Мидлсекский университет

На правах рукописи

Новак Сергей Юрьевич

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

Диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Введение

Теория экстремальных значений является одним из наиболее динамично развивающихся разделов теории вероятностей и математической статистики. Её истоком можно считать классическую теорему Пуассона об асимптотике распределения числа редких событий; ряд задач имеет более глубокую историю (см., к примеру, Муавр (1738), задача LXXIV).

Актуальность исследования асимптотических свойств распределений экстремальных значений связана с приложениями в страховом деле, финансах, метеорологии, гидрологии (см. Эмбрехтс, Клюпельберг, Микош (1997), Бейрлант, Гогебер, Тойгельс, Сегерс (2004)). К примеру, популярной мерой риска, используемой крупнейшими банками, является VaR (экстремальная квантиль). Задача оценивания вероятности выхода за высокий уровень имеет приложения в страховом деле.

Основы современной теории экстремальных значений заложили в начале 20-го века Мизес (1923, 1936), Фреше (1927), Фишер и Типет (1928), Гнеденко (1943). Работа де Хаана (1970) завершает классический период развития теории, посвящённый изучению распределений экстремальных значений в последовательностях независимых одинаково распределённых случайных величин.

В то время как классическая теории экстремальных значений имеет дело с последовательностями независимых одинаково распределённых с.в., финансовые приложения часто демонстрируют зависимость наблюдений. Это делает актуальным изучение асимптотических свойств распределений экстремальных значений в последовательностях стационарно связанных случайных величин.

Значительный вклад в развитие теории экстремальных значений для последовательностей стационарно связанных случайных величин внесли Ньюэл (1964) и Лойнес (1965), которые фактически ввели понятие экстремального индекса. Дальнейшее развитие теории связано с работами Бермана (1962), Лидбеттера (1974), О'Брайена (1974, 1987), Мори (1977), Хсин (1987) и др..

Хсин, Хюслер и Лидбеттер (1988) установили, что предельным распределением одномерного эмпирического точечного процесса выходов за высокий уровень, учитывающего месторасположение экстремумов, является сложно-пуассоновское распределение. Это связано с тем, что в последовательностях зависимых случайных величин экстремальные значения появляются кластерами, и распределение числа редких событий слабо сходится к сложно-пуассоновскому закону.

Мори (1977) показал, что класс распределений общих процессов выходов за высокий уровень в последовательностях стационарно связанных с.в. богаче класса сложно-пуассоновских процессов. Хсин (1987) охарактеризовал предельное распределение общего двумерного процесса выходов за высокий уровень в последовательностях стационарно зависимых случайных величин в терминах двумерных точечных процессов.

Диссертация посвящена исследованию асимптотики распределения случайных величин и процессов, возникающих в теории экстремальных значений для последовательностей стационарно связанных с.в.. Рассматриваются такие задачи, как характеризация класса $\mathcal{P}$ предельных распределений общих точечных процессов, возникающих в теории экстремальных значений, оценивание скорости сходимости в соответствующих предельных теоремах, статистическое оценивание характеристик распределений, рассматриваемых в теории экстремальных значений, установление нижних границ точности оценивания характеристик распределений.

В диссертации получена характеризация распределений двумерных точечных процессов из класса $\mathcal{P}$ в терминах одномерных точечных процессов, описаны свойства распределений из класса $\mathcal{P}$, установлены свойства маргинальных распределений.

Важную роль при изучении асимптотики распределения экстремальных значений играет задача установления оценок скорости сходимости в соответствующих предельных теоремах. Вопрос является нетривиальным даже в случае теоремы Пуассона. Многие известные авторы работали над указанной задачей, в том числе Прохоров (1952), Лекам (1965), Серфлин (1975), Чен (1975), Шоргин (1977), Барбур и Иглсон (1983), Барбур и Холл (1984), Деовельс и Пфайфер (1986, 1988).

Асимптотику расстояния по вариации в теореме Пуассона в случае независимых одинаково распределённых случайных величин установил Прохоров (1952). Роос (2001) получил оценку точности пуассоновской аппроксимации в терминах расстояния по вариации с неулучшаемой константой. Однако вопрос о точности сложно-пуассоновской аппроксимации долгое время оставался открытым, равно как и вопрос о точности пуассоновской аппроксимации в ряде задач теории экстремальных значений для выборок случайного объёма. Решению этих задач посвящена одна из глав диссертации. Указанные задачи имеют приложения в страховом деле при изучении распределения размера максимальных выплат страховыми компаниями.

В статистике экстремальных значений основное внимание уделяется задачам оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами. Актуальность указанной тематики связана с приложениями к финансам и страховому делу, где наблюдения зачастую оказываются зависимыми, а их распределения имеют тяжёлый хвост.

Основной характеристикой распределения с тяжёлым хвостом является показатель скорости убывания хвоста распределения. Оценка показателя скорости убывания хвоста распределения входит в конструкцию оценок экстремальной квантили и вероятности выхода за высокий уровень в последовательности стационарно связанных случайных величин.

Экстремальная квантиль широко используется банками как мера финансовых рисков. Один из методов определения страховых ставок также основан на использовании экстремальных квантилей.

В последние десятилетия тематика оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами развивается весьма интенсивно (см. Хилл (1975), Холл (1982), Хойслер и Тойгельс (1985), Голди и Смит (1987), Декерс, Айнмаль, де Хаан (1989), Эмбрехтс, Клюпельберг, Микош (1997), Бейрлант, Гогебер, Тойгельс, Сегерс (2004). В диссертации предложены новые оценки показателя скорости убывания хвоста распределения, экстремальной квантили, вероятности выхода за высокий уровень, доказана их состоятельность и асимптотическая нормальность при минимальных ограничениях на коэффициенты перемешивания, построены подасимптотические доверительные интервалы, предложен алгоритм выбора управляющего параметра непараметрических оценок. Полученные теоретические результаты, алгоритм выбора управляющего параметра и результаты тестирования на моделированных и реальных финансовых данных свидетельствуют в пользу предложенного подхода, в то время как ранее известные подходы оказались неудовлетворительны (см. "ужас оценки Хилла" [326], "ужас оценки максимального правдоподобия" [122], стр. 357, 365, 406, и [232, 231]).

Важным направлением в статистике экстремальных значений является тема нижних границ точности оценивания характеристик неизвестного распределения. Этой тематике посвящены работы Холл и Вэлш (1984), Донохо и Лиу (1991), Пфанцаль (2000), Дреес (2001), Бейрлант, Буко, Веркер (2006). Однако имеющаяся литература даёт лишь частичное решение указанной задачи: найден порядок скорости убывания нижней границы, асимптотическая нижняя граница выводится при ограничениях на класс рассматриваемых оценок.

В диссертации впервые получены неасимптотические нижние границы точности оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами, выявлены соответствующие информационные функционалы.

Многие оценки в статистике экстремальных значений входят в группу статистик, являющихся самонормированными суммами (СНС) случайных величин. Таковы ряд оценок показателя скорости убывания хвоста распределения, экстремального индекса, элементы конструкции оценок экстремальной квантили и вероятности выхода за высокий уровень. Группа СНС статистик включает также статистику Стьюдента, ядерную оценку функции регрессии, оценку функции интенсивности отказов.

Раздел статистики, связанный с самонормированными суммами случайных величин, интенсивно развивается в последние десятилетия (см. Чун (1946), Эфрон (1969), Малер (1981), Славова (1985), Холл (1987), Бенткус и Гётце (1996), Жине, Гётце, Мэйсон (1997), Шао (1997), Чистяков (2001)).

В диссертации получены оценки скорости сходимости в ЦПТ для распределений самонормированных сумм независимых и стационарно связанных случайных величин; решена долго остававшаяся открытой задача получения оценок скорости сходимости с явными константами; показано, что в неравенстве типа Берри–Эссеена для статистики Стьюдента константа не может быть лучше, чем $1/\sqrt{2e}$;

установлено, что аналог неравномерного неравенства Берри–Эссеена, вообще говоря, не имеет места для самонормированных сумм случайных величин.

Основная цель работы – исследование асимптотических свойств распределений случайных величин и процессов, применяемых в задачах теории экстремальных значений, характеризация класса предельных распределений соответствующих случайных величин и процессов, получение оценок скорости сходимости в указанных предельных теоремах, разработка статистических методов оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами по выборкам стационарно связанных случайных величин, установление нижних границ точности оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами, выявление соответствующих информационных функционалов.

В работе применяются методы теории вероятностей и математической статистики. Кроме того, используется ряд конструкций, предложенных автором.

Глава 1

Оценки скорости сходимости в предельных теоремах для выборочного максимума

В этой главе описывается предложенный автором подход к задаче получения оценок скорости сходимости в предельных теоремах теории экстремальных значений, а также решается ряд задач теории экстремальных значений, связанных с выборками случайного объёма.

1.1 Метод рекуррентных неравенств

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – стационарная последовательность случайных величин. Перепишем выборку $X_1, \ldots, X_n$ в невозрастающем порядке:

$$X_{1,n} \geq \ldots \geq X_{n,n} \,. \tag{1.1}$$

Случайные величины (1.1) называются порядковыми статистиками,

$$M_n = X_{1,n}$$

есть выборочный максимум, $X_{k,n}$ – k-й максимум.

Обозначим

$$N_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\{X_i > x\} \,.$$

Случайная величина $N_n(x)$ называется числом выходов за уровень x.

Легко видеть, что

$$\{X_{m,n} \leq x\} = \{N_n(x) < m\} \qquad (1 \leq m \leq n) \,.$$

Поэтому $X_{m,n} = \min\{x : N_n(x) < m\}$.

В теории экстремальных значений стационарно связанных случайных величин хорошо известен метод блоков Бернштейна. Он предлагает разбивать выборку объёма n на блоки длины $r = r(n)$, $1 \ll r \ll n$, и удалять из них подблоки длины $l = l(n) \ll r$. Тогда урезанные блоки "почти" независимы, и можно применять аппарат ТЭЗ для независимых случайных величин.

Примером результа, полученного методом блоков, является следующий факт: если

$$\limsup_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) < \infty, \tag{1.2}$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{[n/k]} \mathbb{P}(X_{i+1} > u_n | X_1 > u_n) = 0\,, \tag{D'}$$

то [212]

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbb{P}(M_n \le u) - \mathbb{P}^n(X \le u)| = 0\,.$$

Недостатком метода является невысокая точность аппроксимации $\mathbb{P}(M_n \le u_n)$.

Метод рекуррентных неравенств состоит в составлении и решении рекуррентных неравенств для $\mathbb{P}(M_n \le u)$. Он позволяет получать для вероятности $\mathbb{P}(M_n \le u)$ оценки сверху и снизу, с помощью которых выводятся оценки точности аппроксимации в предельных теоремах для M_n. В ряде задач (к примеру, в задаче о длине наибольшей серии "успехов" [284]) метод рекуррентных неравенств позволил получить неулучшаемые оценки скорости сходимости в соответствующих предельных теоремах.

Предположим, что $u = u_n$, и обозначим $p := \mathbb{P}(X > u) > 0$,

$$b \equiv b(r,u) = \mathbb{P}(X_r > u, M_{r-1} \le u)\,,$$

если $r > 1$, $b = \mathbb{P}(X_n > u)$ если $r = 1$. Заметим,что

$$\{M_n \le u\} = \{M_{n-1} \le u\} \setminus \{M_{n-r} \le u, B_n\}\,.$$

Таким образом,

$$P_n := \mathbb{P}(M_n \le u) = \mathbb{P}(M_{n-1} \le u) - \mathbb{P}(M_{n-r} \le u, B_n)\,. \tag{1.3}$$

События $\{M_{n-r} \le u\}$ и B_n обычно "почти независимы". Поэтому

$$P_n \approx P_{n-1} - bP_{n-r} \approx (1-b)P_{n-1} = \ldots = (1-b)^{n-r} P_r\,.$$

Так как P_r обычно близко к 1, получим

$$\mathbb{P}(M_n \le u) \approx e^{-nb}\,. \tag{1.4}$$

Следующая теорема устанавливает оценку точности аппроксимации (1.4) в случае стационарной последовательности с.в., удовлетворяющей условию φ-перемешивания.

Пусть $\mu \equiv \mu(r,u) = (1+\sqrt{1-4(r+l)b}\,)/2$, $R_n = 0$ если $4(r+l)b > 1$,

$$\begin{aligned} R_n &\equiv R_n(r,u,l) = \mu^{[\frac{n}{r+l}]}(\mu - (r+l)p) - \varphi(l) \qquad \text{if } 4(r+l)b \le 1\,, \\ Q_n &\equiv Q_n(r,u,l) = (1-b)^{n-2r-l}(1-(2r+l)p) - (r+l)b - \varphi(l)\,, \\ V_n &\equiv V_n(r,u,l) = (1-rb)^{[n/(r+l)]} + \varphi(l)\,. \end{aligned}$$

Теорема 1.1 *Если* $r, l \in \mathbb{N}$, $r > 1\,, r+l \le n$ *и* $n > 3r+2l$, *то*

$$\max\{R_n; Q_n\} \le \mathbb{P}(M_n \le u) \le V_n\,. \tag{1.5}$$

Следующая теорема посвящена оцениванию $\mathbb{P}(M_n \le u)$ в случае $(m-1)$-зависимых случайных величин.

Теорема 1.2 *Если случайные величины* $\{X_i, i \ge 1\}$ $(m-1)$-*зависимы,* $8mb \le 1$ *и* $n > 4m$, *то*

$$\begin{aligned} &(1-b)^{n-4m} - 2m(b+2p) \le \mathbb{P}(M_n \le u) \\ &\le e^{-(n-4m)b} + (e^{-1}+4mb)mp/(1-mp)\,. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. Соотношение (1.6) получено методом рекуррентных неравенств. Оно означает, что точность аппроксимации (1.4) есть $O(n^{-1}+p)$. Что касается аппроксимации по методу блоков, имеет место следующая оценка [212, 284]:

$$\left|\mathbb{P}(M_n \le u) - \mathbb{P}^{n/r}(M_r \le u)\right| \le \mathbb{P}(M_{r\{n/r\}} > u) + (\alpha_n(l)+2lp)\,n/r + (e[n/r])^{-1}\,, \tag{1.7}$$

если $1 \le l \le n/k \le n$. В случае $(m-1)$-зависимых с.в. естественно положить в (1.7) $l = m$. Тогда $r = \sqrt{2mn}$ минимизирует правую часть (1.7), и точность аппроксимации (1.7) есть $O(n^{-1/2} + n^{1/2}p)$.

Замечание 1.2. Отметим, что при $1 \le i \le r$ и $0 \le l < m$

$$\frac{\mathbb{P}(M_i > u)}{i} \ge b(r,u) \ge \frac{\mathbb{P}(M_{r+m} > u) - \mathbb{P}(M_{r+l} > u)}{m-l} \tag{1.8}$$

(первое из неравенств (1.8) принадлежит О'Брайену [288]). В частности,

$$\mathbb{P}(M_r > u)/r \ge b(r,u) \ge (\mathbb{P}(M_{2r} > u) - \mathbb{P}(M_r > u))/r. \tag{1.9}$$

Условие (D') было введено Лойнесом [220]. Оно означает отсутствие асимптотических кластеров экстремальных значений.

Более общим, чем (D'), является условие Ватсона [404]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{i+1} > u_n | X_1 > u_n) = 0 \qquad (\forall i \in \mathbb{N}). \tag{1.10}$$

Следующая теорема дополняет результат О'Брайена [288], показавшего, что условие Ватсона (1.10) влечёт (1.12).

Теорема 1.3 *Предположим, что* $\lim_{l\to\infty} \varphi(l) = 0$ *и*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) \le \limsup_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) < \infty\,. \tag{1.11}$$

Если

$$\mathbb{P}(M_n \le u_n) - \exp\left(-n\mathbb{P}(X > u_n)\right) \to 0, \tag{1.12}$$

то имеет место (1.10).

Отметим, что

$$\mathbb{P}(X \le u_n) - \exp\left(-n\mathbb{P}(X > u_n)\right) = O(n^{-1})$$

(см. (2.65)).

1.2 Экстремальный индекс

Экстремальный индекс позволяет описывать асимптотику распределения выборочного максимума $M_n = \max_{1\le i\le n} X_i$ по отношению к максимуму n независимых копий с.в. X. Этот раздел посвящен понятию экстремального индекса (ЭИ) и его роли в описании асимптотики распределения экстремальных значений выборки.

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – стационарная последовательность с.в..

Определение 1.1. *Последовательность* $\{X_i, i \ge 1\}$ *имеет экстремальный индекс* θ, *если*

$$\mathbb{P}(M_n \le u_n) - \exp\left(-\theta n\mathbb{P}(X > u_n)\right) \to 0 \tag{1.13}$$

для любой последовательности $\{u_n\}$, *такой что*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) \le \limsup_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) < \infty\,. \tag{1.14}$$

Иными словами, последовательность $\{X_i, i \ge 1\}$ имеет ЭИ θ, если

$$\mathbb{P}(M_n \le u_n) - \mathbb{P}^{\theta n}(X \le u_n) \to 0 \tag{1.13*}$$

для любой последовательности $\{u_n\}$ удовлетворяющей (1.14).

Согласно традиционному определению ЭИ [212, 122], последовательность с.в. $\{X_i,\ i \ge 1\}$ имеет экстремальный индекс θ если (1.13) выполнено для каждой $t > 0$ и $u_n = u_n(t)$, таких что выполнено (1.15). Использование (1.14) вместо (1.15) позволяет сделать определение ЭИ более гибким.

Рассмотрим, к примеру, последовательность $X, X_1, X_2, \ldots$ н.о.р.с.в. с геометрическим распределением $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)p^{k-1}$, $k \ge 1$, $p \in (0;1)$. Тогда (1.15) не выполнено (заметим, что (3.10) равносильно (1.15), см. Теорему 1.7.13 в [212]), и M_n не имеет предельного распределения. Тем не менее,

$$n\mathbb{P}(X > [\log_{1/p} n] + j) = p^{j-\{\log_{1/p} n\}} ,$$

и (1.13) выполнено с $\theta = 1$. Следовательно, последовательность $\{X_i\}$ имеет экстремальный индекс.

Если последовательность $\{X_i, i \geq 1\}$ имеет ЭИ θ, условие перемешивания $\Delta\{u_n\}$ выполнено и $n\mathbb{P}(X > u_n) \to \tau$ при $n \to \infty$ (т.е. u_n есть асимптотическая верхняя квантиль уровня τ/n), то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(M_n \leq u_{[n\theta\tau/t]}\right) = e^{-t} \qquad (\forall t > 0)\,.$$

Таким образом, знание ЭИ и верхней квантили позволяет строить нормирующую последовательность для M_n: если $\hat{\theta}$ – оценка ЭИ и u_n – оценка $F_c^{-1}(1/n)$, то

$$\mathbb{P}\left(M_n \leq u_{[n\hat{\theta}/t]}\right) \approx e^{-t} \qquad (\forall t > 0)\,.$$

Пусть K^* обозначает правую грань носителя $\mathcal{L}(X)$, $u = u_n$,

$$p = \mathbb{P}(X > u)\,,\ M_{m,n} = \max_{m<k\leq n} X_k\,,\ N_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i > u\}\,.$$

Будем считать, что $p > 0$. Обозначим

$$\theta^{R}(r,u) = \mathbb{P}(M_{1,r} \leq u | X_1 > u)\,,\ \theta^{B}(r,u) = \mathbb{P}(M_r > u)/r\mathbb{P}(X > u)\,.$$

Если $u < K^*$, то

$$0 < \theta^{R}(r,u) \leq 1\,,\ 0 < \theta^{B}(r,u) \leq 1\,.$$

Как уже было отмечено,

$$\mathbb{P}(M_n \leq u) \approx \exp\Big(-\theta^{B}(r,u)np\Big)$$

(ср. с (1.7)). Согласно теореме 1.1 (см. также теорему 1.2),

$$\mathbb{P}(M_n \leq u) \approx \exp\Big(-\theta^{R}(r,u)np\Big).$$

Следовательно, θ^{R} и θ^{B} можно использовать для аппроксимации θ.

Необходимые и достаточные условия существования экстремального индекса изучались рядом авторов. Лидбеттеру принадлежит следующее утверждение.

Утверждение 1.4 [211] *Предположим, что (3.10) и условие* $(D\{u_n\})$ *выполнено для последовательности* $\{u_n\}$ *такой, что*

$$\exists \lim_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) \in (0,\infty). \tag{1.15}$$

Тогда последовательность $\{X_i, i \geq 1\}$ *имеет экстремальный индекс* θ, *если и только если*

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} |\theta - \theta^{B}([n/r], u_n)| = 0\,. \tag{1.16}$$

Соотношение (1.16) означает, что θ можно аппроксимировать с помощью относительно "больших" блоков.

Теорема 1.5 *Пусть последовательность уровней* $\{u_n\}$ *удовлетворяет соотношению (1.14) и условию перемешивания* $(D\{u_n\})$. *Последовательность* $\{X_i, i \geq 1\}$ *имеет экстремальный индекс* θ, *если и только если*

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} |\theta - \theta^{R}(r, u_n)| = 0\,. \tag{1.17}$$

Соотношение (1.17) равносильно следующему:

$$\lim_{r\to\infty}\limsup_{n\to\infty} |\theta - \theta^{B}(r, u_n)| = 0\,. \tag{1.18}$$

Утверждение теоремы 1.5 устанавливает возможность аппроксимации θ с помощью относительно "малых" блоков.

Отметим, что $1/\theta$ можно интерпретировать как средний размер предельного кластера ζ. Пусть с.в. ζ_r имеет распределение $\mathcal{L}(\zeta_r) = \mathcal{L}(N_r|N_r > 0)$. Тогда

$$np = \mathbb{E}N_n = \frac{n}{r}\mathbb{E}N_r = \frac{n}{r}\mathbb{P}(N_r > 0)\mathbb{E}\zeta_r$$

(ср. [251]). Следовательно,

$$1/\theta^{B}(r,u) = \mathbb{E}\zeta_r\,.$$

Если сходимость $\zeta_r \Rightarrow \zeta$ при $r = r(n) \to \infty$ имеет место вместе со сходимостью первых моментов, то $\mathbb{E}\zeta = 1/\theta$.

Пример 1.1. Пусть $\{\xi_i\}$ – последовательность н.о.р.с.в.. Предположим, что $\{u_n\}$ – последовательность уровней, такая что $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\max\limits_{1\leq i\leq n} \xi_i \leq u_n\Big) = e^{-\lambda}$ $(\exists\lambda > 0)$. Положим

$$X_i = \max\{\xi_i; \xi_{i+1}\}\,. \tag{1.19}$$

Тогда $\{X_i, i \geq 1\}$ – стационарная последовательность 1-зависимых с.в.,

$$\theta^{B}(r,u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2r} + O(rp)\,,\ \theta^{R}(r,u) = \frac{1}{2}\,(1 - p/2 - rp + o(rp))$$

при $rp \to 0$. Таким образом, в этом примере θ^{R} приближает $\theta = 1/2$ лучше, чем θ^{B}, если $r^2p \to 0$, θ^{B} приближает θ лучше, если $r^2p \to \infty$. □

1.3 Максимум частичных сумм Эрдеша–Реньи

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. случайные величины, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

$$\zeta_m \equiv \zeta_m(k) = X_{m+1} + \ldots + X_{m+k} \qquad (m \geq 0, k \geq 1),$$

$\zeta \stackrel{d}{=} \zeta_0 = S_k$. Обозначим

$$R_n^* \equiv R_n^*(k) = \max_{0 \leq i \leq n} \zeta_i\,, \;\; R_n \equiv R_n(k) = R_{n-k}^*(k)\,. \tag{1.20}$$

Случайная величина $R_n(k)$ известна как максимум частичных сумм Эрдеша–Реньи (МЧС).

Случайная величина R_n имеет двойственную природу. Она обладает, в зависимости от соотношения между k и n, как свойствами суммы, так и свойствами максимума случайных величин:

$$R_n(1) = \max_{1 \leq i \leq n} X_i\,, \;\; R_n(n) = X_1 + \ldots + X_n\,. \tag{1.21}$$

Теория сумм случайных величин, так же как и теория экстремальных значений, представляют собой разделы общей теории статистик вида (1.20).

Задача о распределении МЧС имеет приложения к финансам. К примеру, если $\{X_i\}$ – логарифм дневного прироста цены акции или индекса, то $R_n(5)$ есть логарифм наибольшего недельного прироста за период в n дней. Статистика $R_n(k)/k$ является оценкой функции Λ^{-1}, обратной к “функции уклонений” Λ в теории больших уклонений (см. (1.30)). С помощью результатов о распределении статистики $R_n(k)$ можно получать также соответствующие утверждения о распределении длины наибольшей серии “успехов” L_n. Случайные величины L_n и $R_n(k)$ тесно связаны:

$$L_n = \max\{k \leq n : \, R_n(k) \geq k\},$$

если $\mathcal{L}(X) = \mathbf{B}(p)$.

Асимптотика распределения с.в. $\{R_n(k)\}$ в крайних ситуациях (1.21) хорошо изучена. В этом разделе рассматриваются ситуации

$$k = k(n) \to \infty\,, \;\; k(n) = o(n) \qquad (n \to \infty)\,. \tag{1.22}$$

1.3.1 Неравенства для $\mathbb{P}(R_n^* < x)$

Теорема 1.6 устанавливает нижнюю и верхнюю границы для функции распределения $R_n(k)$. Эти оценки, полученные по методу рекуррентных неравенств, составляют основу предложенного подхода к изучению распределения с.в. $R_n(k)$ во всём спектре ситуаций (1.22). При слабых ограничениях на вид зависимости k и x от n эти границы сближаются к e^{-nb}, где

$$b \equiv b(k,x) = \mathbb{P}(R_k^* \geq x) - \mathbb{P}(R_{k-1}^* \geq x)\,.$$

Поэтому распределение $R_n(k)$ и $R_n^*(k)$ может быть хорошо аппроксимировано, если известна асимптотика $b(k,x)$.

Теорема 1.6 получена методом рекуррентных неравенств. Этот метод оказался эффективным средством получения оценок скорости сходимости в ряде предельных теорем теории экстремальных значений.

Обозначим

$$\begin{aligned}
p_n &\equiv p_n(k,x) = \mathbb{P}(R_n^* < x)\,, \quad \bar{p}_n = 1 - p_n\,, \\
D_k &\equiv D_k(x) = \{\zeta_k \geq x, \zeta_{k-1} < x, \ldots, \zeta_0 < x\}\,, \\
D_k^+ &\equiv D_k^+(x) = \{\zeta_{2k-1} \geq x, \zeta_{2k-2} < x, \ldots, \zeta_0 < x\}\,, \\
a &\equiv a(k,x) = 2kb\,, \qquad b \equiv b(k,x) = \mathbb{P}(D_k)\,, \\
d &\equiv d(k,x) = kb\mathbb{P}(\zeta \geq x)\,, \quad b^* \equiv b^*(k,x) = \mathbb{P}(D_k^+)\,.
\end{aligned}$$

Теорема 1.6 *Если* $n \geq 4k$ *и* $8kb \leq 1$, *то*

$$\mu^{1+n/2k}(p_{2k} - a - 4a^2) \leq \mathbb{P}(R_n^* < x) \leq \lambda^{[n/2k]-1}(p_{2k} + 4a^2/3)\,,$$

где $\mu = (1 + \sqrt{1-4a}\,)/2\,,\ \lambda = (1-b+d)^{2k}(1+2a^2)\,.$

Заметим, что $1-a \geq \mu \geq 1-a+4a^2\,.$

Следствие 1.7 *Пусть* $n \geq 4k$ *и* $8k\mathbb{P}(\zeta \geq x) \leq 1$. *Существует абсолютная константа* c, *такая что*

$$\begin{aligned}
p_k e^{-nb} - ckn^{-1} &\leq \mathbb{P}(R_n^* < x) \\
&\leq p_k \exp(-nb\,(1 - k\mathbb{P}(S_k \geq x))) + ckn^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Асимптотика распределения МЧС $R_n(k)$ изучалась при следующих ограничениях на распределение с.в. $\{X_i\}$:

(**A**) $\mathbb{E}X = 0$,

(**B**) $\mathbb{E}X^2 = 1$,

(**C**) $\mathbb{E}e^{tX} < \infty\ (\exists t > 0)\,.$

Иногда добавлялось также следующее условие:

(**D**) *распределение с.в.* X *субгауссово: существует константа* $\sigma \in (0;\infty)$ *такая что*

$$\mathbb{E}e^{tX} \leq \exp(t^2\sigma^2/2) \qquad (\forall t > 0).$$

Обозначим

$$x_k \equiv x_k(\varepsilon) = \sqrt{2(1+\varepsilon)k\ln k}\,.$$

Следствие 1.8 *Предположим, что* $n \geq 4k$ *и выполнены условия* (A) – (C). *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует константа* $c_\varepsilon \in (0,\infty)$, *такая что*

$$\sup_{x \geq x_k} |\mathbb{P}(R_n^* < x) - e^{-nb}| \leq c_\varepsilon \left(kn^{-1} + k^{-\varepsilon/2}\right)\,, \tag{1.23}$$

$$\sup_{x \leq x_k} \mathbb{P}(R_n^* < x) \leq \exp(-nk^{-2-2\varepsilon})$$

для всех достаточно больших k.

Следствие 1.8 показывает, что

$$\mathbb{P}(R_n^* < x) \approx e^{-nb(k,x)} .$$

В частности, если $k = k(n)$ растёт как $(\ln n)^t$ для некоторого $t > 0$, то $|\mathbb{P}(R_n^* < x) - e^{-nb}|$ убывает к 0 быстрее, чем $(\ln n)^{-s}$ $(\forall s > 0)$.

Касательно $b(k,x) = \mathbb{P}(\zeta_0 < x, \ldots, \zeta_{k-1} < x, \zeta_k \geq x)$, справедлива

Лемма 1.9 *Пусть $\{\zeta_i, i \geq 0\}$ – стационарная последовательность случайные величин. Тогда*

$$(\bar{p}_{k+m} - \bar{p}_k)/m \leq b(k,x) \leq \bar{p}_i/i \qquad (1 \leq i \leq k\,,\, m \geq 1)\,. \tag{1.24}$$

Лемма 1.9 является следствием (1.8).

Естественно возникает вопрос об асимптотике функции $b(k,x)$ при $k \to \infty$. Лемма 1.10 устанавливает асимптотику $b(k,x)$ в предположении, что распределение X субгауссово и $\sqrt{k} \ll x \ll k$.

Пусть $\Lambda(x) = \sup_t\{tx - \ln \mathbb{E}e^{tx}\}$ обозначает "функцию уклонений" (см. Приложение). Питербаргу принадлежит следующее утверждение.

Лемма 1.10 [312] *Предположим, что выполнены условия (A) – (D). Если $\sqrt{k} \ll x \ll k$, то для каждого $l \in \mathbb{N}$*

$$\bar{p}_{lk} \sim \frac{lx}{\sqrt{2\pi k}} \exp\left(-k\Lambda(x/k)\right) \qquad (k \to \infty)\,. \tag{1.25}$$

Лемма 1.9 с $m = i = k$ и (1.25) влекут

$$b^* \sim b \sim k^{-1}\bar{p}_k \sim \frac{xe^{-k\Lambda(x/k)}}{k\sqrt{2\pi k}}\,. \tag{1.26}$$

Применяя теорему Петрова (см. Приложение), получим

$$b \sim (x/k)^2 \mathbb{P}(S_k \geq x)$$

.

Если $x \asymp k$, то асимптотика $b(k,x)$ известна только в случае распределения Бернулли $\mathbf{B}(1/2)$ [98]. Обозначим

$$p(k,m) = 2^{-k-1}\binom{k-1}{m-1}\left(1 - \frac{2(k-m)}{k-1}\right) \qquad (k/2 < m \leq k)\,.$$

Деовельс и др. установили следующий результат.

Лемма 1.11 [98] *Если* $X \in \mathbf{B}(1/2)$ *и* $m \in (k/2; k]$, *то*

$$1 \le b(k,m)/p(k,m) \le 1 + \sqrt{2k}/(2m-k-1)\,. \tag{1.27}$$

Положим

$$H(x) = x\log_2 x + (1-x)\log_2(1-x) + 1\,,$$

Пусть

$$m = j + [\gamma k + 0.5\log_q k]\,,\ q = 1/\gamma - 1\,,$$

где $j \in \mathbf{Z}$, $\gamma \in (0.5; 1)$ – правый корень уравнения

$$H(\gamma) = k^{-1}\log_2 n.$$

По теореме Петрова,

$$\mathbb{P}(S_k \ge m) \sim 2^{-kH(m/k)} \Big/ 2\sqrt{2\pi\gamma(1-\gamma)k}\ (1-\sqrt{q}\,) \tag{1.28}$$

при $k \to \infty, j \in \mathbf{Z}$. Согласно (1.27) и (1.62),

$$b(k,m)/\mathbb{P}(S_k \ge m) \to \theta = \gamma(2\gamma-1)(1-\sqrt{q}\,) \tag{1.29}$$

при $k \to \infty$. Это означает, что в условиях теоремы 1.14 $\{\zeta_i(k), 1 \le i \le n\}_{n\ge1}$ имеет экстремальный индекс θ.

1.3.2 Предельные теоремы для МЧС

Этот раздел посвящен предельным теоремам для МЧС Эрдеша–Реньи.

Пусть Λ – функция больших уклонений (6.17). Обозначим

$$\Lambda_+ = \lim_{a\uparrow m_+} \Lambda(a)\,,\ a_c = \Lambda^{-1}(1/c)\,.$$

Эрдеш и Реньи [124] установили, что если $k \equiv k(n) = [c\ln n]$, где $c > 1/\Lambda_+$, и выполнены условия (A) – (C), то

$$\lim_{n\to\infty} R_n(k)/k = a_c \qquad (\text{с.в } 1)\,. \tag{1.30}$$

Если $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X=1) = 1/2$ и $k(n) \le \log_2 n - \log_2\log_2 n$, то $R_n(k) = k$ с вероятностью 1 для всех достаточно больших n (это следует из асимптотических свойств распределения длины наибольшей серии "успехов"). Асимптотика $R_n(k)$ нетривиальна, если $k \equiv k(n) \ge \Lambda_+^{-1}\ln n$.

Случай $k = [\Lambda_+^{-1}\ln n]$ является водоразделом среди ситуаций (1.22) — аппарат теории больших уклонений, эффективный в случае $k = [c\ln n]$, $c > 1/\Lambda_+$, не применим при $k = [c\ln n]$, $c < 1/\Lambda_+$.

Обозначим $\lambda = \Lambda'$,

$$Y_n = R_n(k) - a_c k - \frac{\ln k}{2\lambda(a_c)}\,,\ Z_n = R_n(k) - a_c k + \frac{\ln k}{2\lambda(a_c)}\,.$$

В теореме 1.12 считаются выполнеными условия (A) – (C).

Теорема 1.12 *Если* $k = [c \ln n]$ *и* $c > 1/\Lambda_+$, *то с вероятностью 1*

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n / \ln\ln\ln n = 1/\lambda(a_c)\,, \tag{1.31}$$

$$\liminf_{n\to\infty} Z_n/(\ln\ln\ln n)^2 = 0\,. \tag{1.32}$$

Если распределение с.в. X *нерешётчатое, то* $Z_n/\beta(n) \xrightarrow[p]{} 0$ *для всякой последовательности* $\beta(n) \uparrow \infty$ *положительных чисел.*

Теорема 1.12 уточняет результаты Деовельс и др. [96].

Определим Y_n^* и Z_n^* подобно Y_n, Z_n с замененой R_n на R_n^*. В теореме 1.12 Y_n, Z_n можно заменить на Y_n^*, Z_n^*.

Пусть $k = [c \ln n]$. Из теоремы 1.12 и (1.56) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$2\lambda(a_c)\,|R_n(k) - a_c k| \le \ln k + (2+\varepsilon)\ln\ln k \qquad \text{(п.н.)}.$$

Предельное распределение $R_n(k)$ в случае

$$\ln n \ll k \ll n \tag{1.33}$$

описывает приводимая ниже теорема 1.13. Обозначим

$$u_n = \sqrt{2\ln\left(\frac{n}{k}\sqrt{2\ln\frac{n}{k}}\right)}\ , \qquad \alpha_n = u_n/\sqrt{k}\,, \tag{1.34}$$

$$\psi(y,\alpha) = -y - y^2/2 + (1+y)^3\alpha G((1+y)\alpha)\,, \tag{1.35}$$

где

$$G(x) = \left(x^2/2 - \Lambda(x)\right)/x^3$$

есть ряд Крамера. Рассмотрим следующие возможные ситуации:

$$u_n^2\alpha_n^{m-1} \to \infty\,,\ u_n^2\alpha_n^m \to 0 \tag{A_m}$$

$$u_n^2\alpha_n^m \to const > 0 \tag{A_m^*}$$

при $n \to \infty$. Легко видеть, что

$$(\ln(n/k))^{1+2/m} \ll k \ll (\ln(n/k))^{1+2/(m-1)}$$

если (A_m) выполнено,

$$(\ln(n/k))^{2+m}\, k^{-m} \to const$$

если имеет место (A_m^*).

Питербарг [312] нашёл предельное распределение $R_n(k)$ в ситуации (A_1^*). Следующая теорема устанавливает предельное распределение $R_n(k)$ во всём спектре ситуаций $(A_m), (A_m^*)$, $m \geq 1$.

Теорема 1.13 *Предположим, что выполнены условия (A) – (D) и (1.33). Тогда существуют числа* $c_1, \ldots, c_m$, *такие что для любого* $z \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(R_n(k)/\sqrt{k} - u_n(1+y_n) < z/u_n\right) = \exp\left(-e^{-z}\Big/\sqrt{2\pi}\right), \qquad (1.36)$$

если условие (A_m) *выполнено для некоторого* $m \in \mathbb{N}$, *где* $y_{n,0} = 0$,

$$y_{n,m} = \sum_{i=1}^{m-1} c_i \alpha_n^i \qquad (n \geq 1).$$

Если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ *последовательность* $\{k(n)\}$ *удовлетворяет условию* (A_m^*), *то (1.36) выполнено с* $y_{n,m}$ *вместо* $y_{n,m}^* = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_n^i$.

Числа $\{c_i\}$ в теореме 1.13 зависят только от производных $\left\{G^{(i)}(0)\right\}$ ряда Крамера $G(\cdot)$. Правило нахождения чисел c_i: положим $y = \sum_{i=1}^m c_i \alpha^i$ и применим формулу Тэйлора; числа c_i выбираем так, чтобы $\psi(y,\alpha) = O\left(\alpha^{m+1}\right)$ при $\alpha \to 0$. Получим

$$c_1 = G(0) = -\lambda''(0)/6\,, \quad c_2 = G'(0) + 2.5G^2(0)\,,$$

и так далее. В частности, если (A_2^*) выполнено, то (1.36) влечёт

$$\mathbb{P}\left(R_n^*(k)/\sqrt{k} - u_n(1 + c_1\alpha_n + c_2\alpha_n^2) < z/u_n\right) \to \exp\left(-e^{-z}\Big/\sqrt{2\pi}\right)$$

при $n \to \infty$.

Рассмотрим случай $k = [c \ln n]$, где $c > 1/\Lambda_+$. Предположим, что условия (A) – (C) выполнены. Обозначим

$$\eta_n = (R_n - a_c k)\,\lambda(a_c) + 0.5 \ln k - c^{-1}\{c \ln n\} + \ln \kappa(a_c)\,,$$

где $\kappa(a_c) = 1/\lambda(a_c)\sigma(a_c)\sqrt{2\pi}$, если распределение $\mathcal{L}(X)$ нерешётчатое, $\kappa(a_c) = h/(1 - e^{-h\lambda(a_c)})\sigma(a_c)\sqrt{2\pi}$, если $\mathcal{L}(X)$ – решётчатое с шагом h. Деовельс и Деврой [97] показали, что существует константа $\delta \leq 0$, такая что для любого $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\,(\eta_n < y) \to \exp(-e^{-y+\delta}) \qquad (n \to \infty)\,.$$

Следующая теорема устанавливает оценку скорости сходимости в предельной теореме для $R_n([c \ln n])$ в случае $\mathcal{L}(X) = \mathbf{B}(1/2)$.

Обозначим $c_\gamma = (2\gamma - 1)/(2\sqrt{2\pi q}\,)$, $q = 1/\gamma - 1$, где $\gamma \in (0.5; 1)$ – правый корень уравнения $H(\gamma) = k^{-1}\log_2 n$, и пусть

$$\begin{aligned} g(k) &= \gamma k + 0.5\log_q k\,, \quad \tilde{g}(k) = g(k) - [g(k)]\,, \\ \Delta(n,j) &= \left|\,\mathbb{P}(R_n(k) - [g(k)] < j) - \exp\bigl(-c_\gamma q^{j-\tilde{g}(k)}\bigr)\,\right|. \end{aligned}$$

Теорема 1.14 *Если* $\mathcal{L}(X) = \mathbf{B}(1/2)$ *и* $k = [d\log_2 n]$, $d > 1$, *то*

$$\sup_{j\in\mathbf{Z}} \Delta(n,j) = O\Bigl(1/\sqrt{\ln n}\,\Bigr)\,. \tag{1.37}$$

Соотношение (1.37) можно переписать следуюшим образом:

$$\sup_{x\in\mathbf{Z}}\left|\mathbb{P}(R_n(k) < x) - \exp\left(-\frac{c_\gamma}{\sqrt{k}}\,q^{x-\gamma k}\right)\right| = O\Bigl(1/\sqrt{\ln n}\,\Bigr)\,.$$

1.4 Экстремумы в выборках случайного объёма

В ряде ситуаций число наблюдений случайно. К примеру, длина наибольшей серии "успехов" (ДНСУ) в последовательности случайных нулей и единиц, как и длина наибольшего общего фрагмента в последовательностях $(X_1, , X_m)$, $(Y_1, , Y_n)$, есть максимум случайного числа случайных величин. В этом разделе представлены результаты об асимптотике распределения максимума случайного числа случайных величин и числа выходов за высокий уровень в выборках случайного объёма.

