизина с композицией. Заметим, кроме того, что по следствию 11.31 при применении функтора $Hom_{DM(k)}(-,\mathcal{F})$ отображение $\mathcal{F}(G(p|_{\widetilde{Z}}))$ совпадает с $Tr(p|_{\widetilde{Z}})$. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

§13. Определение дифференциала Герстена

Напомним, что из параграфа 9 нам известно каноническое определение дифференциала для случая кольца дискретного нормирования. Пусть R — произвольное регулярное равнохарактеристическое кольцо, $X = Spec\, R$, и пусть

$Z \subset Y \subset X$ — неприводимые подсхемы, $\operatorname{codim}_X Y = i$, $\operatorname{codim}_X Z = i+1$. Определим дифференциал $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(Z))$ для гомотопически инвариантного непрерывного пучка с трансферами, определенного на категории регулярных k-схем, следующим образом. Локализуем X и Y в Z и разрешим особенности кривой Y_Z внутри X_Z с помощью раздутий в замкнутых точках, обозначим разрешение $\widetilde{Y_Z} \subset \widetilde{X_Z}$ и проекцию $p\colon \widetilde{X_Z} \to X_Z$. Обозначим через $z_1, \ldots, z_n$ пересечения $\widetilde{Y_Z}$ с исключительным дивизором, и через $Tr_j\colon \mathcal{F}_{-i-1}(z_j) \to \mathcal{F}_{-i-1}(z)$ — трансферы для конечного отображения $p|_{z_i}$. Локализуя $\widetilde{Y_Z}$ в каждом z_j (чтобы Y_Z стало локальным) и пользуясь определением для кольца дискретного нормирования, получим дифференциал $\partial_j\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(z_j))$. Определим дифференциал Герстена $\partial\colon \mathcal{F}_{-i}(k(Y)) \to \mathcal{F}_{-i-1}(k(Z))$ как сумму композиций $Tr_1 \circ \partial_1 + \ldots + Tr_n \circ \partial_n$.

Замечание 13.1. Из определения непонятно, почему введенный таким образом дифференциал не зависит от разрешения особенностей. Кроме того, факт того, что такое отображение удовлетворяет условию $\partial^2 = 0$, требует некоторого доказательства. Оба вопроса решаются путем доказательства совпадения определенного так дифференциала с некоторым предельным дифференциалом, который получается с помощью теоремы Попеску.

Замечание 13.2. Можно было определить дифференциала, рассмотрев в качества $\widetilde{Y_Z}$ нормализацию кривой Y_Z. Но для доказательства свойства $\partial^2 = 0$ дифференциала Герстена нам все равно понадобится схема $\widetilde{X_Z}$, поэтому мы включаем разрешение особенностей в определение.

В пункте 8.2 мы ввели схемы X^α, Y^α, Z^α. Напомним их конструкцию. Из теоремы Попеску кольцо R представимо в виде индуктивного предела $\varinjlim S^\alpha$ колец функций гладких аффинных многообразий над полем k, обозначим через $\varphi_{\alpha\beta}\colon S^\alpha \to S^\beta$ — связывающие гомоморфизмы, $\varphi_\alpha\colon S^\alpha \to R$ — отображение в предел. Пусть $\mathfrak{m} \subset R$ — максимальный идеал в R, обозначим через $\mathfrak{p}_\alpha \subset S^\alpha$ прообраз $\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{m})$. Можно проверить, что кольцо R представимо в виде предела $\varinjlim S^{\alpha}_{\mathfrak{p}_\alpha}$. Обозначим $R^{\alpha} = S^{\alpha}_{\mathfrak{p}_\alpha}$ и $X^{\alpha} = Spec\ R^{\alpha}$. Подсхемы $Z^{\alpha} \subset Y^{\alpha} \subset X^{\alpha}$ получаются следующим образом. Выберем какие либо системы образующих идеалов схем Z и Y, и рассмотрим идеалы, задаваемые их прообразами. Это и будут Z^{α} и Y^{α}. Для некоторого α_0 будет выполнено $Z^{\alpha} \subset Y^{\alpha}$, Z^{α}, Y^{α} — неприводимы для $\alpha > \alpha_0$.