1.4.1 Максимум случайного числа случайных величин

Предположим, что наблюдается последовательность $\{X_1, \ldots, X_\nu\}$ невырожденных неотрицательных случайных величин, где ν – целочисленная случайная величина. Тогда

$$M_\nu = \max_{1\le i\le\nu} X_i$$

есть выборочный максимум.

Если с.в. ν независима от $\{X_i\}$, то

$$\mathbb{P}(M_\nu < x) = \mathbb{E}F^\nu(x),$$

где $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$. Распределение с.в. M_ν хорошо изучено [140].

Ситуация становится нетривиальной, если с.в. ν зависит от $\{X_i\}$. Пусть

$$M_t^* = \max\{t - S_{\mu(t)}; \max_{1\le i\le\mu(t)} X_i\}\,,$$

где $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ $(n \ge 1)$,

$$\mu(t) = \max\{n \ge 0 : S_n \le t\}\,.$$

Задача имеет финансовые приложения. К примеру, банк открыл кредитную линию на сумму в t единиц, выбираемую траншами $X_1, X_2, \ldots$ Сведения об асимптотике распределения M_t^* позволяют ответить на вопрос о величине наибольшей из выплат.

Данная тема имеет приложения и к задаче о длине наибольшей серии "успехов". Обозначим через L_n длину наибольшей серии единиц среди первых n элементов последовательности $\{\xi_i, i \geq 1\}$ случайных нулей и единиц:

$$L_n = \max\{k : \xi_{i+1} = \ldots = \xi_{i+k} = 1 \ (\exists i \leq n-k)\}\,.$$

Из результатов о распределении с.в. M_n^* вытекают соответствуюшие результаты (оценки скорости сходимости и асимптотические разложения) о распределении L_n. Действительно, пусть

$$\eta_0 = 0\,,\ \eta_i = \min\{k > \eta_{i-1} : \xi_k = 0\}$$

и положим $X_i = \eta_i - \eta_{i-1} \ \ (i \geq 1)$. Тогда

$$L_{n-1} = M_n^* - 1\,.$$

Кроме того, если $\xi_i = \mathbb{I}\{X_i \in A\}$, где $\{X_i, i \geq 1\}$ – однородная марковская цепь с переходными вероятностями $||p_{ij}||$, A – подмножество состояний цепи и $U = ||p_{ij}||_{ij\in A}$, то статистика $\hat{\lambda}_n = n^{-1/L_n}$ является строго состоятельной асимптотически несмещённой оценкой наибольшего собственного числа матрицы U [268].

Ниже изучается распределение случайной величины M_t^*.

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – последовательность н.о.р. невырожденных неотрицательных случайных величин с ф.р. F. Предположим, что

$$b := \mathbb{E}X \in (0;\infty)\,.$$

Согласно ЗБЧ, $\mu(t)/t \to 1/\mathbb{E}X$ *п.н.* при $t \to \infty$. Это влечёт

$$\sup_x \left|\mathbb{P}(M_t^* < x) - F^{t/b}(x)\right| \to 0 \qquad (t \to \infty)\,.$$

Обозначим $p_x = \mathbb{P}(X \geq x)$,

$$u^{(0)} \ = \ 1\,,\ u^{(m)} = u(u-1)\ldots(u-m+1)\,,$$
$$K_* \ = \ \inf\{x : \mathbb{P}(X < x) > 0\}\,,\ K^* = \sup\{x : \mathbb{P}(X < x) < 1\}\,.$$

Пусть $\{X_i^<, i \geq 1\}$, $\{X_j^>, j \geq 1\}$ – независимые с.в. с распределениями

$$\mathcal{L}(X^<) = \mathcal{L}(X|X < x)\,,\ \mathcal{L}(X^>) = \mathcal{L}(X|X \geq x)\,,$$

и положим $a \equiv a(x) = \mathbb{E}X^<$, $\sigma^2 = \mathbb{D}X^<$,

$$\Delta(t,x) = \left|\mathbb{P}(M_t^* < x) - (1-p_x)^{(t-x)/a}\right|\,.$$

Отметим, что при $m \geq 1$

$$\mathcal{L}(X_1 + \ldots + X_m | M_m < x) = \mathcal{L}(X_1^< + \ldots + X_m^<). \tag{1.38}$$

Теорема 1.15 *Предположим, что* $\mathbb{E}X^2 < \infty$. *Тогда*

$$\sup_{K_* < x < t} \Delta(t,x) = O\left(1/t\right) .$$

Если $x = x(t) = o(t)$ *и* $t\mathbb{P}(X \ge x) \to 0$ *при* $t \to \infty$, *то*

$$\mathbb{P}(M_t^* \ge x) = \left(1 - (1-p_x)^{(t-x)/a}\right)\left(1 + O(t^{-1})\right).$$

Следующая теорема установливает асимптотические разложения для $\mathbb{P}(M_t < x)$. Обозначим $H(t,x) = (t-x)/a$,

$$\begin{aligned} S_m^< &= X_1^< + \ldots + X_m^<, \quad \nu(t) \equiv \nu(t,x) = \min\{m \ge 0 : S_m^< > t\}, \\ \Delta_m(t,x) &= \left|\mathbb{P}(M_t^* < x) - (1-p_x)^{H(t,x)} \sum_{i=0}^{m-1} (-p_x)^i \mathbb{E}(\nu(t-x) - H(t,x))^{(i)}/i!\right|. \end{aligned}$$

Теорема 1.16 *Если* $\mathbb{E}X^2 < \infty$ *и* $K \in (K_*; K^*)$, *то для любого* $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{K \le x \le t/2} \Delta_m(t,x) = O\Big(t^{-m/2}\Big) \qquad (t \to \infty). \tag{1.39}$$

1.4.2 Число выходов за высокий уровень

В этом разделе изучается распределение числа

$$N_t(x) = \sum_{j=1}^{\mu(t)} \mathbb{1}\{X_j \ge x\} + \mathbb{1}\{t - S_{\mu(t)} \ge x\}$$

выходов за уровень $x \in [0; t]$. Заметим, что

$$\{M_t^* < x\} = \{N_t(x) = 0\}.$$

Если $X_{k,t}$ обозначает k-й наибольший элемент среди $X_1, \ldots, X_{\mu(t)}, t - S_{\mu(t)}$, то

$$\{X_{k,t} < x\} = \{N_t(x) < k\}.$$

Пусть π_λ обозначает пуассоновскую с.в. с параметром λ, $S_0(k) := 0$,

$$\begin{aligned} S_m(k) &= \sum_{i=0}^{k} X_i^> + \sum_{i=k+1}^{m} X_i^< \qquad (m \ge 1), \\ S_m^< &= X_0^< + \ldots + X_m^< \ \ (m \ge 0), \quad S_m^> = X_1^> + \ldots + X_m^> \ \ (m \ge 1). \end{aligned}$$

Положим $a = \mathbb{E}X^<$,

$$\tau_k' = \min\{n : S_n(k) > t - x\}, \ \tau_k = \tau_k' - k .$$

Обозначим

$$M(t,x,k) = (t-x-k\mathbb{E}X^{>})/a\,,\ \lambda_k \equiv \lambda_k(t,x,k) = p_x M(t,x,k)\,.$$

В теоремах 1.17–1.19 предполагается выполненым следующее условие: существуют константы $D<\infty$ и $D_* \in (K_*;K^*)$, такие что при $x \geq D_*$

$$\int_x^\infty \mathbb{P}(X \geq y)dy \leq D\mathbb{P}(X \geq x)\,. \tag{1.40}$$

Условие (1.40) означает, что $\mathcal{L}(X)$ имеет лёгкий хвост (ср. с (1.75)).

Теорема 1.17 *Для любого* $k \in \mathbf{Z}_+$ *при* $t \to \infty$

$$\sup_{x\in B_+(t)}\left|\mathbb{P}(N_t(x)=k) - \mathbb{P}(\pi_{\lambda_k}=k) - \sum_{r=0}^{k-1}\Big(\mathbb{P}(\pi_{\lambda_k}=r) - \mathbb{P}(\pi_{\lambda_{k-1}}=r)\Big)\right| = O(1/t)\,,$$

где $B_+(t)$ *обозначает интервал* $(K_*;K^*\wedge t/(k+2))$.

Пусть $\pi(t,x)$ – пуассоновская с.в. с параметром $p_x t/\mathbb{E}X$.

Следствие 1.18 *Для любой* $k \in \mathbf{Z}_+$, *при* $t \to \infty$,

$$\sup_{K_*<x<K^*}|\mathbb{P}(N_t(x)=k) - \mathbb{P}(\pi(t,x)=k)| = O(t^{-1}\ln t)\,.$$

Для любой с.в. τ, принимающей значения в $\mathbf{Z}$, положим $m_\tau = \mathbb{E}\tau$,

$$H_{r,n}(\tau) \equiv H_{r,n}(\tau,p_x) = (1-p_x)^{m_\tau}p_x^r\sum_{i=0}^{n-1}(-p_x)^i\sum_{j=0}^{r}\frac{\mathbb{E}(\tau-m_\tau)^{(i+j)}}{i!j!}\binom{m_\tau+i+r}{r-j}\,.$$

Теорема 1.19 *Существуют константы* $c_{k,n}$, *такие что для любого* $k,n \in \mathbf{Z}_+$

$$\sup_{D_*<x<\sqrt{t}\wedge K^*}\left|\mathbb{P}(N_t(x)=k) - H_{k,n}(\tau_k) - (1-p_x)\sum_{r=0}^{k-1}(H_{r,n}(\tau_k) - H_{r,n}(\tau_{k-1}-1))\right| \leq c_{k,n}t^{-n/2}.$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbf{Z}_+$ *супремум* $\sup_{0<x\leq D_*}\mathbb{P}(N_t(x)=k)$ *убывает к 0 с экспоненциальной скоростью при* $t\to\infty$ *и* $\sup_{x\geq\sqrt{t}}\mathbb{P}(N_t(x)\geq 1) \leq q^{\sqrt{t}}$ $(\exists q \in (0;1))$.

Число "длинных" интервалов между последовательными скачками процесса Пуассона. В качестве примера приложений теорем 1.17–1.19 приведём следующий результат о числе "длинных" интервалов между последовательными скачками пуассоновского процесса. Пусть $\{\pi_\lambda(s), s\geq 0\}$ – процесс Пуассона с параметром $\lambda>0$, и пусть η_i – момент i-го скачка. Обозначим $X_i = \eta_i - \eta_{i-1}$. Тогда

$N_t(x)$ есть число интервалов между последовательными скачками длины не менее x. Если моменты скачков моделируют редкие события (катастрофы), то $N_t(x)$ может быть интерпретирован как число “длинных” интервалов без катастроф.

Пусть с.в. $\pi(t,x)$ имеет распределение Пуассона с параметром $t\lambda e^{-\lambda x}$. Из теоремы 1.18 следует, что для любого $k \in \mathbf{Z}_+$

$$\sup_{0<x<t} |\mathbb{P}(N_t(x)=k) - \mathbb{P}(\pi(t,x)=k)| = O\Big(t^{-1}\ln t\Big) \qquad (t\to\infty).$$

1.4.3 Длинные общие фрагменты

В этом разделе представлены результаты о точности пуассоновской аппроксимации распределения числа длинных общих фрагментов.

Пусть $X, X_1, \ldots, X_m$, $Y, Y_1, \ldots, Y_n$ – н.о.р. невырожденные случайные величины принимающие значения в дискретном пространстве A. Обозначим

$$\begin{array}{lcl} T_{ij} & \equiv & T_{ij}(k) = \mathbb{1}\{X_{i+1}\!=\!Y_{j+1},\ldots,X_{i+k}\!=\!Y_{j+k}\}\,, \\ \tilde T_{ij} & \equiv & \tilde T_{ij}(k) = T_{ij}(k)\mathbb{1}\{X_i\!\neq\! Y_j\} \qquad (k\in\mathbb{N}), \\ T^*_{ij} & = & \tilde T_{ij} \qquad\qquad (i\ge 1, j\ge 1), \end{array}$$

$T^*_{ij} = T_{ij}$ если $i=0$ или $j=0$, и пусть

$$J \equiv J(k,m,n) = \{(i,j) : 0\le i\le m-k, 0\le j\le n-k\}.$$

Тогда

$$M_{m,n} = \max\Big\{k \le \min(m,n) : \max_{(i,j)\in J} T_{ij} = 1\Big\}$$

есть длина наибольшего общего фрагмента (ДНОФ) среди $(X_1 \ldots X_m)$ и $(Y_1 \ldots Y_n)$.

$M_{m,n}$ является двумерным аналогом ДНСУ L_n: если $Y_1 = \ldots = Y_n = 1$, то $M_{n,n}$ есть ДНСУ.

Обозначим через

$$W_{m,n} \equiv W_{m,n}(k) = \sum_{(i,j)\in J} T^*_{ij}$$

число общих фрагментов длины $\ge k$. Заметим, что

$$\{M_{m,n} < k\} = \{W_{m,n} = 0\}\,.$$

Задача о распределении длины наибольшего “повтора” (общего фрагмента) и распределении числа длинных “повторов” в дискретных последовательностях имеет приложения в биологии при анализе “значимых” фрагментов последовательностей ДНК (см. [13, 15, 14, 245]).

Арратия и др. [13] нашли предельное распределение $M_{m,n}$:

$$\Delta_{m,n} = \max_k |\mathbb{P}(M_{m,n} < k) - \exp\left(-mn(1-p)p^k\right)| \to 0,$$

если $m \to \infty, n \to \infty, m \sim n$, где $p = \mathbb{P}(X = Y)$. Арратия и др. [14] показали, что если $1 - c_+ < (\ln m)/\ln mn < c_+$, где

$$c_+ = \log_p q - 1\,,\ p = \mathbb{P}(X = Y)\,,\ q = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3),$$

то существует $\varepsilon > 0$, такое что $\Delta_{m,n} = O(n^{-\varepsilon})$ при $m \to \infty, n \to \infty$.

Положим $m' = m-k+1$, $n' = n-k+1$, $\lambda \equiv \lambda_{k,m,n} = \mathbb{E}W_{m,n}$. Тогда

$$\lambda = (m'-1)(n'-1)(1-p)p^k + (m'+n'-1)p^k\,.$$

Обозначим

$$p = p(X=Y)\,,\ p_a = \mathbb{P}(X=a)\,,\ q_k = \sum_{a\in A} p_a^{k+1}\,,\ q = q_2\,,$$

и пусть

$$p_* = \max_{a\in A} p_a\,,\ c_+ = \log(1/q) - 1\,,\ c_* = \log(1/p_*)\,,$$

где $\log \equiv \log_{1/p}$. Заметим, что

$$p_*^2 < p\,,\ p^2 \le q \le p_*\,.$$

Поскольку случайная величина X невырожденная, из неравенства Гёльдера следует, что

$$1 \ge c_+ \ge c_* > 1/2\,.$$

Легко видеть, что $c_+ = c_* = 1$, если распределение $\mathcal{L}(X)$ является равномерным на конечном множестве значений.

Пусть $\pi_{m,n}$ обозначает пуассоновскую случайную величину с параметром λ. Следующая теорема оценивает точность пуассоновской аппроксимации для распределения числа длинных общих фрагментов.

Теорема 1.20 *Если* $n \ge k$ *и* $m \ge k \ge 1$, *то*

$$d_{TV}(W_{m,n};\pi_{m,n}) \le \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} m'n'(2k+1)\left(2kq_{2k} + (m'+n'-1)(p^{2k}+q^k)\right)\,.$$

Теорема 1.20 получена с помощью метода Стэйна. Обозначим

$$\Delta_{m,n}(k) = |\mathbb{P}(M_{m,n} < k) - \exp\left(-\mathbb{E}W_{m,n}\right)|\,.$$

Следствие 1.21 *Для любой константы* $C \in \mathbb{R}$ *при* $m \to \infty,\ n \to \infty$,

$$\max_{k\ge C+\log mn} \Delta_{m,n}(k) = O\left((m+n)(mn)^{-c_+}(\ln mn) + (mn)^{1-2c_*}(\ln mn)^2\right)\,. \tag{1.41}$$

Если $m \to \infty$ *и* $n \to \infty$ *таким образом, что* $(\ln mn)/(\min\{m,n\}) \to 0$, *то*

$$\max_{1\le k\le m\wedge n} \Delta_{m,n}(k) = O\Big((m+n)(mn)^{-c_+}(\ln mn)^{1+c_+} + (mn)^{1-2c_*}(\ln mn)^{1+2c_*}\Big)\,.$$

Легко видеть, что точность оценки (1.41) зависит от соотношения между m и n. Следствие 1.21 влечёт

$$\max_{1\le k\le m\wedge n}\left|\mathbb{P}(M_{m,n}<k)-e^{-\lambda}\right| = O\Big(n^{-1}(\ln n)^2\Big),$$

если $(\ln mn)/(m\wedge n)\to 0$ и распределение $\mathcal{L}(X)$ равномерно на конечном множестве значений A. Если $\mathcal{L}(X)$ равномерно в A и

$$0<c\le m/n\le 1/c$$

для некоторой константы c, то правая часть (1.41) есть $O(n^{-1}\ln n)$.

Статистика Зубкова-Михайлова. Пусть $Y_i=X_i$ $(\forall i)$, $m=n$. Обозначим

$$N_n^* = \sum_{(i,j)\in A(n,k)} T_{ij}^*\,,$$

где $A(n,k)=\{(i,j): 0\le i<j\le n-k\}$, $n>k$.

N_n^* есть число общих фрагментов длины $\ge k$ в последовательности $X_1,\ldots,X_n$.

Статистика N_n^* была введена Зубковым и Михайловым [418], показавшими, что $\mathcal{L}(N_n^*)$ может быть аппроксимировано пуассоновским распределением $\mathbf{\Pi}(\mu)$, если

$$n^2p^k(1-p)/2\to\mu>0\,,\ nk^tp_*^k\to 0\qquad(\forall\, t>0).$$

Заметим, что

$$M_n^*=\max\{k\le n: \max_{(i,j)\in A(n,k)} T_{ij}=1\}$$

является длиной наибольшего общего фрагмента (“повтора”) среди $X_1,\ldots,X_n$. Очевидно, что

$$\{M_n^*<k\}=\{N_n^*=0\}\,.$$

Следующая теорема оценивает точность пуассоновской аппроксимации для распределения N_n^*. Пусть

$$\lambda^*\equiv\lambda_{n,k}^*=(n-3k+1)\,p^k(1+(n-3k)(1-p)/2)\,.$$

Теорема 1.22 *Если* $n>3k\ge 3$, *то*

$$d_{TV}(N_n^*;\pi_{n,k}^*)\le\frac{1-e^{-\lambda^*}}{\lambda^*}\Big((n^*)^3(2k+1)\,(p^{2k}+q^k)+2(kn^*)^2q_{2k}\Big)+2kn^*p^k\,,$$

где $\pi_{n,k}^*\in\mathbf{\Pi}(\lambda^*)$, $n^*=n-k$.

Обозначим

$$\Delta^*(n,k)=|\mathbb{P}(M_n^*<k)-\exp(-\lambda_{n,k}^*)|\,.$$

Следствие 1.23 *При* $n \to \infty$,

$$\max_{k \geq C+2\log n} \Delta^*(n,k) = O\Big(n^{1-2c_+} \ln n + n^{2-4c_*} (\ln n)^2\Big) . \tag{1.42}$$

Кроме того,

$$\max_{1 \leq k < n/3} \Delta^*(n,k) = O\Big(n^{1-2c_+} (\ln n)^{1+c_+} + n^{2-4c_*} (\ln n)^{1+2c_*}\Big) . \tag{1.43}$$

Если распределение $\mathcal{L}(X)$ равномерно, то правая часть (1.42) есть $O(n^{-1} \ln n)$ и правая часть (1.43) is $O(n^{-1}(\ln n)^2)$.

Теоремы 1.24 и 1.25 устанавливают утверждения типа ЗПЛ для M_n^*.

Теорема 1.24 *Пусть* $\{n(k)\}_{k\geq 1}$ *– последовательность натуральных чисел, такая что*

$$c_* k \geq \log n(k) + 3 \log k$$

для всех достаточно больших k*, где* $\log \equiv \log_{1/p}$. *Тогда вероятность* $\mathbb{P}(M^*_{n(k)} \geq k$ б.ч.) *равна 0 или 1 в зависимости от того, сходится или рассходится ряд*

$$\sum_k n^2(k) p^k .$$

Пусть $f_n = \log n^2 - \log \ln \ln n + \log((1-p)/2)$, $g_n = \log n^2 + \log \log n$.

Теорема 1.25 *С вероятностностью 1*

$$\liminf_{n\to\infty} (M_n^* - f_n) = -1 ,$$
$$\limsup_{n\to\infty} (M_n^* - g_n) / \log \ln \ln n = 1 .$$

Длинные общие фрагменты, допускающие не более r "сбоев". Распределение числа длинных "повторов", допускающих не более r "сбоев", изучали многие авторы, см., к примеру, ссылки в [13, 14, 236, 264].

Пусть число $r \in \mathbf{Z}_+$ фиксировано. Обозначим через

$$M_{m,n}^{(r)} = \max \left\{ k \leq m \wedge n : \max_{(i,j)\in J} \sum_{s=1}^{k} \mathbb{I}\{X_{i+s} = Y_{j+s}\} \geq k - r \right\} .$$

длину наибольшего общего фрагмента, допускающего не более r "сбоев". Положим

$$S_{ij}(k) = \sum_{t=1}^{k} \mathbb{I}\{X_{i+t} = Y_{j+t}\} , \ \widehat{T}_{ij}^{(r)} = \mathbb{I}\{S_{ij}(k) \geq k - r\} , \ \widetilde{T}_{ij}^{(r)} = \widehat{T}_{ij}^{(r)} \mathbb{I}\{X_i \neq Y_j\} .$$

Пусть $T^*_{ij}(r) = \widehat{T}^{(r)}_{ij}$ если $i = 0$ или $j = 0$, $T^*_{ij}(r) = \widetilde{T}^{(r)}_{ij}$ при $i \geq 1$, $j \geq 1$. Тогда

$$W_{mn}(k, r) = \sum_{i,j \in J} T^*_{ij}(r)$$

есть число общих фрагментов длины $\geq k$ среди $X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$, допускающих не более r "сбоев". Заметим, что

$$\{M^{(r)}_{mn} < k\} = \{W_{mn}(k, r) = 0\}\,.$$

Пусть $\lambda \equiv \lambda_r = \mathbb{E}W_{mn}(k, r)$. Тогда

$$\lambda = (m'-1)(n'-1)\binom{k}{r}p^{k-r}(1-p)^{r+1} + (m'+n'-1)\sum_{t=0}^{r}\binom{k}{t}p^{k-t}(1-p)^t\,.$$

Пусть $\pi_{mn}(k, r)$ – пуассоновская с.в. с параметром λ. Справедливо следующее обобщение теоремы 1.20: при $m \wedge n \geq k \geq r$

$$\begin{aligned} d_{TV}(W_{mn}(k, r); \pi_{mn}(k, r)) \;\leq\; & \Bigg[m'n'\binom{k+r}{r}^2\big\{4k(k+1)q_{2(k-r)} + (2k+1)(m'+n'-1)q^{k-r}\big\} \\ & +\; 4rm'n'p^{k-r}\binom{k+r-2}{r-1} \\ & +\; (m'+n'-1)(2k+1)\binom{k+r}{r}\lambda p^{k-r}\Bigg](1-e^{-\lambda})/\lambda\,. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Оценка (1.44) получена с помощью метода Стэйна. Из (1.44) следует, что

$$\max_k \left|\mathbb{P}(M^{(r)}_{mn} < k) - e^{-\lambda}\right| = O(1/\ln mn) \qquad (m \to \infty, n \to \infty)$$

при $r \geq 1$.

Пусть $m{=}n$, $Y_i \equiv X_i$ $(i{\geq}1)$, $A(n, k) = \{(i, j) : 0{\leq}i{<}j{\leq}n{-}k\}$ $(n{>}k)$,

$$N^*_n(r) = \sum_{(i,j)\in A(n,k)} T^*_{ij}(r)\,,\ M^*_n(r) = \max\left\{k{\leq}n : \max_{(i,j)\in A(n,k)} \hat{T}_{ij}(r) = 1\right\} \quad (1 \leq r < k).$$

Случайная величина $M^*_n(r)$ есть длина наибольшего "повтора" в последовательности $X_1, \ldots, X_n$, допускающего не более r "сбоев". Заметим, что

$$\{M^*_n(r){<}k\} = \{N^*_n(r){=}0\}.$$

Пусть π^*_n – пуассоновская с.в. с параметром $\lambda^* \equiv \lambda^*_{n,k}$, где

$$\begin{aligned} \lambda^* &= (n''{+}1)n''\mathbb{E}\widetilde{T}^{(r)}_{11}/2 + (n''{+}1)\mathbb{E}\widehat{T}^{(r)}_{00} \\ &= \frac{n''(n''{+}1)}{2}\binom{k}{r}p^{k-r}(1-p)^{r+1} + (n''{+}1)\sum_{t=0}^{r}\binom{k}{t}p^{k-t}(1-p)^t\,. \end{aligned}$$

Справедливо следующее обобщение теоремы 1.22: если $n > 3k$ и $k \geq 1 \vee r$, то

$$\begin{aligned} d_{TV}(N_n^*; \pi_n^*) \;&\leq\; 2kp^{k-r}\left\{\binom{k+r}{r} + (n'-1)(1-p)^{r+1}\binom{k}{r}\right\} \\ &+\; 2(2k+1)(n-2k)p^{k-r}\binom{k+r}{r}\lambda^* + \left\{n'^3(2k+1)q^{k-r}\binom{k+r}{r}^2\right. \\ &+\; \left. 2k(k+1)n'^2\binom{k+r}{r}^2 q_{2(k-r)} + 2rn'^2p^{k-r}\binom{k+r-2}{r-1}\right\}(1-e^{-\lambda^*})/\lambda^* . \end{aligned} \tag{1.45}$$

Из (1.45) следует, что если $r \geq 1$, то

$$\max_k |\mathbb{P}\,(M_n^*(r) < k) - \mathbb{E}\exp(-\lambda^*)| = O(1/\ln n) \qquad (n \to \infty). \tag{1.46}$$

Обозначим

$$f_n(r) = \log n^2 + r\log\log n^2 - \log\ln\log n + r + \log\Big((1-p)^{r+1}/2r!\Big),$$

где $\log \equiv \log_{1/p}$. Те же рассужденния, что и при выводе теоремы 1.25, показывают, что $\liminf_{n\to\infty}(M_n^*(r) - f_n(r)) \leq -1$ с вероятностью 1.

Пусть $\{n(k)\}_{k\geq 1}$ – последовательность чисел, такая что $c_*k \geq \log n(k) + (r+3)\log k$ для всех достаточно больших k. Те же рассужденния, что и при выводе теоремы 1.22, показывают, что вероятность $\mathbb{P}(M_{n(k)}^*(r) \geq k$ б.ч.) равна 0 или 1 в зависимости от того, сходится или рассходится ряд $\sum_k n^2(k)k^r p^k$. В частности, с вероятностью 1

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n^*(r) - \log n^2 - (r+1)\log\log n}{\log\ln\ln n} = 1.$$

1.5 Доказательства

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим

$$D_i \equiv D_i(r,u) = \{X_i > u, X_{i+1} \leq u, \ldots, X_{i+r-1} \leq u\} \qquad (r > 1)$$

(если $r = 1$, положим $D_i = \{X_i > u\}$). Аналогично (1.3),

$$\begin{aligned} P_n \;&=\; P_{n-1} - \mathbb{P}(D_1, M_{r+1,n} \leq u) \geq P_{n-1} - \mathbb{P}(D_1, M_{r+l+1,n} \leq u) \\ &\geq\; P_{n-1} - (P_{n-r-l} + \varphi(l))b \qquad\qquad (n \geq r) . \end{aligned}$$

В частности, это влечёт $P_{n-r-l} \leq P_{n-1} + (r+l)b$ при $n \geq 2r + l$. Следовательно,

$$P_n \geq (1-b)P_{n-1} - (r+l)b^2 - b\varphi(l) .$$

Решая это рекуррентное неравенство, получим $P_n \geq Q_n$.

Более точная аппроксимация достигается с помощью рекуррентных неравенств 2-го порядка:

$$\begin{aligned} P_n &\geq P_{n-1} - (P_{n-r-l} + \varphi(l))b \geq P_{n-2} - 2b(P_{n-r-2} + \varphi(l)) \\ &\geq \ldots \geq P_{n-r-l} - (r+l)b(P_{n-2(r+l)} + \varphi(l)) \end{aligned}$$

при $n \geq 2r + l$. Пусть μ, μ^* – корни уравнения $x^2 - x + (r+l)b = 0$. Обозначим $q_i = P_{(r+l)i} + \varphi(l)$ и $v_i = q_{i+1} - \mu^* q_i$. Тогда

$$q_{i+2} \geq q_{i+1} - (r+l)bq_i \qquad (i \geq 0)\,.$$

Поскольку $\mu + \mu^* = 1$, $\mu\mu^* = (r+l)b$, имеем

$$v_{i+1} \geq \mu v_i \qquad (i \geq 0)\,.$$

Следовательно,

$$q_{i+1} \geq v_i \geq \mu^i v_0 \geq \mu^i (P_{r+l} - \mu^*) = \mu^i(\mu - \mathbb{P}(M_{r+l} > u))\,.$$

Заметим, что $P_n \geq q_{1+[n/(r+l)]}$. Поэтому $P_n \geq R_n$.

О'Брайен [288] установил следующий результат. Пусть $A_0, A_1, \ldots$ – последовательность событий, $A_i \in \sigma\{X_{i(r+l)+1}, \ldots, X_{i(r+l)+r}\}$. Тогда для любых $k, r, l \in \mathbb{N}$

$$|\mathbb{P}(A_1 \times \ldots \times A_k) - \mathbb{P}(A_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_k)| \leq \varphi(l) \qquad (k, l \in \mathbb{N})\,. \tag{1.47}$$

Неравенство $P_n \leq \mathbb{P}^{[\frac{n}{r+l}]}(M_r \leq u) + \varphi(l)$ следует из (1.47). Учитывая (1.9), получим $P_n \leq V_n$. Остаётся показать, что $P_n \leq T_n$.

Применим тождество

$$\{M_{i,n} \leq u\} = \{M_{i+1,n} \leq u\} \setminus \{D_i, M_{i+r,n} \leq u\}$$

дважды, чтобы получить

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} - \mathbb{P}(D_1, M_{r+1,n} \leq u) \\ &= P_{n-1} - \mathbb{P}(D_1, M_{r+2,n} \leq u) + \mathbb{P}(D_1, D_{r+1}, M_{2r+1,n} \leq u) \ \ldots \\ &\leq P_{n-1} - \mathbb{P}(D_1, M_{r+l+1,n} \leq u) + \sum_{i=1}^{l} \mathbb{P}(D_1, D_{r+i}, M_{2(r+l),n} \leq u) \\ &\leq P_{n-1} - (P_{n-r-l} - \varphi(l))b + (P_{n-2(r+l)} + \varphi(l)) \sum_{i=1}^{l} \mathbb{P}(D_1, D_{r+i})\,. \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbb{P}(D_1, D_{r+i}) \leq 1 \wedge b(j,u)(b + \varphi(r-j))$ as $1 \leq j \leq r$. Мы знаем также, что

$$P_{n-2(r+l)} \leq P_{n-1} + 2(r+l)b$$

при $n \geq 3r+2l$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{l} \mathbb{P}(D_1, D_{r+i}) \leq bq_j$ и

$$P_n \leq (1-b(1-q_j))P_{n-1} + b\varphi(l)(1+q_j) + 2(r+l)b^2 q_j \,.$$

Из этого рекуррентного неравенства вытекает верхняя граница в (1.5). $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Заметим, что $b > 0$ – иначе $\mathbb{P}(X > u) = 0$. Согласно (1.3),

$$P_n \geq P_{n-1} - \mathbb{P}(M_{n-r-m} \leq u, B_n) = P_{n-1} - bP_{n-r-m}$$

при $n \geq r$. Это влечёт

$$P_n \leq P_{n+1} + b \leq \ldots \leq P_{n+i} + ib \qquad (n \geq r-1)\,.$$

Следовательно, $P_{n-r-m} \leq P_{n-1} + (r+m)b$, и

$$P_n \geq (1-b)P_{n-1} - (r+m)b^2 \geq \ldots \geq (1-b)^{n-2(r+m)} P_{n-2(r+m)} - (r+m)b\,.$$

Таким образом, $\mathbb{P}(M_n \leq u) \geq (1-b)^{n-2(r+m)} - (r+m)(b + 2\mathbb{P}(X > u))$.

Воспользуемся теперь теоремой 1.1. Положим $r = l = m, j = 1$. Следовательно, $q_1 = m\mathbb{P}(X > u)$. Заметим, что $\varphi(m-1) = 0$. Принимая во внимание, что

$$|e^{-nb(1-q_1)} - e^{-nb}| \leq q_1/e(1-q_1)$$

ввиду (6.61), получим ч.т.д.. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Предположим, что (1.12) выполнено. Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$. Предположим, что $r > 2i$, и обозначим $p = \mathbb{P}(X > u)$. Рассмотрим M_r как максимум пар $\{X_j, X_{j+i}\}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_r > u) &\leq [1+r/2i]i\mathbb{P}(\max\{X_1, X_{1+i}\} > u) \\
&\leq (i+r/2)(2p - \mathbb{P}(X_1 > u, X_{1+i} > u)) \leq (2i+r)(1-\delta_{n,i})p\,,
\end{aligned}$$

где $\delta_{n,i} = \mathbb{P}(X_{1+i} > u | X_1 > u)/2$. Согласно предположению,

$$\mathbb{P}(M_n \leq u) = e^{-np} + v_n\,,$$

где $v_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку $\mathbb{P}(M_n \leq u) \geq Q_n$ по теореме 1.1 (с $l = r$) и $\mathbb{P}(M_r > u)/r \geq b$ ввиду (1.9), имеем

$$\exp\left(-(n-3r)\mathbb{P}(M_r > u)/r\right) \leq e^{-np}\left(1 + e^{np}w_n\right)\,,$$

где $w_n = v_n + 5rp + \varphi(r) + c/n$ (используем также (2.65); $c, C \in (0;\infty)$ – абсолюбтные константы). Следовательно,

$$1 - \delta_{n,i} \geq \left(\frac{n}{n-3r} + \frac{e^{np}w_n}{(n-3r)p}\right)(1+2i/r)^{-1}\,.$$

Поэтому $1-\limsup_{n\to\infty}\delta_{n,i} \geq (1+C\varphi(r))/(1+2i/r)$. Поскольку число r произвольное, получим (1.10). $\square$

Доказательство теоремы 1.5. Очевидно, что (1.18) и (1.9) влекут (1.17).

Пусть выполнено (1.17). Тогда

$$|\theta^R(r,u_n)-\theta| \leq w_{r,n}\,, \tag{1.48}$$

где $\{w_{r,n}\}$ – неотрицательная функция, такая что $\limsup_{n\to\infty} w_{r,n} := v(r) \to 0$ при $r\to\infty$. Из (1.48) и (1.9) мы выводим

$$(\bar p_{2r}-\bar p_r)/r\bar p_1 - w_{r,n} \leq \theta \leq \bar p_r/r\bar p_1 + w_{r,n}\,, \tag{1.49}$$

где $\bar p_k = \mathbb{P}(M_k>u)$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty}\,(\theta-\bar p_r/r\bar p_1) \leq v(r) \to 0 \tag{1.50}$$

при $r\to\infty$. Обозначим

$$\Delta_{r,n} = \bar p_r/r\bar p_1 - \theta\,,\ \ \Delta_r = \limsup_{n\to\infty}\Delta_{r,n}\,.$$

Из (1.49) выводим $\Delta_{2r,n} \leq (\Delta_{r,n}+w_{r,n})/2$. Поэтому

$$\Delta_{2r} \leq (\Delta_r+v_r)/2\,.$$

Следовательно,

$$\Delta_{2^m} \leq 2^{-m}\Delta_1 + \sum_{i=1}^m 2^{-i}v_{2^{m-i}}\,. \tag{1.51}$$

Неравенство (1.51) влечёт $\Delta_{2^m}\to 0$ при $m\to\infty$. Аналогично доказываем, что $\lim_{m\to\infty}\Delta_{[t^m]}=0$ для любого $t>1$. Принимая во внимание (1.50), получим (1.18). $\square$

Доказательство теоремы 1.6 повторяет аргументы при доказательстве теоремы 1.1.

Лемма 1.26 *Предположим, что* $20k\bar p_0 \leq 1$. *Тогда*

$$k^{-1}\,(1+20\bar p_0)^{-1} \leq b(k,x)/\mathbb{P}(S_k\geq x) \leq 1\,. \tag{1.52}$$

Обозначим $h(k,x) = 2\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}(\zeta_i\geq x|\zeta_0\geq x)$. *Если* $K\geq 4k$, *то*

$$\frac{b(k,x)}{\bar p_0}(1+20k\bar p_0) \geq \frac{1/(1+2k/K)}{1+2K\bar p_0+h(k,x)} - \frac{6k/K}{1-6k\bar p_0}\,. \tag{1.53}$$

Часто $h(k,x) \le C < \infty$, и следовательно, $0 < c \le b(k,x)/\bar p_0 \le 1$.

Доказательство леммы 1.26. Оценка сверху очевидна. Если $n \ge 4$, то теорема 1.6 влечёт

$$\ln \mathbb{P}(R_n^* < x) \ge (1 + n/2k) \ln \mu + \ln (1 - 6k\mathbb{P}(S_k \ge x)) \; .$$

Отметим, что $-\ln \mu \le 2kb/(1-10a)$. Поэтому

$$-\ln \mathbb{P}(R_n^* < x) \le (n + 2k)b/(1-10a) - \ln (1 - 6k\mathbb{P}(S_k \ge x)) \; .$$

Заметим, что $\mathbb{P}(R_n^* < x) \le (\mathbb{P}(S_k < x))^{[n/k]}$. Следовательно,

$$-\ln \mathbb{P}(R_n^* < x) \ge [n/k]\mathbb{P}(S_k \ge x) \, .$$

Поэтому $\mathbb{P}(S_k \ge x) \le kb/(1 - 20kb)$, что влечёт (1.52).

Очевидно, $-\ln \mathbb{P}(R_n^* < x) \ge \mathbb{P}(R_n^* \ge x)$. Положим $K = n - k + 1$. По неравенству Эрдеша–Чунга,

$$\mathbb{P}(R_n^* \ge x) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=0}^{n} \{\zeta_i \ge x\}\Big) \ge \frac{n\mathbb{P}(\zeta \ge x)}{1 + 2\sum_{l=1}^{n} \mathbb{P}(\zeta_l \ge x | \zeta_0 \ge x)}$$
$$= n\mathbb{P}(\zeta \ge x) \Big/ \left[1 + 2K\mathbb{P}(\zeta \ge x) + h(k,x)\right] \; .$$

Следовательно,
$$\frac{(n+2k)b}{1 - 20kb} \ge \frac{n\bar p_0}{1+2K\bar p_0+h(k,x)} - \frac{6k\bar p_0}{1-6k\bar p_0} \, ,$$
откуда следует результ леммы. □

Ниже символы c, C (с индексами и без) обозначают различные положительные константы.

Утверждение 1.27 *Пусть $\beta(n) \uparrow \infty$ – последовательность положительных чисел. Если распределение X нерешётчатое, $k = [c \ln n]$ и $c > 1/\Lambda_+$, то $Z_n/\beta(n) \xrightarrow[p]{} 0$.*

Доказательство утверждения 1.27. Можно предполагать, что $\beta(n)/\ln\ln n \to 0$. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(Z_n^* > \varepsilon\beta(n)) \to 0 \, , \; \mathbb{P}(Z_n^* < -\varepsilon\beta(n)) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Обозначим
$$x \equiv x(k,\varepsilon) = a_c k - (\ln k)/2\lambda(a_c) + \varepsilon\beta(n).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} k\Lambda(x/k) &= k\Lambda(a_c) - 0.5\ln k + \varepsilon\lambda(a_c)\beta(n) + o(1) \\ &= \ln n - 0.5\ln\ln n + \varepsilon\lambda(a_c)\beta(n) + O(1)\,. \end{aligned}$$

По теореме Петрова (см. Приложение),

$$c_1 e^{-c_2\beta(n)} \le n\mathbb{P}(S_k > x) \le c_2 e^{-c_1\beta(n)} \qquad (0 < c_1 < c_2 < \infty)\,. \tag{1.54}$$

Поэтому

$$\mathbb{P}(R_n^*(k) > x) \le n\mathbb{P}(S_k > x) \le e^{-c_1\beta(n)} \to 0.$$

Теперь пусть $x = x(k, -\varepsilon)$. Обозначим

$$S_{l,m} = X_{l+1} + \ldots + X_m\,,\ a_* = x/k\,.$$

Согласно (1.23), $\mathbb{P}(R_n^*(k) < x) = e^{-nb(k,x)} + o(1)$. Поскольку

$$n\mathbb{P}(S_k > x) \ge e^{c(\varepsilon)\beta(n)} \to \infty$$

ввиду (1.54), получим $nb(k,x) \ge e^{c(\varepsilon)\beta(n)} \to \infty$, если мы покажем, что

$$\sum_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}(\zeta_l > x | \zeta_0 > x) = O(1)\,.$$

Применение (1.53) с $K = 4k^2$ влечёт

$$\mathbb{P}(\zeta_0 > x, \zeta_m > x) \le \mathbb{P}(S_{m,k} > y) + \mathbb{P}(S_m > x - y)\mathbb{P}(S_k > x)\,.$$

Положим

$$y = (k-m)a_* + qma_*\,,$$

где $q \in (0;1)$. Ввиду (6.18),

$$\sum_{m\ge1} \mathbb{P}(S_m > x - y) \le \sum_{m\ge1} e^{-m\Lambda((1-q)a_*)} \le C < \infty\,.$$

Теорема Петрова влечёт

$$\mathbb{P}(S_{m,k} > y) \le \frac{c_3}{\sqrt{k-m}} \exp\Big(-(k-m)\Lambda\Big(a_* + \frac{qma_*}{k-m}\Big)\Big)\,.$$

По формуле Тэйлора,

$$\Lambda\Big(a_* + \frac{qma_*}{k-m}\Big) = \Lambda(a_*) + \frac{qma_*}{k-m}\lambda\Big(a_* + \theta\frac{cma_*}{k-m}\Big) \ge \Lambda(a_*) + \frac{qma_*}{k-m}\lambda(a_*)\,,$$

где $\theta \in [0;1]$ (мы используем тот факт, что $\Lambda' \uparrow$). Поэтому

$$\mathbb{P}(S_{m,k} > y) \le \frac{c_4}{\sqrt{k-m}} e^{-(k-m)\Lambda(a_*) - qma_*\lambda(a_*)} .$$

Поскольку $\mathbb{P}(S_k > x) \ge c_5 e^{-k\Lambda(a_*)}/\sqrt{k}$, с учётом теоремы Петрова остаётся проверить, что

$$\sum_{m=1}^{k-1} \kappa_m \sqrt{k/(k-m)} \le C < \infty, \tag{1.55}$$

где $\kappa_m = e^{m(\Lambda(a_*) - qa_*\lambda(a_*))}$, $q \in (t;1)$.

Так как функция λ – строго возрастающая,

$$\Lambda(a_*) = \int_0^{a_*} \lambda(u)du = a_*\lambda(\tau a_*) < a_*\lambda(a_*) \quad (\exists \tau \in (0;1)).$$

Следовательно, $\Lambda(a_*) < ta_*\lambda(a_*)$, если $t \in (0;1)$ достаточно близко к 1. Заметим, что

$$\sum_{m=1}^{[k/2]} \kappa_m \le C < \infty\,, \quad \sum_{m=[k/2]}^{k-1} \kappa_m \sqrt{k/(k-m)} \le \sqrt{k}\, e^{-c_6 k} \to 0\,,$$

откуда следует (1.55). Доказательство завершено. □

Доказательство теоремы 1.12. Напомним, что $k \equiv k(n) = [c \ln n]$. Пусть дан $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$x_m = a_c m + \frac{\ln m}{2\lambda(a_c)} + \frac{1+\varepsilon}{\lambda(a_c)} \ln\ln m.$$

По теореме Петрова,

$$\mathbb{P}(R_n^*(k) \ge x_k) \le n\mathbb{P}(S_k \ge x_k) \le c_1 k^{-1} (\ln k)^{-1-\varepsilon} .$$

Определим

$$n_m = \min\{n : k(n) = m\}\,, \ N_m = n_{m+1} - 1\,.$$

Тогда $\sum_{m\ge1} \mathbb{P}(R_{N_m}^*(m) \ge x_m) < \infty$, и лемма Бореля-Кантелли влечёт $R_{N_m}^*(m) \le x_m$ для всех достаточно больших m с в. 1.

Если $n_m \le n < n_{m+1}$, то $k(n) = m$. Поэтому для всех достаточно больших m

$$R_n^* \le R_{N_m}^* \le x_m = a_c k(n) + \frac{\ln k(n)}{2\lambda(a_c)} + \frac{1+\varepsilon}{\lambda(a_c)} \ln\ln k(n) \quad (\text{с в. } 1).$$

Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n / \ln\ln k \le 1/\lambda(a_c) \qquad (\text{с в. } 1)\,.$$

Чтобы показать, что

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n / \ln\ln k \ge 1/\lambda(a_c) \qquad (\text{с в. } 1),$$

обозначим

$$\hat{R}_m = \max_{n_m \le j < n_{m+1}-m} \zeta_j(m)$$

и заменим ε на $-\varepsilon$ в определении x_m. Так как $\hat{R}_m \le R^*_{N_m}$ и $k(N_m) = m$, достаточно доказать, что

$$\mathbb{P}(\hat{R}_m \ge x_m \,\text{б.ч.}) = 1.$$

Очевидно, что $\hat{R}_m \stackrel{d}{=} R_{N_*}(m)$, где $N_* = n_{m+1} - n_m - m$. Заметим, что

$$N_* \mathbb{P}(S_m \ge x_m) \ge c_2 m^{-1} (\ln m)^{-1+\varepsilon}.$$

Те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 1.27, влекут $\sum_{l=1}^{m} \mathbb{P}(\zeta_l(m) \ge x_m | \zeta_0(m) \ge x_m) < c_3$. Используя (1.53), получим $N_* b(m,x) \ge c_4 m^{-1}(\ln m)^{-1+\varepsilon}$, и из (1.23) следует $\sum_{m\ge1} \mathbb{P}(\hat{R}_m \ge x_m) = \infty$. Заметим, что с.в. $\{\hat{R}_m\}$ независимы. По лемме Бореля-Кантелли, $\mathbb{P}(\hat{R}_m \ge x_m \, i.o.) = 1$, откуда следует (1.31).

Теперь мы докажем (1.32). Из утверждения 1.27 следует, что если $\beta(n) \uparrow \infty$, то

$$\liminf_{n\to\infty} Z_n/\beta(n) \le 0 \qquad (\text{с в. } 1).$$

Положим

$$x_m = a_c m - (\ln m)/(2\lambda(a_c)) - (1+\varepsilon)(\ln\ln m)/\lambda(a_c).$$

Используя (1.23), получим $\sum_{m\ge1} \mathbb{P}(R^*_{n_m} < x_m) < \infty$. Поэтому по лемме Бореля-Кантелли $R^*_{n_m} \ge x_m$ для всех достаточно больших m с в. 1,

$$R^*_n \ge R^*_{n_m} \ge x_m = a_c k(n) - (\ln k(n))/(2\lambda(a_c)) - (1+\varepsilon)(\ln\ln k(n))/\lambda(a_c),$$

если $n_m \le n < n_{m+1}$, и, следовательно,

$$\liminf_{n\to\infty} Z_n/\ln\ln k \ge -1/\lambda(a_c) \qquad (\text{с в. } 1). \tag{1.56}$$

Проверим, что

$$\sum_{l=1}^{m} \mathbb{P}(\zeta_l(m) \ge x | \zeta_0(m) \ge x) < c_1 < \infty.$$

По теореме Петрова, $n_m \mathbb{P}\left(S_m \ge x_m\right) + n_m b(m, x_m) \ge c_4 (\ln m)^{1+\varepsilon}$.

Напомним, что $k \equiv k(n) = [c \ln n]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$x_m = a_c m + \frac{\ln m}{2\lambda(a_c)} + \frac{1+\varepsilon}{\lambda(a_c)} \ln\ln m.$$

Учитывая теорему Петрова,

$$\mathbb{P}(R^*_n(k) \ge x_k) \le n \mathbb{P}(S_k \ge x_k) \le c_1 k^{-1} (\ln k)^{-1-\varepsilon}.$$

Положим

$$n_m = \min\{n : k(n) = m\}\,,\ \ N_m = n_{m+1} - 1\,.$$

Тогда $\sum_{m\ge 1} \mathbb{P}(R^*_{N_m}(m) \ge x_m) < \infty$, и лемма Бореля-Кантелли влечёт $R^*_{N_m}(m) \le x_m$ для всех достаточно больших m с вероятностью 1.

Если $n_m \le n < n_{m+1}$, то $k(n) = m$. Следовательно, для всех достаточно больших m

$$R^*_n \le R^*_{N_m} \le x_m = a_c k(n) + \frac{\ln k(n)}{2\lambda(a_c)} + \frac{1+\varepsilon}{\lambda(a_c)} \ln\ln k(n) \quad \text{(п.н.)}.$$

Таким образом,

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n/\ln\ln k \le 1/\lambda(a_c) \qquad \text{(с в. 1)}\,.$$

Чтобы показать, что

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n/\ln\ln k \ge 1/\lambda(a_c) \qquad \text{(п.н.)},$$

обозначим

$$\hat{R}_m = \max_{n_m \le j < n_{m+1}-m} \zeta_j(m),$$

и заменим ε на $-\varepsilon$ в определении x_m. Поскольку $\hat{R}_m \le R^*_{N_m}$ и $k(N_m) = m$, достаточно доказать, что

$$\mathbb{P}(\hat{R}_m \ge x_m \,\text{б.ч.}) = 1.$$

Очевидно, $\hat{R}_m \stackrel{d}{=} R_{N_*}(m)$, где $N_* = n_{m+1} - n_m - m$. Заметим, что

$$N_* \mathbb{P}(S_m \ge x_m) \ge c_2 m^{-1} (\ln m)^{-1+\varepsilon}\,.$$

Те же аргументы, что при доказательстве утверждения 1.27, влекут $\sum_{l=1}^m \mathbb{P}(\zeta_l(m) \ge x_m | \zeta_0(m) \ge x_m) < c_3$. Используя (1.53), получим $N_* b(m,x) \ge c_4 m^{-1} (\ln m)^{-1+\varepsilon}$, и (1.23) влечёт $\sum_{m\ge 1} \mathbb{P}(\hat{R}_m \ge x_m) = \infty$. Заметим, что с.в. $\{\hat{R}_m\}$ независимы. По лемме Бореля-Кантелли, $\mathbb{P}(\hat{R}_m \ge x_m \,\text{б.ч.}) = 1$, и (1.31) следует.

Докажем теперь (1.32). Согласно утверждению 1.27, если $\beta(n) \uparrow \infty$, то

$$\liminf_{n\to\infty} Z_n/\beta(n) \le 0 \qquad \text{(с в. 1)}\,.$$

Положим

$$x_m = a_c m - (\ln m)/(2\lambda(a_c)) - (1+\varepsilon)(\ln\ln m)/\lambda(a_c)\,.$$

Мы покажем ниже, что $\sum_{m\ge 1} \mathbb{P}(R^*_{n_m} < x_m) < \infty$. Тогда по лемме Бореля-Кантелли $R^*_{n_m} \ge x_m$ для всех достаточно больших m с вероятностью 1,

$$R^*_n \ge R^*_{n_m} \ge x_m = a_c k(n) - (\ln k(n))/(2\lambda(a_c)) - (1+\varepsilon)(\ln\ln k(n))/\lambda(a_c),$$

если $n_m \le n < n_{m+1}$, и, следовательно, имеет место (1.56).

Повторяя приведённые выше аргументы, проверим, что

$$\sum_{l=1}^{m} \mathbb{P}(\zeta_l(m) \ge x | \zeta_0(m) \ge x) < c_1 < \infty.$$

Теорема Петрова влечёт $n_m \mathbb{P}\left(S_m \ge x_m\right) + n_m b(m, x_m) \ \ge\ c_4 (\ln m)^{1+\varepsilon}$. Используя (1.23), выводим $\sum_{m \ge 1} \mathbb{P}(R^*_{n_m} < x_m) < \infty$. Доказательство завершено. □

Доказательство теоремы 1.14 основывается на теореме 1.6 и лемме 1.11. Положим $j_k = C \ln k$, где $C > 0$, и пусть

$$m \equiv m(n, j) = j + [\gamma k + 0.5 \log_q k]\,. \tag{1.57}$$

Тогда для $j \le -j_k$ и всех достаточно больших k

$$\begin{aligned} \Delta(n, j) &\le \mathbb{P}(\xi_n < -j_k) + \exp\left(-\frac{2\gamma - 1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{-j_k - \tilde{g}(k)}\right) \\ &= \Delta(n, -j_k) + 2\exp\left(-\frac{2\gamma - 1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{-j_k - \tilde{g}(k)}\right) \\ &\le \Delta(n, -j_k) + 1/k\,. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Если $j \ge j_k$ и $C \ge 1/\ln(1/q)$, то

$$\begin{aligned} \Delta(n, j) &= \left|\mathbb{P}(\xi_n \ge j) - \left(1 - \exp\left(-\frac{2\gamma - 1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j - \tilde{g}(k)}\right)\right)\right| \\ &\le \mathbb{P}(\xi_n \ge j_k) + 1 - \exp\left(-\frac{2\gamma - 1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j_k - \tilde{g}(k)}\right) \\ &\le \Delta(n, j_k) + \frac{2\gamma - 1}{\sqrt{2\pi q}} q^{j_k - 1} \le \Delta(n, j_k) + c_1/k\,. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Таким образом, теорема 1.14 будет доказана, если мы покажем, что

$$\max_{|j| \le j_k} \Delta(n, j) = O\left(1/\sqrt{\ln n}\right)\,, \tag{1.60}$$

где $j_k = C \ln k$, $C > 1/\ln(1/q)$. Принимая во внимание (1.23), достаточно показать, что

$$\max_{|j| \le j_k} \left|\exp\left(-nb(k, m)\right) - \exp\left(-\frac{2\gamma - 1}{2\sqrt{2\pi q}} q^{j - \tilde{g}(k)}\right)\right| \le C_2/\sqrt{k}\,. \tag{1.61}$$

Используя лемму 1.11 и формулу Стирлинга, проверяем, что

$$\begin{aligned} p(k, m) &= \frac{\hat{\gamma}(2\hat{\gamma} - 1) 2^{-kH(\hat{\gamma})}}{2\sqrt{2\pi k \hat{\gamma}(1 - \hat{\gamma})}} \left(1 + O\big((k - m)^{-1}\big)\right) \\ &= \frac{\gamma - 1/2}{2^{kH(\hat{\gamma})}\sqrt{2\pi k q}} \left(1 + O\left(\frac{j + \ln k}{k} + \frac{1}{k - m}\right)\right) \end{aligned} \tag{1.62}$$

при $m > k/2$, где $\hat{\gamma} = m/k$. Согласно формуле Тэйлора,

$$kH\,(m/k) = \log_2 n - \frac{1}{2}\log_2 k - (j - \tilde{g}(k))\log_2 q + O\big((j^2 + \ln^2 k)/k\big)\ .$$

Поэтому

$$np(k,m) = c_\gamma q^{j-\tilde{g}(k)}\left(1 + O(k^{-1}\ln^2 k)\right) \tag{1.63}$$

равномерно по $|j| \leq j_k$. Оценки (1.60) и (1.61) следует из (6.61), (1.27) и (1.63). Объединяя (1.58) – (1.60), получим (1.37). □

Доказательство теоремы 1.13. Мы покажем, что

$$\mathbb{P}(R_n(k) < x) \approx e^{-nb} \approx e^{-n\bar{p}_k/k} \approx \exp\left(-n(x/k)^2\mathbb{P}(S_k \geq x)\right)\ .$$

Асимптотика $\mathbb{P}(S_k \geq x)$ получена с помощью теоремы Петрова. Поскольку

$$n(x/k)^2\mathbb{P}(S_k \geq x)$$

стремится к константе, асимптотика функции Λ определяет выбор центрируюшей последовательности.

Обозначим

$$x = u_n\sqrt{k}(1 + y_n)\,,\ \tau_n = nxk^{-3/2}e^{-k\Lambda(x/k)}\,.$$

Из леммы 1.9 и леммы 1.10 выводим, что

$$\bar{p}_{3k} - \bar{p}_{2k} \sim \bar{p}_{2k} - \bar{p}_k \sim \bar{p}_k\,,\ b^* \sim b \sim k^{-1}\bar{p}_k\,. \tag{1.64}$$

Если $x = u_n\sqrt{k}(1 + O(\alpha_n))$, то следствие 1.7, (1.26) и (1.64) влекут

$$\mathbb{P}(R_n^*(k) < x) = \exp\left(-\frac{nxe^{-k\Lambda(x/k)}}{k\sqrt{2\pi k}}(1 + o(1))\right) + o(1)\,. \tag{1.65}$$

Для каждого $z \in \mathbb{R}$ определим $y_n \equiv y_n(z)$ таким образом, что

$$\tau_n \to e^{-z}\,. \tag{1.66}$$

Используя равенство $\Lambda(x) = x^2/2 - x^3G(x)$, заключаем, что

$$\tau_n \sim (1 + y_n)\exp\left(u_n^2\psi(y_n, \alpha_n)\right)\ . \tag{1.67}$$

Очевидно, (1.66) выполнено, если y_n отделено от нуля. Следовательно, с необходимостью $y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Сначала мы рассмотрим ситуацию (A_1):

$$\ln^3(n/k) \ll k \ll n\,. \tag{1.68}$$

Тогда (1.66) выполнено с $y_n = z/u_n^2$.

Если $8\ln^3(n/k)k^{-1} \to d^2$ для некоторого $d > 0$ и $y_n = z/u_n^2$, то

$$u_n^2\psi(y_n, \alpha_n) = -z + \alpha_n u_n^2 G(0) + o(1)\,.$$

Следовательно, $\tau_n \to \exp(-z + dG(0))$, и для каждого $z \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left(R_n^* \Big/ \sqrt{k} - u_n\left(1 + G(0)\alpha_n\right) < z/u_n\right) \to \exp\left(-e^{-z} \Big/ \sqrt{2\pi}\right),$$

если (A_1^*) выполнено.

Предположим теперь, что

$$\ln(n/k) \ll k \ll \ln^3(n/k)\,.$$

Используя формулу Тэйлора, можно выбрать числа $c_1, \ldots c_{m-1}$ так, что

$$\psi(y_n^*, \alpha_n) = O\left(\alpha_n^m\right)\,,$$

где $y_n^* = \sum_{i=1}^{m-1} c_i\alpha_n^i$. Положим $y_n = y_n^* + z/u_n^2$. Легко видеть, что

$$u_n^2\psi(y_n, \alpha_n) = -z + o(1) \tag{1.69}$$

в ситуации (A_m). Это соотношение и (1.67) влекут (1.66).

Если (A_m^*) выполнено, то, используя формулу Тэйлора, можно выбрать числа $c_1, \ldots c_m$ так, что

$$\psi(y_m^*, \alpha_n) = O\left(\alpha_n^{m+1}\right)\,,$$

где $y_n^* = \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_n^i$. Легко видеть, что (1.69) выполнено для $y_n = y_n^* + z/u_n^2$, и (1.66) выполнено. Доказательство теоремы 1.13 завершено. □

Заметим, что

$$\{M_t^* < x\} = \left\{\max_{0\le i\le \mu(t-x)} X_{i+1} < x\right\}, \tag{1.70}$$

Учитывая (1.38), имеем

$$\mathbb{P}(M_t^* < x) = \mathbb{E}(1-p_x)^{\nu(t-x)}\,. \tag{1.71}$$

Положим

$$K_+ = \inf\{x : \mathbb{E}X\,\mathbb{1}\{X < x\} > 0\}.$$

Если $K_+ > K_*$, то $\mathcal{L}(X)$ имеет атом в нуле. Следовательно, $X_i^< \equiv 0$ при $x \le K_+$, $i \ge 1$, и (1.70) влечёт $\mathbb{P}(M_t^* < x) = 0$ для $x \le K_+$. Поэтому оценки теорем 1.15–1.16 тривиально выполнены при $K_* < x \le K_+$.

При $x > K_+$ мы используем следующую лемму.

Лемма 1.28 *Если* $\mathbb{E}X^2 < \infty$ *и* $K \in (K_+; K^*)$, *то существует число* $\delta > 0$, *такое что для* $x \in [K; t/2]$ *и* $t \geq 1/\delta$

$$\mathbb{E}\exp(\delta|\nu(t-x) - \mathbb{E}\nu(t-x)|/\max\{x; \sqrt{t}\,\}) \leq 1/\delta\,.$$

Результ останется в силе, если $\mathbb{E}\nu(t-x)$ *заменить на* $(t-x)/a$.

Доказательство леммы 1.28. Обозначим

$$x_* = \max\{x, \sqrt{t}\,\}\,,\ 3c_* = \inf\{a(x) : x \geq K\}\,.$$

Согласно неравенству Лордена, если $X, X_1, \ldots$ – н.о.р.с.в., $\mathbb{E}X \in (0; \infty)$ и $\nu_*(t) = \min\{n \geq 1 \colon X_1 + \ldots + X_n > t\}$, то

$$t/\mathbb{E}X < \mathbb{E}\nu_*(t) \leq t/\mathbb{E}X + \mathbb{E}X^2/(\mathbb{E}X)^2 \qquad (t > 0)\,. \tag{1.72}$$

Поэтому $0 \leq \mathbb{E}\nu(t-x) - (t-x)/a \leq \mathbb{E}X^{<2}/(\mathbb{E}X^<)^2$ и

$$\mathbb{P}(\nu(t-x) - \mathbb{E}\nu(t-x) > ux_*) \leq \mathbb{P}(-(S_m^< - \mathbb{E}S_m^<) \geq c_* u x_*) \qquad (u \geq 1, t \geq 9),$$

где $m \equiv m(t,x,u) = [ux_* + (t-x)/a]$. Заметим, что $|X_i^< - \mathbb{E}X_i^<| \leq x$ и $\mathbb{D}X^< \leq c_K < \infty$ при $x \geq K$. Применение неравенства Бернштейна даёт

$$\mathbb{P}(-(S_m^< - \mathbb{E}S_m^<) \geq c_* u x_*) \leq \exp\left(-(c_* u x_*)^2/4(mc_K + c_* u x_*^2)\right) \leq e^{-cu} \quad (u \geq 1,\ t \geq 9).$$

Аналогично оцениваем $\mathbb{P}(\nu(t-x) - \mathbb{E}\nu(t-x) < -ux_*)$. □

Доказательство теоремы 1.16. Согласно формуле Тэйлора,

$$(1-p_x)^b - \sum_{i=0}^{m-1}(-p_x)^i b^{(i)}/i! = (-p_x)^m b^{(m)}(1-\theta p_x)^{b-n}/m! \qquad (\exists \theta \in [0;1]). \tag{1.73}$$

Положим $b = \nu(t-x) - \mathbb{E}\nu(t-x)$. Тогда

$$\Delta_m(t,x) \leq c_m \mathbb{E}I_m\,,$$

где

$$I_m = p_x^m|\nu(t-x) - \mathbb{E}\nu(t-x)|(1-p_x)^z\,,\ z = \min\{\nu(t-x); \mathbb{E}\nu(t-x)/2\}.$$

Здесь $\mathbb{E}\nu(t-x)$ может быть заменено на $(t-x)/a$.

Ввиду леммы 1.28,

$$\mathbb{E}I_m \leq c_m^*(p_x x_*)^m\,.$$

Так как $\mathbb{E}X^2 < \infty$, имеем $xp_x = o(1/\sqrt{t})$ при $x \geq \sqrt{t}\,$.

Заметим, что при $x < \sqrt{t}$

$$\mathbb{E}I_m \mathbb{I}\{\nu(t-x) \geq \mathbb{E}\nu(t-x)/2\} \leq c_m^\star p_x^m t^{m/2} e^{-ctp_x} = O(t^{-m/2}),$$
$$\mathbb{E}I_m \mathbb{I}\{\nu(t-x) < \mathbb{E}\nu(t-x)/2\} \leq (\mathbb{E}\nu(t-x))^m \mathbb{P}(\nu(t-x) < \mathbb{E}\nu(t-x)/2) \leq c_m^\star q^{\sqrt{t}},$$

откуда следует (1.39). □

Теорема 1.15 следует из теоремы 1.16, если заметить, что

$$\sup_{x \leq K} (1-p_x)^{(t-x)/a} \leq \exp(p_K(t-2K)/K),$$
$$\sup_{x \geq t/3} \left(1-(1-p_x)^{(t-x)/a}\right) \leq ctp_{t/3},$$
$$\mathbb{P}(M_t^* \geq t/3) \leq \sum_{m\geq 0} \mathbb{P}\left(\max_{i \leq m+1} X_i \geq t/3, \mu(t) = m\right)$$
$$\leq \sum_{m\geq 0}\sum_{i=1}^{m+1} \mathbb{P}\left(X_i \geq t/3, \mu(t)=m\right) = p_{t/3}\mathbb{E}(\mu(t)+1),$$
$$\sup_{x\leq K} \mathbb{P}(M_t^* < x) = \mathbb{P}(M_K^* < x) \leq \mathbb{P}(\mu(t) \leq \mathbb{E}\mu(t)/2) + \exp(-p_K \mathbb{E}\mu(t)/2)$$

и воспользоваться неравенствами Чебышева и Лордена. □

Если $x \geq D_*$ и условие (1.40) выполнено, то

$$\int_x^\infty \mathbb{P}(X \geq y | X \geq x) dy \leq \sum_{i=0}^n x^i D^{n-i+1} n!/i! \tag{1.74}$$

Неравенство (1.74) влечёт следующую оценку: если $D_* \leq x \leq K^*$ и $c \in (0; 1/D)$, то

$$x^n \leq \mathbb{E}(X^>)^n \leq \sum_{i=0}^n x^i D^{n-i} n!/i!\,, \ \mathbb{E}\exp(cX^>) \leq e^{cx}/(1-cD)\,. \tag{1.75}$$

Условие (1.40) выполнено, если существует константа $D_* > K_*$ и интегрируемая функция f, такие что

$$\mathbb{P}(X \geq x+t | X \geq x) \leq f(t) \qquad (t \geq 0, x \geq D_*).$$

В частности, (1.40) справедливо, если функция $g(x) := e^{cx}\mathbb{P}(X \geq x)$ невозрастает при $x > 1/c$ ($\exists c > 0$). Равенство в (1.40) для всех $x \geq 0$ достигается только если распределение $\mathcal{L}(X)$ является экспоненциальным с $\mathbb{E}X = D$.

Доказательства теорем 1.17–1.19 основаны на следующих соотношениях. Заметим, что

$$\{N_x(t) = k\} = \left\{\sum_{i=0}^{\mu(t-x)} \mathbb{I}\{X_{i+1} \geq x\} = k\right\}.$$

В справедливости этого соотношения нетрудно убедиться, рассматривая события $\{N_x(t) = k, t - S_{\mu(t)} < x\}$ и $\{N_x(t) = k, t - S_{\mu(t)} \geq x\}$.

Обозначим

$$G_r(\tau) = p_x^r \mathbb{E}(1-p_x)^\tau \binom{\tau+r}{r}.$$

Если $K_* < x < \min\{t; K^*\}$, то аналогично (1.71) имеем

$$\mathbb{P}(N_x(t) = k) = G_k(\tau_k) + (1-p_x) \sum_{r=0}^{k-1} (G_r(\tau_k) - G_r(\tau_{k-1}-1)) .$$

При выводе этого соотношения используется следующее тождество:

$$p^k \sum_{j\geq i+1} (1-p)^j \binom{j+k-1}{k-1} = (1-p)^{i+1} \sum_{l=0}^{k-1} p^l \binom{i+l}{l}.$$

Аналогично лемме 1.28 выводится

Лемма 1.29 *Если (1.40) выполнено и $w(t)$ – положительная функция, сходящаяся к 0 при $t \to \infty$, то существует константа $\delta > 0$, такая что при $t \geq \delta$*

$$\mathbb{E} \exp(\delta|\tau_k - \mathbb{E}\tau_k|/\sqrt{t}\,) \leq 1/\delta$$

равномерно по $x \in (D_*; \min\{K^*; \sqrt{t}\,\})$, $k \leq w(t)\sqrt{t}$.

Доказательство теоремы 1.19 проводится аналогично доказательству теоремы 1.15 с использованием (1.73), где положим $b = \tau_k - \mathbb{E}\tau_k$. Отметим, что

$$(1 - p_x)^{z_k}(1 - \theta p_x)^{b-m} \leq (1 - p_x)^{\min\{\tau_k - m; z_k\}} \qquad (\theta \in [0; 1]) ,$$

где $z_k := \mathbb{E}\tau_k$, а также что из формулы Вандермонда ([335], p.28) следует

$$\binom{b}{i}\binom{\tau_k+r}{i} = \binom{b}{i}\binom{(b-i)+(\mathbb{E}\tau_k+r+i)}{i} = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j}\binom{b}{i+j}\binom{\mathbb{E}\tau_k+r+i}{r-j}.$$

Следствие 1.18 вытекает из теоремы 1.17 с использованием следующего соотношения: если $x \geq K_*$, $t \geq 2$ и (1.40) выполнено, то

$$x\mathbb{P}(X \geq x) \leq ct^{-1}(\ln t) \max\{1; t\mathbb{P}(X \geq x)\}.$$

Теорема 1.17 следует из теоремы 1.19, где используется следующее вытекающее из леммы 1.29 соотношение:

$$\left|\mathbb{E}\binom{\tau + r}{r}(\tau - \mathbb{E}\tau)\right| \leq ct^r \qquad (0 \leq r \leq k)$$

равномерно по $D_* < x < \sqrt{t}$; здесь τ обозначает τ_k или $\tau_{k-1} - 1$.

Ключевым результом при выводе теорем 1.20–1.25 является следующая

Лемма 1.30 *Для всех натуральных* i, j, i', j', *таких что* $(i,j) \neq (i',j')$,

$$\mathbb{P}(T^*_{ij} = T^*_{i'j'} = 1) \leq q_{2k} \,. \tag{1.76}$$

Доказательство леммы 1.30. Легко заметить, что $p^{2k} \leq q_{2k}$ и $\mathbb{E}T^*_{ij}T^*_{i'j'} = 0$ при $i-j = i'-j'$, $|i-i'| \leq k$. Остаётся показать, что (1.76) выполнено при $i-j \neq i'-j'$.

Заметим, что равенство $T_{ij} = T_{i'j'} = 1$ представимо в виде $r \geq 1$ "цепочек" равенств

$$U_{s_1} = \cdots = U_{s_1+m_1} = \cdots = U_{s_r} = \cdots = U_{s_r+m_r} \,,$$

где m_i – число знаков равенства в i-й "цепочке"; U используется как общий символ для обозначения X_i, Y_j. К примеру, если $k = 4$, то событие $\{T_{0,0} = T_{1,3} = 1\}$ "генерирует" равенства $X_1 = Y_1$, $Y_2 = X_2 = Y_4 = X_4 = Y_6$, $Y_3 = X_3 = Y_5$, $X_5 = Y_7$:

$$\begin{array}{ccccc}
Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & \\
| & | & | & | & \\
X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \\
 & | & | & | & | \\
 & Y_4 & Y_5 & Y_6 & Y_7
\end{array}$$

а именно, $r = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $m_3 = 2$, $m_4 = 1$.

Общим числом имеем

$$m_1 + \cdots + m_r = 2k$$

равенств. Важно отметить, что никакое равенство вида $X_{i+s} = Y_{j+s}$ или $X_{i'+s} = Y_{j'+s}$ не является следствием другого равенства. Действительно, без ограничения общности мы можем предположить, что $i = j = 0$, $j' = i' + d > i'$. Для любого $0 < s \leq k$ равенства $X_{i+s} = Y_{j+s}$ или $X_{i'+s} = Y_{j'+s}$ принадлежат "цепочке"

$$\ldots = X_{s-d} = Y_s = X_s = Y_{s+d} = X_{s+d} = \ldots \tag{1.77}$$

Легко видеть, что среди равенств (1.77) нет дублирования. Итого,

$$\mathbb{P}(T_{ij} = T_{i'j'} = 1) = \Big(\sum_a p_a^{m_1+1}\Big) \cdots \Big(\sum_a p_a^{m_r+1}\Big) = \prod_{i=1}^m \mathbb{E}p_X^{m_i} \,.$$

Пусть $f(x) = p_x^{2k}$. По неравенству Йенсена,

$$\mathbb{E}(f(X))^{m_i/2k} \leq (\mathbb{E}f(X))^{m_i/2k} \,. \tag{1.78}$$

Поэтому

$$\mathbb{P}(T_{ij} = T_{i'j'} = 1) \leq (\mathbb{E}f(X))^{\sum_i m_i/2k} = \mathbb{E}f(X) \equiv q_{2k} \,.$$

Доказательство леммы 1.30 завершено. $\square$

Доказательство теоремы 1.20. Положим в (2.10) $W := W_{mn}$, $\alpha = (i,j)$, $B_\alpha \equiv J_{ij} = \{(i',j') \subset J : |i-i'| \leq k \,\mathrm{or}\, |j-j'| \leq k\}$. Тогда

$$\delta_1 \leq m'n'(m'+n')(2k+1)p^{2k}\,,\ \delta_3 = 0$$

и $\delta_2 \leq \delta_{2,1} + \delta_{2,2} + \delta_{2,3}$, где

$$\begin{aligned}
\delta_{2,s} &= \sum_{(i',j')\in J}\ \sum_{(i',j')\in J_{ijs}} \mathbb{E}T_{ij}\mathbb{E}T_{i'j'}\,,\\
I_{ij1} &= \{(i',j') \in J \setminus (i,j) : |i-i'| \leq k, |j-j'| \leq k\},\\
I_{ij2} &= \{(i',j') \in J \setminus (i,j) : |i-i'| \leq k, |j-j'| > k\},\\
I_{ij3} &= \{(i',j') \in J \setminus (i,j) : |i-i'| > k, |j-j'| \leq k\}.
\end{aligned}$$

Согласно лемме 1.30, $\delta_{2,1} \leq 4m'n'k^2q_{2k}$. Если $(i,j) \subset J$, $(i',j') \subset I_{ijs}$ ($s=2$ либо $s=3$), то равенство $T_{ij} = T_{i'j'}$ представляет из себя цепочку равенств, каждое из которых включает не более трёх с.в.. Поэтому $\delta_{2,2} + \delta_{2,3} \leq m'n'(m'+n')(2k+1)q^k$. Объединяя приведённые оценки, получим результат теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 1.22 повторяет рассуждения при выводе теоремы 1.20.

Доказательство теоремы 1.24. Ввиду условия $c_*k \geq \log n(k) + 3\log k$ правая часть (1.43) есть $O(k^{-2})$ при $k \to \infty$. Поэтому ряды $\sum_k \lambda^*$ и $\sum_k \mathbb{P}(M^*_{n(k)} \geq k)$ сходятся или рассходятся одновременно. Если ряд $\sum_k n^2(k)p^k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_k \lambda^*$, и по лемме Болеля-Кантелли $\mathbb{P}(M^*_{n(k)} \geq k$ б.ч.$) = 0$.

Если $\sum_k n^2(k)p^k = \infty$, обозначим $A_k = \{M^*_{n(k)} \geq k\}$. Повторяя рассуждения при выводе формулы (35) в [254], получим $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_iA_j)\Big/\Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\Big)^2 \to 1$. Из леммы 6.19 следует, что $\mathbb{P}(M^*_{n(k)} \geq k$ б.ч.$) = 1$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.25. Заметим, что при $k = k(n)$, $1 \ll k \ll n$,

$$\lambda^* \sim n^2p^{k-r}(1-p)^{r+1}k^r/2r!$$

Пусть

$$n(k) = \min\{n : [f_n - \varepsilon] = k\},$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда $\log n^2 \sim k$ и $e^{-\lambda^*} \leq (\log n)^{-p^{-\varepsilon+o(1)}}$. Из (1.43) выводим: $\sum_k \mathbb{P}(M^*_{n(k)} < k) < \infty$. Поэтому с вероятностью 1 $M^*_{n(k)} \geq k$ для всех достаточно больших k. Для всех n в интервале $n(k) \leq n < n(k+1)$ имеем $M^*_n \geq M^*_{n(k)} \geq k = [f_n - \varepsilon] \geq f_n - 1 - \varepsilon$. Следовательно, $M^*_n \geq f_n - 1 - \varepsilon$ для всех достаточно больших n.

Пусть теперь

$$n(k) = \min\{n : [f_n + \varepsilon] = k\}.$$

Заметим, что $\{f_n+\varepsilon\}\to 0$ при $k\to\infty$. Действительно, пусть $x(k)$ – решение уравнения $f_x+\varepsilon=k$. Тогда $x(k)\le n(k)<x(k)+1$. Следовательно, $\{f_n+\varepsilon\}=f_n+\varepsilon-k=f_{n(k)}-f_{x(k)}\to 0$ при $k\to\infty$.

Из (1.43) выводим: $\sum_k \mathbb{P}(M^*_{n(k)}<k)=\infty$. Стандартные выкладки (ср. вывод формулы (30) в [254]) влекут:

$$\mathbb{P}(M^*_{n(k)})<k, M^*_{n(l)})<l)\sim \mathbb{P}(M^*_{n(k)})<k)\mathbb{P}(M^*_{n(l)})<l)$$

при $l-k\ge \log l$, $k\to\infty$. Поэтому из леммы 6.20 следует, что с вероятностью 1 $M^*_{n(k)}\le f_{n(k)}-1+\varepsilon$ б.ч.. Следовательно, с вероятностью 1

$$\liminf_{n\to\infty}(M^*_n-f_n)=-1.$$

Второе соотношение теоремы 1.25 является следствием теоремы 1.24. □

Оценки $d_{TV}(W_{mn}(k,r);\pi_{mn}(k,r))$ и $d_{TV}(N^*_n(r);\pi^*_n)$ при $r\ge 1$ получены аналогично выводу теоремы 1.20 с помощью следующего обобщения леммы 1.30: если $(i,j)\ne(i',j')$, $i-j\ne i'-j'$, то

$$\mathbb{E}T^*_{ij}(r)T^*_{i'j'}(r)\le \binom{k+r}{r}^2 q_{2(k-r)}\,. \tag{1.79}$$

Доказательство (1.79) проводится аналогично выводу (1.76), если заметить, что

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{k}{i}\le\binom{k+r}{r}.$$

При доказательстве (1.44) и (1.45) имеем:

$$\delta_1\le (m'+n')(2k+1)\lambda\binom{k+r}{r}p^{k-r}\,,\ \delta_3=0$$

и

$$\delta_2\le 4k(k+1)m'n'\binom{k+r}{r}^2 q_{2(k-r)}+4rm'n'\binom{k+r-2}{r-1}p^{k-r}\,.$$

Из теоремы 2.4 и указанных оценок следуют неравенства (1.44) и (1.45). □

Глава 2

Распределение числа выходов за высокий уровень

Исходным объектом теории экстремальных значений является число

$$N_n \equiv N_n(x) = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!1\{X_i > x\}$$

выходов за высокий уровень, где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – рассматриваемая выборка. Результаты о распределении порядковых статистик $X_{m,n}$ следуют из результатов о распределении $N_n(x)$: если выборка записана в порядке невозрастания как $X_{1,n} \geq \ldots \geq X_{n,n}$, то

$$\{X_{m,n} \leq x\} = \{N_n(x) < m\}.$$

В этой главе изучается точность пуассоновской и сложно-пуассоновской аппроксимации распределения числа выходов за высокий уровень.

2.1 Оценки точности пуассоновской аппроксимации

Распределение числа выходов за высокий уровень можно аппроксимировать законом Пуассона, если наблюдения независимы, а также в случае, когда зависимость не приводит к появлению кластеров.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые с.в., $\mathcal{L}(X_i) = \mathbf{B}(p_i)$. Обозначим

$$W = X_1 + \ldots + X_n\,,\ \lambda = \mathbb{E}W\,,\ \mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(\pi_\lambda) = \mathbf{\Pi}(\lambda)\,.$$

Можно предполагать, что $\lambda > 0$.

Барбур и Иглсон [22] установили следуюшую оценку: если $X_1, \ldots, X_n$ – независимые Бернулиевые с.в., $\mathcal{L}(X_i) = \mathbf{B}(p_i)$, то

$$d_{TV}(W;\pi_\lambda) \leq \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda}) \sum_{i=1}^{n} p_i^2\,. \tag{2.1}$$

В случае н.о.р.с.в. (2.1) примет вид

$$d_{TV}\left(\mathbf{B}(n,p);\mathbf{\Pi}(np)\right) \le \left(1-e^{-np}\right)p\,. \tag{2.2}$$

Барбур & Холл [24] (см. также [25], p. 61) показали, что

$$d_{TV}(W;\pi_\lambda) \ge \min\{1;1/\lambda\}\sum_{i=1}^{n} p_i^2/32\,.$$

Роос [343] (см. также [67]) получил оценку с неулучшаемой константой:

$$d_{TV}\left(W;\pi_\lambda\right) \le 3\theta/4e\left(1-\sqrt{\theta}\,\right)^{3/2}, \tag{2.3}$$

где

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i^2/\lambda.$$

Теорема 2.1 уточняет асимптотику второго порядка в оценке (2.3). Обозначим

$$p_n^* = \max_{i\le n} p_i\,,\ \ \varepsilon = \min\left\{1;(2\pi[\lambda-p_n^*])^{-1/2}+2\delta/(1-p_n^*/\lambda)\right\},$$

где $[\cdot]$ означает целую часть, и пусть

$$\delta = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i^2\,,\ \ \delta^* = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} p_i^3\,.$$

Теорема 2.1 *Справедлива оценка*

$$d_{TV}(W;Y) \le 3\theta/4e + 2\delta^*\varepsilon + 2\delta^2\,. \tag{2.4}$$

Если $\theta \to 0$ *и* $\lambda \to 1$ *при* $n \to \infty$, *то* $d_{TV}(W;Y) = 3\theta/4e + O\left(\delta^* + \delta^2\right)$.