Теорема 13.3. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $X = Spec\ R$, $z \in Y \subset X$, где z — точка, Y — кривая, X^{α}, Y^{α}, Z^{α} — такие же как выше. В этом случае $k(z) = \varinjlim\ k(Z^{\alpha})$, $Spec\ k(Y) = \varprojlim\ (Y^{\alpha} - Z^{\alpha})$, поскольку $Spec\ k(Y) = Y - z$. Тогда диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(k(Y)) \arrow[r, "\partial_{Y,z}"] & \mathcal{F}_{-1}(z) \\
\varinjlim \mathcal{F}(Y^{\alpha} - Z^{\alpha}) \arrow[u] \arrow[r, "\varinjlim \partial_{Y^{\alpha},Z^{\alpha}}"] & \varinjlim \mathcal{F}_{-1}(Z^{\alpha}), \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

где $\partial_{Y,z}$ — дифференциал Герстена на X, а $\partial_{Y^{\alpha},Z^{\alpha}}$ — дифференциал Герстена на X^{α}, коммутативна.

Доказательство. *Случай* 1. Пусть кривая Y неособа в z. Тогда для некоторого α_0 при любом $\alpha > \alpha_0$ кратность $e_{Z^{\alpha}}Y^{\alpha} = 1$. В геометрическом случае по следствию 12.2 имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(Y^{\alpha} - Z^{\alpha}) \arrow[r, "d^{\alpha}"] \arrow[d, equal] & H^1_{Z^{\alpha}}(Y^{\alpha}, \mathcal{F}) \arrow[d, "G^{\alpha}"] \\
\mathcal{F}(Y^{\alpha} - Z^{\alpha}) \arrow[r, "\partial_{Y^{\alpha},z^{\alpha}}"] & \mathcal{F}_{-1}(Z^{\alpha}),
\end{tikzcd}$$

в которой через G^{α} обозначен гомоморфизм Гизина для вложения $i^{\alpha} \colon Z^{\alpha} \to Y^{\alpha}$. Согласно замечанию 8.6 в данном случае конструкция гомоморфизма Гизина является функториальной, другими словами имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(Y^\beta - Z^\beta) \arrow[rr, "d^\beta"] \arrow[dd, equal] & & H^1_{Z^\beta}(Y^\beta, \mathcal{F}) \arrow[dd, "G^\beta"] \\
\mathcal{F}(Y^\alpha - Z^\alpha) \arrow[ur] \arrow[rr, "d^\alpha"] \arrow[dd, equal] & & H^1_{Z^\alpha}(Y^\alpha, \mathcal{F}) \arrow[ur] \arrow[dd, "G^\alpha"] & \\
& \mathcal{F}(Y^\beta - Z^\beta) \arrow[rr, "\partial_{Y^\beta, Z^\beta}"] & & \mathcal{F}_{-1}(Z^\beta) \\
\mathcal{F}(Y^\alpha - Z^\alpha) \arrow[ur] \arrow[rr, "\partial_{Y^\alpha, Z^\alpha}"] & & \mathcal{F}_{-1}(Z^\alpha). \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

По конструкции τ из определения дифференциала Герстена $\tau = \varprojlim G^\alpha$, потому из предыдущей диаграммы получаем

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(k(Y)) \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & H^1_z(Y, \mathcal{F}) \arrow[d, "\tau"] \\
\mathcal{F}(k(Y)) \arrow[r, "\varinjlim \partial_{Y^\alpha, Z^\alpha}"] & \mathcal{F}_{-1}(z),
\end{tikzcd}
$$

что и утверждалось теоремой в данном частном случае.