В случае н.о.р.с.в. (2.4) примет вид

$$d_{TV}(\mathbf{B}(n,p);\mathbf{\Pi}(np)) \le 3p/4e + 4p^2(1-e^{-np}).$$

Следующая теорема устанавливает оценку точности пуассоновой аппроксимации в случае ограниченных событий.

Пусть $\{X_i\}$ – независимые Бернулиевые $\mathbf{B}(p)$ с.в.. Положим

$$\nu_p = -\ln(1-p).$$

Заметим, что $p \le \nu_p \le p/(1-p)$.

Теорема 2.2 *Если* $\mathcal{L}(\pi) = \mathbf{\Pi}(n\nu_p)$, $K \in \{1,\ldots,n-2\}$ *и* $A \subset [0;K]$, *то*

$$\sup_{0\le p\le 1} \Delta_n(A) \le C_K/(n-K), \tag{2.5}$$

где $\Delta_n(A) = |\mathbb{P}(W\in A) - \mathbb{P}(\pi\in A)|$ *и* $C_K = \frac{1}{2}\sum_{m=2}^{K+1} m^2 e^{m^2/(n-m)}/\sqrt{2\pi(m\vee 3-1)}$.

Прохоров установил асимптотику расстояния по вариации $d_{TV}(\mathbf{B}(n,p);\mathbf{\Pi}(np))$:

$$d_{TV}(\mathbf{B}(n,p);\mathbf{\Pi}(np)) = p/\sqrt{2\pi e}\Big(1+O\left(p+1/\sqrt{np}\,\right)\Big)$$

[316]. Роос [343], опираясь на результаты Деовельс и Пфайфер [99]), обобщил (2.7) на случай независимых неодинаково распределённых 0-1 случайных величин.

Обозначим

$$Q_\lambda(A) = \Big[\mathbb{P}(Y\in A) + \mathbb{P}(Y+2\in A) - 2\mathbb{P}(Y+1\in A)\Big]\Big/2\,.$$

Теорема 2.3 *Если* $X_1,\ldots,X_n$ *– независимые Бернулиевые с.в.,* $\mathcal{L}(X_i) = \mathbf{B}(p_i)$, *то*

$$\left|\mathbb{P}(W\in A) - \mathbb{P}(Y\in A) + Q_\lambda(A)\sum_{i=1}^n p_i^2\right| \le 2\delta^*\varepsilon + 2\delta^2\,. \tag{2.6}$$

Если $\lambda\to\infty$ *и* $\theta\to 0$, *то*

$$d_{TV}(W;Y) = \theta/\sqrt{2\pi e}\left(1+O\left(\theta+1/\sqrt{\lambda}\right)\right). \tag{2.7}$$

Для всякой пуассоновой $\mathbf{\Pi}(\lambda)$ с.в. X обозначим через $X^\star$ случайную величину с распределением

$$\mathbb{P}(X^\star\!=k) = \mathbb{P}(X\!=k)(k-\mathbb{E}X)^2/\mathbb{E}X \qquad (k\in\mathbf{Z}_+).$$

Мы будем обозначать $\mathcal{L}(X^\star)$ через $\mathbf{\Pi}^\star_\lambda$. Легко проверить, что

$$\mathbb{E}\Delta g_A(X+1) = -\lambda Q_\lambda(A) = \left(\mathbb{P}(X+1\in A) - \mathbb{P}(X^\star\in A)\right)/2. \tag{2.8}$$

Таким образом, теорема 2.3 утверждает, что

$$d_{TV}(W;Y) = \theta d_{TV}(Y^\star;Y+1)/2 + O\left(\delta^*\varepsilon+\delta^2\right). \tag{2.9}$$

Заметим, что в соотношении (2.7) не предполагается выполненым условие $p_n^*\to 0$ при $n\to\infty$. К примеру, пусть $p_i = 1/i$, $i\in\mathbb{N}$. Тогда $p_n^* = 1$, $\lambda\to\infty$, $\theta\to 0$, и (2.7) влечёт $d_{TV}(W;Y)\sim\theta/\sqrt{2\pi e}$.

Зависимые с.в.. Смит [376] обобщил (2.1) на случай зависимых величин. Пусть $\{X_a, a\in J\}$ – семейство зависимых 0-1 случайных величин, и для каждого

$a \in J$ определена "окрестность" $B_a \subset J$, такая что с.в. $\{X_b, b \in J \setminus B_a\}$ "почти независимы" от X_a (например, если $\{X_b\}$ – m-зависимые и $J = \{1, \ldots, n\}$, то $B_a = [a-m; a+m] \cap J$). Обозначим

$$W = \sum_{a \in J} X_a \,, \; \lambda = \mathbb{E}W \,,$$

и пусть

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \sum_{a \in J} \sum_{b \in B_a} \mathbb{E}X_a \mathbb{E}X_b \,, \; \delta_2 = \sum_{a \in J} \sum_{b \in B_a \setminus \{a\}} \mathbb{E}X_a X_b \,, \\ \delta_3 &= \sum_{a \in J} \mathbb{E} \left| \mathbb{E}X_a - \mathbb{E}\left\{ X_a \Big| \sum\nolimits_{b \in J \setminus B_a} X_b \right\} \right| . \end{aligned}$$

Теорема 2.4 [376] *Если* $\mathcal{L}(Y) = \mathbf{\Pi}(\lambda)$, *то*

$$d_{TV}(W; Y) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \Big(\delta_1 + \delta_2 \Big) + \min\{1; \sqrt{2/e\lambda}\,\} \delta_3 \,. \tag{2.10}$$

О числе длинных серий "успехов". Мы говорим, что серия единиц начинается в момент $i = 1$, если $\xi_1 = 1$; серия начинается в момент $i > 1$, если $\xi_{i-1} = 0$, $\xi_i = 1$. Если $\xi_{i-1} = 0$, $\xi_i = \ldots = \xi_{i+k-1} = 1$, мы говорим, что серия единиц ("успехов") имеет длину $\geq k$. К примеру, если $n = 5$ и $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1, \xi_4 = 0, \xi_5 = 1$, то налицо серия "успехов" длины 3 плюс серия длины 1.

Обозначим $A_0 = \{\xi_{i+1} = \ldots = \xi_{i+k} = 1\}$, $A_i = \{\xi_i = 0, \xi_{i+1} = \ldots = \xi_{i+k} = 1\}$ $(i > 1)$. Статистика

$$W_n(k) = \sum_{i=0}^{n-k} \mathbb{1}\{A_i\} \qquad (k \geq 1)$$

есть число серий "успехов" длины $\geq k$ среди $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Пусть $\{\xi_i, i \geq 1\}$ – н.о.р. Бернулиевые $\mathbf{B}(p)$ с.в., где $p \in (0; 1)$. Из теоремы 2.4 с $\lambda = p^k(1+(n-k)(1-p))$ и $B_i = [i-k; i+k]$ вытекает следующая оценка:

$$d_{TV}(W_n(k); \pi_\lambda) \leq (1 - e^{-\lambda})(2k+1)p^k \,, \tag{2.11}$$

где $\pi_\lambda \in \mathbf{\Pi}(\lambda)$.

Имеется тесная связь между $N_t(x)$ и $W_n(k)$. Пусть $\eta_0 = 0$,

$$\eta_i = \min\{k > \eta_{i-1} : \xi_k = 0\} \,, \; X_i = \eta_i - \eta_{i-1} \;\; (i \geq 1).$$

Тогда

$$W_n(k) = \sum_{j=1}^{\mu(t)} \mathbb{1}\{X_j - 1 \geq k\} + \mathbb{1}\{n - \eta_{\mu(n)} \geq k\} \,. \tag{2.12}$$

Следовательно,

$$W_{n-1}(k) = N_n(k+1).$$

Обозначим $\lambda_k = n(1-p)p^k$, и пусть $\pi_{\lambda_k} \in \mathbf{\Pi}(\lambda_k)$. Из теоремы 1.18 вытекает

Следствие 2.5 *Для любого* $j \in \mathbf{Z}_+$ *при* $n \to \infty$

$$\max_{1\le k\le n} |\mathbb{P}(W_n(k)=j) - \mathbb{P}(\pi_{\lambda_k}=j)| = O\Big(n^{-1}\ln n\Big).$$

Из результатов о длине наибольшей серии "успехов" ($j=0$) следует, что оценка $O\left(n^{-1}\ln n\right)$ скорости сходимости неулучшаема.

2.2 Пуассонова аппроксимация распределений сумм случайных величин со значениями в $\mathbf{Z}_+$

Рассмотрим случайные величины $\{X_i\}$ со значениями в $\mathbf{Z}_+$. Предположим, что $\mathbb{E}|X_i| < \infty$ $(\forall i)$. Обозначим

$$W = \sum_{i=1}^n X_i\,,\ \ \lambda = \mathbb{E}W.$$

Распределение W может быть аппроксимировано распределением Пуассона $\mathbf{\Pi}(\lambda)$, если вероятности $\mathbb{P}(X_i=0)$ "велики" и вероятностн $\mathbb{P}(X_i>1)$ "малы". Действительно,

$$d_{TV}\left(\sum_{i=1}^n X_i; \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i=1\}\right) \le \mathbb{P}(\exists i: X_i>1) \le \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i>1)\,, \tag{2.13}$$

и распределение $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i=1\}$ может быть аппроксимировано распределением Пуассона $\mathbf{\Pi}(\lambda')$, где $\lambda' = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i=1)$.

Более высокая точность аппроксимации может быть достигнута, если объединить метод ОВП и метод Стэйна.

Для всякой с.в. X_i со значениями в $\mathbf{Z}_+$ пусть X_i^* обозначает с.в. с распределением

$$\mathbb{P}(X_i^*=m) = (m+1)\mathbb{P}(X_i=m+1)/\mathbb{E}X_i \qquad (m\ge 0)\,. \tag{2.14}$$

Заметим, что $X^* \stackrel{d}{=} X$, если и только если X – пуассонова с.в..

В теореме 2.6 случайные величины $\{X_i^*\}$ могут быть выбраны независимыми от $\{X_i\}$. Задание X_i и X_i^* на ОВП может привести к лучшей оценке $\mathbb{E}|X_i - X_i^*|$.

Теорема 2.6 *Если* $X_1,\dots,X_n$ *– независимые с.в. и* $Y\in\mathbf{\Pi}(\lambda)$, *то*

$$d_{TV}(W;Y) \ \le\ \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda})\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i - X_i^*|\mathbb{E}X_i\,, \tag{2.15}$$

$$d_G(W;Y) \ \le\ \min\left\{1; \frac{4}{3}\sqrt{2/e\lambda}\right\}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i - X_i^*|\mathbb{E}X_i\,. \tag{2.16}$$

В случае н.о.р.с.в. (2.15) примет вид

$$d_{TV}(W;Y) \le (1-e^{-\lambda})\mathbb{E}|X-X^*|\,.$$

Если $X_i \in \mathbf{B}(p_i)$, то $X_i^* \equiv 0$, и (2.15) влечёт (2.1).

Пример 2.1. Пусть $\{X_i\}$ имеют геометрическое распределение

$$\mathbb{P}(\xi = m) = (1-p)p^m \quad (m \in \mathbf{Z}_+).$$

Легко видеть, что $\mathbb{P}(X_i^* = m) = (m+1)p^m(1-p)^2$. Следовательно,

$$X_i^* \stackrel{d}{=} X_i + \xi, \tag{2.17}$$

где $\{X_i\}$ независимы от ξ. Тогда (2.15) влечёт

$$d_{TV}(W;Y) \le \left(1-e^{-\lambda}\right)\mathbb{E}\xi = \left(1-e^{-np/(1-p)}\right)p\Big/(1-p)\,. \tag{2.18}$$

Зависимые с.в.. Следующие две теоремы обобщают (2.1) на случай зависимых случайных величин со значениями в $\mathbf{Z}_+$. В теореме 2.7 мы считаем, что "окрестности" $\{B_a\}$ выбраны так, что с.в. $\{X_b, b \in J \setminus B_a\}$ независимы от X_a (условие "локальной зависимости"). Обозначим

$$\delta_1^* = \sum_{a\in J}\sum_{b\in B_a\setminus\{a\}} \mathbb{E}X_a\mathbb{E}X_b\,,\ \ \delta_4 = \sum_{a\in J}\mathbb{E}X_a\mathbb{E}|X_a - X_a^*|\,.$$

Теорема 2.7 *Если* $\mathcal{L}(Y) = \mathbf{\Pi}(\lambda)$ *и с.в.* $\{X_b, b \in J\setminus B_a\}$ *независимы от* X_a , *то*

$$d_{TV}(W;Y) \le \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\delta_1^* + \delta_2 + \delta_4\right)\,. \tag{2.19}$$

В теореме 2.8 не предполагается выполненым условие "локальной зависимости". Обозначим

$$\delta_5 = \sum_{a\in J}\mathbb{E}X_a(X_a-1)\mathbb{1}\{X_a \ge 2\}.$$

Теорема 2.8 *Если* $\mathcal{L}(Y) = \mathbf{\Pi}(\lambda)$, *то*

$$d_{TV}(W;Y) \le \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\Big(\delta_1+\delta_2+\delta_5\Big) + \min\{1;\sqrt{2/e\lambda}\,\}\delta_3\,. \tag{2.20}$$

2.3 Сложно-пуассоновская аппроксимация

В этом разделе изучается распределение числа

$$N_n \equiv N_n(u_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i > u_n\}$$

выходов за высокий уровень u_n, где $X, X_1, X_2, \ldots$ – стационарная последовательность с.в.. Обозначим

$$p = \mathbb{P}(X > u_n)\,.$$

Если с.в. $\{X_i\}$ независимы, то $N_n(u_n)$ имеет биномиальное распределение $\mathbf{B}(n,p)$, которое может быть аппроксимировано законом Пуассона:

$$d_{TV}(N_n(u_n); \mathbf{\Pi}(np)) \le (1 - e^{-np})p\,. \tag{2.21}$$

Зависимость может привести к образованию кластеров экстремальных значений, и чисто пуассоновская аппроксимация для $\mathcal{L}\,(N_n)$ может не иметь места. В этом разделе мы показываем, что при естественных условиях на $\{u_n\}$ и неограничительном условии перемешивания сложно-пуассоновский закон является единственным возможным предельным законом для $\mathcal{L}(N_n)$ при $p \to 0$.

2.3.1 Слабая сходимость

Последовательность уровеней $\{u_n\}$ должна удовлетворять определённым условиям, гарантирующим, что N_n имеет невырожденное предельное распределение. Типичным является предположение, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \le u_n) = e^{-\lambda} \qquad (\exists \lambda > 0)\,. \tag{2.22}$$

В теореме 2.9 мы предполагаем выполненым (2.22) и условие перемешивания $\Delta\{u_n\}$ (см. Приложение). Предположим также, что

$$\limsup_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X > u_n) < \infty\,. \tag{2.23}$$

Соотношение (2.22) не влечёт (2.23) — к примеру, рассмотрим случай $X_i \equiv X$. Денцель и О'Брайен [108] приводят пример последовательности, такой что (2.22) и условие α–перемешивания выполнены, тогда как (2.23) не выполнено. С другой стороны, (2.23) следует из (2.22), если последовательность $\{X_i, i \ge 1\}$ удовлетворяет условию φ-перемешивания.

Замечание 2.1. Если $\Delta\{u_n\}$ выполнено, то существуют последовательности $\{r_n\}$ и $\{l_n\}$, такие что

$$n \gg r_n \gg l_n \gg 1\,,\; nr_n^{-1}\alpha_n^{2/3} \to 0\,, \tag{2.24}$$

где $\alpha_n = \alpha_n(l_n, u_n)$. Действительно, можно положить $r_n = \max\left\{[n\sqrt{\alpha_n}\,]; [\sqrt{nl_n}\,]\right\}$.

Пусть $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ – последовательность н.о.р.с.в. принимающих значения в $\mathbb{N}$. $\mathcal{L}(\zeta)$ называется предельным распределением кластера, если (2.22) выполнено и

$$\mathcal{L}(N_r \mid N_r > 0) \Rightarrow \mathcal{L}(\zeta) \tag{2.25}$$

для последовательности $\{r = r_n\}$ натуральных чисел, такой что

$$n \gg r_n \gg 1\,. \tag{2.26}$$

Напомним, что символ $\mathbf{\Pi}(\lambda, \zeta)$ обозначает сложно-пуассоновское распределение с интенсивностью λ и распределением кластера $\mathcal{L}(\zeta)$: $\mathbf{\Pi}(\lambda, \zeta) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=0}^{\pi(\lambda)} \zeta_i\right)$, где $\pi(\lambda), \zeta, \zeta_1, \dots$ – независимые с.в., $\pi(\lambda) \in \mathbf{\Pi}(\lambda)$, $\zeta_i \stackrel{d}{=} \zeta$ $(i \geq 1)$ и $\zeta_0 = 0$.

Теорема 2.9 *Если (2.25) выполнено для последовательности* $\{r = r_n\}$, *удовлетворяющей (2.24), то*

$$N_n \Rightarrow \sum_{i=0}^{\pi(\lambda)} \zeta_i\,. \tag{2.27}$$

Предел в (2.27) не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$.

Если N_n *слабо сходится к с.в.* N, *то* $\mathcal{L}(N) = \mathbf{\Pi}(\lambda, \zeta)$, *где* $\lambda = -\ln \mathbb{P}(N = 0)$. *Если* $\lambda > 0$, *то (2.25) выполнено для некоторой случайной величины* ζ *и последовательности* $\{r = r_n\}$ *удовлетворяющей (2.24).*

Теорема 2.9 устанавливает, что условие (2.25) необходимо и достаточно для слабой сходимости $\mathcal{L}(N_n)$ к сложно-пуассоновскому закону. Более того, для каждого целочисленного распределения $\mathcal{L}(\zeta)$ существует стационарная последовательность $\{X_i, i \geq 1\}$, такая что (2.27) выполнено [56]. Поэтому класс предельных распределений для N_n совпадает с семейством сложно-пуассоновских распределений $\mathbf{\Pi}(\lambda, \zeta)$ с целочисленным $\mathcal{L}(\zeta)$.

Утверждение теоремы 2.9 останется в силе, если N_n заменить на

$$N_{a,b}(u_n) = \sum_{a<i/n\leq b} \mathbb{I}\{X_i > u_n\}$$

и правую часть (2.27) заменить на $\mathbf{\Pi}(\lambda(b-a), \zeta)$.

Согласно теореме 2.13, предельное распределение кластера $\mathcal{L}(\zeta)$ не зависит от выбора последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющей (2.22), (2.23) и $\Delta\{u_n\}$.

Замечание 2.2. Если последовательность $\{X_i\}$ удовлетворяет условию α-перемешивания, то условие (2.23) в теореме 2.9 может быть ослаблено до следующего:

$$np^2 + np\sqrt{\alpha(l_n)} \to 0 \tag{2.28}$$

для последовательности $\{l_n\}$ целых чисел.

Замечание 2.3. Следующее условие широко используется в теории экстремальных значений:

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}\left(X_{i+1}>u_n, X_1>u_n\right)=0 \qquad (D'\{u_n\})$$

для любой последовательности $\{r=r_n\}$, такой что $n \gg r_n \gg 1$. Отметим, что условия $(D'\{u_n\})$, (2.22) и (2.23) влекут (2.25) с $\zeta\equiv 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_r>1) &\le \mathbb{P}\Big(\bigcup_{1\le i<j\le r}\{X_i>u_n, X_j>u_n\}\Big) \\ &\le r\sum_{i=1}^{r}\mathbb{P}\left(X_{i+1}>u_n, X_1>u_n\right)=o(r/n)\,. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2.20, $\mathbb{P}(N_r>0)\sim\lambda r/n$. Следовательно, $\mathbb{P}(N_r>1|N_r>0)\to 0$, $\zeta\equiv 1$ и (2.27) влечёт $N_n\Rightarrow\pi(\lambda)$.

2.3.2 Точность сложно-пуассоновской аппроксимации

Если $X, X_1, \ldots$ – н.о.р.с.в., то N_n имеет биномиальное $\mathbf{B}(n,p)$ распределение. Согласно (2.21), $\mathcal{L}(N_n)$ может быть аппроксимировано законом Пуассона.

В случае зависимых с.в. экстремальные значения могут появляться кластерами, и естественным предельным законом для $\mathcal{L}(N_n)$ является сложно-пуассоновское распределение. Основной результ этого раздела, теорема 2.10, оценивает точность сложно-пуассоновой аппроксимации для распределения с.в. N_n.

Пусть $\{\pi,\zeta_{r,1},\ldots\}$ – независимые случайные величины, $\pi\in\mathbf{\Pi}(kq)$, $\zeta_{r,0}=0$ и

$$\mathcal{L}(\zeta_{r,i})=\mathcal{L}(N_r|N_r>0) \qquad (i\ge 1)\,,$$

где

$$q=\mathbb{P}(N_r(u)>0)\,,\ k=[n/r]\,,\ r'=n-rk\,.$$

Обозначим

$$\tilde N_n=\sum_{i=0}^{\pi}\zeta_{r,i}\,,\ d_n=d_{TV}(N_n\,;\,\tilde N_n)\,,\ d_n^+=d_G(N_n\,;\,\tilde N_n)\,.$$

Теорема 2.10 *Если* $n>r>l\ge 0$, *то*

$$d_n \le \kappa_{n,r}rp+(2kl+r')p+nr^{-1}\gamma_{n,l}\,, \qquad (2.29)$$

$$d_n^+ \le rp\min\Big\{np\,;\tfrac{4}{3}\sqrt{2np/e}\Big\}+(2kl+r')p+n\gamma_{n,l}\,, \qquad (2.30)$$

где $\kappa_{n,r}=\min\{1-e^{-np}\,;3/4e+(1-e^{-np})rp\}$ *и* $\gamma_{n,l}=\min\{4\alpha(l)\sqrt{r}\,;\beta(l)\}$.

Если случайные величины $\{X_i\}$ независимы, то (2.29) с $r = 1$, $l = 0$ влечёт (2.21).

Если случайные величины $\{X_i\}$ m-зависимы, то можно положить $l = m$, $r = \lceil \sqrt{mn}\,\rceil \equiv \min\{k : k \geq \sqrt{mn}\,\}$, и получить оценку $d_n \leq 4p\lceil \sqrt{mn}\,\rceil$.

Если $\{X_i\}$ – стационарная цепь Маркова, то при слабых ограничениях коэффициенты α и β убывают с экспоненциальной скоростью. Выбирая $r_n = [\sqrt{n \ln n}\,]$, и $l_n = [C \ln n]$ с достаточно большой константой C, получим $d_n = O\left(p\sqrt{n \ln n} + n^{-1}\right)$.

2.4 Совместное распределение количеств выходов за высокие уровени

Этот раздел посвящён задачам характеризации класса предельных распределений и оценивания точности сложно-пуассоновской аппроксимации распределения вектора количеств выходов за высокие уровени в последовательности стационарно связанных случайных величин.

Пусть даны уровни $x_1 > \ldots > x_m$. Обозначим $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ и пусть

$$N_n[a, b) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{a \geq X_i > b\} \qquad (a > b).$$

Мы будем изучать распределение вектора

$$\bar{N}_n = \Big\{N_n(x_1), N_n[x_1; x_2), \ldots, N_n[x_{m-1}; x_m)\Big\}. \tag{2.31}$$

Сначала рассматривается ситуация, когда $\mathcal{L}(\bar{N}_n)$ сходится к случайному вектору с независимые компонентами. Устанавливаются необходимые и достаточные условия слабой сходимости $\bar{N}_n$ к сложно-пуассоновскому случайному вектору с независимыми компонентами. Затем рассматривается общий случай, когда $\mathcal{L}(\bar{N}_n)$ сходится к случайному вектору с зависимые компонентами. Оценивается точность аппроксимации $\mathcal{L}(\bar{N}_n)$ многомерным сложно-пуассоновским распределением.

2.4.1 Сложно-пуассоновская аппроксимация

Пусть $\{u_n(\cdot), n \geq 1\}$ – последовательность функций на $[0; \infty)$, такая что $u_n(\cdot)$ строго убывает для всех достаточно больших n, $u_n(0) = \infty$,

$$\limsup_{n\to\infty} n\mathbb{P}(X_n > u_n(t)) < \infty \qquad (0 < t < \infty) \tag{2.32}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n(t)) = e^{-t} \qquad (t \geq 0). \tag{2.33}$$

Согласно лемме 2.20, если условие $\Delta\{u_n(t)\}$ выполнено, то (2.33) равносильно соотношению

$$\mathbb{P}(N_r(u_n(t)) > 0) \sim tr/n\,. \tag{2.34}$$

Если последовательность $\{X_i\}$ имеет экстремальный индекс $\theta > 0$ и (3.10) выполнено, то можно положить $u_n(t) = F_c^{-1}(t/n\theta)$.

Если существует предельное распределение $M_n = \max_{1\le i\le n} X_i$ с центрирующей и нормирующей последовательностями $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, т.е.,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - b_n)/a_n \le x) \to F(x)\,,$$

где F с необходимостью принадлежит к одному из трёх типов экстремальных ф.р., то (2.33) выполнено с $u_n(t) = a_n F^{-1}(e^{-t}) + b_n$.

Пусть даны $0 < t_1 < \ldots < t_m < \infty$. Обозначим

$$\bar{t} = (t_1, \ldots, t_m).$$

Ниже устанавливаются необходимые и достаточные условия слабой сходимости вектора

$$\bar{N}_n(\bar{t}\,) = \{N_n(u_n(t_1)), N_n[u_n(t_1); u_n(t_2)), \ldots, N_n[u_n(t_{m-1}); u_n(t_m))\}$$

к вектору с независимыми сложно-пуассоновскими компонентами.

Определение 2.1. *Условие $C_{\bar{t}}$ выполнено, если существуют случайная величина ζ со значениями в $\mathbb{N}$ и последовательность $\{r_n\} \in \mathcal{R}(\bar{t}\,)$, такие что*
(a) для всех $1 \le i < j \le m$,

$$\mathbb{P}(N_r[u_n(t_{i-1}); u_n(t_i)) = j) \sim \frac{r}{n}\mathbb{P}(\zeta = j)(t_i - t_{i-1}),$$

(b) для всех $t_i < t_j \subset \{t_1, \ldots, t_m\}$,

$$\mathbb{P}(N_r(u_n(t_i)) > 0, N_r[u_n(t_i); u_n(t_j)) > 0) = o(r/n)\,. \tag{2.35}$$

Условие $C_{\bar{t}}$ необходимо и достаточно для слабой сходимости $\bar{N}_n(\bar{t}\,)$ к вектору с независимыми сложно-пуассоновскими компонентами.

Определение 2.2. *Условие C выполнено, если $C_{\bar{t}}$ справедливо для любых $0 < t_1 < \ldots < t_m < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ с одним и тем же $\mathcal{L}(\zeta)$.*

Пусть $\{\pi(s), s \ge 0\,\}$ – пуассоновский процесс с параметром интенсивности 1, и пусть $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ – последовательность н.о.р.с.в. со значениями в $\mathbb{N}$. Обозначим

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{\pi(t)} \zeta_j\,,\ Q(\bar{t}\,) = \{Q(t_1), \ldots, Q(t_m)\}\,.$$

Отметим, что $\{Q(t), t \geq 0\}$ есть сложно-пуассоновский скачкообразный процесс. Иными словами,

$$N(B) := \int_B Q(dt)$$

есть сложно-пуассоновский точечный процесс с Лебеговой мерой интенсивности и распределением кластера $\mathcal{L}(\zeta)$. Следовательно,

$$\bar{Q}(\bar{t}\,) = \{Q(t_1), Q(t_2) - Q(t_1), \ldots, Q(t_m) - Q(t_{m-1})\}$$

есть случайный вектор с независимыми сложно-пуассоновскими компонентами.

Теорема 2.11 *Предположим, что условие* $\Delta(\{u_n(\bar{t}\,)\})$. *Тогда*

$$\bar{N}_n(\bar{t}\,) \Rightarrow \bar{Q}(\bar{t}\,), \tag{2.36}$$

если и только если условие $C_{\bar{t}}$ *выполнено.*

Выборочные экстремумы. Пусть $0 < s < t$. Для совместного предельного распределения $X_{1,n}$ и k-го выборочного максимума $X_{k,n}$ может быть получено следующее следствие теоремы 2.11: если выполнены условия $C_{\bar{t}}$ и $\Delta(\{u_n(\bar{t}\,)\})$, то

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{1,n} \leq u_n(s),\ X_{k,n} \leq u_n(t)) \qquad (2.37)\\ &= e^{-t}\left\{1 + \sum_{j=1}^{k-1}(t-s)^j\, \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{j}\zeta_i < k\right)\Big/ j!\right\} \qquad (k \geq 2)\,. \end{aligned}$$

В частности,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{1,n} \leq u_n(s), X_{2,n} \leq u_n(t)) = e^{-t}\left(1 + (t-s)\mathbb{P}(\zeta = 1)\right)\,.$$

Аналогично, если $0 < q < s < t$, то теорема 2.11 влечёт

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{1,n} \leq u_n(q), X_{2,n} \leq u_n(s), X_{3,n} \leq u_n(t)) \qquad (2.38)\\ &\quad = e^{-t}\big\{1 + (t-q)\mathbb{P}(\zeta = 1) + (t-s)^2\mathbb{P}^2(\zeta = 1)/2\\ &\quad + (t-s)(s-q)\mathbb{P}^2(\zeta = 1) + (t-s)\mathbb{P}(\zeta = 2)\big\}\,. \end{aligned}$$

2.4.2 Общий случай

В этом разделе мы рассматриваем ситуацию, когда слабый предел вектора $\bar{N}_n(\bar{t}\,)$ может иметь зависимые компоненты. Описывается совместное предельное распределение количеств превышений уровня $u_n(t_i)$, $1 \leq i \leq m$.

Заметим, что слабая сходимость выборочного максимума $X_{1,n}$ не влечёт в общем случае слабую сходимость вектора $(N_n(u_n(s)), N_n(u_n(t)))$: у Мори [243] есть пример стационарной последовательности 1-зависимых с.в., такой что (2.33) выполнено, в то время как случайный вектор $(X_{1,n}, X_{2,n})$ не сходится.

Условие C соответствует "регулярному" типу "слипания" экстремальных значений в кластере. В отсутствие условия C ситуация становится более сложной. Рассмотрим, к примеру, задачу нахождения совместного предельного распределения первого и второго выборочного максимума в выборке зависимых с.в..

Пусть $\mathbf{C}^*$ – класс вогнутых невозрастающих функций $f : [0;1] \to [0;1]$, таких что $(1-s)f(0) \le f(s) \le 1-s$. Если существует предельное распределение вектора $(X_{1,n}, X_{2,n})$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_{1,n} \le u_n(s),\, X_{2,n} \le u_n(t)\right) = e^{-t}\left(1 + tf(s/t)\right), \tag{2.39}$$

где $f \in \mathbf{C}^*$ (Вэлш [410] и Мори [243]). Если условие C выполнено, то

$$f(x) = (1-x)\mathbb{P}(\zeta = 1),$$

и (2.39) совпадает с (2.37).

Предположим, что выполнено условие перемешивания $\Delta(\{u_n(s), u_n(t)\})$. Тогда (2.39) выполнено если и только если

$$\mathbb{P}(N_r(u_n(s)) = 0,\, N_r(u_n(t)) = 1) \sim tf(s/t)r/n \qquad (s < t)$$

для последовательности $\{r = r_n\}$, такой что $n \gg r_n \gg 1$ [270], где

$$f(s) = \mathbb{P}(\zeta = 1) \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(N_r(u_n(s)) = 0 | N_r(u_n(1)) = 1) \tag{2.40}$$

при $s \in [0;1]$. Очевидно, что $f(0) = \mathbb{P}(\zeta = 1)$. Если условие $\Delta(\{u_n(s), u_n(1)\})$ выполнено для любого $s \in (0;1]$, то функция f абсолютно непрерывна [269].

Необходимые и достаточные условия для слабой сходимости вектора $\{X_{1,n}, X_{k,n}\}$ получены Хсином [176]. Достаточные условия для слабой сходимости вектора $\{N_n(u_n(s)), N_n(u_n(t))\}$ приведены в [269].

В этом разделе мы считаем выполненым условие $\Delta\{u_n(\bar{t}\,)\}$, где

$$u_n(\bar{t}\,) = (u_n(t_1), \ldots, u_n(t_m));$$

класс $\mathcal{R}(\bar{t}\,)$ определён в Приложении.

Определение 2.3. *Случайный вектор Y имеет многомерное сложно-пуассоновское распределение $\mathbf{\Pi}(\lambda, \mathcal{L}(X))$, если*

$$Y \stackrel{d}{=} X_0 + \ldots + X_{\pi(t)}\,,$$

где $X_0 = 0$, $\pi(t) \in \mathbf{\Pi}(t)$ не зависит от $\{X_i, i \ge 1\}$, случайные векторы $\{X_i\}$ независимы и $X_i \stackrel{d}{=} X$ для всех $i \ge 1$.

Положим

$$N_n(a,t) = \sum_{1\le i\le a} \mathbb{I}\{X_i > u_n(t)\}\,,\ N_n(a,\bar t) = (N_n(a,t_1),\ldots,N_n(a,t_m))\ .$$

Утверждение 2.12 устанавливает достаточное условие для слабой сходимости $N_n(sn,\bar t\,)$ к многомерному сложно-пуассоновскому распределению.

Обозначим через

$$\zeta(\bar t\,,n) = \big(\zeta^{(1)}(\bar t\,,n),\ldots,\zeta^{(m)}(\bar t\,,n)\big) \tag{2.41}$$

случайный вектор с распределением

$$\mathcal{L}\left(N_n(r,\bar t\,)\,|\,N_r(u_n(t_m)) > 0\right). \tag{2.42}$$

Утверждение 2.12 *Предположим, что условие $\Delta\{u_n(\bar t\,)\}$ выполнено. Если*

$$\zeta(\bar t\,,n) \Rightarrow \exists\zeta(\bar t\,) \tag{2.43}$$

для некоторой последовательности $\{r\}\in\mathcal{R}(\bar t\,)$, то

$$N_n(sn,\bar t\,) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\pi(st_m)} \zeta_j(\bar t\,) \qquad (\forall s>0)\,, \tag{2.44}$$

где $\{\zeta_j(\bar t\,), j\ge 1\}$ – независимые копии $\zeta(\bar t\,)$.

Следующий результат дополняет утверждение 2.12.

Теорема 2.13 *Предположим, что выполнено условие $\Delta\{u_n(\bar t\,)\}$. Если $N_n(n,\bar t\,)$ слабо сходится, то (2.43) выполнено для всякой последовательности $\{r\}\in\mathcal{R}(\bar t\,)$. Распределение случайного вектора $\zeta(\bar t\,) = \{\zeta^1(\bar t\,),\ldots,\zeta^m(\bar t\,)\}$ инвариантно относительно изменения масштаба:*

$$\zeta(\bar t\,) \stackrel{d}{=} \zeta(a\bar t\,) \qquad (\forall a>0) \tag{2.45}$$

и не зависит от выбора последовательности $\{r\}\in\mathcal{R}(\bar t\,)$. Маргинальные распределения $\zeta(\bar t\,)$ удовлетворяют формуле (2.48). Слабый предел $N_n(n,\bar t\,)$ является сложно-пуассоновским случайным вектором:

$$N_n(sn,\sigma\bar t\,) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\pi(s\sigma t_m)} \zeta_j(\bar t\,) \qquad\qquad (s>0,\,\sigma>0)\,. \tag{2.46}$$

Отметим, что векторы

$$N_n(sn, \bar{t}\,) \;\; \text{и} \;\; N_n(n, s\bar{t}\,)$$

имеют одно и то же предельное распределение.

Пусть ζ – с.в. с распределением (2.25), и пусть $\{\zeta_i\}$ – независимые копии ζ. Для любой $a \in (0;1]$ обозначим через $Z(a)$ случайную величину с распределением

$$\mathbb{P}(Z(a)=0) = 1-a\,, \;\; \mathbb{P}(Z(a)=i) = a\mathbb{P}(\zeta=i) \qquad (i \geq 1)\,.$$

Заметим, что

$$Z(a) \stackrel{d}{=} \zeta\xi(a)\,, \tag{2.47}$$

где $\xi(a)$ не зависит от ζ и имеет распределение Бернулли $\mathbf{B}(a)$.

Маргинальные распределения вектора $\zeta(\bar{t}\,)$ являются функционалами от $\mathcal{L}(\zeta)$ и t_l/t_m :

$$\zeta^l(\bar{t}\,) \stackrel{d}{=} Z(t_l/t_m)\,. \tag{2.48}$$

В частности, отсюда следует, что предельное распределение размера кластера ζ в предельной теореме (2.27) не зависит от λ.

В качестве приложения теоремы 2.13 рассмотрим задачу аппроксимации распределения случайной величины

$$\nu_n(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{u_n(t_1) \geq X_i > u_n(t_2)\}.$$

Эта задача возникает, к примеру, в страховом деле, когда изучается распределение числа страховых выплат, размеры которых варьируются в заданном интервале.

Предположим, что условия теоремы 2.13 выполнены, и пусть $\bar{t} = (t_1,t_2)$. Если $N_n(\bar{t}\,)$ слабо сходится, то (2.46) влечёт

$$\nu_n(t_1,t_2) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\pi(t_2)} Y_i\,, \tag{2.49}$$

где $\{Y_i\}$ – независимые копии $\zeta^2(\bar{t}\,) - \zeta^1(\bar{t}\,)$, то есть предельное распределение $\nu_n(t_1,t_2)$ является с необходимостью сложно-пуассоновским.

2.4.3 Точность аппроксимации

В этом разделе изучается точность многомерной пуассоновской и сложно-пуассоновской аппроксимации распределения вектора чисел выходов за высокие уровни.

1. Вопрос хорошо изучен, если случайные величины $\{X_i\}$ независимы. Пусть $x_1 > \ldots > x_m$ – последовательность уровней, случайный вектор $\bar{N}_n$ определен в (2.31). Заметим, что

$$\bar{N}_n = \bar{\xi}_1 + \ldots + \bar{\xi}_n \,, \tag{2.50}$$

где

$$\bar{\xi}_i = (\mathbb{1}\{X_i > x_1\}, \mathbb{1}\{x_1 \ge X_i > x_2\}, \ldots, \mathbb{1}\{x_{m-1} \ge X_i > x_m\}) \,.$$

Очевидно, $\bar{N}_n$ имеет мультиномиальное распределение $\mathbf{B}(n, p_1, \ldots, p_m)$, где

$$p_1 = \mathbb{P}(X > x_1), p_2 = \mathbb{P}(x_1 \ge X > x_2), \ldots, p_m = \mathbb{P}(x_{m-1} \ge X > x_m) \,.$$

А именно,

$$\mathbb{P}\left(\bar{N}_n = (l_1, .., l_m)\right) = \frac{n!}{l_1! \ldots l_m!(n-l)!} p_1^{l_1} \ldots p_m^{l_m} (1-p)^{n-l} \,,$$

где $l = l_1 + \ldots + l_m \le n, \; p = p_1 + \ldots + p_m$.

Любой вектор с мультиномиальным распределением может быть представлен как сумма (2.50), где $\bar{\xi}, \bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n$ – н.о.р. случайные векторы с распределением

$$\mathbb{P}(\bar{\xi} = \bar{0}) = 1 - p \,, \; \mathbb{P}(\bar{\xi} = \bar{e}_j) = p_j \qquad (1 \le j \le m),$$

$p = p_1 + \ldots + p_m$, вектор $\bar{e}_j$ имеет j-ю координату $=1$ и прочие координаты $=0$.

Мультиномиальное распределение может быть аппроксимировано многомерным пуассоновским распределением.

Пусть $\bar{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ – вектор, компонентами которого являются независимые пуассоновые с.в. с параметрами $np_1, \ldots, np_m$. Известно следующее

Утверждение 2.14 [100] *Если $\bar{N}_n$ – случайный вектор с мультиномиальным распределением $\mathbf{B}(n, p_1, \ldots, p_m)$, то*

$$d_{TV}(\bar{N}_n; \bar{\pi}) = d_{TV}(\mathbf{B}(n, p); \mathbf{\Pi}(np)). \tag{2.51}$$

Из (2.51) и (2.1) выводим

$$d_{TV}(\bar{N}_n; \bar{\pi}) \le \left(1 - e^{-np}\right) p \,. \tag{2.52}$$

Обозначим $g(x) = 2\sum_{j\ge 2} x^{j-2}(j-1)/j!$, и пусть

$$\gamma_n = pg(2p) \min\{1/2\sqrt{2}\,; np\}.$$

Заметим, что $g(x) \to 1$ при $x \to 0$. Роос [342] показал, что

$$d_{TV}(\bar{N}_n; \bar{\pi}) \le \gamma_n / (1 - 2e\gamma_n) \tag{2.53}$$

если $\gamma_n < 1/(1+2e)$.

Используя (2.51) и (2.4), получим

$$d_{TV}(\bar N_n; \bar\pi) \le 3p/4e + 4(1 - e^{-np})p^2\,, \tag{2.52*}$$

что при малых p точнее (2.53).

2. Точность сложно-пуассоновской аппроксимации $\mathcal{L}(\bar N_n)$.

Пусть $\bar\zeta, \bar\zeta_1, \bar\zeta_2, \dots$ – независимые случайные векторы с распределением

$$\mathcal{L}(\bar\zeta) = \mathcal{L}(\bar N_r | N_r(x_m) > 0)\,,$$

где $r \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим $\alpha(l) = \alpha(l, \{u_1, \dots, u_m\})$, $\beta(l) = \beta(l, \{u_1, \dots, u_m\})$,

$$q = \mathbb{P}(N_r(u_m) > 0)\,,\ k = [n/r]\,,\ r' = n - rk\,,$$

и пусть π – пуассоновая случайная величина с параметром kq. Распределение $\bar N_n$ может быть аппроксимировано многомерным сложно-пуассоновским распределением $\mathbf{\Pi}(kq, \mathcal{L}(\bar\zeta))$.

Теорема 2.15 *Если* $n > r > l \ge 0$ *и* $\bar Y \in \mathbf{\Pi}(kq, \mathcal{L}(\bar\zeta))$, *то*

$$d_{TV}\big(\bar N_n; \bar Y\big) \le (1 - e^{-np})rp + (2nr^{-1}l + r')p + nr^{-1}\min\{\beta(l); \kappa(l)\}\,, \tag{2.54}$$

где $\kappa(l) = 2(1 + 2/m)\left(2^{m-1}m^2\alpha^2(l)\right)^{1/(2+m)}$ *если* $m2^{(m-1)/2}\alpha(l) \le 1$, *иначе* $\kappa(l) = 1$.

В теореме 2.15 слагаемое $(1 - e^{-np})rp$ в (2.54) может быть заменено на любую другую оценку $d_{TV}(\mathbf{B}(n,p); \mathbf{\Pi}(np))$.

Если случайные величины $\{X_i\}$ независимы и $m = 1$, то (2.54) с $l = 0, r = 1$ совпадает с (2.1).

Следующее следствие обобщает (2.52) на случай l-зависимых случайных векторов. Пусть $\bar\zeta$ – случайный вектор с распределением

$$\mathcal{L}(\bar\zeta) = \mathcal{L}(\bar N_l | \bar N_l \ne 0)\,.$$

Следствие 2.16 *Если случайные векторы* $\{X_i\}$ l*-зависимы и* $l < r < n$, *то*

$$d_{TV}(\mathcal{L}(\bar N_n); \mathbf{\Pi}(kq, \bar\zeta)) \le (1 - e^{-np})rp + (r + 2nl/r)p\,. \tag{2.55}$$

Если $r \asymp \sqrt{n}$, то правая часть (2.55) есть $O(p\sqrt{n}\,)$.

При выводе оценок точности сложно-пуассоновской аппроксимации для распределения вектора количеств выходов за высокий уровень используется полученное в лемме 2.17 обобщение на многомерный случай теоремы Бредли о задании независимой копии случайного вектора на одном вероятностном пространстве.

Пусть (X, Y) – случайный вектор, принимающие значения в $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, и пусть α, β, φ и ρ – коэффициенты перемешивания, соответствующие σ-алгебрам $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$. Для любого $v \in \mathbb{R}^m$ положим $|v| = \max_{i \le m} |v_i|$.

Лемма 2.17 *Случайные векторы* X, Y *и* $\hat{Y}$ *можно задать на ОВП таким образом, что* $\hat{Y}$ *не зависит от* X , $\hat{Y} \stackrel{d}{=} Y$ *и* $(y > 0, K \in \mathbb{N})$

$$\mathbb{P}\left(|\hat{Y} - Y| > y\right) \leq 2^{(m+3)/2} K^{m/2} \alpha + 2\mathbb{P}(|Y| > Ky) . \tag{2.56}$$

Если $c_b = \mathbb{E}^{1/b}|Y|^b < \infty$ и $b(c_b/y)^b \geq m2^{(m-1)/2}\alpha$, то из (2.56) и неравенства Чебышева выводим:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{Y} - Y| > y\right) \leq 2\left(1 + \frac{2b}{m}\right)\left[\left(\frac{2^{\frac{m-1}{2}} m}{b}\right)^{2b}\left(\frac{c_b}{y}\right)^{bm} \alpha^{2b}\right]^{\frac{1}{2b+m}} . \tag{2.57}$$

Если $c \equiv \operatorname{ess\,sup}|Y| < \infty$, то из (2.56) следует

$$\mathbb{P}(|\hat{Y} - Y| > y) \leq 2^{(m+3)/2} (c/y)^{m/2} \alpha \,,$$
$$\mathbb{E}|\hat{Y} - Y| \leq 2^{(m+3)/2} K^{m/2} c\alpha + 2\mathbb{E}|Y|/K \,.$$

2.5 Доказательства

Доказательство теоремы 2.1. Обозначим $\nabla f(\cdot) = f(\cdot) - f(\cdot - 1)$. Согласно лемме 3 в [344],

$$\|\nabla^2 \mathbb{P}(Y = \cdot)\|_1 \leq 3/e\lambda. \tag{2.58}$$

Заметим, что $\sum_k \nabla^2 \mathbb{P}(Y = k) = 0$. Поэтому $\|\nabla^2 \mathbb{P}(Y = \cdot)\|_1 = 2\nabla^2 \mathbb{P}(Y \in B)$, где $B = \{k : \nabla^2 \mathbb{P}(Y = k) > 0\} = \{k : k_1 < k < k_2\}$,

$$k_1 = \lambda + 1/2 - \sqrt{\lambda + 1/4}\,, \;\; k_2 = \lambda + 1/2 + \sqrt{\lambda + 1/4} \tag{2.59}$$

(см. также Деовельс & Пфайфер [99]). Поскольку $Q_\lambda(A) = \nabla^2 \mathbb{P}(Y \in A)/2$, имеем

$$|Q_\lambda(A)| \leq 3/4e\lambda \qquad (A \subset \mathbf{Z}_+).$$

Из этого соотношения и (2.6) следует (2.4).

Если $\lambda \leq 3 - \sqrt{3}$, то $B = [1; 2]$, и $d_{TV}(Y+1; Y^\star) = \sum_{k=1}^{2} [\mathbb{P}(Y+1 = k) - \mathbb{P}(Y^\star = k)] \leq \lambda$. Если $\lambda \to 1$, то $d_{TV}(Y+1; Y^\star) \to 3/2e$ (здесь "$\to$" можно заменить на "$=$", если $\lambda = 1$). □

Доказательство теоремы 2.3. Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_A(W+1) - \lambda^{-1} W g_A(W)] &= \lambda^{-1} \sum_i p_i \mathbb{E}[g_A(W+1) - g_A(W_i+1)] \\ &= \lambda^{-1} \sum_i p_i^2 \mathbb{E}[g_A(W_i+2) - g_A(W_i+1)] \,. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Согласно (2.60),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g_A(W+1) - \lambda^{-1} W g_A(W)] &= \lambda^{-1}\sum_i p_i^2 \mathbb{E}\Delta g_A(W_i+1)\\ &= \theta\mathbb{E}\Delta g_A(Y+1) + \varepsilon' + \varepsilon'',\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon' &= \lambda^{-1}\sum_i p_i^2 \mathbb{E}[\Delta g_A(W_i+1) - \Delta g_A(W+1)],\\ \varepsilon'' &= \theta\mathbb{E}[\Delta g_A(W+1) - \Delta g_A(Y+1)].\end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon' = \lambda^{-1}\sum_i p_i^2 \mathbb{E}X_i[\Delta g_A(W_i+1) - \Delta g_A(W_i+2)]$, имеем

$$|\varepsilon'| \le 2\|\Delta g_A\| \sum_i p_i^3/\lambda\,.$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[\Delta g_A(W_i+1) - \Delta g_A(W_i+2)] = \sum_k \Delta g_A(k+1)[\mathbb{P}(W_i{=}k) - \mathbb{P}(W_i{=}k-1)]\\ &\le 2\|\Delta g_A\| d_{TV}(W_i;W_i+1) \le 2(1-e^{-\lambda})\left(d_{TV}(\pi_i;\pi_i+1) + 2d_{TV}(W_i;\pi_i)\right),\end{aligned}$$

где $\mathcal{L}(\pi_i) = \mathbf{\Pi}(\lambda - p_i)$. Используя формулу Стирлинга, в [25] показано, что

$$d_{TV}(X;X+1) = \mathbb{P}(X=[\nu]) < 1/\sqrt{2\pi[\nu]}\,, \qquad (2.61)$$

если $\mathcal{L}(X) = \mathbf{\Pi}(\nu)$. Поэтому

$$\varepsilon' \le 2\delta^* \left(1/\sqrt{2\pi[\lambda - p_n^*]} + 2\delta/(1-p_n^*/\lambda)\right).$$

Обозначим

$$g^*(i) = \Delta g_A(i+1)/\|\Delta g_A\|.$$

Тогда $\varepsilon'' = \theta\|\Delta g_A\|\mathbb{E}\left(g^*(W) - g^*(X)\right)$. Применение (2.1) влечёт $|\mathbb{E}g^*(W) - \mathbb{E}g^*(X)| \le 2\delta$. Следовательно, $|\varepsilon''| \le 2\delta^2$. Объединяя эти оценки и (2.8), получим (2.6).

По определению,

$$d_{TV}(Y^\star;Y+1) = \sum_{k_1<k<k_2} \left(\mathbb{P}(Y+1=k) - \mathbb{P}(Y^\star=k)\right),$$

где k_1, k_2 определены в (2.59). Поскольку

$$\mathbb{P}(Y^\star{=}k) = \mathbb{P}(Y{=}k)\left(k(k-1) + k(1-2\lambda) + \lambda^2\right)/\lambda,$$

имеем

$$\mathbb{P}(Y^\star{=}k) = \lambda\mathbb{P}(Y+2=k) + \lambda\mathbb{P}(Y=k) + (1-2\lambda)\mathbb{P}(Y+1=k).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
& d_{TV}(Y^\star; Y+1)/\lambda \\
= \; & 2\mathbb{P}(k_1-1<Y<k_2-1) - \mathbb{P}(k_1-2<Y<k_2-2) - \mathbb{P}(k_1<Y<k_2) \\
= \; & \mathbb{P}(k_2-2\le Y<k_2-1) - \mathbb{P}(k_2-1\le Y<k_2) \\
- \; & \mathbb{P}(k_1-2<Y\le k_1-1) + \mathbb{P}(k_1-1<Y\le k_1)\,.
\end{aligned}$$

Для любого $m \in \mathbf{Z}_+$, используя формулу Стирлинга, имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=[k_1]-m)\sqrt{2\pi e\lambda} &= 1 + (c_1-m)/\sqrt{\lambda} + O\left(1/\lambda\right), \\
\mathbb{P}(Y=[k_2]-m)\sqrt{2\pi e\lambda} &= 1 + (c_2+m)/\sqrt{\lambda} + O\left(1/\lambda\right),
\end{aligned}$$

если $\lambda \to \infty$, откуда

$$d_{TV}(Y^\star; Y+1) = \sqrt{2/\pi e} + O\big(1/\sqrt{\lambda}\big) \qquad (\lambda \to \infty). \tag{2.62}$$

Теперь (2.7) следует из (2.6). □

Доказательство теоремы 2.4. Обозначим

$$p_a = \mathbb{E}X_a\,,\ W_a = W - X_a\,,\ V_a = \sum_{b\in J\setminus B_a} X_b\,.$$

Оценим $|\mathbb{E}g_A(W+1) - \lambda^{-1}\mathbb{E}Wg_A(W)|$, где функция g_A определена в (6.49).

Легко видеть, что

$$\mathbb{E}Wg_A(W) = \sum_a \mathbb{E}X_a g_A(W_a+1) = \sum_a \mathbb{E}X_a g_A(V_a+1) + I\,,$$

где $I = \sum_a \mathbb{E}X_a[g_A(W_a+1) - g_A(V_a+1)]$. Заметим, что

$$|g(x)-g(y)| \le |x-y|\|\Delta g\| \qquad (x,y\in\mathbf{Z}_+) \tag{2.63}$$

для любой функции g. Это соотношение и (6.48) влекут

$$|I| \le \|\Delta g_A\| \sum_a \mathbb{E}X_a|W_a - V_a| = \|\Delta g_A\|\delta_2 \le (1-e^{-\lambda})\delta_2\,.$$

Ввиду (2.63),

$$\begin{aligned}
& \Big|\sum_a p_a[\mathbb{E}g_A(W+1) - \mathbb{E}g_A(V_a+1)]\Big| \\
\le \; & \|\Delta g_A\| \sum_a p_a \mathbb{E}|W-V_a| \le \|\Delta g_A\|\delta_1 \le (1-e^{-\lambda})\delta_1\,.
\end{aligned}$$

Используя (6.47) и (6.51), выводим

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-1}\Big|\sum_a [p_a \mathbb{E} g_A(V_a{+}1) - \mathbb{E} X_a g_A(V_a{+}1)]\Big| \\
= \ &\lambda^{-1}\Big|\sum_a \mathbb{E} g_A(V_a{+}1)[p_a - \mathbb{E}\{X_a|V_a\}]\Big| \le \|g_A\|\delta_3/\lambda \le \min\{\lambda; \sqrt{2\lambda/e}\,\}\delta_3/\lambda\,.
\end{aligned}$$

Результ следует. □

Доказательство утверждения 2.6. Пусть g_A определена в (6.49), где с.в. X заменена на Y, и положим $W_i = W - X_i$. Отметим, что

$$\mathbb{E} X h(X) = \mathbb{E} X \mathbb{E} h(X^* + 1) \qquad (2.64)$$

для любой функции h, такой что $\mathbb{E}|Xh(X)| < \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned}
\lambda \mathbb{E} g_A(W{+}1) - \mathbb{E} W g_A(W) &= \lambda \mathbb{E} g_A(W{+}1) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i g_A(W_i{+}X_i) \\
&= \lambda \mathbb{E} g_A(W{+}1) - \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i \mathbb{E} g_A(W_i{+}X_i^*{+}1) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} X_i \left[\mathbb{E} g_A(W{+}1) - \mathbb{E} g_A(W_i{+}X_i^*{+}1)\right]\,.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\lambda \mathbb{E} g_A(W{+}1) - \mathbb{E} W g_A(W)| \le \|\Delta g_A\| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i - X_i^*| \mathbb{E} X_i\,.$$

Принимая во внимание (6.48), получим (2.15). Применяя (6.52), приходим к (2.16). □

Доказательство теоремы 2.7. Мы используем обозначения из доказательства теоремы 2.4. Тогда

$$\mathbb{E} W g_A(W) = \sum_a \mathbb{E} X_a g_A(V_a{+}X_a) + I^*\,,$$

где $I^* = \sum_a \mathbb{E} X_a [g_A(W_a{+}X_a) - g_A(V_a{+}X_a)]$. Ввиду (2.63),

$$|I^*| \le \|\Delta g_A\| \sum_a \mathbb{E} X_a |W_a - V_a| \le \|\Delta g_A\| \delta_2\,.$$

Аналогично,

$$\Big|\lambda \mathbb{E} g_A(W{+}1) - \sum_a \mathbb{E} X_a \mathbb{E} g_A(V_a{+}X_a{+}1)\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_a \mathbb{E}X_a \mathbb{E}\Big[g_A(W+1) - g_A(V_a+X_a+1)\Big] \right| \\
&\le \|\Delta g_A\| \sum_a \mathbb{E}X_a \mathbb{E}|W_a - V_a| \le \|\Delta g_A\| \delta_1^* .
\end{aligned}
$$

По предположению, V_a не зависит от X_a. Поэтому

$$
\mathbb{E}X_a g_A(V_a+X_a) = \mathbb{E}X_a \mathbb{E}g_A(V_a+X_a^*+1) .
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
& \left| \sum_a \mathbb{E}X_a \mathbb{E}g_A(V_a+X_a+1) - \sum_a \mathbb{E}X_a g_A(V_a+X_a) \right| \\
= & \left| \sum_a \mathbb{E}X_a \mathbb{E}\Big[g_A(V_a+X_a+1) - g_A(V_a+X_a^*+1)\Big] \right| \\
\le & \ \|\Delta g_A\| \sum_a \mathbb{E}X_a \mathbb{E}|X_a - X_a^*| .
\end{aligned}
$$

Объединяя эти оценки, получим (2.19). □

Доказательство теоремы 2.8 проводится аналогично доказательству теоремы 2.7. Сначала мы проверяем, что

$$
\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E}W g_A(W) - \sum_a \mathbb{E}X_a g_A(W_a+1) \right| \\
= & \left| \sum_a \mathbb{E}X_a g_A(W_a+X_a) - \sum_a \mathbb{E}X_a g_A(W_a+1) \right| \le \|\Delta g_A\| \delta_5 .
\end{aligned}
$$

Затем замечаем, что

$$
\left| \sum_a \mathbb{E}X_a [g_A(W_a+1) - g_A(V_a+1)] \right| \le \|\Delta g_A\| \delta_2 ,
$$

$$
\left| \lambda \mathbb{E}g_A(W+1) - \sum_a \mathbb{E}X_a \mathbb{E}g_A(V_a+1) \right| \le \|\Delta g_A\| \delta_1
$$

и

$$
\begin{aligned}
& \left| \sum_a [\mathbb{E}X_a \mathbb{E}g_A(V_a+1) - \mathbb{E}X_a g_A(V_a+1)] \right| \\
= & \left| \sum_a \mathbb{E}g_A(V_a+1)[\mathbb{E}X_a - \mathbb{E}\{X_a|V_a\}] \right| \le \|g_A\| \delta_3 .
\end{aligned}
$$

Доказательство завершено. □

Утверждение 2.18 *Справедлива оценка*

$$\sup_{0\le p\le 1}\left|(1-p)^n-e^{-np}\right|\le \frac{2}{ne^2}(1+O(1/n))\,. \tag{2.65}$$

Доказательство утверждения 2.18. Если $p>1/2$, то $(1-p)^n\le e^{-np}\le e^{-n/2}$ и

$$|(1-p)-e^{-p}|<1/2\sqrt{e}\,.$$

Предположим, что $p\in[0;1/2]$. Ввиду (6.59) и (6.61),

$$\left|(1-p)^n-e^{-np}\right|\le n|p+\ln(1-p)|e^{-np}\le f(np)/2n\,,$$

где $f(z)=z^2e^{-z}(1-z/n)^{-2}$.

Если $n<8$, то $f'>0$ и $\max\limits_{0\le z\le n/2}f(z)=f(n/2)=n^2e^{-n/2}$. Если $n\ge 8$, то

$$\max_{0\le z\le n/2}f(z)=4e^{-2}(1+O(1/n))\,.$$

Объединяя эти оценки, получим ч.т.д.. □

Утверждение 2.19 *Пусть* $Y\in\mathbf{\Pi}(n\nu)$, *где* $\nu=-\ln(1-p)$. *Если* $A\subset[0;K]$ *и* $K\le n$, *то*

$$\Delta_n(A)\le\frac{\nu}{2}\sum_{k=1}^{K}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}kp^k\,, \tag{2.66}$$

где $\Delta_n(A)=|\mathbb{P}(W\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)|$.

Доказательство утверждения 2.19. Пусть $Y_1,\dots,Y_n$ – независимые пуассоновые $\mathbf{\Pi}(\nu)$ с.в.. Определим

$$X_i=\mathbb{I}\{Y_i>0\}\,,\ S_k=\sum_{i=1}^{k}Y_i\,.$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}(W\in A)-\mathbb{P}(Y\in A)=\mathbb{P}(W\in A,W\ne Y)-\mathbb{P}(Y\in A,Y\ne W)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W\in A,W\ne Y) &\le \sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(W=k,W\ne Y)\\
&= \sum_{k=1}^{K}\binom{n}{k}\mathbb{P}\left(\prod_{l=1}^{k}X_l=1,X_j=0\ (j>k),S_k>k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{K}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\mathbb{P}\left(\prod_{l=1}^{k}X_l=1,\exists i\le k:X_i\ne Y_i\right)\\
&\le \sum_{k=1}^{K}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}kp^{k-1}\mathbb{P}(Y_1>1)\,.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что
$$1-(1+x)e^{-x} \le x(1-e^{-x})/2\,. \tag{2.67}$$
Из (2.67) следует, что $\mathbb{P}(Y_1>1) \le p\nu/2$. Поэтому
$$\mathbb{P}(W\in A, W\ne Y) \le \frac{\nu}{2}\sum_{k=1}^{K}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}kp^k\,.$$

Аналогично,
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y\in A, Y\ne W) = \sum_{k=1}^{K}\mathbb{P}(W=k, Y\in A, Y\ne W)\\
&= \sum_{k=1}^{K-1}\binom{n}{k}\mathbb{P}\biggl(\prod_{l=1}^{k}X_l=1, X_j=0\ (j>k), S_k\in A, S_k>k\biggr)\\
&\le \sum_{k=1}^{K-1}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}\mathbb{P}\biggl(\prod_{l=1}^{k}X_l=1, S_k>k\biggr) \le \frac{\nu}{2}\sum_{k=1}^{K-1}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k}kp^k\,.
\end{aligned}$$

Результ следует. □

Доказательство теоремы 2.2. Заметим, что
$$\sup_{p\ge 0}(np)^k e^{-np} = k^k e^{-k}\,.$$

Из этого соотношения и (2.66) выводим
$$\sup_{0\le p\le 1}\Delta_n(A) \le c_K/(n-K) \qquad (n>K+1),$$
где $c_K=\sum_{k=1}^{K}\frac{(k+1)^{k+1}}{2(k-1)!}\left(1+\frac{k+1}{n-k-1}\right)^{k+1}e^{-k-1} \le C_K\,.$ □

Лемма 2.20 *Предположим, что выполнены (2.23) и условие перемешивания $\Delta\{u_n\}$. Тогда (2.22) выполнено, если и только если*
$$\mathbb{P}(N_r>0) \sim \lambda r/n \tag{2.68}$$
для последовательности $\{r=r_n\}$, удовлетворяюшей (2.24).

Доказательство леммы 2.20. Если $r\equiv r_n$ удовлетворяет (2.24) и (2.23) выполнено, то $rp\to 0$ и теорема 2.10 влечёт
$$\mathbb{P}(M_n\le u_n) = \mathbb{P}\left(N_n=0\right) = \exp\Bigl(-nr^{-1}\mathbb{P}(N_r>0)\Bigr)+o(1)\,.$$

Следовательно, (2.22) $\Leftrightarrow$ (2.68). $\square$

Доказательство теоремы 2.9. Пусть $\{r = r_n\}$ – последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих (2.24). Легко проверить, что

$$|\mathbb{E}e^{isN_n} - \mathbb{E}^k e^{isN_r}| \leq 2(2kl + r')p + 16k\alpha_n(l)\,. \tag{2.69}$$

Согласно (2.69), (2.23) и $\Delta\{u_n\}$,

$$\mathbb{E}\exp\Big(isN_n\Big) = \exp\big(k\mathbb{P}(N_r > 0)\mathbb{E}\left\{e^{isN_r} - 1|N_r > 0\right\}\big) + o(1)\,. \tag{2.70}$$

Если (2.25) выполнено, то $\mathbb{E}\left\{e^{isN_r}|N_r > 0\right\} \to \varphi(s)$, характеристической функции $\mathcal{L}(\zeta)$. С учётом (2.22) и (2.68) получим (2.27).

Предположим теперь, что $N_n \Rightarrow \exists N$. Тогда

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) = \mathbb{P}(N_n = 0) \to \mathbb{P}(N = 0) := e^{-\lambda}\,.$$

Если $\lambda = 0$, то $N \equiv 0$ есть вырожденная пуассоновская случайная величина. Если $\lambda > 0$, то лемма 2.20 и (2.70) влекут

$$\mathbb{E}\exp\left(isN_n\right) = \exp\left(\lambda\mathbb{E}\left\{e^{isN_r} - 1|N_r > 0\right\}\right) + o(1)\,.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}e^{isN_n} = \mathbb{E}e^{isN}$ $(\forall s \in \mathbb{R})$, существует предел

$$\varphi_o(s) := \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left\{e^{isN_r}|N_r > 0\right\}\,.$$

Предел последовательности характеристических функций есть характеристическая функция. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}e^{isN_n} = \exp(\lambda(\varphi_o(s) - 1))\,,$$

то есть N –сложно-пуассоновская с.в. с интенсивностью λ и распределением кластера $\mathcal{L}(\zeta)$, где $\mathcal{L}(\zeta)$ определено в (2.25).

Предел в (2.27) не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$. Действительно, если для некоторой последовательности $r' = r'_n$, удовлетворяюшей (2.24),

$$\mathcal{L}(N_{r'} \mid N_{r'} > 0) \Rightarrow \mathcal{L}(\exists\zeta'),$$

то $N_n \Rightarrow \mathbf{\Pi}(\lambda,\zeta)$ и $N_n \Rightarrow \mathbf{\Pi}(\lambda,\zeta')$. Сравнивая характеристические функции, получим $\mathcal{L}(\zeta) = \mathcal{L}(\zeta')$. $\square$

Лемма 2.21 *Пусть* $\nu, \pi, \zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ *– независимые случайные величины, принимающие значения в* $\mathbf{Z}_+$, $\zeta_i \stackrel{d}{=} \zeta$ $(i \geq 1)$. *Тогда*

$$d_{TV}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\zeta_i; \sum_{i=1}^{\pi}\zeta_i\right) \leq d_{TV}(\nu;\pi)\,, \tag{2.71}$$

$$d_G\left(\sum_{i=1}^{\nu}\zeta_i; \sum_{i=1}^{\pi}\zeta_i\right) = d_G(\nu;\pi)\mathbb{E}\zeta\,. \tag{2.72}$$

Оценка (2.71) в случае $\mathcal{L}(\nu) = \mathbf{B}(n,p)$, $\mathcal{L}(\pi) = \mathbf{\Pi}(np)$ принадлежит Мишель [233].

Доказательство леммы 2.21. Обозначим $Z_\xi = \sum_{i=1}^{\xi} \zeta_i$. По определению d_{TV},

$$\begin{aligned} d_{TV}(Z_\nu; Z_\pi) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \Big| \mathbb{P}\left(Z_\nu = i\right) - \mathbb{P}\left(Z_\pi = i\right) \Big| \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_m = i\right) \Big| \mathbb{P}(\nu = m) - \mathbb{P}(\pi = m) \Big| \le d_{TV}(\nu, \pi)\,. \end{aligned}$$

Используя определение d_G и тот факт, что

$$\mathbb{E}\sum_{i=\pi+1}^{\nu} \zeta_i \mathbb{I}\{\nu > \pi\} + \mathbb{E}\sum_{i=\nu+1}^{\pi} \zeta_i \mathbb{I}\{\pi > \nu\} = \mathbb{E}\zeta \mathbb{E}|\pi - \nu|\,,$$

выводим (2.72). □

Доказательство теоремы 2.10. Обозначим

$$\mathbb{I}_i = \mathbb{I}\{X_i > u_n\}\,,\ N_{r,j} = \sum_{i=jr+1}^{(j+1)r\wedge n} \mathbb{I}_i \qquad (0 \le j \le k)\,.$$

Отметим, что $N_n = \sum_{j=0}^{k} N_{r,j}$. Легко видеть, что

$$d_{TV}\left(N_n; \sum_{j=0}^{k-1} N_{r,j}\right) \le \mathbb{P}(N_{r,k} > 0) \le r'p\,.$$

Из каждого блока $\mathbb{I}_{jr+1}, \ldots, \mathbb{I}_{(j+1)r}$ мы удаляем подблок $\mathbb{I}_{(j+1)r-l+1}, \ldots, \mathbb{I}_{(j+1)r}$ длины l. Обозначим $(j < k)$

$$N^*_{r,j} = \sum_{i=jr+1}^{(j+1)r-l} \mathbb{I}_i\,, \quad N^*_n = \sum_{j=0}^{k-1} N^*_{r,j}\,.$$

Тогда $\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{k-1} N_{r,j} \ne \sum_{j=0}^{k-1} N^*_{r,j}\right) \le klp$. Поэтому

$$d_{TV}\left(N_n; N^*_n\right) \le r'p + klp\,.$$

Пусть $\{\hat{N}^*_{r,j}\}$ – независимые копии $N^*_{r,0}$. Положим

$$S_i = \sum_{j=0}^{i-1} N^*_{r,j} + \sum_{j=i+1}^{k-1} \hat{N}^*_{r,j} \qquad (0 < i < k)\,.$$

Отметим, что $S_j + \hat N^*_{r,j} = S_{j-1} + N^*_{r,j-1}$.

Пользуясь приёмом Линдеберга [214], мы заменяем $\{N^*_{r,i}\}$ на $\{\hat N^*_{r,i}\}$:

$$\mathbb{P}\Bigg(\sum_{j=0}^{k-1} N^*_{r,j}\in A\Bigg) - \mathbb{P}\Bigg(\sum_{j=0}^{k-1} \hat N^*_{r,j}\in A\Bigg) = \sum_{j=1}^{k-1}\Big\{\mathbb{P}(S_j + N^*_{r,j}\in A) - \mathbb{P}(S_j + \hat N^*_{r,j}\in A)\Big\}.$$

Согласно лемме Бербея (см. Приложение), $\sum_{l=0}^{j-1} N^*_{r,l}$, $N^*_{r,j}$ и $\hat N^*_{r,j}$ могут быть определены на ОВП так, что $\mathbb{P}(N^*_{r,j} \neq \hat N^*_{r,j}) \leq \beta(l)$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(S_j + N^*_{r,j} \in A) - \mathbb{P}(S_j + \hat N^*_{r,j} \in A) \\ = \;& \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(\sum\nolimits_{l=0}^{j-1} N^*_{r,l} + N^*_{r,j} \in A_j\right) - \mathbb{P}\left(\sum\nolimits_{l=0}^{j-1} N^*_{r,l} + \hat N^*_{r,j} \in A_j\right)\right] \leq \beta(l)\,, \end{aligned}$$

где $A_j = A - \sum_{i=j+1}^{k-1} \hat N^*_{r,i}$. Следовательно,

$$\left|\mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{k-1} N^*_{r,j} \in A\right) - \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{k-1} \hat N^*_{r,j} \in A\right)\right| \leq k\beta(l).$$

Согласно лемме 2.17 с $m = 1$, $y = 1$- и $K = r_+$, $\beta(l)$ можно заменить на $4\alpha(l)\sqrt{r}$. Очевидно, что $\mathbb{P}(\sum_{j=0}^{k-1} \hat N_{r,j} \neq \sum_{j=0}^{k-1} \hat N^*_{r,j}) \leq klp$. Поэтому

$$\Big|\mathbb{P}(N_n \in A) - \mathbb{P}(\hat N_n \in A)\Big| \leq k\gamma(l) + r'p + 2klp\,,$$

где $\hat N_n$ есть сумма k независимых копий N_r.

Пусть

$$\nu = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{1}\{\hat N_{r,j} > 0\}\,,\ Z_m = \zeta_{n,0} + \ldots + \zeta_{n,m}\,.$$

По формуле Хинчина (6.3),

$$\hat N_n \stackrel{d}{=} Z_\nu\,, \tag{2.73}$$

где $\nu \in \mathbf{B}(k,q)$. Используя лемму 2.21 и оценку (2.21) для расстояния по вариации между Биномиальным и Пуассоновым распределениями, получим

$$d_{TV}(N_n; Z_\pi) \leq (1 - e^{-kq})q \leq (1 - e^{-np})rp\,.$$

Используя (2.4), получим

$$d(N_n; Z_\pi) \leq 3q/4e + 4(1 - e^{-kq})q^2 \leq 3rp/4e + 4(1 - e^{-np})(rp)^2\,,$$

и (2.29) следует.

Заметим, что $\mathbb{E}|N_n - N_n^*| \le r'p + klp$. Согласно лемме Бербея и лемме 2.17, $\sum_{l=0}^{j-1} N_{r,l}^*$, $N_{r,j}^*$ и $\hat{N}_{r,j}^*$ могут быть определены на ОВП так, что

$$\mathbb{P}(N_{r,j}^* \ne \hat{N}_{r,j}^*) \le \min\{4\alpha(l)\sqrt{r}\,; \beta(l)\}.$$

Поскольку

$$\mathbb{E}|h(S_j + N_{r,j}^*) - h(S_j + \hat{N}_{r,j}^*)| \le \mathbb{E}|N_{r,j}^* - \hat{N}_{r,j}^*|\mathbb{1}\{N_{r,j}^* \ne \hat{N}_{r,j}^*\} \le r\mathbb{P}(N_{r,j}^* \ne \hat{N}_{r,j}^*),$$

имеем $\mathbb{E}|h(N_n^*) - h(\sum_{j=0}^{k-1} \hat{N}_{r,j}^*)| \le n\gamma_{n,l}$. Поэтому

$$d_G(N_n; \hat{N}_n) \le r'p + 2klp + n\gamma_{n,l}\,.$$

Принимая во внимание (2.72), (2.73) и (6.53), выводим (2.30). □

Ниже знак "$\approx$" означает $=$ с добавлением $o(1)$. Обозначим

$$S_i = \zeta_1 + \ldots + \zeta_i\,,\ J_n = \{1, \ldots, n\}\,.$$

Доказательство теоремы 2.11 основано на следующих двух леммах.

Лемма 2.22 *Предположим, что выполнены условия* $\Delta(\{u_n(\bar{t}\,)\})$ *и (2.36), и пусть* $\{r = r_n\} \in \mathcal{R}(\bar{t}\,)$. *Тогда имеют место соотношения* (a) *и* (b) *определения (2.1).*

Доказательство леммы 2.22. Пусть $0 \le i < j \le k$. Сначала мы покажем, что

$$\mathbb{P}(N_r[u_n(t_i); u_n(t_j)) > 0) \sim (t_j - t_i)r/n\,. \tag{2.74}$$

Можно предполагать, что $i = 1, j = 2$. Обозначим

$$u_n = u_n(t_1)\,,\ v_n = u_n(t_2).$$

Тогда (2.78) влечёт

$$\mathbb{P}(N_n[u_n; v_n) = 0) \to e^{-t_2+t_1}\,.$$

Аналогично (1.7),

$$\mathbb{P}(N_n[u_n; v_n) = 0) = (\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) = 0))^{n/r} + o(1)\,. \tag{2.75}$$

Заметим, что $\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) > 0) \le r\mathbb{P}(X > v_n) = O(r/n)$. Следовательно,

$$e^{-t_2+t_1} = \exp(-nr^{-1}\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) > 0)) + o(1)\,,$$

и (2.74) следует.

Аргументы применимы к любой паре $\{u_n, v_n\}$ из множества $\{u_n(t_1), \ldots, u_n(t_m)\}$. В случае $t_i = 0$ (2.74) влечёт

$$\mathbb{P}(N_r(u_n(t)) > 0) \sim tr/n \qquad (t \in \{t_1, \ldots, t_m\})\,. \tag{2.76}$$

Пусть даны $x < y < z$ из множества $\{0 = t_0, t_1, \dots, t_m\}$. Положим

$$u_n = u_n(x)\,,\ v_n = u_n(y)\,,\ w_n = u_n(z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) > 0, N_r[v_n; w_n) > 0) \\ &= \mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) > 0) + \mathbb{P}(N_r[v_n; w_n) > 0) - \mathbb{P}(N_r[u_n; w_n) > 0) = o(r/n) \end{aligned}$$

согласно (2.74), и (b) следует.

Остаётся проверить (a). Согласно (2.78),

$$\mathbb{P}(N_n[u_n; v_n) = 1, N_n(u_n) = 0) \to (y - x)e^{-y}\mathbb{P}(\zeta = 1)\,.$$

Аналогично (2.75),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_n[u_n; v_n) = 1, N_n(u_n) = 0) &\approx nr^{-1}e^{-y}\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) = 1, N_r(u_n) = 0) \\ &\approx nr^{-1}e^{-y}\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) = 1) \end{aligned}$$

(используем также (b)). Следовательно,

$$nr^{-1}\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) = 1) \sim (y - x)\mathbb{P}(\zeta = 1)\,. \tag{2.77}$$

Отсюда следует (a) в случае $j = 1$. Аналогично,

$$\begin{aligned} &e^{-y}\sum_{i=1}^{2}\mathbb{P}\left(S_i = 2\right)(y - x)^i/i! = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(N_n[u_n; v_n) = 2, N_n(u_n) = 0) \\ &= e^{-y}nr^{-1}\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) = 2, N_r(u_n) = 0) \\ &+\frac{1}{2}e^{-y}\left(nr^{-1}\mathbb{P}(N_r[u_n; v_n) = 1, N_r(u_n) = 0)\right)^2 + o(1)\,, \end{aligned}$$

что вместе с (2.77) и (b) влечёт (a) в случае $j = 2$. Применяя индукцию, получим (a) для каждого $j \in \mathbb{N}$. □

Докажем теперь утверждение теоремы 2.11 в случае $k = 2$. Обозначим $u_n = u_n(t_1)$ и $v_n = u_n(t_2)$, $t_1 < t_2$.

Лемма 2.23 *Пусть условия* (a), (b) *и* $\Delta(\{u_n, v_n\})$ *выполнены. Тогда*

$$\{N_n(u_n), N_n(v_n)\} \Rightarrow \{Q(t_1), Q(t_2)\}\,. \tag{2.78}$$

Доказательство леммы 2.23. Мы докажем равносильное утверждение

$$\{N_n(u_n), N_n[u_n; v_n)\} \Rightarrow \{Q(t_1), Q(t_2) - Q(t_1)\}\,.$$

Другими словами, мы покажем, что для всех $l,m \in \mathbf{Z}_+$

$$\mathbb{P}(N_n(u_n)=l, N_n[u_n;v_n)=m) \to \mathbb{P}(Q(t_1)=l, Q(t_2)-Q(t_1)=m)\,.$$

Если $l=m=0$, то

$$\mathbb{P}(N_n(u_n)=0, N_n[u_n;v_n)=0) = \mathbb{P}(M_n<v_n) \to e^{-t_2}$$

согласно (2.33). Очевидно, $\mathbb{P}(Q(t_1)=Q(t_2)-Q(t_1)=0)=e^{-t_2}$.

Пусть теперь $l=0$, $m>0$. Обозначим

$$B(j)=\{jr+1,\ldots,(j+1)r\wedge n\},$$

$$B=B(s_1)\cup\ldots\cup B(s_i)\,,\ B^c=J_n\backslash B\,,\ \bar{s}=(s_1,\ldots,s_i) \qquad (i\le m)\,,$$

и положим

$$N_A[a;b)=\sum_{i\in A}\mathbb{1}\{a\ge X_i>b\}\,,\ N_A(u_n)=\sum_{i\in A}\mathbb{1}\{X_i>u_n\} \qquad (A\subset J_n).$$

Стандартные аргументы (удаляем подблоки длины $\ell_n \ll r_n$ и используем условия (2.32) и $\Delta(\{u_n\},\{v_n\})$, ср. (1.7) и (2.29)) показывают, что блоки $\{B(j)\}$ можно считать независимыми, если добавлено $o(1)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_n(u_n)=0, N_n[u_n;v_n)=m)\\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{0\le s_1<\cdots<s_i\le[n/r]} \mathbb{P}(N_B(u_n)=0, N_B[u_n;v_n)=m, N_{B^c}(v_n)=0)\\
&\approx \sum_{i=1}^m \sum_{0\le s_1<\cdots<s_i\le[n/r]} \mathbb{P}(N_B(u_n)=0, N_B[u_n;v_n)=m)\mathbb{P}(N_{B^c}(v_n)=0),
\end{aligned}$$

где i – число блоков, содержащих попадания в $(v_n,u_n]$. Ввиду (2.34),

$$\mathbb{P}(N_{B^c}(v_n)=0)=[\mathbb{P}(N_r(v_n)=0)]^{[n/r]+1-i}\approx e^{-t_2}\,.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_n(u_n)=0, N_n[u_n;v_n)=m)\\
&\approx e^{-t_2}\sum_{i=1}^m \sum_{0\le s_1<\cdots<s_i\le[n/r]} \sum_{\substack{j_1+\cdots+j_i=m,\\ 1\le j_\ell\le m\ (\forall \ell)}} \prod_{\ell=1}^i \mathbb{P}(N_r(u_n)=0, N_r[u_n;v_n)=j_\ell)\,.
\end{aligned}$$

Ввиду (a), $\mathbb{P}(N_r[u_n;v_n)=j)\sim\mathbb{P}(\zeta=j)(t_2-t_1)r/n$. С учётом (b),

$$\begin{aligned}
&|\mathbb{P}(N_r(u_n)=0,\ N_r[u_n;v_n)=j_\ell)-\mathbb{P}(N_r[u_n;v_n)=j_\ell)|\\
&= \ \mathbb{P}(N_r(u_n)\ge 1,\ N_r[u_n;v_n)=j_\ell) \ = \ o(r/n)\,. \qquad (2.79)
\end{aligned}$$

Поэтому $\mathbb{P}(N_n(u_n)=0, N_n[u_n;v_n)=j) \sim \mathbb{P}(\zeta=j)(t_2-t_1)r/n$ и

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_n(u_n)=0, N_n[u_n;v_n)=m)\\ &\approx e^{-t_2}\sum_{i=1}^{m}\binom{[n/r]+1}{i}\sum_{\substack{j_1+\dots+j_i=m,\\ 1\le j_\ell\le m\ (\forall\ell)}}((t_2-t_1)r/n)^i\prod_{\ell=1}^{i}\mathbb{P}(\zeta=j_\ell)\\ &\approx e^{-t_2}\sum_{i=1}^{m}\mathbb{P}(S_i=m)(t_2-t_1)^i/i! = \mathbb{P}(Q(t_1)=0, Q(t_2)=m).\end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай $l>0, m=0$.