Случай 2. Обозначим через $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ вложенное разрешение особенностей Y. По следствию 8.9 оно представляется в виде предела $\widetilde{X} = \varprojlim \widetilde{X^\alpha}$ для $\alpha > \alpha_0$, где $\pi^\alpha\colon \widetilde{X^\alpha} \to X^\alpha$ — композиция соответствующих раздутий. Обозначим через $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Y}^\alpha$ собственные прообразы Y, Y^α соответственно, $\widetilde{z}$, $\widetilde{Z^\alpha}$ — пересечения $\widetilde{Y}$, $\widetilde{Y}^\alpha$ с исключительным дивизором соответственно.

По теореме 12.3 из предыдущего параграфа имеет место следующая коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\widetilde{Y}^\alpha - \widetilde{Z}^\alpha) \arrow[r, "\partial_{\widetilde{Y}^\alpha, \widetilde{Z}^\alpha}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(\widetilde{Z}^\alpha) \arrow[d, "Tr(\pi^\alpha|_{\widetilde{Z}^\alpha})"] \\
\mathcal{F}(Y^\alpha - Z^\alpha) \arrow[r, "\partial_{Y^\alpha, Z^\alpha}"] & \mathcal{F}(Z^\alpha)
\end{tikzcd}
$$

Теперь у нас есть следующая диаграмма, все грани которой кроме, быть может, нижней, коммутативны:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(\widetilde{Y}^{\beta} - \widetilde{Z}^{\beta}) \arrow[rr, "\partial_{\widetilde{Y}^{\beta}, \widetilde{Z}^{\beta}}"] \arrow[dd, equal] & & \mathcal{F}(\widetilde{Z}^{\beta}) \arrow[dd, "Tr(\pi^{\beta}|_{\widetilde{Z}^{\beta}})"] \\
\mathcal{F}(\widetilde{Y}^{\alpha} - \widetilde{Z}^{\alpha}) \arrow[ur] \arrow[rr, "\partial_{\widetilde{Y}^{\alpha}, \widetilde{Z}^{\alpha}}"] \arrow[dd, equal] & & \mathcal{F}(\widetilde{Z}^{\alpha}) \arrow[ur] \arrow[dd, "Tr(\pi^{\alpha}|_{\widetilde{Z}^{\alpha}})"] & \\
& \mathcal{F}(Y^{\beta} - Z^{\beta}) \arrow[rr, "\partial_{Y^{\beta}, Z^{\beta}}"] & & \mathcal{F}(Z^{\beta}) \\
\mathcal{F}(Y^{\alpha} - Z^{\alpha}) \arrow[ur] \arrow[rr, "\partial_{Y^{\alpha}, Z^{\alpha}}"] & & \mathcal{F}(Z^{\alpha}). \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Правая боковая грань коммутативна по следствию 10.3, поскольку соответствующий квадрат декартов, что доказано в пункте 5 теоремы 8.8.

При переходе к пределу диагональные стрелки становятся изоморфизмами. Поэтому получаем коммутативность квадрата

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(Y - z) \arrow[r, "\partial_{Y,z}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(z) \arrow[d, equal] \\
\varinjlim \mathcal{F}(Y^{\alpha} - Z^{\alpha}) \arrow[r, "\varinjlim \partial_{Y^{\alpha}, Z^{\alpha}}"] & \varinjlim \mathcal{F}(Z^{\alpha}),
\end{tikzcd}
$$

что и утверждает теорема. $\square$

Замечание 13.4. Условие, что $Z \subset X$ является точкой $z \in X$, не является ограничительным. Для неприводимой замкнутой подсхемы $Z \subset X$ можно рассмотреть локализацию X_Z и применить предыдущую теорему к этой схеме. Это позволит заключить утверждение о совпадении дифференциала $\partial\colon \mathcal{F}(Y - Z) \to \mathcal{F}_{-1}(k(Z))$ с предельным дифференциалом.