Пусть теперь $l>0$ и $m>0$. Обозначим

$$\bar{s}^*=(s_1^*,\dots,s_{i^*}^*),\ \bar{s}^\star=(s_1^\star,\dots,s_{i^\star}^\star),\ B(\bar{s}^*,\bar{s}^\star)=B(\bar{s}^*)\cup B(\bar{s}^\star),\ B^c=J_n\backslash B(\bar{s}^*,\bar{s}^\star),$$

где $1\le i^*\le l$ и $1\le i^\star\le m$. Согласно условию $\Delta(\{u_n\},\{v_n\})$, блоки асимптотически независимы. Согласно предположению (b), никакой блок не может асимптотически содержать попадания в интервалы $(u_n;\infty]$ и $[u_n;v_n)$ одновременно. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n(u_n)=l, N_n[u_n;v_n)=m) &\approx \sum_{i^*=1}^{l}\sum_{i^\star=1}^{m}\sum_{\substack{0\le s_1^*<\dots<s_{i^*}^*\le[n/r]\\ 0\le s_1^\star<\dots<s_{i^\star}^\star\le[n/r],\,\bar{s}^*\ne\bar{s}^\star}}\\ &\mathbb{P}(N_{B(\bar{s}^*)}(u_n)=l,\ N_{B(\bar{s}^\star)}[u_n;v_n)=m,\ N_{B^c}(v_n)=0)\\ \approx e^{-t_2}\sum_{i^*=1}^{l}\binom{[n/r]+1}{i^*}\sum_{i^\star=1}^{m}\binom{[n/r]+1}{i^\star}&\sum_{\substack{j_1^*+\dots+j_{i^*}^*=l,\\ 1\le j_\ell^*\le m\ (\forall\ell)}}\ \sum_{\substack{j_1^\star+\dots+j_{i^\star}^\star=m,\\ 1\le j_\ell^\star\le m\ (\forall\ell)}}\\ \prod_{\ell=1}^{i^*}\mathbb{P}(N_r(u_n)=j_\ell^*, N_r[u_n;v_n)=0)&\prod_{\ell=1}^{i^\star}\mathbb{P}(N_r(u_n)=0, N_r[u_n;v_n)=j_\ell^\star)\,.\end{aligned}$$

Аналогично (2.79), вероятностность $\mathbb{P}(N_r(u_n)=j_\ell^*,\ N_r[u_n;v_n)=0)$ может быть заменена на $\mathbb{P}(N_r(u_n)=j_\ell^*)$ и $\mathbb{P}(N_r(u_n)=0, N_r[u_n;v_n)=j_\ell^\star)$ на $\mathbb{P}(N_r[u_n;v_n)=j_\ell^\star)$. Принимая во внимание (a), мы заключаем, что

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_n(u_n)=l, N_n[u_n;v_n)=m)\\ &\approx e^{-t_2}\sum_{i^*=1}^{l}\sum_{i^\star=1}^{m}\left[t_1^{i^*}/i^*!\right]\left[(t_2-t_1)^{i^\star}/i^\star!\right]\mathbb{P}(S_{i^*}=l)\mathbb{P}(S_{i^\star}=m)\\ &=\mathbb{P}(Q(t_1)=l, Q(t_2)-Q(t_1)=m)\,.\end{aligned}$$

Доказательство леммы 2.23 завершено. □

Доказательство теоремы 2.11. Лемма 2.22 показывает, что условия (a) и (b) необходимы для (2.36). Остаётся показать, что условия (a), (b) и $\Delta(\{u_n(\bar{t}\,)\})$ влекут (2.36).

Обозначим $u_{n,i} = u_n(t_i)$. Требуется показать, что

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_n(u_{n,1})=l_1, N_n[u_{n,1},u_{n,2})=l_2,\dots,N_n[u_{n,m-1},u_{n,m})=l_m)\\ &\to \mathbb{P}(Q(t_1)=l_1, Q(t_2)-Q(t_1)=l_2,\dots,Q(t_m)-Q(t_{m-1})=l_m).\end{aligned}$$

Лишь технические детали отличают доказательство от доказательства леммы 2.23. Чтобы не повторять одни и те же аргументы, мы рассмотрим только случай, когда все $l_i > 0$.

Пусть $i_1 \in \{1,\dots,l_1\},\dots,i_m \in \{1,\dots,l_m\}$, и положим

$$B^{(1)} = \bigcup_{j=1}^{i_1} B(s_j^{(1)})\,,\ \dots\,,\ B^{(m)} = \bigcup_{j=1}^{i_m} B(s_j^{(m)})\,,\ B^c = J_n \backslash [\,B^{(1)} \cup \dots \cup B^{(m)}\,]\,.$$

Ввиду $\Delta(\{u_n(\bar{t}\,)\})$ и (b), мы можем предположить, что внутри одного блока возможны попадания лишь в один из интервалов $(u_{n,m}; u_{n,m-1}]$, …, $(u_{n,1};\infty]$; разные блоки могут считаться независимыми, если добавить слагаемое $o(1)$.

Обозначим через $\Sigma_{(j)}$ сумму по $0 \le s_1^{(j)} < \dots < s_{i_j}^{(j)} \le [n/r]$, и через $\Sigma^{(a)}$ сумму по $j_1^{(a)} + \dots + j_{i_a}^{(a)} = l_a, 1 \le j_\ell^{(a)} \le m$ $(\forall \ell)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_n(u_{n,1})=l_1, N_n[u_{n,1},u_{n,2})=l_2,\dots,N_n[u_{n,m-1},u_{n,m})=l_m)\\ \approx\ & \sum_{i_1=1}^{l_1}\dots\sum_{i_k=1}^{l_m} \sum\nolimits_{(1)}\dots\sum\nolimits_{(m)}\\ &\mathbb{P}(N_{B^{(1)}}(u_{n,1})=l_1,\dots,N_{B^{(m)}}[u_{n,m-1};u_{n,m})=l_m, N_{B^c}(u_{n,m})=0)\\ \approx\ & \sum_{i_1=1}^{l_1}\dots\sum_{i_m=1}^{l_m} \sum\nolimits_{(1)}\dots\sum\nolimits_{(m)} \sum\nolimits^{(1)}\dots\sum\nolimits^{(m)}\\ & e^{-t_m}\prod_{\ell=1}^{i_1}\mathbb{P}(N_r(u_{n,1})=j_\ell^{(1)})\times\dots\times\prod_{\ell=1}^{i_m}\mathbb{P}(N_r[u_{n,m-1};u_{n,m})=j_\ell^{(m)})\,.\end{aligned}$$

С учётом (a), последнее есть

$$\begin{aligned}& e^{-t_m}\sum_{i_1=1}^{l_1}\dots\sum_{i_m=1}^{l_m}\binom{[n/r]+1}{i_1}\dots\binom{[n/r]+1}{i_k}\sum\nolimits^{(1)}\dots\sum\nolimits^{(m)}\\ &(\gamma_1 r/n)^{i_1}\prod_{\ell=1}^{i_1}\mathbb{P}(\zeta=j_\ell^{(1)})\times\dots\times(\gamma_m r/n)^{i_m}\prod_{\ell=1}^{i_m}\mathbb{P}(\zeta=j_\ell^{(m)})+o(1)\\ \approx\ & e^{-t_m}\sum_{i_1=1}^{l_1}\dots\sum_{i_m=1}^{l_m}\frac{(\gamma_1)^{i_1}\times\dots\times(\gamma_m)^{i_m}}{i_1!\times\dots\times i_m!}\,\mathbb{P}(S_{i_1}=m_1)\times\dots\times\mathbb{P}(S_{i_k}=m_k)\\ =\ & \mathbb{P}(Q(t_1)=l_1, Q(t_2)-Q(t_1)=l_2,\dots,Q(t_m)-Q(t_{m-1})=l_m)\,,\end{aligned}$$

где $\gamma_j = t_j - t_{j-1}$ и $t_0 = 0$. Доказательство завершено. □

Доказательство утверждения 2.12. Пусть $\{r\} \in \mathcal{R}(t)$. Обозначим

$$K = [sn/r].$$

Используя метод блоков и принимая во внимание условия $\Delta\{u_n(\bar{t}\,)\}$ и (2.32), легко показать, что

$$\left|\mathbb{E}e^{ivN_n(sn,\bar{t})} - \mathbb{E}^m e^{ivN_n(r,\bar{t})}\right| \to 0$$

для любого $v \in \mathbb{R}^m$ (ср. (2.69)). Заметим, что

$$\mathbb{E}e^{ivN_n(r,\bar{t})} = \mathbb{P}(N_n(r,t_m) = 0) + \mathbb{E}\left\{e^{ivN_n(r,\bar{t})}\middle|N_n(r,t_m) > 0\right\}\mathbb{P}(N_n(r,t_m) > 0)\,.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}e^{ivN_n(sn,\bar{t})} \approx \exp\left(K\mathbb{P}(N_n(r,t_m) > 0)\mathbb{E}\left\{e^{ivN_n(r,\bar{t})} - 1|N_n(r,t_m) > 0\right\}\right).$$

Согласно (2.34), $\mathbb{P}\left(N_r(u_n(t_m)) > 0\right) \sim t_m r/n$. Поэтому

$$\mathbb{E}e^{ivN_n(sn,\bar{t})} = \exp\left(st_m\left[\mathbb{E}e^{iv\zeta(\bar{t},n)} - 1\right]\right) + o(1)\,. \tag{2.80}$$

Соотношение (2.44) следует из (2.43) и (2.80). □

Доказательство теоремы 2.13. Предположим, что $N_n(sn,\bar{t}\,) \Rightarrow \exists N$ для некоторого $s > 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}e^{ivN_n(sn,\bar{t})} = \mathbb{E}e^{ivN} \qquad (\forall v \in \mathbb{R}^m)\,.$$

Согласно (2.80), существует предел $\lim\mathbb{E}e^{iv\zeta(\bar{t},n)} := \varphi_o(v)$. Как предел последовательности характеристических функций, это характеристическая функция. Следовательно, (2.43) выполнено и

$$\mathbb{E}e^{ivN} = \exp(st_m[\varphi_o(v) - 1]),$$

то есть N – сложно-пуассоновский случайный вектор с интенсивностью st_m и кластер-распределением $\mathcal{L}(\zeta)$, где $\mathbb{E}e^{iv\zeta} = \varphi_o(v)$.

Распределение вектора $\zeta(\bar{t}\,)$ не зависит от выбора последовательности $\{r = r_n\}$. Действительно, если

$$\mathcal{L}(N_n(r',\bar{t}\,) \mid N_n(r',t_m) > 0) \Rightarrow \mathcal{L}(\exists\zeta'(\bar{t}\,))$$

для другой последовательности $\{r' = r_n'\} \in \mathcal{R}(\bar{t}\,)$, то (2.44) влечёт

$$N_n(n,\bar{t}\,) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\pi(t_m)}\zeta_j(\bar{t}\,) \quad N_n(n,\bar{t}\,) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\pi(t_m)}\zeta_j'(\bar{t}\,)\,.$$

Следовательно, $\zeta(\bar t\,) \stackrel{d}{=} \zeta'(\bar t\,)$.

Чтобы показать, что распределение вектора $\zeta(\bar t\,)$ инвариантно относительно изменения масштаба, обозначим

$$\bar t_* = (t_1/t_m, t_2/t_m, \ldots, 1).$$

Ввиду (2.44), $N_n(sn, \bar t\,)$ слабо сходится для всех $s > 0$. Согласно лемме 2.24, $N_n(n, s\bar t\,)$ слабо сходится для всех $s > 0$, и предельные распределения $N_n(sn, \bar t\,)$ и $N_n(n, s\bar t\,)$ совпадают. Согласно (2.44),

$$N_n(n, \bar t\,) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\pi(t_m)} \zeta_j(\bar t\,)\,, \quad N_n(t_m n, \bar t_*) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\pi(t_m)} \zeta_j(\bar t_*)\,.$$

Следовательно, $\sum_{j=1}^{\pi(t_m)} \zeta_j(\bar t\,) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\pi(t_m)} \zeta_j(\bar t_*)$, откуда $\zeta(\bar t\,) \stackrel{d}{=} \zeta(\bar t_*)$.

Формула (2.46) следует из (2.43) – (2.45). Остаётся доказать (2.48). Заметим, что (2.44) влечёт

$$N_n(u_n(t_l)) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\pi(t_m)} \zeta_j^l(\bar t\,).$$

Кроме того,

$$N_n(u_n(t_l)) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\pi(t_l)} \zeta_j\,.$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{\Pi}\,(at, Y) = \mathbf{\Pi}\,(t, Y(a))\,. \tag{2.81}$$

Ввиду (2.81), $\mathbf{\Pi}(as, \zeta) = \mathbf{\Pi}(s, Z(a))$ для каждого $s > 0$. Следовательно,

$$N_n(u_n(t_l)) \Rightarrow \sum_{j=0}^{\pi(t_m)} Z(t_l/t_m).$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^{\pi(t_m)} \zeta_j^l(\bar t\,) \stackrel{d}{=} \sum_{j=0}^{\pi(t_m)} Z(t_l/t_m).$$

Сравнение характеристических функций $\sum_{j=0}^{\pi(t_m)} \zeta_j^l(\bar t\,)$ и $\sum_{j=0}^{\pi(t_m)} Z(t_l/t_m)$, получим (2.48). $\square$

Пусть $\bar t \in \mathbb{R}_m$, и пусть I – открытый интервал в $(0;\infty)$. Обозначим

$$P_1(n,s) \;=\; \mathbb{P}(N_{sn}(u_n(t_1)) < i_1, \ldots, N_{sn}(u_n(t_k)) < i_m)\,, \tag{2.82}$$
$$P_2(n,s) \;=\; \mathbb{P}(N_n(u_n(st_1)) < i_1, \ldots, N_n(u_n(st_k)) < i_m)\,. \tag{2.83}$$

Лемма 2.24 *Предположим, что выполнено условие* $\Delta\{u_n(\bar{t})\}$. *Если одна из вероятностей (2.82) или (2.83) сходится для любого* $s \in I$, *то сходится и другая, и пределы совпадают.*

Лемма 2.24 следует работе Хсин [175, 176], но использует более слабое условие перемешивания, чем условие Δ^*, используемое в [175], или условие α-перемешивания, используемое в [176].

Доказательство леммы 2.24. Соотношение (2.34) влечёт

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_{[sn]} \le u_n(t)) = e^{-st} \qquad (\forall s > 0)\,. \tag{2.84}$$

Пусть $s' > s > s''$ – точки из I. Из (2.84) следует, что $u_{[n/s']}(t) < u_n(s''t)$ для всех достаточно больших n.

1. Предположим, что предел $\lim_{n\to\infty} P_2(n,s) := g(s)$ существуют $(s \in I)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\, P_1(n,s') = \limsup_{n\to\infty}\, P_1([n/s'],s') \\
&= \limsup_{n\to\infty}\, \mathbb{P}(N_n(u_{[n/s']}(t_1)) < i_1, \ldots, N_n(u_{[n/s']}(t_k)) < i_k) \\
&\le \limsup_{n\to\infty}\, \mathbb{P}(N_n(u_n(st_1)) < i_1, \ldots, N_n(u_n(st_k)) < i_k) = g(s)\,.
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$g(s) \le \liminf_{n\to\infty} P_1(n,s'')\,.$$

Поэтому

$$\limsup_{n\to\infty}\, P_1(n,s') \le g(s_1) \le g(s_2) \le \liminf_{n\to\infty}\, P_1(n,s''), \tag{2.85}$$

если $s' > s_1 > s_2 > s''$. Обозначим $N_{ni} = N_{[s''n]-[s'n]}(u_n(t_i))$. Тогда

$$\begin{aligned}
0 \ &\le\ \liminf_{n\to\infty} P_1(n,s'') - \limsup_{n\to\infty} P_1(n,s') \le \limsup_{n\to\infty} [P_1(n,s'') - P_1(n,s')] \\
&\le\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}\,(N_{ni} > 0) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} ([s''n] - [s'n])\,\mathbb{P}(X > u_n(t_i))\,.
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Это неравенство и (2.32) влекут

$$\liminf_{n\to\infty} P_1(n,s'') - \limsup_{n\to\infty} P_1(n,s') \to 0$$

при $s' - s'' \to 0$. Следовательно, функция $g(s)$ равномерно непрерывна в I.

Если $s_1 > s > s_2$ – точки из I, то (2.85) влечёт

$$g(s_1) \le \liminf_{n\to\infty} P_1(n,s) \le \limsup_{n\to\infty} P_1(n,s) \le g(s_2)\,.$$

Полагая $s_1 \to s$ и $s_2 \to s$, получим, что предел $\lim_{n\to\infty} P_1(n,s)$ существует и равен $g(s)$.

2. Предположим теперь, что для каждого $s \in I$ существует предел $\lim_{n\to\infty} P_1(n,s) := h(s)$. Аналогично (2.85),

$$h(s') \le \liminf_{n\to\infty} P_2(n,s) \le \limsup_{n\to\infty} P_2(n,s) \le h(s'') . \tag{2.87}$$

Из (2.86) выводим $h(s'') - h(s') \to 0$ при $s' - s'' \to 0$. Следовательно, функция $h(s)$ равномерно непрерывна в I. Ввиду (2.87), предел $\lim_{n\to\infty} P_2(n,s)$ существует и равен $h(s)$. $\square$

Доказательство леммы 2.17. Обозначим $Y^< = Y1\!\!\mathrm{I}\{|Y| \le Ky\}$. Вектор $Y^<$ принимает значения в $[-Ky;Ky]^m$. Разбивая $[-Ky;Ky]$ на $2K$ интервалов длины y ведёт к разбиению $[-Ky;Ky]^m$ на $N=(2K)^m$ кубов $H_1,\ldots,H_N$. Согласно теореме 2 в [59], можно определить $X, Y^<$ и $\hat{Y}^<$ на ОВП так, что $\hat{Y}^<$ не зависит от X, $\hat{Y}^< \stackrel{d}{=} Y^<$ и

$$\mathbb{P}\left(|\hat{Y}^< - Y^<| > y\right) = \mathbb{P}(A) \le \sqrt{8N}\alpha ,$$

где $A = \{\hat{Y}^<$ и $\hat{Y}^<$ не есть элементы одного и того же $H_i\}$.

Построим вектор $\hat{Y}$ на основе $\hat{Y}^<$, такой что $\hat{Y} \stackrel{d}{=} Y$. Положим $\hat{Y} = \hat{Y}^< + 1\!\!\mathrm{I}\{\hat{Y}^< = 0\}Y'$, где с.в. Y' независима от всех других случайных векторов, $\mathcal{L}(Y') = \mathcal{L}(Y|B)$ и $B = \{Y^< = 0\} = \{Y = 0 \text{ or } |Y| > Ky\}$.

Очевидно, $\hat{Y} \stackrel{d}{=} Y$. Действительно, $\mathbb{P}(\hat{Y}=0) = \mathbb{P}(\hat{Y}^< = 0 = Y') = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(Y'=0) = \mathbb{P}(Y=0)$, и если $z \ne 0$, то

$$\mathbb{P}(\hat{Y} \in dz) = \mathbb{P}(\hat{Y}^< \in dz) + \mathbb{P}(\hat{Y}^< = 0, Y' \in dz)$$

$$= \mathbb{P}(B_c, Y \in dz) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(Y \in dz|B) = \mathbb{P}(Y \in dz) ,$$

где $B_c = \{0 < |Y| \le Ky\}$ – дополнение к B. Легко видеть, что $\mathbb{P}(\hat{Y} \ne \hat{Y}^<) = \mathbb{P}(\hat{Y}^< = 0 \ne Y') = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(Y \ne 0|B) = \mathbb{P}(|Y| > Ky)$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(|\hat{Y} - Y^<| > y\right) \le \sqrt{8N}\alpha + \mathbb{P}(\hat{Y} \ne \hat{Y}^<) = \sqrt{8N}\alpha + \mathbb{P}(|Y| > Ky) .$$

Остаётся построить (X,Y) на основе $(X,Y^<)$. Пусть $\{Y_x\}$ – независимые случайные векторы с распределениями $\mathcal{L}(Y_x) = \mathcal{L}(Y|B, X=x)$. Обозначим $Y^* = Y^< + 1\!\!\mathrm{I}\{Y^< = 0\}Y_X$. Тогда $(X,Y^*) \stackrel{d}{=} (X,Y)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in dx, Y^* = 0) = \mathbb{P}(X \in dx, Y^< = 0 = Y_X) \\
&= \mathbb{P}(X \in dx, Y^< = 0)\mathbb{P}(Y_x = 0) \\
&= \mathbb{P}(X \in dx, B, Y = 0) = \mathbb{P}(X \in dx, Y = 0) .
\end{aligned}$$

Если $z \neq 0$, то

$$\mathbb{P}(X \in dx, Y^* \in dz) = \mathbb{P}(X \in dx, Y^< \in dz) + \mathbb{P}(X \in dx, Y^< = 0, Y_X \in dz)$$

$$= \mathbb{P}(X \in dx, B_c, Y \in dz) + \mathbb{P}(X \in dx, B)\mathbb{P}(Y_x \in dz) = \mathbb{P}(X \in dx, Y \in dz)\,.$$

Заметим, что $\mathbb{P}(Y^* \neq Y^<) = \mathbb{P}(Y^< = 0 \neq Y_X) = \mathbb{P}(|Y| > Ky)$. Поэтому

$$\mathbb{P}\left(|\hat{Y} - Y| > y\right) \;\leq\; \mathbb{P}\left(|\hat{Y} - Y^<| > y\right) + \mathbb{P}(|Y| > Ky)\,.$$

Объединяя полученные оценки, получим (2.56).

Используя неравенство Чебышева, из (2.56) выводим

$$\mathbb{P}\left(|\hat{Y} - Y| > y\right) \leq cK^{m/2} + dK^{-b}\,,$$

где $c = 2^{(m+3)/2}\alpha$ и $d = 2(c_b/y)^b$. Функция $f(x) = cx^{m/2} + dx^{-b}$ достигает своего мининума по $x \geq 1$ на $x_o = \max\{(2bd/cm)^{2/(m+2b)}; 1\}$. Поскольку $\frac{2bd}{cm} = \frac{b(c_b/y)^b}{2^{(m-1)/2}m\alpha}$, неравенство (2.56) влечёт (2.57). $\square$

Глава 3

Процессы выходов за высокий уровень

Эмпирические точечные процессы выходов за высокий уровень (ПВВУ) играют основополагающую роль в теории экстремальных значений. В данной главе изучается асимптотика распределения ПВВУ.

3.1 Процессы выходов за высокий уровень

Пусть $\{X_i, i \geq 1\}$ – стационарная последовательность случайных величин, и пусть $\{u_n\}$ – последовательность уровней.

Эмпирический точечный процесс

$$N_n(B, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{i/n \in B, X_i > u_n\} \qquad (B \subset (0; 1]) \tag{3.1}$$

выходов за уровень u_n учитывает месторасположение экстремумов (выходов за уровень u_n), но не их размер. Заметим, что число выходов за уровень u_n

$$N_n(u_n) = N_n((0; 1], u_n).$$

Случайная величина ζ называется предельным кластером, если (2.25) выполнено для некоторой последовательности $\{r = r_n\}$ натуральных чисел, удовлетворяющей (2.24).

Хсин и др. [177] установили следующую теорему, в которой считается выполненными (2.22), (2.23) и условие перемешивания $\Delta(\{u_n\})$.

Теорема 3.1 [177] *Пусть* $\{u_n\}$ *– неубывающая последовательность, такая что*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = e^{-\lambda} \qquad (\exists \lambda > 0). \tag{3.2}$$

Если (2.25) выполнено для последовательности $\{r = r_n\}$, *удовлетворяющей (2.24), то*

$$N_n(\cdot, u_n) \Rightarrow N(\cdot)\,, \tag{3.3}$$

где $N(\cdot)$ *– сложно-пуассоновский точечный процесс с параметром интенсивности* λ *и распределением кластера* $\mathcal{L}(\zeta)$.

Если $N_n(\cdot, u_n)$ *слабо сходится к точечному процессу* $N(\cdot)$, *то* $N(\cdot)$ *– сложно-пуассоновский процесс на* $(0;1]$ *с параметром интенсивности* λ, *определённым в (3.2). Если* $\lambda > 0$, *то (2.25) выполнено для некоторого* ζ *и последовательности* $\{r_n\}$, *удовлетворяюшей (2.24).*

В диссертации предложено новое доказательство теоремы 3.1.

В то время как процесс (3.1) подсчитывает месторасположения выходов за один и тот же уровень u_n, процесс

$$\{N_n(u_n(t)), t \geq 0\} \tag{3.4}$$

выходов за высокие уровени (ПВВУ) имеет дело с размахом выбросов.

В теореме 3.2 найдены необходимые и достаточные условия слабой сходимости ПВВУ (3.4) к сложно-пуассоновскому процессу.

Предположим, что последовательность $\{u_n(\cdot), n \geq 1\}$ функций на $[0;\infty)$ удовлетворяет следующим условиям: $u_n(\cdot)$ строго убывает для всех достаточно больших n, $u_n(0) = \infty$ и имеют место (2.32) и (2.33).

Пусть $\{\pi(s), s \geq 0\}$ – пуассоновский процесс с параметром интенсивности 1, и пусть $\zeta, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$ – последовательность н.о.р.с.в., принимающих значения в $\mathbb{N}$. Обозначим

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{\pi(t)} \zeta_j\,. \tag{3.5}$$

Отметим, что $\{Q(t), t \geq 0\}$ есть сложно-пуассоновский скачкообразный процесс (иначе говоря, $\tilde{Q}(B) = \int_B Q(dt)$ есть сложно-пуассоновский точечный процесс с лебеговой мерой интенсивности и распределением кластера $\mathcal{L}(\zeta)$). В дальнейшем мы не делаем различия между Q и $\tilde{Q}$.

Следующая теорема показывает, что условие C является необходимым и достаточным для слабой сходимости ПВВУ (3.4) к сложно-пуассоновскому процессу (3.5).

Теорема 3.2 *Предположим, что выполнено условие перемешивания* Δ. *Тогда*

$$N_n(u_n(\cdot)) \Rightarrow Q(\cdot),$$

если и только если условие C *выполнено.*

Определим экстремальный процесс

$$m_n^k(s) = u_n^{-1}(X_{k,[sn]})\,,\ m^k(s) = \max\{y : N^*((0;s] \times [0;y)) < k\}\,,$$

где $0<s\leq 1$. Заметим, что $m_n^k(s) = \max\Big\{y : N_{[sn]}\,(u_n(y)) < k\Big\}$ и

$$\{X_{k,[ns]} \leq u_n(t)\} = \{m_n^k(s) \geq t\} = \{N_n^*((0;s] \times [0;t)) < k\}\,.$$

Следствие 3.3 *Пусть выполнены условия* Δ *и* C. *Тогда для всякого* $k \in \mathbb{N}$,

$$(m_n^1, \ldots, m_n^k) \Rightarrow (m^1, \ldots, m^k)\,. \tag{3.6}$$

Приложения (3.6) к задаче о распределении рекордов в случае независимых с.в. рассматриваются в [325].

3.2 Сходимость общего ПВВУ к сложно-пуассоновскому процессу

Отметим, что процессы (3.1) и (3.4) – одномерные. В этом разделе мы рассматриваем общий ПВВУ N_n^*, который учитывает как месторасположение экстремумов, так и их размах.

Для любого борелева множества $A \subset (0;1] \times [0;\infty)$ обозначим

$$N_n^*(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{\,(i/n, u_n^{-1}(X_i)) \in A\,\}\,. \tag{3.7}$$

Заметим, что $N_{[sn]}(u_n(t)) = N_n^*((0;s] \times [0;t))$.

Обозначим через N^* сложно-пуассоновский точечный процесс на $(0;1]\times[0;\infty)$ с лебеговой мерой интенсивности и распределением кластера $\mathcal{L}(\zeta)$. Заметим, что

$$Q(t) \stackrel{d}{=} N^*((0;1] \times [0;t))\,.$$

Теорема 3.4 *Пусть выполнено условие перемешивания* Δ. *Тогда*

$$N_n^* \Rightarrow N^*\,, \tag{3.8}$$

если и только если условие C *выполнено.*

Многомерная версия условия Лидбеттера (D') утверждает, что

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{r} \mathbb{P}(X_{i+1} > u_n(t), X_1 > u_n(t)) = 0 \qquad (D'_+)$$

для любой последовательности $\{r = r_n\} \in \mathcal{R}(t)$, $0 < t < \infty$. Нетрудно проверить, что (D'_+) влечёт условие C с $\zeta \equiv 1$. Поэтому из теоремы 3.4 вытекает следующий результат.

Следствие 3.5 [2] *Если условия Δ и (D'_+) выполнены, то N_n^* слабо сходится к пуассоновскому точечному процессу.*

Пример 3.1. Пусть $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ – последовательность н.о.р.с.в. с экспоненциальным распределением $\mathbf{E}(1)$, и пусть

$$X_i = Y_i + Y_{i+1}\,.$$

Очевидно, $\{X_i, i \geq 1\}$ – стационарная последовательность 1–зависимых с.в. и

$$\mathbb{P}(X > u) = (u+1)e^{-u} \qquad (u \geq 0)\,.$$

Покажем, что условие C выполнено с $\zeta = 1$. Действительно,

$$\mathbb{P}(X_1 > u, X_2 > u) = e^{-u} + \int_0^u e^{-y}\mathbb{P}^2(Y + y > u)dy = 2e^{-u} - e^{-2u}\,.$$

В частности,

$$\mathbb{P}(X_1 > u, X_2 > u)/\mathbb{P}(X > u) \to 0$$

при $u \to \infty$. Пусть $r \in \{1, \ldots, n\}$. По неравенству Бонферрони,

$$\mathbb{P}(N_r(u) > 0) \geq r\mathbb{P}(X > u) - (r\mathbb{P}(X > u))^2 - r\mathbb{P}(X_1 > u, X_2 > u)\,.$$

Кроме того, $\mathbb{P}(N_r(u) > 0) \leq r\mathbb{P}(X > u)$. Поэтому

$$\mathbb{P}(N_r(u) > 0) \sim r\mathbb{P}(X > u)$$

при $r\mathbb{P}(X > u) \to 0$. В частности, экстремальный индекс равен 1.

Пусть $u \equiv u_n(t) = \ln[t^{-1} n \ln n]$, $t > 0$. Тогда $\mathbb{P}(X > u) \sim t/n$. Следовательно, (2.34) и (2.33) выполнены. Более того,

$$\begin{aligned} n\sum_{i=1}^{r}\mathbb{P}(X_{i+1}>u, X_1>u) &= n\mathbb{P}(X_2>u, X_1>u) + n(r-1)\mathbb{P}^2(X>u) \\ &= o\,(n\mathbb{P}(X>u)) \to 0 \qquad (t > 0), \end{aligned}$$

если $r\mathbb{P}(X > u) \to 0$. Поэтому условие (D'_+) выполнено. По следствию 3.5,

$$N_n^* \Rightarrow N^*,$$

где N^* – пуассоновский точечный процесс с Лебеговой мерой интенсивности. $\square$

Пример 3.2. Пусть $\{\xi_i\}, \{\alpha_i\}$ – независимые последовательности н.о.р.с.в., $\mathbb{P}(\xi_i \leq x) = F(x)$ и $\alpha_i \in \mathbf{B}(\theta)$, где $\theta \in (0;1)$. Положим $X_1 = \xi_1$, и пусть

$$X_i = \alpha_i \xi_i + (1 - \alpha_i) X_{i-1} \qquad (i \geq 2)\,. \tag{3.9}$$

Тогда $\{X_i, i \geq 1\}$ является стационарной последовательностью с.в. с маргинальной ф.р. F, распределение кластера является геометрическим со средним $1/\theta$ и экстремальный индекс равен θ [269, 409].

Отметим, что последовательность $\{X_i, i \geq 1\}$ удовлетворяет условию $\varphi-$перемешивания и

$$\varphi(k) \leq (1-\theta)^{k+1} \qquad (k \geq 1)\,.$$

Действительно, предположим, что $A \in \sigma\{X_1, \ldots, X_m\}$, $B \in \sigma\{X_{m+k+1}, \ldots\}$, и пусть Z есть длина серии нулей, начинаюшаяся с α_{m+1} (мы полагаем $Z = 0$, если $\alpha_{m+1} = 1$). Тогда событие $B \cap \{Z \leq k\}$ не зависит от $\sigma\{X_1, \ldots, X_m\}$. Следовательно, $\mathbb{P}(B, Z \leq k | A) = \mathbb{P}(B, Z \leq k)$ и

$$\mathbb{P}(B, Z > k | A) \leq \mathbb{P}(Z > k | A) = \mathbb{P}(\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k+1} = 0) = (1-\theta)^{k+1}\,.$$

Далее,

$$\mathbb{P}(M_n \leq u) = F(u)\mathbb{E}(1-p)^N = F(u)(1-\theta p)^{n-1}\,,$$

где $N = \sum_{i=2}^n \alpha_i$ – с.в. с биномиальным распределением $\mathbf{B}(n-1, \theta)$ и $p = 1 - F(u)$.

Обозначим $K^* = \sup\{x : F(x) < 1\}$, и предположим, что

$$\mathbb{P}(X \geq x)/\mathbb{P}(X > x) \to 1 \tag{3.10}$$

при $x \to K^*$. Согласно теореме 1.7.13 в [212], существует последовательность $\{u_n\}$, такая что $n\mathbb{P}(X > u_n) \to 1$. Положим $u_n(t) = u_{[\theta n/t]}$. Тогда

$$\mathbb{P}(X > u_n(s)) \sim s/n\theta\,,\ \mathbb{P}\left(N_r(u_n(s)) > 0\right) \sim sr/n$$

и $\{u_n(t)\}$ удовлетворяет (2.33).

Проверим условие C. Пусть $s < t < v$. Условие (b) следует из оценки

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N_r[u_n(t); u_n(v)) > 0, N_r[u_n(s); u_n(t)) > 0) \\ &\leq r^2 \mathbb{P}(u_n(v) < \xi \leq u_n(t)) \mathbb{P}(u_n(t) < \xi \leq u_n(s)) = O((r/n)^2)\,.\end{aligned}$$

Случайных величины $\{X_i, \ldots, X_{i+m}\}$ образуют кластер размера m, если $\alpha_i = 1, \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_{i+m-1} = 0, \alpha_{i+m} = 1$. Обозначим $W = \mathbb{I}_1 + \sum_{i=2}^r \alpha_i \mathbb{I}_i$, где

$\mathbb{I}_i = \mathbb{I}\{\xi_i \in (u_n(t); u_n(s)]\}$. Асимптотически, только один кластер среди $X_1, \ldots, X_r$ может содержать попадание в интервал $(u_n(t); u_n(s)]$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_r[u_n(s); u_n(t)) = j) \sim \mathbb{P}(N_r[u_n(s); u_n(t)) = j, N_r(u_n(s)) = 0) \\
&= \mathbb{P}(N_r[u_n(s); u_n(t)) = j, N_r(u_n(s)) = 0, W = 1) + O((r/n)^2) \\
&\sim r\theta^2(1-\theta)^{j-1}\mathbb{P}(u_n(t) < \xi \le u_n(s)) \sim (t-s)\mathbb{P}(\zeta = j)r\theta/n\,,
\end{aligned}$$

где $\mathcal{L}(\zeta) = \mathbf{\Gamma}(1-\theta)$. Таким образом, условие (a) выполнено, и теорема 3.4 влечёт слабую сходимость $N_n^* \Rightarrow N^*$, где N^* – сложно-пуассоновский точечный процесс с лебеговой мерой интенсивности и распределением кластера $\mathbf{\Gamma}(1-\theta)$.

3.3 Одномерный ПВВУ в общем случае

В предыдущих разделах были установлены необходимые и достаточные условия слабой сходимости ПВВУ к сложно-пуассоновскому процессу. Однако семейство $\mathcal{P}'$ предельных распределений процесса $\{N_n(u_n(\cdot))\}$ шире, чем класс распределений сложно-пуассоновских процессов.

В данном разделе устанавливаются необходимые и достаточные условия слабой сходимости одномерного ПВВУ к заданному элементу P' класса $\mathcal{P}'$. Мы показываем, что каждый процесс $P' \in \mathcal{P}'$ есть сумма пуассонова числа скачкообразных процессов.

Напомним, что имеет место взаимнооднозначное соответствие между одномерными точечными процессами и скачкообразными процессами. К примеру, процесс (3.1) можно представить как скачкообразный процесс $\{N_{[sn]}(u_n),\ s \in (0;1]\}$. Он описывает месторасположение экстремумов (выходов за уровень u_n).

ПВВУ $\{N_n\left(u_n(t)\right), t \in [0;T]\}$ описывает размахи выходов. Нам представляется удобным представлять его как скачкообразный процесс.

Для произвольного фиксированного положительного числа T будем рассматривать асимптотику распределения скачкообразного процесса

$$\{N_{[sn]}(u_n(t)), t \in [0;T]\}\,.$$

В этом разделе мы предполагаем выполненым условие Δ.

Пусть $\{\pi_\lambda(s), s \ge 0\,\}$ – пуассоновский процесс с параметром λ. Обозначим

$$\mathbb{R}_m = \{\bar{t} \in \mathbb{R}^m : 0 < t_1 < \ldots < t_m < \infty\}\,,\ \mathbb{R}_m^1 = \{\bar{t} \in \mathbb{R}_m : t_m = 1\}\,,$$

где $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_m)$. В теоремах 3.6 и 3.7 s и T – фиксированные положительные числа, $r = r_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$, случайные вектор $\zeta(\bar{t}, n)$ определён в (2.41).

Теорема 3.6 *Предположим, что существует скачкообразный процесс* $\{\gamma(t), t \in [0;1]\}$ *со стохастически непрерывными траекториями, такой что для произвольных* $m \ge 1$ *и* $\bar{t} \in \mathbb{R}_m^1$

$$\zeta(\bar{t}, n) \Rightarrow (\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)) \tag{3.11}$$

для некоторой последовательности $\{r = r_n\} \in \mathcal{R}(\bar{t})$. *Тогда для любых* $s > 0, T > 0$,

$$\{N_{[sn]}(u_n(tT)), t \in [0;1]\} \Rightarrow \{N_{_T}(s,t), t \in [0;1]\}\,, \tag{3.12}$$

где

$$N_{_T}(s,t) = \sum_{j=1}^{\pi_{_T}(s)} \gamma_j(t)\,, \tag{3.13}$$

$\{\gamma_j(\cdot), 0 \le t \le 1\}$ – *независимые копии* $\gamma(\cdot)$ *и* $\pi_T(s)$ *не зависит от* $\{\gamma_j(\cdot)\}$. *Для процесса (3.13) имеет место соотношение*

$$N_T(as,\cdot) \stackrel{d}{=} N_T(s,a\cdot) \qquad (\forall a \in [0;1])\,. \tag{3.14}$$

Очевидно, (3.12) может быть переписан следующим образом:

$$\{N_{[sn]}(u_n(t))\,,\, t \le T\} \Rightarrow \left\{ \sum_{j=1}^{\pi_{_T}(s)} \gamma_j(t/T)\,,\, t \le T \right\}. \tag{3.12*}$$

Процесс (3.13) может быть назван *кластер-пуассоновским процессом.* В то время как случайные величины ζ описывает предельное распределение размера кластера, процесс γ описывает вариации размаха элементов кластера.

Пример 3.3. Пусть $\{X_i, i \ge 1\}$ – н.о.р.с.в., удовлетворяющие (3.10). Можно положить $l = 0$, $r = 1$ и $u_n(t) = F_c^{-1}(t/n)$, так что $\{N_n(u_n(\cdot)), t \in [0;1]\}$ слабо сходится к чисто пуассоновскому процессу N, который допускает представление

$$N \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\pi(1)} \gamma_j(\cdot), \tag{3.15}$$

где $\gamma_j(t) \stackrel{d}{=} 1\!\!1\{\xi < t\}$ и ξ имеет равномерное распределение $\mathbf{U}[0;1]$. $\square$

Теорема 3.7 *Если* $\{N_n(u_n(t)), t \in [0;T]\}$ *слабо сходится к скачкообразному процессу, то существует скачкообразный процесс* $\{\gamma(t), t \in [0;1]\}$ *со стохастически непрерывными траекториями, такой что имеют место (3.11) и (3.12*). Маргинальные распределения процесса* γ *удовлетворяют соотношению*

$$\gamma(t) \stackrel{d}{=} Z(t) \qquad (0 \le t \le 1)\,, \tag{3.16}$$

где случайные величины $\{Z(t)\}$ *определены в (2.47).*

Теоремы 3.6 и 3.7 показывает, что класс $\mathcal{P}'$ возможных предельных распределений процесса $\{N_n(u_n(t)), t \in [0;T]\}$ образован распределениями процессов $\sum_{j=1}^{\pi(T)} \gamma_j(\cdot/T)$, где

$$\{\pi(t), t \geq 0\}$$

– пуассоновский процесс с параметром 1, а $\gamma(\cdot)$ – скачкообразный процесс на $[0;1]$ со стохастически непрерывными траекториями, такой что $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) \in \mathbb{N}$ с вероятностью 1.

Точность аппроксимации. Рассмотрим задачу аппроксимации распределения ПВВУ $\{N_n(u_n(t)), 0 \leq t \leq T\}$, где T – фиксированное положительное число и $u_n(\cdot)$ – нормируюшая функция. Для любого $r \in \{1, \ldots, n\}$ положим

$$k = [n/r]\,,\ r' = n - kr\,,\ p = \mathbb{P}(X > u_n(T))\,,\ q = \mathbb{P}(N_r(u_n(T)) > 0),$$

где $[y]$ обозначает целую часть y. Пусть $\gamma(\cdot), \gamma_1(\cdot), \ldots$ – н.о.р. скачкообразные процессы с распределением

$$\mathcal{L}\left(\gamma(\cdot)\right) = \mathcal{L}\Big(N_r(u_n(\cdot)) \Big| N_r(u_n(T)) > 0\Big)\,, \tag{3.17}$$

π – пуассонова $\mathbf{\Pi}(kq)$ случайная величина, независимая от $\{\gamma_i(\cdot), i \geq 1\}$.