Теорема 13.5. *Пусть $X = Spec\ R$, где R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $Z \subset Y \subset W$ — последовательность замкнутых подмножеств в X, причем $\operatorname{codim}_Y Z = 1$, $\operatorname{codim}_W Y = 1$, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный непрерывный пучок с трансферами, определенный на* *категории регулярных k-схем. Тогда композиция в комплексе Герстена*

$$\partial_{Y,Z} \circ \partial_{W,Y} \colon \mathcal{F}(k(W)) \to \mathcal{F}_{-2}(k(Z))$$

нулевая.

Доказательство. Локализуя по Z, можем считать, что Z — точка. Пусть $R = \varinjlim S^\alpha$ — представление из теоремы Попеску, как обычно, положим $X^\alpha = Spec\ R^\alpha_{\mathfrak{p}^\alpha}$, где $\mathfrak{p}^\alpha = (\varphi_\alpha)^{-1}(\mathfrak{m})$. Обозначим через Z^α, Y^α, W^α — подсхемы в X^α, полученные как нули идеалов, порожденных прообразами образующих соответствующих идеалов в R. Замкнутую точку локализации W_Y будем обозначать $\overline{Y}$. В геометрическом случае композиция

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(W^\alpha_{Y^\alpha} - \overline{Y}^\alpha) \arrow[r, "\partial_{W^\alpha,Y^\alpha}"] & \mathcal{F}_{-1}(\overline{Y}^\alpha) \arrow[d, equal] & \\
& \mathcal{F}_{-1}(Y^\alpha - Z^\alpha) \arrow[r, "\partial_{Y^\alpha,Z^\alpha}"] & \mathcal{F}_{-2}(Z^\alpha)
\end{tikzcd}$$

нулевая. Для морфизма $X^\alpha \to X^\beta$ имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{F}(W^\alpha_{Y^\alpha} - \overline{Y}^\alpha) \arrow[r, "\partial_{W^\alpha,Y^\alpha}"] & \mathcal{F}_{-1}(\overline{Y}^\alpha) \arrow[d, equal] & & \\
& & \mathcal{F}_{-1}(Y^\alpha - Z^\alpha) \arrow[rr, "\partial_{Y^\alpha,Z^\alpha}"] & & \mathcal{F}_{-2}(Z^\alpha) \\
\mathcal{F}(W^\beta_{Y^\beta} - \overline{Y}^\beta) \arrow[r, "\partial_{W^\beta,Y^\beta}"] \arrow[uur] & \mathcal{F}_{-1}(\overline{Y}^\beta) \arrow[d, equal] \arrow[uur] & & & \\
& \mathcal{F}_{-1}(Y^\beta - Z^\beta) \arrow[rr, "\partial_{Y^\beta,Z^\beta}"] \arrow[uur] & & \mathcal{F}_{-2}(Z^\beta). \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Переходя к пределу, получаем $\partial_{Y,z} \circ \partial_{W,Y} = \varinjlim(\partial_{Y^\alpha,Z^\alpha} \circ \partial_{W^\alpha,Y^\alpha}) = 0$, что и утверждается теоремой. $\square$

После того, как дифференциал Герстена определен, следующая лемма, как и в геометрическом случае 6.33, становится очевидной.

Лемма 13.6. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $f \in R$ — локальный параметр, $Z = Spec\ (R/fR)$. Тогда имеет место точная последовательность комплексов Герстена*

$$0 \to g(Z, \mathcal{F}_{-1})[-1] \to g(X, \mathcal{F}) \to g(X_f, \mathcal{F}) \to 0.$$

Доказательство. Лемма следует из определения дифференциала Герстена. $\square$

§14. Гипотеза Герстена в равнохарактеристическом случае

Лемма 14.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный пучок Зарисского с трансферами, S — локальное кольцо простой точки k-многообразия, $X = Spec\ S$, $f \in S$ — локальный параметр. Тогда*

$$H^p(X_f, \mathcal{F}) = 0$$

для $p > 0$.