Теорема 3.8 *Для любых* $n \geq r > l \geq 0$,

$$d_{TV}\Big(N_n(u_n(\cdot)); \sum_{i=1}^{\pi} \gamma_i(\cdot/T)\Big) \leq (1 - e^{-np})rp + r'p + 2npl/r + (n/r)\beta(l)\,. \tag{3.18}$$

Замечание 3.1. Множитель $(1 - e^{-np})rp$ в (3.18) заимствован из (2.1); вместо неравенства (2.1) можно применить любую другую оценку расстояния по вариации между биномиальным и пуассоновым распределениями.

Если $\{X_i\}$ – н.о.р.с.в., то (3.18) с $l = 0$ и $r = 1$ становится

$$d_{TV}\Big(N_n(u_n(\cdot)); \sum_{i=1}^{\pi(np)} \eta_i(\cdot/T)\Big) \leq (1 - e^{-np})p\,,$$

где $\pi(np)$, $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ – независимые с.в., $\mathcal{L}(\pi(np)) = \mathbf{\Pi}(np)$, $\eta_i \stackrel{d}{=} \eta\ (\forall i)$ и распределение $\mathcal{L}(\eta(s)) = \mathcal{L}(\mathbb{1}\{X > u_n(sT)\} | X > u_n(T))$ сходится к $\mathbf{U}[0;1]$. Обозначим

$$F_c(x) = \mathbb{P}(X > x).$$

Если F_c – непрерывная убывающая функция, $u_n(t) = F_c^{-1}(t/n)$ и $\mathcal{L}(\xi) = \mathbf{U}[0;1]$, то

$$\eta(t) \stackrel{d}{=} \mathbb{1}\{\xi < t\} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Если $\{X_i\}$ – m-зависимые, то (3.18) с $l = m$ и $r = \lceil \sqrt{mn}\, \rceil$ влечёт

$$d_{TV}\Big(N_n(u_n(\cdot)); \sum_{i=1}^{\pi} \gamma_i(\cdot/T)\Big) \le 4p\lceil \sqrt{mn}\, \rceil \,. \tag{3.19}$$

Пример 3.4. Пусть $X_i = Y_i \vee Y_{i+1}$ $(i \ge 1)$, где $Y_1, Y_2, \dots$ – н.о.р.с.в., и пусть $u_n(\cdot)$ – нормируюшая последовательность. Положим $r = \lceil \sqrt{2n}\, \rceil, N_r = N_r(T)$, и пусть $\gamma(\cdot), \gamma_1(\cdot), \dots$ – н.о.р. скачкообразные процессы с распределением (3.17). Заметим, что

$$\mathbb{P}(\exists^1 i \le r{+}1 : Y_i > u_n(T) | N_r > 0) = 1{-}O(rp)$$

и

$$\mathbb{P}(N_r > 0) = (r{+}1)p_0(1{+}O(rp))\,,\ \mathbb{P}(N_r = 2) = (r{-}1)p_0(1{+}O(rp))\,,$$

где $p_0 := \mathbb{P}(Y_i > x) = 1 - \sqrt{1{-}p}$. Поэтому $\mathbb{P}(N_r = 2 | N_r > 0) = 1{-}O(rp + 1/r)$ и

$$d_{TV}(\gamma(\cdot); 2\eta(\cdot)) = d_{TV}(\zeta; 2) = O(rp + 1/r),$$

где $\zeta = \gamma(1)$. Применение (3.19) с $m = 2$ влечёт

$$d_{TV}\Big(N_n(u_n(\cdot)); \sum_{i=1}^{\pi} \gamma_i(\cdot/T)\Big) \le 4p\lceil \sqrt{2n}\, \rceil \,.$$

Поскольку $d_{TV}(\sum_{i=1}^{\pi} \gamma_i(\cdot); 2\sum_{i=1}^{\pi} \eta_i(\cdot)) \le kq d_{TV}(\gamma(\cdot); 2\eta(\cdot)) = O(np(rp{+}1/r))$, выводим

$$d_{TV}\Big(N_n(u_n(\cdot)); 2\sum_{i=1}^{\pi} \eta_i(\cdot/T)\Big) = O\Big(p\sqrt{n} + p^2 n^{3/2}\Big).$$

3.4 Слабая сходимость ПВВУ в общем случае

В данном разделе описывается класс $\mathcal{P}$ возможных предельных распределений двумерных ПВВУ. Представлены необходимые и достаточные условия слабой сходимости ПВВУ к заданному элементу $P \in \mathcal{P}$.

Рассмотрим интервал $(u_n(T); \infty)$. Уровень $u_n(T)$ можно считать минимальным, при котором X_i считается “экстремальным”, если $X_i > u_n(T)$.

Пусть $\{\gamma(t), 0 \le t \le 1\}$ – скачкообразный процесс. Определим двумерный процесс

$$N_T^\star \equiv N_{T,\gamma}^\star$$

на $(0;1] \times [0;1)$ как точечный процесс со следующими свойствами (очевидно, что достаточно определить $N_T^\star$ на объединениях прямоугольников):

(P1) $N_T^\star$ имеет независимые приращения вдоль горизонтальной оси,

(P2) $N_T^\star((a;b] \times B) \stackrel{d}{=} N_T^\star((0;b{-}a] \times B)$ для любого борелева множества $B \subset [0;1)$,

(P3) $\{N^\star_{T}((0;a]\times[0;t)),\, t\in[0;1)\} \overset{d}{=} \{N_{T}(a,t),\, t\in[0;1)\}$.
Принимая во внимание (3.13), $N^\star_{T}$ может рассматриваться как случайная мера

$$N^\star_{T}(A) = \int_A N^\star_{T}(dx\times dy)\,,$$

где A – борелево множество в $(0;1]\times[0;1)$ и

$$N^\star_{T}(dx\times dy) = \sum_{\pi_T(x)<j\le\pi_T(x+dx)} (\gamma_j(y+dy)-\gamma_j(y))\,.$$

Процесс $N^\star_{T}$ представляется естественным обобщением сложно-пуассоновского процесса.

Определим ПВВУ $N^\star_{n,T}$ на $(0;1]\times[0;1)$ равенством

$$N^\star_{n,T}(A) = \sum_{i=1}^{n} 1\!\!\mathrm{I}\{(i/n, T^{-1}u_n^{-1}(X_i))\in A\} \tag{3.20}$$

для любого борелева множества $A\subset(0;1]\times[0;1)$.

Мори и Хсин [244, 175] охарактеризовали класс предельных распределений ПВВУ $N^*_n = N^\star_{n,1}$ в терминах двумерных точечных процессов следующим образом. Предположим, что выполнено условие перемешивания Δ^* и

$$\lim_{s\to 0,\, t\to\infty} \mathbb{P}(u_n(t)<X<u_n(s)) = 1$$

для всех достаточно больших n. Если N^*_n слабо сходится к некоторому точечному процессу N^*, то N^* – безгранично делимый процесс со свойствами
(1) $N^*\circ g_t \overset{d}{=} N^* \quad (t>0)$, где $g_t(x,y)=(x+t,y)$,
(2) $N^*\circ h_s \overset{d}{=} N^* \quad (s>0)$, где $h_s(x,y)=(x/s,ys)$,
(3) $\mathbb{P}(N^*((0;\varepsilon)\times(0;1))\to 0$ при $\varepsilon\to 0$,
(4) N^* имеет независимые приращения вдоль горизонтальной оси,
допускающий представление

$$N^*(\cdot) = \sum_{i\ge 1}\sum_{j=1}^{K_i} 1\!\!\mathrm{I}\{(Y_i, Z_i\kappa_{ij})\in\cdot\}\,,$$

где $\{(Y_i,Z_i), i\ge 1\}$ – точки скачков двумерного пуассоновского точечного процесса η^* с Лебеговой мерой интенсивности, $\{\kappa_{ij}, 1\le j\le K_i\}$ – точки точечного процесса κ_i на $[1;\infty)$, $\kappa_i \overset{d}{=} \kappa$ $(i\ge 1)$, процесс κ имеет атом в точке 1, процессы $\eta^*,\kappa_1,\kappa_2,\dots$ взаимно независимы [244, 175].

Теорема 3.9 и следствие 3.10 установливают, что класс предельных процессов для $N^\star_{n,T}$ есть класс процессов $N^\star_{T,\gamma}$. Отметим, что процессы $N^\star_{T,\gamma}$ образованы одномерными точечными процессами.

Теорема 3.9 *Предположим, что выполнено условие* Δ. *Если существует скачкообразный процесс* $\{\gamma(t), t \in [0;1]\}$ *со стохастически непрерывными траекториями, такой что (3.11) выполнено, то*

$$N^\star_{n,T} \Rightarrow N^\star_{T,\gamma} \,. \tag{3.21}$$

Из теоремы 3.7 и теоремы 3.9 выводим

Следствие 3.10 *Предположим, что выполнено условие перемешивания* Δ. *Если* $N^\star_{n,T}$ *слабо сходится к точечному процессу* $N^\star$, *то тогда существует скачкообразный процесс* $\{\gamma(t), t \in [0;1]\}$ *со стохастически непрерывными траекториями, такой что (3.11) выполнено и* $N^\star = N^\star_{T,\gamma}$.

3.5 Доказательства

Доказательство теоремы 3.1. Предположим, что $N_n(\cdot, u_n)$ слабо сходится к точечному процессу N. Условие $\Delta(\{u_n\})$ означает, что приращения процесса $N_n(\cdot, u_n)$ асимптотически независимы. Поэтому приращения процесса $N(\cdot)$ также независимы.

Теорема 2.9 влечёт (3.2) и (2.22), откуда $N((a;b]) \in \mathbf{\Pi}(\lambda(b-a), \zeta)$. Следовательно, $N(\cdot)$ есть сложно-пуассоновский точечный процесс с параметром интенсивности λ и распределением кластера $\mathcal{L}(\zeta)$.

Предположим теперь, что имеют место (3.2) и (2.22). Чтобы доказать (3.3), достаточно показать, что $N_n(A, u_n) \Rightarrow N(A)$ для любого объединеня интервалов $A = \cup(a_i; b_i]$.

Мы можем считать, что интервалы $(a_i; b_i]$ не пересекаются и $b_i < a_{i+1}$ $(\forall i)$. Поскольку приращения $N_n((a_i; b_i], u_n)$ асимптотически независимы и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(N_n((a;b], u_n) = m) = \mathbb{P}(N((a;b]) = m) \qquad (\forall m) \tag{3.22}$$

по теореме 2.9, конечномерные распределения N_n слабо сходятся к конечномерным распределениям N. Таким образом, имеет место (3.3). □

Доказательство теоремы 3.4. Если (3.8) выполнено, то (2.36) имеет место для любого $\bar{t} \in \mathbb{R}_k$, и условие C выполнено.

Предположим теперь, что выполнено условие C. Нужно показать, что

$$\{N^*_n(A_1), \ldots, N^*_n(A_k)\} \Rightarrow \{N^*(A_1), \ldots, N^*(A_k)\} \tag{3.23}$$

для любых борелевых множеств $\{A_1, \ldots, A_k\}$ на $(0;1] \times [0;\infty)$. Учитывая [196], глава 4, достаточно доказать (3.23) в случае, когда множества $\{A_i\}$ являются конечными объединенями прямоугольников. Разбивая прямоугольники надлежащим образом, убеждаемся, что достаточно доказать (3.23) для случая $A_i =$

$(a_i;b_i]\times\bigcup\limits_{j=1}^{m_i}[c_{ij};d_{ij})$, где интервалы $(a_i;b_i]$ не пересекаются, и для каждого i интервалы $[c_{ij};d_{ij})$ также не пересекаются. Стандартные аргументы метода блоков влекут, что случайные величины $\{N_n^*(A_i)\}$ асимптотически независимы.

Остаётся показать, что

$$N_n^*(A)\Rightarrow N^*(A) \tag{3.24}$$

для любого $A=(a;b]\times\bigcup\limits_{j=1}^{m}[c_j;d_j)$. Но (3.24) получено в теореме 2.11 — хотя (2.36) доказано для случая $(a;b]=(0;1]$, аргументы очевидно применимы к произвольному интервалу $(a;b]\subset(0;1]$. Доказательство завершено. □

Теорема 3.2 является следствием теоремы 3.4 и леммы 2.22.

Доказательство следствия 3.5. Отметим, что (D'_+) влечёт (b): если $t_1<t_2<t_3$, то

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_r(u_n(t_2);u_n(t_1)]>0, N_r(u_n(t_3);u_n(t_2)]>0)\\
&\leq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{1\leq i<j\leq r}\{X_i>u_n(t_3),X_j>u_n(t_3)\}\Big)\\
&\leq r\sum_{1\leq i\leq r}\mathbb{P}(X_{i+1}>u_n(t_3),X_1>u_n(t_3))=o(r/n)\,.
\end{aligned}$$

Аналогично, (D'_+) влечёт $\mathbb{P}(N_r(u_n(t_2);u_n(t_1)]>1)=o(r/n)$. Итого, (D'_+) влечёт (a) с $\zeta=1$. Действительно, положим $u_n=u_n(t_1), v_n=u_n(t_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_r[u_n;v_n)=1)\sim\mathbb{P}(N_r[u_n;v_n)=1,N_r(u_n)=0)\\
&=\mathbb{P}(N_r(v_n)=1)-\mathbb{P}(N_r[u_n;v_n)=0,N_r(u_n)=1)\\
&\sim\mathbb{P}(N_r(v_n)>0)-\mathbb{P}(N_r(u_n)>0)\sim(t_2-t_1)r/n
\end{aligned}$$

ввиду (b) и (2.34). Поэтому условие (a) выполнено с $\zeta=1$. Теорема 3.4 влечёт слабую сходимость N_n^* к пуассоновскому точечному процессу. □

Доказательство теоремы 3.6. Обозначим $N_{\scriptscriptstyle T}(s,\bar t\,)=\{N_{\scriptscriptstyle T}(s,t_1),\dots,N_{\scriptscriptstyle T}(s,t_m)\}$. Соотношение (3.11) означает, что (2.43) выполнено с $\zeta(\bar t\,)\stackrel{d}{=}(\gamma(t_1),\dots,\gamma(1))$. Утверждение 2.12 и теорема 2.13 влекут

$$\big\{N_{[sn]}(u_n(Tt_1)),\dots,N_{[sn]}(u_n(T))\big\}\Rightarrow\{N_{\scriptscriptstyle T}(s,t_1),\dots,N_{\scriptscriptstyle T}(s,1)\}$$

для каждого $\bar t\in\mathbb{R}^1_m$. Поэтому конечномерные распределения процесса $\{N_{[sn]}(u_n(tT)),$ $t\in[0;1]\}$ сходятся к конечномерным распределениям $\{N_{\scriptscriptstyle T}(s,t)\,,t\in[0;1]\}$. Это влечёт слабую сходимость (3.12).

Чтобы проверить (3.14), мы покажем, что конечномерные распределениями процессов совпадают:

$$\left\{\sum_{j=1}^{\pi_T(as)} \gamma_j(t_1), \ldots, \sum_{j=1}^{\pi_T(as)} \gamma_j(t_m)\right\} \stackrel{d}{=} \left\{\sum_{j=1}^{\pi_T(s)} \gamma_j(at_1), \ldots, \sum_{j=1}^{\pi_T(s)} \gamma_j(at_m)\right\}. \tag{3.25}$$

Ввиду (2.46), левая часть (3.25) есть слабый предел $N_n(asn, T\bar{t})$. Пусть $\tilde{t} = \{a\bar{t}, 1\}$. Тогда $N_n(sn, T\tilde{t}) \Rightarrow N_{\scriptscriptstyle T}(s, \tilde{t})$ и, следовательно, $N_n(sn, Ta\bar{t}) \Rightarrow N_T(s, a\bar{t})$, правой части (3.25). Согласно теореме 2.13, $N_n(asn, T\bar{t})$ и $N_n(sn, Ta\bar{t})$ слабо сходятся к одному и тому же распределению. Это влечёт (3.25) и, следовательно, (3.14). □

Доказательство теоремы 3.7. Предположим, что процесс $N_n(u_n(\cdot))$ слабо сходится к некоторому скачкообразному процессу P. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}^1_m$. Тогда

$$(N_n(u_n(t_1)), \ldots, N_n(u_n(1))) \Rightarrow (P(t_1), \ldots, P(1)) . \tag{3.26}$$

Теорема 2.13 и (3.26) влекут (2.43). Сравнение (2.46) с (3.26) влечёт $P(\cdot) \stackrel{d}{=} N_1(1, \cdot)$. Более того, из (2.43) и (2.46) выводим

$$\big(N_{[sn]}(u_n(Tt_1)), \ldots, N_{[sn]}(u_n(T))\big) \Rightarrow (N_T(s, t_1), \ldots, N_T(s, 1)) \tag{3.27}$$

для всех $s > 0, T > 0$.

Поскольку распределения (2.42) согласованны, таковы и распределения $\zeta(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbb{R}^1_m$, $m \geq 1$. По теореме Колмогорова, существует процесс $\gamma = \{\gamma(t), t \in [0;1]\}$, такой что $\{\mathcal{L}(\zeta(\bar{t})), \bar{t} \in \mathbb{R}^1_m\}_{m \geq 1}$ – конечномерные распределения γ. Очевидно, что γ – скачкообразный процесс. Слабая сходимость (3.12) следует из (3.27) и утверждения 3.11.

Чтобы показать, что $\gamma(t) \stackrel{d}{=} Z(t)$ для любого $t \in [0;1]$, напомним, что

$$N_n(n, t) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\pi(t)} \zeta_j \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\pi(1)} Z_j(t) .$$

Кроме того, $N_n(n, \bar{t}) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\pi(1)} \bar{\zeta}_j$, где $\bar{t} = (t, 1)$ и $\bar{\zeta}_j = (\gamma_j(t), \gamma_j(1))$. Следовательно,

$$N_n(u_n(t)) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\pi(1)} \gamma_j(t).$$

Поэтому $\sum_{j=1}^{\pi(1)} Z_j(t) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\pi(1)} \gamma_j(t)$, что влечёт (3.16). □

Лемма 3.11 *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.7. Если имеет место (3.11), то траектории процесса γ стохастически непрерывны на $[0;1]$.*

Доказательство леммы 3.11. Определим случайную меру $\Gamma\{\cdot\}$ равенством

$$\Gamma\{[s;t)\} = \gamma(t) - \gamma(s) \qquad (0 \le s < t \le 1) \tag{3.28}$$

(Γ определена на интервалах в $[0;1]$ и тем самым на всех борелевых множествах в $[0;1]$). Заметим, что (3.28) устанавливает взаимнооднозначное соответствие между $\gamma(\cdot)$ и точечным процессом Γ (если задан точечный процесс Γ на $[0;1]$, то можно определить скачкообразный процесс $\{\gamma(t), t \in [0;1]\}$ равенством $\gamma(t) = \Gamma\{[0;t)\}$. Утверждение леммы 3.11 может быть переписано как

$$\mathbb{P}(\Gamma\{t\} > 0) = 0 \qquad (\forall t \in [0;1])\,. \tag{3.29}$$

Очевидно, что $\gamma(0) = 0$. Тот факт, что $\mathbb{P}(\Gamma\{0\} > 0) = 0$ (иначе говоря, $\mathbb{P}(\gamma(s) > 0) \to 0$ при $s \to 0$), следует из (3.16).

Пусть $t \in (0;1]$. Если $\mathbb{P}(\Gamma\{t\} > 0) > 0$, то (2.49) влечёт

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\nu_n(\sigma t-, \sigma t+) > 0) \ &\to \ \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{\pi(\sigma t)} \Gamma_j\{t\} > 0\right) \\ &= \ 1 - \exp(-\sigma t \mathbb{P}(\Gamma\{t\} > 0)) > 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

для каждого $\sigma \in (0;1]$, где $\{\Gamma_j, j \ge 1\}$ – независимые копии Γ.

Обозначим через γ_t слабый предел скачкообразного процесса $\{N_n(u_n(\sigma t)), \sigma \in (0;1]\}$, и пусть Γ_t – соответствующий точечный процесс. Соотношение (3.30) означает, что множество $\{\sigma : \mathbb{P}(\Gamma_t\{\sigma\} > 0) > 0\}$ не счётное. Это противоречит утверждению 1.1.5 в [230]. Следовательно, (3.29) выполнено. □

Доказательство теоремы 3.8 повторяет аргументы доказательства теоремы 2.10.

Доказательство теоремы 3.9. Согласно лемме 3.11, $\mathbb{P}(N_T^\star((0;1] \times \{b\}) > 0) = 0$ для любого $b \in [0;1)$. Ввиду (2.32),

$$\mathbb{P}(N_T^\star(\{0\} \times [0;1)) > 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(N_{[\varepsilon n]}(u_n(T)) > 0\right) = 0$$

Так как $\{X_i, i \ge 1\}$ – стационарная последовательность, $\mathbb{P}(N_T^\star(\{a\} \times [0;1)) > 0) = 0$ для любого $a \in (0;1]$. Поэтому $\mathbb{P}(N_T^\star(\partial A) > 0) = 0$, если A – прямоугольник в $(0;1] \times [0;1)$. Соотношение (3.21) будет установлено, если мы покажем, что

$$\{N_{n,T}^\star(A_1), \ldots, N_{n,T}^\star(A_k)\} \Rightarrow \{N_T^\star(A_1), \ldots, N_T^\star(A_k)\} \tag{3.31}$$

для любого конечного объединения интервалов $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

Разбивая прямоугольники надлежащим образом, убеждаемся, что достаточно доказать (3.31) в случае $A_i = (a_i; b_i] \times \bigcup_{j=1}^{m_i} [c_{ij}; d_{ij})$, где интервалы $(a_i; b_i]$ не пересекаются, и для каждого i интервалы $[c_{ij}; d_{ij})$ также не пересекаются.

Ввиду свойства (P1), случайные величины $\{N^\star_{\scriptscriptstyle T}(A_i)\}$ не зависимы. Повторяя стандартные аргументы метода блоков, убеждаемся, что случайные величины $\{N^\star_{n,T}(A_i)\}$ асимптотически не зависимы. Поэтому остаётся показать, что

$$N^\star_{n,T}(A) \Rightarrow N^\star_{\scriptscriptstyle T}(A) \tag{3.32}$$

для любого множества $A = (a;b] \times \bigcup_{j=1}^{m} [c_j;d_j) \subset (0;1] \times [0;1)$, где интервалы $[c_j;d_j)$ не пересекаются.

Теорема 3.6 устанавливает (3.32) в случае $(a;b] = (0;s]$; аргументы справедливы и для произвольного интервала $(a;b] \subset (0;1]$. $\square$

Глава 4

Оценивание характеристик распределений с тяжёлыми хвостами

Глава 4 посвящена задачам статистического оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами. Распределение с тяжёлым хвостом принадлежит к одному их трёх типов предельных распределений для выборочного максимума. Актуальность указанной тематики связана также с приложениями к финансам и страховому делу, где наблюдения зачастую оказываются зависимыми, а их распределения имеют тяжёлый хвост. Тяжёлохвостовые распределения часто возникают при анализе цен акций, рыночных индексов, и т.п. (см. Луэнбергер [221], p. 302, и Эмбрехтс и др. [122], p. 404).

Задача оценивания экстремальных квантилей возникает при построении центрирующих последовательностей для выборочного максимума. В приложениях к финансам экстремальная квантиль является (с точностью до знака) мерой риска, известной как Value-at-Risk (VaR). К примеру, банк Голдман Сакс использует 5%–VaR; Ситигруп, Швейцарский Кредит, Дойче Банк и банк Дж.П. Морган Чэйс используют 1%–VaR. Близко связанной с VaR является другая мера риска, известная также как “условная VaR” (CVaR). Задача оценивания экстремальных квантилей имеет важные приложения к страховому делу. Так, один из методов определения страховых ставок основан на использовании экстремальных квантилей [195].

В диссертации предложены новые оценки показателя скорости убывания хвоста распределения, экстремальной квантили, вероятности выхода за высокий уровень, доказана их состоятельность и асимптотическая нормальность при минимальных ограничениях на коэффициенты перемешивания, построены подасимптотические доверительные интервалы, предложен и протестирован на моделированных и реальных финансовых данных алгоритм выбора управляющего параметра непараметрических оценок. В частности, показано, что по данным, имевшимся накануне рыночного краха в “чёрный понедельник” 19.10.1987, можно было предсказать величину возможного обвала.

Важным направлением в статистике экстремальных значений является тема нижних границ точности оценивания характеристик неизвестного распределения. Имеющаяся литература даёт лишь частичное решение указанной задачи: найден порядок скорости убывания нижней границы, асимптотическая нижняя граница выводится при ограничениях на класс рассматриваемых оценок. В диссертации получены неасимптотические нижние границы точности оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами, выявлены соответствующие информационные функционалы.

4.1 Распределения с тяжёлыми хвостами

Говорят, что распределение имеет тяжёлый левый хвост, если

$$\mathbb{P}(X \le x) = L(x)|x|^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0), \tag{4.1}$$

где функция L медленно меняется на $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} L(xt)/L(x) = 1$ ($\forall t > 0$). Распределение имеет тяжёлый правый хвост, если

$$\mathbb{P}(X > x) = L(x)x^{-\alpha} \qquad (\alpha > 0), \tag{4.2}$$

где функция L медленно меняется на $+\infty$. Обозначим через $\mathcal{H}$ класс распределений с тяжёлым правым хвостом.

Соотношение (4.2) характеризует область притяжения к одному из классов предельных распределений выборочного максимума.

Число $\alpha = 1/a$ является показателем скорости убывания хвоста распределения. Если

$$L(x) = C + o(1) \qquad (C > 0),$$

то C называется константой хвоста распределения.

Класс распределений с тяжёлым правым хвостом является непараметрическим, что делает задачу оценивания характеристик распределения $\mathcal{L}(X)$ нетривиальной.

Специалисты до недавнего времени были пессимистичны по поводу возможности оценивания ПСУХР — см. Адрер [3], “ужас оценки Хилла” в [327], стр. 1839, замечание в работе Резника [328], стр. 144, Маркович [227], стр. 7, “ужас оценки максимального правдоподобия” в Эмбрехтс и др. [122], стр. 357, стр. 365, и замечание на стр. 406 в [122]: “Одно из наших основных выводов состоит в том, что очень трудно принять решение о величине ПСУХР”.

В финансовых приложениях меры риска m%-VaR и CVaR определены формулами

$$m\%\text{-VaR} = -F^{-1}(m/100)\,, \;\; E(y) = -\mathbb{E}\{X|X < y\},$$

где $y = m\%$-VaR.

Ниже мы предпочитаем иметь дело с положительными числами (в частности, мы говорим о “20.5% падении” индекса S&P500 в “чёрный понедельник” вместо “–20.5% прироста”): иными словами, мы переходим от X к $-X$. Тогда VaR определена как верхняя квантиль $F_c = 1 - F$:

$$q\text{-VaR} = F_c^{-1}(q).$$

4.2 Методы оценивания

В статистике экстремальных значений популярны следуюшие два метода построения оценок. Ряд оценок построены по элементам выборки, выходящим за высокий неслучайный уровень. Мы называем такие статистики оценками по методу ВВУ. Другие оценки построена по группе верхних порядковых статистик. Мы называем такие статистики оценками по методу ВПС.

И ВПС, и ВВУ-подходы к построению оценок используют не всю выборку, а лишь часть её (и, следовательно, соответствуюшие оценки зависят от дополнительнительного управляющего (“мешаюшего”) параметра). В то время как метод ВПС принимает во внимание элементы выборки, выходящие за уровень $X_{k,n}$ для некоторого $k < n$, метод ВВУ использует элементы выборки, выходящие за неслучайный уровень x.

С теоретической точки зрения, получение асимптотических результатов для оценок, построенных по ВПС методу, труднее, чем для ВВУ-оценок (особенно в случае зависимых наблюлений). Преимущество ВВУ-оценок связано с возможностью использования теории сумм зависимых с.в..

С практической точки зрения, график ВПС-оценки (к примеру, оценки Хилла) может подтолкнуть к неверному выводу, так как он отводит равные доли места наименее и наиболее значимым частям выборки (см. рис. 4.1). Напротив, график ВВУ-оценки (к примеру, RE-оценки) подавляет “незначимые” элементы выборки и уделяет основное внимание “значимым” (умеренным и большим) элементам выборки.

Рассмотрим этот вопрос на примере задачи оценивания ПСУХР.

Задача оценивания ПСУХР распределения (4.2) изучалась многими авторами [35, 84, 83, 87, 327, 375]. Она эквивалентна задаче оценивания индекса

$$a = 1/\alpha\,.$$

Ниже рассматривается последняя проблема.

Оценка

$$a_n^{RE} \equiv a_n^{RE}(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i/x)\mathbb{1}\{X_i > x\} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i > x\} \tag{4.3}$$

индекса a известна в литературе как RE-оценка (соответственно, $1/a_n^{RE}$ есть RE-оценка ПСУХР α).

RE-оценка была введена Голди и Смитом [150]. Она построена по тем элементам выборки, которые превышают неслучайный уровень x (управляющий параметр оценки), и является оценкой по методу ВВУ.

Если иметь дело с параметрическим семейством распределений Парето

$$\mathbb{P}(X > x) = x^{-1/a} \qquad (x \geq 1)\,, \tag{4.4}$$

то $a_n^{RE}(1) = n^{-1}\sum_{i=1}^n \ln X_i$ является оценкой максимального правдоподобия (ОМП), удовлетворяющей соотношению

$$(a_n^{RE}(1)/a - 1)\sqrt{n} \Longrightarrow \mathcal{N}(0;1)\,. \tag{4.5}$$

Статистика

$$a_n^{H}(k) \equiv a_n(X_{k+1,n}) = k^{-1}\sum_{i=1}^{k} \ln(X_{i,n}/X_{k+1,n})$$

известна как оценка Хилла; статистика $\alpha_n^H(k) = 1/a_n^H(k)$ есть оценка Хилла для ПСУХР. Она построена по методу ВПС.

Пример 4.1. С помощью генератора случайных чисел построена выборка из 500 независимых с.в. с распределением

$$\mathbb{P}(X \leq x) = 0.8\mathbb{P}(U \leq x) + 0.2\mathbb{P}(\xi \leq x)\,,$$

где с.в. U имеет равномерное распределение $\mathbf{U}[0;1]$ и $\mathbb{P}(\xi > x) = 1/x,\ x \geq 1$. Рис. 4.1 показывает графики оценки Хилла и RE-оценки для указанной выборки.

Поскольку оценка Хилла $a_n^H(k)$ состоятельна при $k = k(n) \to \infty,\ k/n \to 0$ (Мэйсон [229]), многое авторы считали, что $a_n^H(k)$ аппроксимирует истинное значение a в широком интервале значений управляющего параметра k. Средняя часть чертёжа оценки Хилла, соответствующая $k \in [160;280]$, выглядит стабильной, предлагая выбрать одно из соответствующих значений в качестве оценки a (рис. 4.1). Однако для $k \in [160;280]$ оценка Хилла a_k^H как функция k меняется в интервале [0.68;0.75], т.е. на расстоянии 25% – 32% от истинного значения.

Чертёж RE-оценки стабилен в интервале [1.2;8.7], сформированном 15% элементами выборки. Применяя предложенный в диссертации алгоритм выбора управляющего параметра, получим $a_n^{RE} = 0.96$. □

Пусть $M_{m,i}$ и $M_{m,i}^{(2)}$ – 1-й и 2-й выборочные максимумы $X_{(i-1)m+1},\dots,X_{im}$, $1 < m < n$, и обозначим

$$z_n(m) = \frac{1}{[n/m]}\sum_{i=1}^{[n/m]} M_{m,i}^{(2)}/M_{m,i}\,,\ \ a_n^{D}(m) = 1/z_n(m) - 1\,.$$

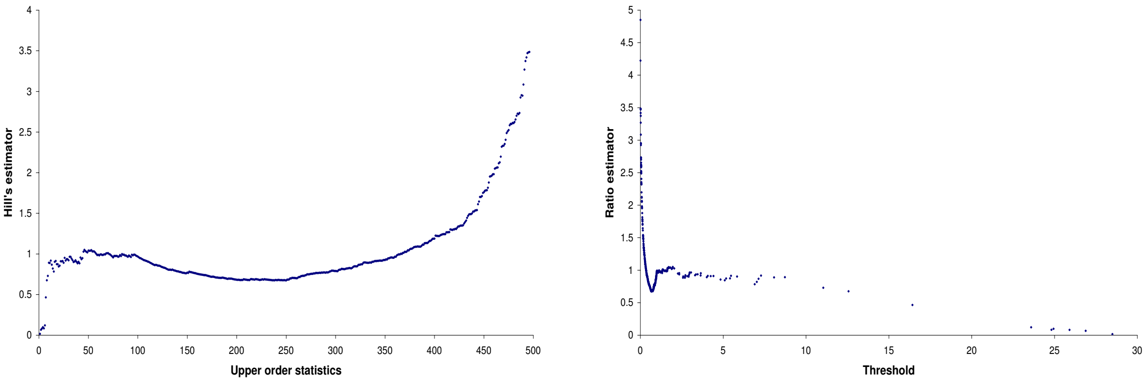

Рис. 4.1: Чертёж оценки Хилла (слева) и RE-оценки (справа), построенных по выборке из примера 4.1. Чертёж оценки Хилла предлагает выбрать оценку в средней части спектра "управляющего" параметра k, где $a_n^H(k)$ колеблется на расстоянии 25% – 32% от истинного значения a. Чертёж RE-оценки стабилен в интервале [1.2;8.7], сформированном 15% элементами выборки; соответствующая RE-оценка $a_n^{RE} = 0.96$.

Статистика a_n^D предложена Давыдовым и др. [95]. Если $\{X_i\}$ – независимые с.в., удовлетворяющие (4.13) и $m = [\sqrt{n}\,]$, то $a_n^D(m) \to a$ п.н. [95]. При выводе используется следующее известное соотношение:

$$(X_{1,n}, ..., X_{n,n}) \stackrel{d}{=} \left(F_c^{-1}(T_1/T_{n+1}), ..., F_c^{-1}(T_n/T_{n+1})\right), \tag{4.6}$$

где $T_m = \eta_1 + ... + \eta_m$, $\{\eta_i\}$ – н.о.р.с.в. с экспоненциальным $\mathbf{E}(1)$ распределением, а также то обстоятельство, что $\mathbb{E}\eta_1^a/(\eta_1+\eta_2)^a = 1/(1+a)$.

Использование статистики $z_n(m)$ может быть проблематично в случае зависимых случайных величин. К примеру, если $X_i = \max\{\xi_i; \xi_{i+1}\}$, где $\{\xi_i\}$ – последовательность н.о.р.с.в. с непрерывным распределением, то $\mathbb{P}(M_{m,1} = M_{m,1}^{(2)}) = 1 - 1/(m+1)$. Для $m = [\sqrt{n}\,]$ имеем $\mathbb{P}(z_n(m) = 1) = (1 - 1/(m+1))^{[n/m]} \to 1/e$ независимо от значения ПСУХР.

В случае независимых с.в. с распределением Парето (4.4) Паулаускас [299] предложил брать $m = 2$. Заметим, что $(z_n(2) - \alpha/(\alpha+1))\sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{N}(0;\sigma_\alpha^2)$, где $\sigma_\alpha^2 = 2\alpha/(\alpha+2)(\alpha+1)^2$, и следовательно, $(a_n^D(2)/a - 1)\sqrt{n} \Rightarrow \mathcal{N}(0;\sigma_D^2)$, где $\sigma_D^2 = 2(\alpha+1)^2/\alpha(\alpha+2) > 2$; ср. с (4.5).

ЦПТ для $\alpha_n^H(k)$ и $C_n^H(k) = X_{k,n}^{\alpha_n^H(k)} k/n$ в случае н.о.р. наблюдений получена Холлом [165]. Асимптотическая нормальность оценки Хилла в случае слабо зависимых наблюдений установлена в [380, 115], хотя порядок точности оценивания $a_n^H(k) \approx a$ не оптимален (см. [275]). Адлер [3], Резник [327] и Эмбрехтс и др. [122], p. 406, отмечают недостатки оценки Хилла и оценки Пикандса.

С учётом вышесказанного в дальнейшем используются лишь оценки по методу ВВУ. Отметим, что RE-оценка, по-видимому, является единственной оценкой индекса a, для которой асимптотика СКО в случае н.о.р.с.в. известна.

Присутствие параметра $x = x_n$ в оценках предполагает наличие процедуры выбора параметра. Если выбрать x_n слишком малым, то смещение RE-оценки оценки будет велико (см. рис. 4.2); если выбрать x_n слишком большим, то смещение RE-оценки оценки будет мало, но зато дисперсия окажется большой (так как лишь незначительная часть выборки участвует в построении оценки). Предположение

$$p \equiv p(x_n) \equiv \mathbb{P}(X > x_n) \to 0\,,\ np \to \infty \qquad (n \to \infty) \tag{4.7}$$

означает, что x_n "не слишком мал" и "не слишком велик". Оно гарантирует состоятельность типичной оценки, построенной по методу ВВУ.

Обозначим

$$a^* \equiv a^*(x) = \mathbb{E}\{\ln(X/x)\big|X > x\}\,,\ v \equiv v(x) = a^*/a - 1\,.$$

Теоретически оптимальный уровень x_n^{opt} – это уровень, который минимумизирует главные члены асимптотики СКО

$$\mathbb{E}(\hat{a}_n - a)^2 = \text{смещение}^2 + \text{дисперсия}.$$

В случае н.о.р.с.в. для RE-оценки имеем

$$\mathbb{E}(a_n^{RE}/a - 1) = v\,, \tag{4.8}$$

$$\mathbb{E}(a_n^{RE}/a - 1)^2 \sim (np_n)^{-1} + v^2\,. \tag{4.9}$$

Условие

$$\exists \lim v\sqrt{np_n} := c\,, \tag{4.10}$$

где $c \neq 0$, балансирует слагаемые в правой части (4.9). Используя соотношение

$$\mathbb{E}\{\ln^k(X/x)\big|X > x\} = a^k k!(1 + v_k) \sim a^k k! \qquad (k \in \mathbb{N})\,, \tag{4.11}$$

где

$$v_k \equiv v_k(x) = \int_0^\infty h_x(u)e^{-u}du^k/k!\,,\ \ h_x(u) = L(xe^{au})/L(x) - 1\,, \tag{4.12}$$

явное выражение для теоретически оптимального уровня x_n^{opt} может быть выведено при дополнительных ограничениях на распределение (4.1*).

Пример 4.2. Рассмотрим непараметрическое семейство распределений

$$\mathcal{H}_{a,b,c,d} = \left\{\mathbb{P} : \mathbb{P}(X > x) = cx^{-1/a}\left(1 + dx^{-b/a} + o(x^{-b/a})\right)\right\}, \tag{4.13}$$

где $a>0, b>0, c>0, d\neq 0$. Если $\mathbb{P} \in \mathcal{H}_{a,b,c,d}$, то, ввиду (4.11),

$$v(x) \sim -bd(1+b)^{-1}x^{-b/a} \qquad (x \to \infty).$$

Следовательно, асимптотически оптимальным в случае н.о.р.с.в. является $x_n^{opt} = (2bcDn)^{\frac{a}{1+2b}}$, где $D = (bd/(1+b))^2$, при этом

$$\mathbb{E}\left(a_n^{RE}(x_n^{opt})/a - 1\right)^2 \sim (1+2b)D^{\frac{1}{1+2b}}\,(2bcn)^{\frac{-2b}{1+2b}}\ . \tag{4.14}$$

Порядок $n^{\frac{-2b}{1+2b}}$ скорости сходимости не может быть улучшен (см. непараметрические нижние границы).

Например, стандартное распределение Коши принадлежит классу $\mathcal{H}_{1,2,1/\pi,-1/3}$, так что $x_n^{opt} = (16n/81\pi)^{1/5}$ и

$$\mathbb{E}\left(a_n^{RE}(x_n^{opt})/a - 1\right)^2 \sim \tfrac{5}{4}\,(16/81)^{1/5}\,(\pi/n)^{4/5}\ .$$

4.3 Оценивание ПСУХР

Ниже $\{X_i\}$ – стационарная последовательность с.в.. Пусть выполнено условие (4.7) и условие перемешивания (6.27); в этом разделе (за исключением утверждения 4.1) мы также предполагаем выполненым условие

$$\lim_{l\to\infty}\varphi(l) = 0. \tag{4.15}$$

Данные условия перемешивания типичны в литературе о суммах зависимых с.в. [300, 398, 399]. Поскольку $\rho(\cdot) \le 2\varphi^{1/2}(\cdot)$ [60], условия (6.27) и (4.15) выполнены, если $\varphi(l) = O((\ln l)^{-c})$ для некоторого $c > 1$.

К примеру, в случае процесса GARCH $\varphi(\cdot)$ убывает с экспоненциальной скоростью (см. [93]), а у стационарных последовательностей с "долгой памятью" $\varphi(k)$ убывает как k^{-d} для некоторого $d > 0$ [111].

Если $L(x) \sim C$ в (4.2), то естественно возникает вопрос об оценивании константы C хвоста распределения. Оценки

$$C_n^H(k) = X_{k,n}^{\alpha_n^H(k)}k/n\,,\ \hat{C}_n \equiv \hat{C}_n(x) = x^{1/a_n}N_n(x)/n$$

были предложены Хиллом [173] и Голди и Смитом [150]. В случае н.о.р.с.в. достаточные условия состоятельности и асимптотической нормальности $\hat{C}_n$ даны в [150, 256, 260]. В диссертации рассматривается случай зависимых наблюдений.