Доказательство. Обозначим $Z = Spec\ S/fS$. Поскольку f — локальный параметр, S/fS является локальным кольцом простой точки, и для него, как и для S, справедлива гипотеза Герстена 6.30. Кроме того, из-за того, что для всех локальных колец схемы X_f гипотеза Герстена тоже справедлива, пучковый комплекс Герстена

$$\underline{\underline{g}}(X_f, \mathcal{F}) = \left(0 \to (i_\eta)_* \left(\underline{\underline{\mathcal{F}(\eta)}}\right) \to \bigoplus_{x \in X_f^{(1)}} (i_x)_* \left(\underline{\underline{\mathcal{F}_{-1}(k(x)}}\right) \to \bigoplus_{y \in X_f^{(2)}} (i_y)_* \left(\underline{\underline{\mathcal{F}_{-2}(k(y)}}\right) \to \dots\right),$$

где η — общая точка X_f, $i_x \colon x \to X_f$ — вложение точки, $\underline{\underline{\mathcal{F}_{-1}(k(x))}}$ — постоянный пучок на точке x, является резольвентой пучка $\mathcal{F}$ на X_f. А значит, $H^p(X_f, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma(X_f, \underline{\underline{g}}(X_f, \mathcal{F}))) = H^p(g(X_f, \mathcal{F}))$. Рассмотрим теперь точную тройку комплексов из леммы 6.33:

$$0 \to g(Z, \mathcal{F}_{-1})[-1] \to g(X, \mathcal{F}) \to g(X_f, \mathcal{F}) \to 0,$$

перейдем к длинной точной последовательности когомологий. Комплексы $g(Z, \mathcal{F}_{-1})$ и $g(X, \mathcal{F})$ точны вне нулевого члена, поэтому мы сразу получаем утверждение леммы. $\square$

Лемма 14.2. *Пусть $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный непрерывный пучок с трансферами, определенный на категории нетеровых k-схем, R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, $X = Spec\ R$, $f \in R$ — локальный параметр. Тогда*

$$H^p(X_f, \mathcal{F}) = 0$$

для $p > 0$.

Доказательство. По теореме Гротендика 9.1

$$H^p(X_f, \mathcal{F}) = \varinjlim H^p(X^\alpha_{f^\alpha}, \mathcal{F}),$$

где $X^\alpha = Spec\ R^\alpha$, а R^α — локальные кольца простых точек многообразий над k из пункта 8.1. А по предыдущей лемме

$$H^p(X^\alpha_{f^\alpha}, \mathcal{F}) = 0.$$

Лемма доказана. □

Теорема 14.3. *Пусть R — регулярное равнохарактеристическое кольцо, содержащее поле k характеристики 0, $\mathcal{F}$ — гомотопически инвариантный непрерывный пучок с трансферами, определенный на категории нетеровых k-схем. Тогда комплекс Герстена для $\mathcal{F}$*

$$0 \to \mathcal{F}(K) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} \mathcal{F}_{-1}(k(\mathfrak{p})) \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{q})=2} \mathcal{F}_{-2}(k(\mathfrak{q})) \to \dots$$

является резольвентой группы $\mathcal{F}(R)$.

Доказательство. Мы будем проводить индукцию по круллевской размерности d кольца R.

1) База индукции. Пусть $\dim\ R = 1$, $f \in R$ — локальный параметр. Утверждение следует предыдущей леммы поскольку в этом случае $X_f = Spec(K)$.

2) Переход индукции. Пусть $\dim\ R \geq 2$ и теорема выполняется для любого регулярного равнохарактеристического кольца размерности меньше, чем d.

Пусть, как обычно, $f \in \mathfrak{m}$ — локальный параметр, $Z = V(f)$ — множество нулей, $\dim\ Z = d-1$, дополнение X_f до Z изоморфно как схема $Spec\ R_f$. Размерность $\dim\ X_f$ меньше d, поскольку любая цепочка неприводимых подмногообразий X наибольшей длины заканчивалась точкой, соответствующей максимальному идеалу $\mathfrak{m}$, который не принадлежит X_f. Лемма 13.6 дает нам точную последовательность

$$0 \to g(Z, \mathcal{F}_{-1})[-1] \to g(X, \mathcal{F}) \to g(X_f, \mathcal{F}) \to 0.$$

Комплекс $g(Z, \mathcal{F}_{-1})$ является резольвентой группы $\mathcal{F}_{-1}(Z)$, поскольку к схеме Z применимо предположение индукции. Отсюда $H^p(g(Z, \mathcal{F}_{-1})[-1]) = 0$ для $p \geq 2$ и $H^1(g(Z, \mathcal{F}_{-1})[-1]) = \mathcal{F}_{-1}(Z)$. Схема X_f имеет размерность меньшую, чем X, но не является локальной. Тем не менее, справедливость гипотезы Герстена для локальных колец схемы X_f (так как их размерность меньше d) влечет то, что комплекс пучков $\underline{\underline{g}}(X_f, \mathcal{F})$ является резольвентой пучка $\mathcal{F}$ на X_f. Комплекс $\underline{\underline{g}}(X_f, \mathcal{F})$ состоит из вялых пучков, а комплекс его глобальных сечений — это $g(X_f, \mathcal{F})$, поэтому $H^p(g(X_f, \mathcal{F})) = H^p(X_f, \mathcal{F})$.

Из леммы 14.2 нам известно, что $H^p(g(X_f, \mathcal{F})) = 0$ для $p \geq 1$. Рассматривая длинную точную последовательность когомологий, получаем, что $H^p(g(X, \mathcal{F})) = 0$ для всех $p \geq 2$, а группы $H^0(g(X), \mathcal{F})$ и $H^1(g(X), \mathcal{F})$ связаны точной последовательностью

$$0 \to H^0(g(X, \mathcal{F})) \to \mathcal{F}(X_f) \xrightarrow{\partial_{X,Z}} \mathcal{F}_{-1}(Z) \to H^1(g(X, \mathcal{F})) \to 0.$$

Сравнивая эту последовательность с точной последовательностью из теоремы 9.7, получаем $H^0(g(X, \mathcal{F})) = \mathcal{F}(R)$, $H^1(g(X, \mathcal{F})) = 0$. $\square$

Заключение

В перспективе хотелось бы избавиться от условия характеристики 0 в доказательстве гипотезы Герстена для пучков с трансферами в равнохарактеристическом случае, и доказать соответствующее утверждение в предположении совершенности основного поля k, которое является стандартным для работы с мотивами Воеводского и пучками с трансферами. Для этого достаточно доказать следующую теорему сокращения в категории относительных мотивов, которая обобщает следствие 11.17 из данной диссертационной работы.

Гипотеза. Пусть X, Y — конечные этальные многообразия над S. Тогда для любого $n \geq 0$

$$Hom_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(X), M^S(Y)) = Hom_{D_{\mathcal{M}}(S)}(M^S(X)(n), M^S(Y)(n)).$$

Список литературы

[1] Cisinski D.-C., Deglise F. Triangulated categories of mixed motives. // preprint, arXiv:`math.RT/0912.2110`.

[2] Colliot-Thélène J.-L., Ojanguren M. Espaces principaux homogénes localement triviaux. // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 1992, No. 75, 97–122.

[3] Gersten S. M. Some exact sequences in the higher K-theory of rings. // Algebraic K-theory. I: Higher K-theories: Proc. Conf. Battelle Memorial Inst., Seattle (WA), 1972. Berlin etc.: Springer, 1973, pp. 211–243.

[4] Grayson D. Higher algebraic K-theory. II (after D. Quillen). // Algebraic K-Theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill, 1976), Springer, Berlin, Lecture Notes in Math., vol. 551, 1976, pp. 217–240.

[5] Grothendieck A., Artin M., Verdie J.-L. Theorie des topos et cohomologie etale des schemas. Berlin etc.: Springer, 1972. (Lect. Notes Math.; V. 270)

[6] Hirschhorn P. S. Model categories and their localizations. Mathematical Surgey and Monographs, vol. 99, AMS, 2002, 470 p.

[7] Levine M. Oriented cohomology, Borel-Moore homology and algebraic cobordism. // Michigan Math. J., Volume 57, 2008, 523–572.

[8] Morel F. $\mathbb{A}^1$-Algebraic topology over a field. Lecture Notes in Mathematics, 2052, Springer, Heidelberg, 2012.

[9] Mazza C., Voevodsky V., Weibel C. Lecture notes on motivic cohomology. // Clay Mathematics Monographs 2, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006, 216 p.

[10] Panin I. A. The equicharacteristic case of the Gersten conjecture. // Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия, Сборник статей к 80-летию со дня рождения академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, 241, Наука, М., 2003, 169–178.

[11] Panin I. Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties. // Special issue in honor of H. Bass on his seventieth birthday. Part III, K-Theory 30, 2003, no. 3, 265–314.

[12] Panin I. Oriented Cohomology Theories of Algebraic Varieties II (after I. Panin and A. Smirnov). // Homology, Homotopy and Applications, vol. 11(1), 2009, 349–405.

[13] Popesku D. General Néron desingularization. // Nagoya Math. J., vol. 100, 1985, 97–126.

[14] Popesku D. General Néron desingularization and Approximation. // Nagoya Math. J., vol. 104, 1986, 85–115.

[15] Popesku D. Letter to Editor; General Néron desingularization and approximation. // Nagoya Math. J., vol. 118, 1990, 45-53.

[16] Quillen D. Higher algebraic K-theory. I // Albebraic K-Theory. I: Higher K-Theories (Proc. Conf., Seattle Res. Center, Battelle Memorial Inst., 1972), Lecture Notes in Math., vol. 341, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 85–147.

[17] Suslin A., Voevodsky V. Singular Homology of Abstract Algebraic Varieties. // Inv. Math. 123, 1996, 61–94.

[18] Suslin A., Voevodsky V. Bloch–Kato Conjecture and Motivic Cohomology with Finite Coefficients. // The arithmetics and geometry of algebraic cycles, NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, 117–189.

[19] Swan R. G. Higher algebraic K-theory. // Proceeding of Symposia in Pure Mathematics. Volume 58.1, 1995, 247–292.

[20] Voevodsky V. Cohomological Theory of Presheves with Transfers. // Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories (V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, eds.), Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1999.

[21] Voevodsky V. Triangulated categories of motives over a field. // Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories (V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, eds.), Annals of Math. Studies, 1999.

[22] Voevodsky V. Cancellation theorem. // Doc. Math. Extra Volume in honor of A. Suslin, 2010, 671–685.

[23] Милн Дж. Этальные когомологии. Москва: Мир, 1983, 392 с.

[24] Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. Москва: Мир, 1974, 198 с.

[25] Мингазов А.А. Согласованность гомоморфизма Гизина и трансфера. // Алгебра и Анализ, 27:4, 2015, 59–73.

[26] Мингазов А.А. Точность комплекса Герстена для алгебр Адзумая в равнохарактеристическом случае. // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., № 3 (114), 2014, 67—75.

[27] Мингазов А.А. Равнохарактеристический случай гипотезы Герстена для пучков с трансферами. // Четвертая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". Москва, Россия, 27 января – 1 февраля 2014 г. Тезисы докладов. — Издательство Московского университета, 2014, с. 30.

[28] Мингазов А.А. Совпадение гомоморфизма Гизина и трансфера для пучков с трансферами. // Пятая школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов". г. Самара, Россия, 22–27 июня 2015 г. Тезисы докладов. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2015, с. 30.

[29] Мингазов А.А. Комплекс Герстена для пучков с трансферами для нетеровых схем. // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., № 6 (128), 2015, 97–100.

[30] Панин И. А., Суслин А. А. Об одной гипотезе Гротендика, касающейся алгебр Адзумайа. // Алгебра и анализ, 9:4, 1997, 215–223.

[31] Фултон У. Теория пересечений. Москва: Мир, 1989, 576 с.