Обозначим

$$a_{n,m} \equiv a_{n,m}(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln^m(X_i/x)\mathbb{I}\{X_i > x\}\Big/N_n(x)m! \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{4.16}$$

Утверждение 4.1 *Оценка $a_{n,m}^{1/m}$ индекса a состоятельна: $a_{n,m} \xrightarrow[p]{} a^m$ $(m \ge 1)$. Если $\lim_{x\to\infty} L(x) = C$ и $(\ln x_n)^2(v^2 + 1/np_n) \to 0$, то $\hat{C}_n$ – состоятельная оценка константы хвоста распределения.*

Следующая теорема устанавливает условия асимптотической нормальности RE-оценки. Обозначим $\mathbb{1}_i = \mathbb{1}\{X_i > x_n\}$, и пусть

$$Y_i = \ln(X_i/x_n)\mathbb{1}_i\,,\ \bar{Y}_i = Y_i - a^* p_n\,,\ Y_i^* = Y_i - a^*\mathbb{1}_i\,.$$

Теорема 4.2 *Предположим, что (4.10) выполнено для некоторого* $c \in \mathbb{R}$ *и*

$$\mathbb{D}\Big(\sum_{i=1}^n Y_i^*\Big) \sim \sigma^2 n p_n \qquad (\exists \sigma > 0)\,. \tag{4.17}$$

Тогда

$$(a_n^{RE} - a)N_n^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(ca; \sigma^2)\,. \tag{4.18}$$

В случае н.о.р.с.в. имеем $\sigma = a$, и (4.18) примет вид

$$(a_n^{RE}/a - 1)N_n^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(c; 1)\,. \tag{4.19}$$

Если

$$\mathbb{P}(X > x) = cx^{-1/a}\left(1 + O\left(x^{-b/a}\right)\right) \qquad (\exists b > 0),$$

$x = x_n \asymp n^{a/(1+2b)}$ и (4.18) имеет место вместе со сходимостью 2-го момента и (ср. пример 4.2), то (4.18) влечёт

$$\mathbb{E}(a_n^{RE} - a)^2 = O\left(n^{-2b/(1+2b)}\right).$$

Другими словами, точность аппроксимации $a_n^{RE} \approx a$ та же, как если бы наблюдения были независимы.

Константа σ в (4.17) обычно не известна, и её заменяют состоятельной оценкой $\hat{\sigma}$. Обозначим $T_{k,j} = \sum_{l=(j-1)r+1}^{jr} Y_l^k \mathbb{1}_l$, и пусть $N_n \equiv N_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > x\}$,

$$\hat{\sigma}_k^2 = N_n^{-1}\sum_{j=1}^{[n/r]} T_{k-1,j}^2\,,\ \hat{\sigma}_{lm} = N_n^{-1}\sum_{j=1}^{[n/r]} T_{l-1,j}T_{m-1,j}\,,$$

где $0 \le l < m,\ k \ge 1,\ 1 \ll r = r(n) \ll n$. Из моментного неравенства для сумм зависимых с.в. (см. Приложение) следует, что существует константа c_k, такая что

$$\mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^{k-1}\mathbb{1}_i\right) \le c_k n p_n \quad (k \in \mathbb{N})\,.$$

В случае н.о.р.с.в. имеем

$$\mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^{k-1}\mathbb{1}_i\right) \sim \sigma_k^2 n p_n\,,\ \mathbb{E}N_n\sum\nolimits_{j=1}^n \bar{Y}_j \sim \sigma_{12} n p_n \tag{4.20}$$

для некоторых $\sigma_k > 0,\ \sigma_{12} \in \mathbb{R}$. Поэтому естественно предлагать, что (4.20) выполнено также и в случае слабо зависимых наблюдений (см. пример 4.3).

Следствие 4.3 *Предположим, что* $\sigma^2 \equiv (a\sigma_1)^2 + \sigma_2^2 - 2a\sigma_{12} > 0$, *имеет место (4.10) для некоторого* $c \in \mathbb{R}$ *и (4.20) выполнено для* $k = 1, 2$. *Тогда справедливо соотношение (4.17) и*

$$\frac{a_n^{RE} - a}{\hat\sigma}\sqrt{np_n} \Longrightarrow \mathcal{N}(ca/\sigma; 1)\,, \tag{4.21}$$

где $\hat\sigma^2 \equiv \hat\sigma^2(n) = (a_n\hat\sigma_1)^2 + \hat\sigma_2^2 - 2a_n\hat\sigma_{12}$; np_n *в (4.21) может быть заменено на* N_n.

Пример 4.3. Пусть $\{X_i, i \geq 1\}$ – стационарная последовательность из примера 3.2. Тогда

$$\mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^*\right) = n\mathbb{E}(Y^*)^2\left[1 + 2(\theta^{-1}-1)\,(1-\kappa_n)\right] \sim np_n\left(2\theta^{-1}-1\right)a^2\,, \tag{4.22}$$

$$\mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^k \mathbb{1}_i\right) \sim np_n\Big(\frac{2}{\theta} - 1\Big)a^{2k}(2k)!\,,\ \mathbb{E}N_n\Big(\sum\nolimits_{i=1}^n \bar Y_i\Big) \sim np_n\Big(\frac{2}{\theta} - 1\Big)a\,,$$

где $\kappa_n = \frac{1-(1-\theta)^n}{n\theta}$. Условия теоремы 4.2 выполнены, и

$$(a_n^{RE}/a - 1)\,N_n^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(c; 2\theta^{-1}-1). \tag{4.23}$$

Это соотношение является обобщением предельной теоремы (4.19): если $\theta = 1$, то $\{X_i\}$ есть последовательность независимых с.в., и (4.23) влечёт (4.19).

Отметим, что порядок $1/\sqrt{np_n}$ точности аппроксимации $a_n^{RE} \approx a$ – тот же, как если бы наблюдения были независимы, но асимптотическая дисперсия оценки в случае зависимых наблюдений оказывается больше.

Если есть основания считать, что распределение наблюдений может быть описано моделью (3.9), то (4.23) доставляет альтернативный способ построения асимптотических доверительных интервалов (АДИ) для ПСУРХ. А именно, если θ_n – состоятельная оценка экстремального индекса θ, то (4.23) влечёт

$$(a_n/a - 1)\,N_n^{1/2}(2/\theta_n - 1)^{-1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(c_*; 1), \tag{4.23*}$$

где $c_* = c(2/\theta - 1)^{-1/2}$. Если θ мало, то и c_* мало, и

$$[a_n/(1 + c_{n,\varepsilon}); a_n/(1 - c_{n,\varepsilon})]$$

есть АДИ уровня $1-\varepsilon$, где $c_{n,\varepsilon} = \gamma_\varepsilon(2\theta_n^{-1} - 1)^{1/2}N_n^{-1/2}$ и $\gamma_\varepsilon = -\Phi^{-1}(\varepsilon/2)$. Поэтому в выборке зависимых с.в. смещение оценки ПСУХР может оказаться меньше, чем в выборке независимых копий X_1. □

Подасимптотические доверительные интервалы. Асимптотические доверительные интервалы не принимают во внимание точность нормальной аппроксимации и, следовательно, могут быть далеки от точных доверительных интервалов, если размер выборки не велик или скорость сходимости в соответствующей предельной теореме не высока. В диссертации предложен подасимптотический доверительный интервал (ПАДИ)

$$I_n(\varepsilon) = \Big[a_n \Big/ \big(1 + y_\varepsilon N_n^{-1/2}\big) \, ; a_n \Big/ \big(1 - y_\varepsilon N_n^{-1/2}\big)\Big] \, .$$

Здесь $\Phi(-y_\varepsilon) = \Big(\varepsilon/2 - C_* N_n^{-1/2}\Big)_+$, C_* есть константа в неравенстве Берри–Эссеена.

Заметим, что точность нормальной аппроксимации в (4.18) уменьшается, если использовать $\hat\sigma$ вместо неизвестного σ, так как $\hat\sigma - \sigma = O_p\Big((np_n/r)^{-1/2}\Big)$. Хотя

$$\sup_y \left| \mathbb{P}\left(\frac{a_n - a}{\sigma}\sqrt{np_n} < y\right) - \Phi_{\frac{\mu}{\sigma};1}(y) \right| \le C_*(np_n)^{-1/2} \qquad (4.24)$$

(по крайней мере в случае н.о.р.с.в.), правая часть (4.24) становится $C(np_n/r)^{-1/2}$, если в левой части заменить σ на $\hat\sigma$. Поэтому с практической точки зрения может иметь смысл использовать оценку $a_{n,r}$, такую что точность аппроксимации $a_{n,r} \approx a$ есть $O_P\big((np_n/r)^{-1/2}\big)$.

Теорема 4.4 *Обозначим* $N_{n,r} \equiv N_{n,r}(x_n) = \sum_{i=1}^{[n/r]} \mathbb{I}_{ir}$, *и пусть*

$$\hat a_{n,r} \equiv \hat a_{n,r}(x_n) = \sum\nolimits_{i=1}^{[n/r]} Y_{ir} / N_{n,r}. \qquad (4.25)$$

Если $np_n/r \to \infty$ *и* $v^2 np_n/r \to 0$, *то* $(\hat a_{n,r}/a - 1)\, N_{n,r}^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

Асимптотическое смещение устранено ценой снижения точности оценивания. Если (4.10) выполнено для некоторого $c \in \mathbb{R}$, то условия теоремы 4.4 выполнены, к примеру, для $r = [(np_n)^t]$, где $0 < t < 1$;

$$I_{n,r}(\varepsilon) = \Big[a_{n,r} \Big/ \big(1 + q_\varepsilon N_{n,r}^{-1/2}\big) \, ; \; a_{n,r} \Big/ \big(1 - q_\varepsilon N_{n,r}^{-1/2}\big)\Big]$$

есть АДИ уровня $1 - \varepsilon$, где $\Phi(-q_\varepsilon) = \varepsilon/2$.

В непараметрической статистике оценка $\hat a_n(\cdot)$ обычно является функцией управляющего (“мешаюшего”) параметра. С практической точки зрения важным является задача о выборе управляющего параметра. В диссертации предложена следующая процедура выбора управляющего параметра.

Алгоритм выбора управляющего параметра: (i) построить график функции $\hat a_n(\cdot)$, (ii) выбрать интервал $[x_-; x_+]$, в котором график функции $\hat a_n(\cdot)$ стабилен (интервал $[x_-; x_+]$ должен быть сформирован значительным количеством элементов выборки), (iii) подсчитать среднее $\hat a = \mathrm{mean}\{\hat a_n(x) : x \in [x_-; x_+]\}$, (iv) выбрать уровень $\hat{x}_n \in [x_-; x_+]$, такой что $\hat{a}_n(\hat{x}_n) = \hat{a}$ (если несколько уровеней удовлетворяют $\hat{a}_n(\hat{x}_n) = \hat{a}$, выбираем наименьший).

Особенность этой процедуры состоит в том, что она приводит практически к одному и тому же результату независимо от индивидуального выбора интервала $[x_-; x_+]$: так как берётся среднее по интервалу, сформированному значительным количеством элементов выборки, вариация в связи с выбором границ интервала $[x_-; x_+]$ оказывается незначительной.

Процедура базируется на состоятельности рассматриваемой оценки. Действительно, если последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет (4.7), то и $\{tx_n\}$ удовлетворяет (4.7) для каждого $t > 0$. Следовательно, должен существовать интервал $[x_-; x_+]$, такой что $\hat{a}_n(x) \approx \hat{a}$ для всех $x \in [x_-; x_+]$.

Результаты тестирования алгоритма на моделированных и реальных финансовых данных показывают, что предложеные оценки ПСУХР, VaR и CVaR позволяют получать более точную аппроксимацию, чем оценки, предложеные другими авторами. В частности, показано, что по данным, имевшимся накануне рыночного краха в "чёрный понедельник" 19.10.1987, можно было предсказать величину возможного обвала (см. пример 4.7).

Пример 4.4. Пусть $\mathbb{P}_0 = \mathcal{L}(|\xi|)$, где ξ имеет стандартное распределение Коши. Мы смоделировали 1000 н.о.р.с.в. с распределением $\mathbb{P}_0$.

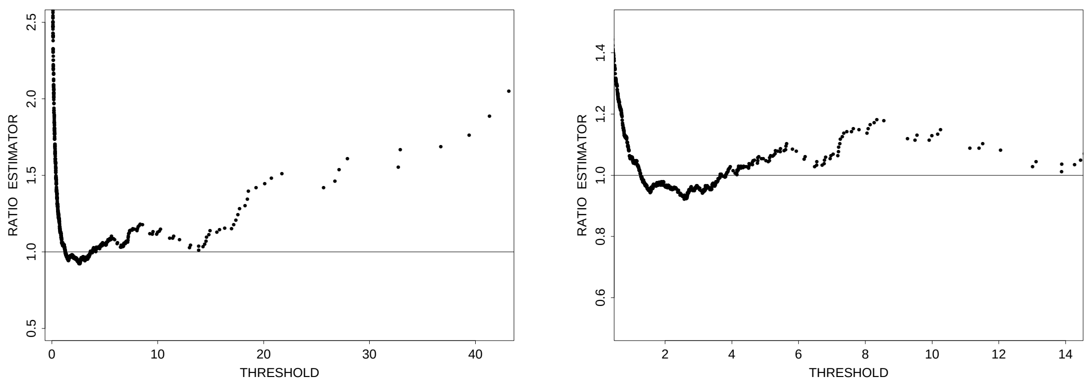

Рис. 4.2: Оценивание индекса a по выборке из распределения $\mathbb{P}_0$. Среднее $a_n^{RE}(x)$, $x \in [1; 14]$, равно $\hat{a} = 0.998$. Асимптотический доверительный интервал уровня 0.95 есть $[0.91; 1.10]$, и подасимптотический доверительный интервал есть $[0.88; 1.15]$.

Рис. 4.2 показывает, что график RE-оценки $a_n^{RE}(x)$ стабилен в интервале $x \in [0.5; 17]$, сформированном 701 элементами выборки. Второй график даёт более детальную картину (уровень x меняется в интервале $[1; 14]$). Соответствующий фрагмент графика сформирован 479-ю элементами выборки. Мы применяем алгоритм выбора управляющего параметра; среднее значение функции $a_n^{RE}(x)$, $x \in [1; 14]$, есть $\hat{a} = 0.998$. Пусть x_n – уровень, соответствующий $\hat{a}$ (то есть $a_n^{RE}(x_n) =$

$\hat{a}$). Соответствующий асимптотический доверительный интервал уровня 0.95 есть $[0.91; 1.10]$ и подасимптотический доверительный интервал есть $[0.88; 1.15]$.

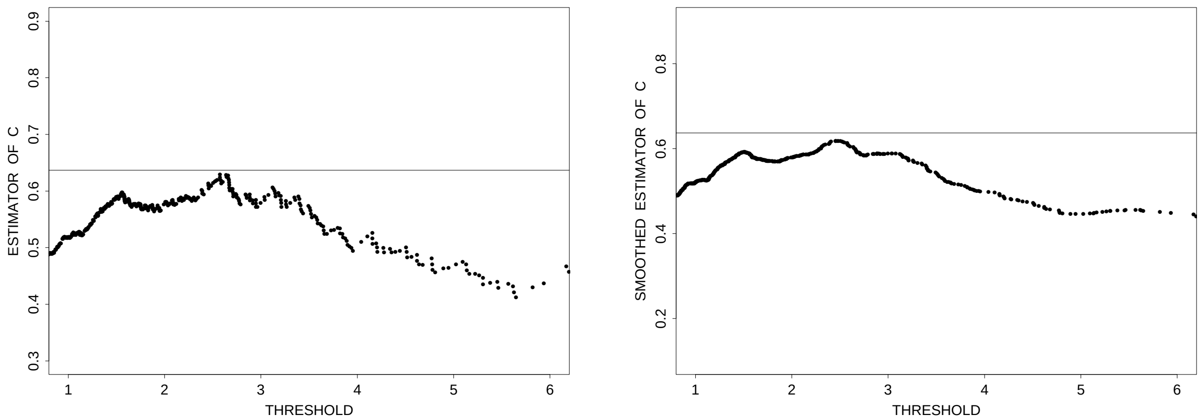

Рис. 4.3: Оценка константы хвоста $\hat{C}_n = 0.585$, истинное значение C есть $2/\pi \approx 0.637$.

График оценки $\hat{C}_n(\cdot)$ представлен в рис. 4.3. График функции $\hat{C}_n(x)$ стабилен при $x \in [1.5; 3.5]$. Соответствующий фрагмент графика сформирован 229 элементами выборки, среднее $\hat{C}_n(\cdot)$ в этом интервале есть 0.585 ($C = 2/\pi \approx 0.637$). График сглаженной версии $C_n^*(\cdot)$ оценки $\hat{C}_n(\cdot)$ представлен во второй части рис. 4.3. □

Пример 4.5. Мы смоделировали 1000 с.в. с распределением (3.9) из примера 3.2, где $\{X_i\}$ – с.в. со стандартным распределением Коши, $\theta = 1/2$.

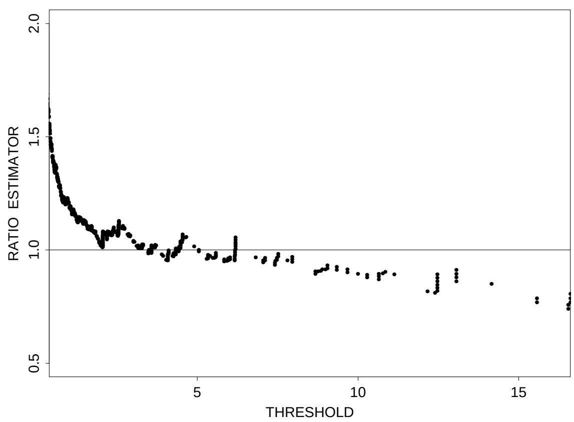

Рис. 4.4: Процесс (3.9) со стандартным распределением Коши, $\theta = 1/2$, $n = 1000$. RE-оценка $\hat{a}_n^{RE} = 1.025$.

График $a_n^{RE}(\cdot)$ представлен в рис. 4.4. График RE-оценки стабилен в интервале $[1.5; 14]$, который сформирован 322 элементами выборки. Среднее $a_n^{RE}(\cdot)$ в этом интервале есть 1.025.

Константа хвоста $C = 2/\pi \approx 0.637$. Вариантом $\hat{C}_n(\cdot)$ является оценка

$$\tilde{C}_n(x) = x^{1/\hat{a}} N_n(x)/n,$$

где $\hat{a} = 1.025$ – ранее подсчитанная оценка ПСУХР. Результаты оценивания константы хвоста представлены в рис. 4.5. График оценки $\tilde{C}_n(\cdot)$ менее волатилен, чем график $\hat{C}_n(\cdot)$. Среднее $\tilde{C}_n(x)$ при $x \in [2; 12]$ есть 0.62, интервал сформирован 300 элементами выборки.

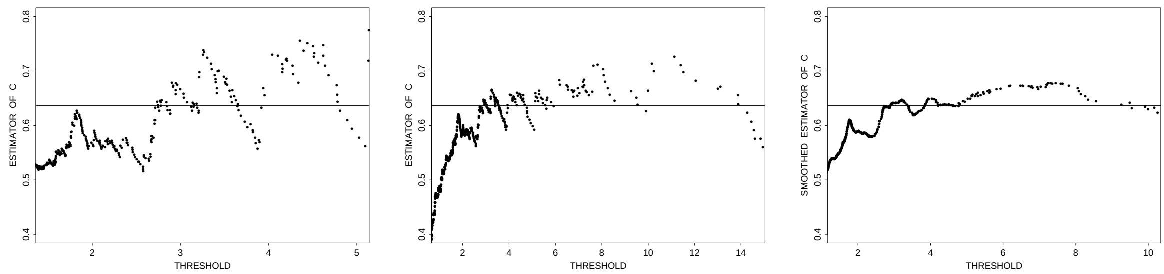

Рис. 4.5: Оценки $\hat{C}_n(\cdot)$, $\tilde{C}_n(\cdot)$ и сглаженная версия $\tilde{C}_n(\cdot)$ в примере 4.5; среднее $\tilde{C}_n(x)$ при $x \in [2; 12]$ есть 0.62, истинное значение есть 0.637.

Пример 4.6. Процесс ARCH $\{X_k, k \geq 1\}$ с параметрами (b, c) есть решение рекуррентного уравнения

$$X_n = Z_n \sqrt{b + cX_{n-1}^2} \qquad (n \geq 2)\,, \tag{4.26}$$

где $\{Z_i\}$ – последовательность нормальных $\mathcal{N}(0; 1)$ случайных величин, $b > 0$ и $c \geq 0$. При соответствующем выборе X_1 процесс стационарен и

$$\mathbb{P}(|X| > x) \sim Cx^{-1/a} \qquad (x \to \infty)\,. \tag{4.27}$$

Явные выражения для констант a и C даны Голди [149].

Пусть $b = c = 1$. Тогда $a = 0.5$ и $C = 1.37$; стационарное распределение процесса имеет бесконечную дисперсию (см. [122], стр. 465–466).

Мы смоделировали 10,000 случайных величин согласно (4.26) с $X_1 = Z_1$ и оценили индекс a по абсолютным значениям последних 1000 наблюдений (которые можно считать стационарной последовательностью), см. рис. 4.6. График RE-оценки $a_n^{RE}(\cdot)$ стабилен в интервале $[2; 4]$, который сформирован 179 элементами выборки. Среднее RE-оценки в этом интервале $\hat{a} = 0.51$. Другой интервал стабильности RE-оценки, [5;11], мы не используем, так как он сформирован всего 51-ю элементами выборки.

Рис. 4.6 демонстрирует типичное поведение RE-оценки $a_n^{RE}(x)$ как функции уровня x: если x "мал", то смещение велико, и график удаляется от истинного значения; если x "велик", то дисперсия оценки велика, и график удаляется от истинного значения; посередине находим интервал, где график стабилен и близок к истинному значению. $\square$

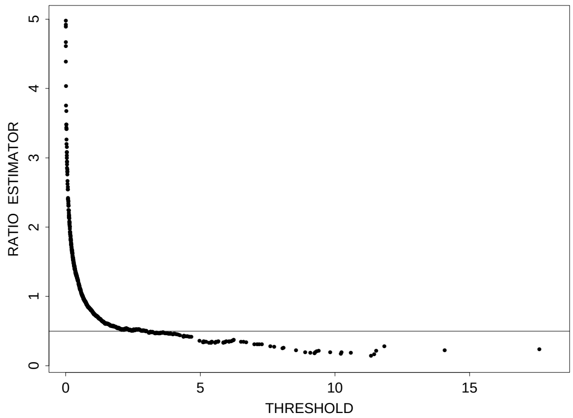

Рис. 4.6: Оценивание ПСУХР для процесса ARCH (4.26). RE-оценка $\hat{a} = 0.51$, истинное значение есть $a = 0.5$.

Рис. 4.7 предлагает графики оценок константы хвоста $\hat{C}_n(\cdot)$ и $\tilde{C}_n(\cdot)$. Интервал $[2;3]$, который сформирован 127 элементами выборки, представляется единственным интервалом стабильного поведения $\hat{C}_n(\cdot)$. Среднее этой оценки в $[2;3]$ равно 0.9996, истинное значение $C = 1.37$. Оценка $\tilde{C}_n(\cdot)$ стабильна в интервале $[2;9]$, который сформирован 243 элементами выборки. Среднее $\tilde{C}_n(x)$ по $x \in [2;9]$ равно 1.09.

Оценивание индексов 2-го порядка. Ряд авторов предлагали заменять a, b, c, d в определении x_n^{opt} их состоятельными оценками $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}$, такими что $|\hat{a} - a| + |\hat{b} - b| = o_p(1/\ln n)$ (см, к примеру, [35, 302] и ссылки там). Это приводит к задаче оценивания индексов 2-го порядка.

Hall & Вэлш [168] предложили состоятельные ВПС-оценки индексов b и d в предположении, что известен интервал $(b_1; b_2)$, такой что $b \in (b_1; b_2)$ (см. также [35]). В диссертации предложены новые ВВУ-оценки индексов 2-го порядка без предположений на интервал возможных значений индекса b, установлена их состоятельность.

Рассмотрим непараметрическое семейство распределений

$$\mathbb{P}(X > x) = cx^{-1/a}\left(1 + dx^{-b/a} + o(x^{-b/a})\right),$$

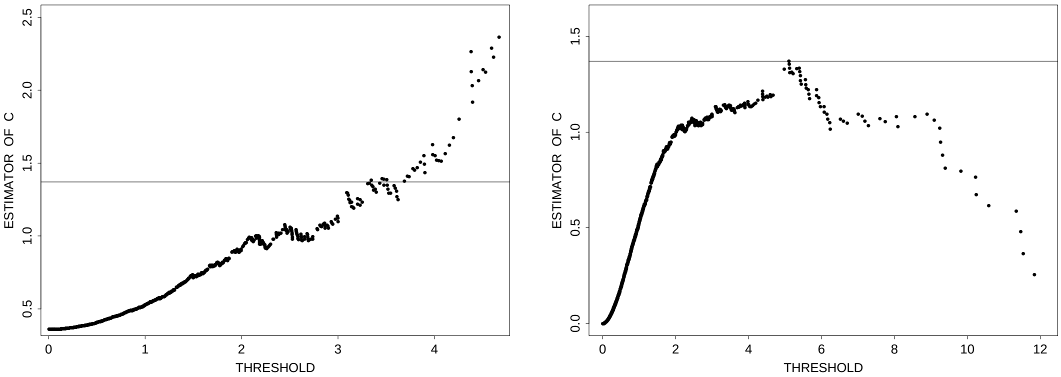

Рис. 4.7: Оценивание константы хвоста для процесса ARCH (4.26): $\hat{C}_n = 0.9996$, $\tilde{C}_n = 1.09$, истинное значение $C = 1.37$.

где $a > 0, b > 0, c > 0, d \neq 0$. Мы покажем ниже, что для любого $\lambda > 0$ статистика

$$\hat{\beta}_n = \log_\lambda \left(\frac{a_n^{RE}(\lambda x) - a_n^{RE}(x)}{a_n^{RE}(\lambda^2 x) - a_n^{RE}(\lambda x)} \right)$$

является состоятельной оценкой индекса $\beta = b/a$.

Обозначим $x = x_n$, $p_n = F_c(x_n)$.

Утверждение 4.5 *Предположим, что (6.28) выполнено и*

$$p_n \to 0\,,\ np_n^{1+2b} \to \infty\,. \tag{4.28}$$

Тогда $\hat{\beta}_n \underset{P}{\longrightarrow} \beta$.

Обозначим $w_x = dx^{-\beta}$, $\hat{a}_n = a_n^{RE}$. Статистика

$$\hat{w}_x = \left(\lambda^{-1/\hat{a}_n} N_n(x) N_n^{-1}(\lambda x) - 1\right) / (1 - \lambda^{-\hat{\beta}_n})$$

является состоятельной оценкой w_x .

Утверждение 4.6 *В условиях утверждения 4.5* $\hat{w}_x / w_x \underset{P}{\longrightarrow} 1$.

4.4 Оценивание экстремальных квантилей

В этом разделе $\{X_i\}$ – стационарная последовательность случайных величин, удовлетворяющих (4.2) и (6.27). По выборке $X_1, \ldots, X_n$ требуется оценить верхнюю квантиль y_q уровня q, где $q = q(n)$ может стремится к 0 при $n \to \infty$.

Пусть

$$y_q = F_c^{-1}(q)$$

обозначает верхнюю квантиль уровня q. Ввиду (4.2) и свойств медленно меняющихся функций имеем

$$y_q = q^{-1/\alpha}\ell(q), \tag{4.29}$$

где ℓ – медленно меняюшаяся функция.

В диссертации предложена оценка $y_{n,q}$ верхней квантили y_q, такая что

$$y_{n,q}/y_q \underset{p}{\longrightarrow} 1\,,\ F_c(y_{n,q})/q \underset{p}{\longrightarrow} 1\,.$$

Напомним, что функция

$$M(y) = \mathbb{E}\{X - y|X > y\}$$

корректно определена, если $\alpha > 1$. Поскольку

$$\mathbb{E}(X-y)\mathbb{I}\{X>y\} = \int_y^\infty F_c(x)dx\,,$$

(4.2) влечёт

$$M(y) = \frac{y}{\alpha - 1}\left[1 + \int_0^\infty h_x(v/(1-a))e^{-v}dv\right], \tag{4.30}$$

где $a = 1/\alpha$. Следовательно,

$$M(y) \sim y/(\alpha-1)\,,\ \mathbb{E}\{X|X>y\} \sim y/(1-a) \qquad (y\to\infty)\,.$$

Если $\mathcal{L}(X)$ удовлетворяет (4.13), то

$$\begin{aligned} M(y) &= \frac{y}{\alpha-1}\left[1 - \frac{bd}{1+b-a}y^{-b\alpha} + o(y^{-ba})\right], \\ \mathbb{E}\{X|X>y\} &= \frac{y}{1-a}\left[1 - \frac{abd}{1+b-a}y^{-b/a} + o(y^{-b/a})\right]. \end{aligned}$$

Заметим, что обобщённое распределение Парето

$$F_c(y) = (1 + ady)^{-1/a} \qquad (y \ge 0) \tag{4.31}$$

удовлетворяет (4.13) с $b = 1/\alpha$, и

$$\mathbb{E}\{X|X>y\} = y/(1-a) - abd/(1-a)(1+b-a) + o(1)\,.$$

Одна из первых оценок экстремальных квантилей была предложена в [408]. Параметрический подход к задаче представлен в [122]. ВПС-оценка экстремальной квантили

$$\tilde{y}_q = (k/qn)^{a_n^H(k)} X_{k,n}$$

рассматривается в [122], гл. 6, и [227], гл. 6.

В этом разделе рассматривается непараметрический подход к задаче оценивания экстремальных квантилей. В диссертации для оценивания экстремальной квантили и функции M предлагается использовать оценки

$$\hat{y}_q \equiv \hat{y}_q(x) = (N_n/qn)^{\hat{a}_n}\, x\,, \tag{4.32}$$

$$\hat{M}_n \equiv \hat{M}_n(x) = \hat{y}_q\hat{a}_n/(1-\hat{a}_n)\,, \tag{4.33}$$

где x – параметр оценки; в качестве $\hat{a}_n$ ниже используется RE-оценка индекса a. Модификациями оценки (4.32) являются оценки $y_q^* = \hat{y}_q(\hat{x}_n)$ и

$$\tilde{y}_q(x) = (N_n(x)/qn)^{\hat{a}}\, x\,,$$

в то время как модификацией (4.33) является оценка

$$\hat{M}_n^* = y_q^*\hat{a}/(1-\hat{a}).$$

Соответственно оценкой CVaR $\mathbb{E}\{X|X > q\text{-VaR}\}$ является

$$\hat{z}_{n,q} \equiv \hat{z}_{n,q}(x) = y_{n,q}/(1-\hat{a}_n). \tag{4.34}$$

Отметим, что оценка (4.32) использует элементы выборки, превышающие уровень $x = x_n$. Оценка базируется на следующем наблюдении:

$$q = F_c(y_q) = F_c(x)L(y_q)y_q^{-\alpha}/L(x)x^{-\alpha} \approx (x/y_q)^{\alpha}N_n(x)/n\,.$$

Алгоритм выбора управляющего параметра экстремальных квантилей [275] – тот же, что и алгоритм выбора управляющего параметра оценки ПСУХР. Теорема 4.7 доставляет теоретическое обоснование алгоритма. Применение данного алгоритма к задаче прогнозорования величины рыночного краха (пример 4.7) свидетельствует в пользу предложенного подхода.

Обозначим

$$p \equiv p(x_n) = \mathbb{P}(X > x_n).$$

В этом разделе мы считаем выполненым условие (4.7).

Теорема 4.7 *Предположим, что*

$$(a_n^{RE} - a)\ln(p/q) \xrightarrow[p]{} 0\,,\ L(x_n)/L(y_q) \to 1 \tag{4.35}$$

при $n \to \infty$. Тогда оценка (4.32) состоятельна:

$$\hat{y}_q/y_q \xrightarrow[p]{} 1\,.$$

Если $\alpha > 1$, то $\hat{M}_n$ является состоятельной оценкой $M(y_q)$: $\hat{M}_n/M(y_q) \xrightarrow[p]{} 1$.

Первое условие в (4.35) несколько сильнее, чем просто предположение, что a_n^{RE} является состоятельной оценкой. Предположение $L(x_n)/L(y_q) \to 1$ выполнено, к примеру, если

$$1 \le y_q/x_n \le c \tag{4.36}$$

для некоторой константы $c \ge 1$.

Асимптотическая нормальность $\hat{y}_q$ установлена в следующей теореме, где мы считаем выполненым (4.20) для $k = 1, 2$. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} - a\sigma_1^2 \\ \sigma_{12} - a\sigma_1^2 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Далее в этом разделе мы считаем, что $\lim_{k\to\infty} \varphi(k) = 0$.

Теорема 4.8 *Предположим, что* $\sigma^2 \equiv (a\sigma_1)^2 + \sigma_2^2 - 2a\sigma_{12} > 0$ *и*

$$\ln\left(p_n/F_c(y_q)\right) \to d\,,\ (a^* - a)\sqrt{np_n} \to \mu\,,\ \left(y_q q^a L^{-a}(x_n) - 1\right)\sqrt{np_n} \to \nu \tag{4.37}$$

для некоторых констант d, μ, ν. *Тогда*

$$(\hat{y}_q/y_q - 1)\sqrt{np_n} \Longrightarrow \mathcal{N}(d\mu - \nu; \sigma_{\mathbf{c}}^2), \tag{4.38}$$

где $\sigma_{\mathbf{c}}^2 = \mathbf{c}A\mathbf{c}^T$ *и* $\mathbf{c} = (a, d)$.

Первое условие в (4.37) аналогично (4.36). Вторoе условие балансирует асимптотические смещение и дисперсию RE-оценки (ср. с (4.9)). Что касается последнего соотношения в (4.37), заметим, что

$$F_c(y_q) = F_c(F_c^{-1}(q)) \sim q \tag{4.39}$$

при $q \to 0$ (см. теорему 1.5.12 в [41]). Если функция $F_c(y)$ строго монотонна для всех достаточно больших y, то $q = F_c(y_q)$, и последнее соотношение в (4.37) может быть записано как

$$(L^a(y_q)/L^a(x_n) - 1)\sqrt{np_n} \to \nu\,.$$

Заметим, что

$$\sigma_{\mathbf{c}}^2 = (a(1-d)\sigma_1)^2 + (d\sigma_2)^2 + 2ad(1-d)\sigma_{12}\,.$$

В случае н.о.р.с.в. $\sigma_{\mathbf{c}}^2 = a^2(1 + d^2)$.

Заменим $\sigma_{\mathbf{c}}$ в (4.38) её состоятельной оценкой, и определим $\hat{A}$ аналогично A с заменой σ_1, σ_2, σ_{12}, a на $\hat{\sigma}_1$, $\hat{\sigma}_2$, $\hat{\sigma}_{12}$ и a_n. Обозначим $\hat{\sigma}_{\mathbf{c}}^2 \equiv \hat{\sigma}_{\mathbf{c}}^2(n) = \hat{\mathbf{c}}\hat{A}\hat{\mathbf{c}}^T$, где $\hat{\mathbf{c}} = (a_n, d_n)$ и $d_n = a_n^{-1}\ln(\hat{y}_q/x_n)$.

Следствие 4.9 *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.8. Если (4.20) выполнено для* $k = 1, 2$, *то*

$$\Big(\hat{y}_q/y_q - 1\Big)\hat{\sigma}_{\mathbf{c}}^{-1} N_n^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}\left((d\mu - \nu)/\sigma_{\mathbf{c}}; 1\right) . \tag{4.40}$$

Если есть основания считать, что асимптотическое смещение $(d\mu - \nu)/\sigma_{\mathbf{c}}$ пренебрежимо мало, то из (4.40) следует, что

$$\left[\hat{y}_q \Big/ \Big(1 + \gamma_\varepsilon \hat{\sigma}_{\mathbf{c}}/N_n^{1/2}\Big); \hat{y}_q \Big/ \Big(1 - \gamma_\varepsilon \hat{\sigma}_{\mathbf{c}}/N_n^{1/2}\Big)\right]$$

есть асимптотический доверительный интервал уровня $1 - \varepsilon$, где $\Phi(-\gamma_\varepsilon) = \varepsilon/2$. В случае н.о.р.с.в. это

$$\left[\hat{y}_q \Big/ \left(1 + \gamma_\varepsilon \sqrt{(a_n^{RE})^2 + \ln^2(\hat{y}_q/x_n)} \Big/ N_n^{1/2}\right); \hat{y}_q \Big/ \left(1 - \gamma_\varepsilon \sqrt{(a_n^{RE})^2 + \ln^2(\hat{y}_q/x_n)} \Big/ N_n^{1/2}\right)\right] .$$

Асимптотическое смещение $(d\mu - \nu)/\sigma_{\mathbf{c}}$ может быть сведено к нулю за счёт понижения точности оценивания. Пусть $\hat{y}_{q,r}$ определёна в (4.32) с $\hat{a}_n = a_{n,r}$.

Теорема 4.10 *Предположим, что условия теоремы 4.8 выполнены. Если имеет место (4.20) для* $k = 1, 2$, *то*

$$\Big(\hat{y}_{q,r}/y_q - 1\Big)\left(a_n d_n\right)^{-1} N_{n,r}^{1/2} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0; 1\right) . \tag{4.41}$$

Пример 4.4 (продолжение). Результаты оценивания экстремальных квантилей представлены в рис. 4.8.

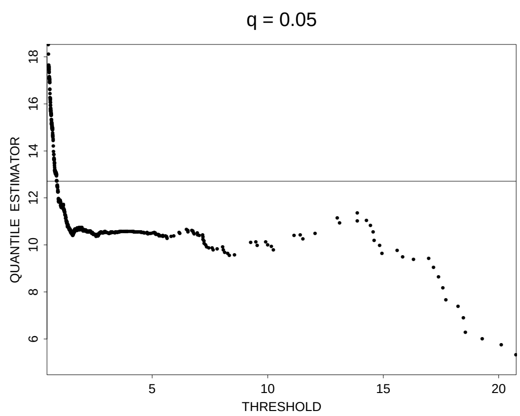

Рис. 4.8: Оценка (4.32): $q = 0.05$, истинное значение $y_{5\%} = 12.7$, $\hat{y}_{5\%} = 10.5$, эмпирическая квантиль равна 9.91.

График представляет $\hat{y}_q$ для случая $q = 0.05$. Истинное значение $y_q = 12.7$. График стабилен в интервале $x \in [1.5; 14]$, сформированном 345 элементами выборки. Среднее $\hat{y}_q$ в этом интервале равно 10.5. Заметим, что эмпирическая квантиль равна 9.9.

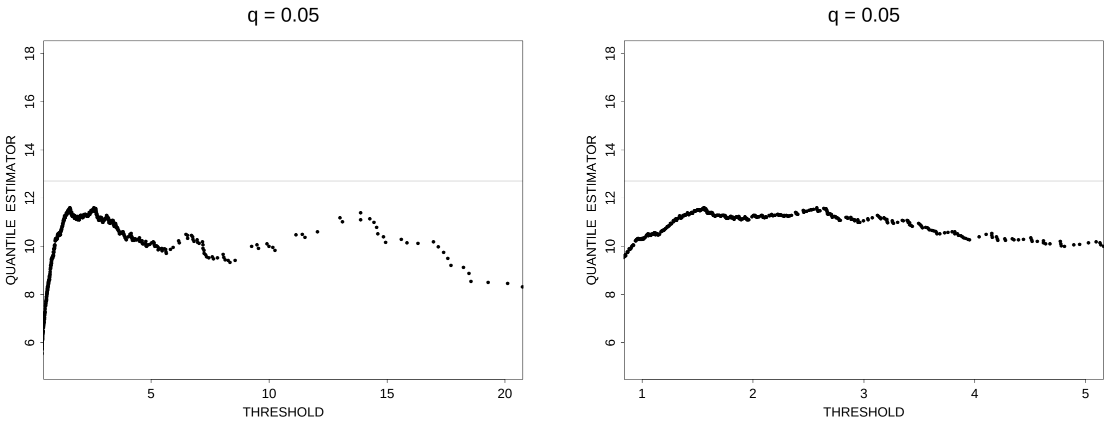

Рис. 4.9: Оценка (4.42) в примере 4.4 $\tilde{y}_q = 11.2$, истинное значение есть $y_q = 12.7$. Асимптотический доверительный интервал уровня 0.95 есть $[9.10; 14.56]$.

Вариантом оценки (4.32) является статистика

$$\tilde{y}_q \equiv \tilde{y}_q(x) = (N_n(x)/qn)^{\hat{a}}\, x\,. \tag{4.42}$$

Результаты оценивания с использованием этой оценки представлены в рис. 4.9. Напомним, что $\hat{a} = 0.998$ есть оценка индекса a (см. первую часть примера). График представляется стабильным в интервале $x \in [1.5; 4]$, который сформирован 256-ю наблюдениями. Среднее $\tilde{y}_q(\cdot)$ в этом интервале есть 11.2 (истинное значение $y_q = 12.7$), соответствующий АДИ уровня 95% есть $[9.10; 14.56]$. □

Пример 4.5 (продолжение). Результаты оценивания экстремальных квантилей представлены в рис. 4.10. Оценки $\hat{y}_q$ и $\tilde{y}_q$ дают удовлетворительные значения. График $\hat{y}_q(\cdot)$ стабилен в интервале $x \in [2; 11]$, который сформирован 249 элементами выборки, $\hat{y}_q = 13.34$, истинное значение есть $y_q = 12.7$. График $\tilde{y}_q(\cdot)$ стабилен в в интервале $[2; 18]$, сформированном 279 элементами выборки, среднее $\tilde{y}_q(x)$ при $x \in [2; 18]$ есть 13.28. □

Пример 4.7. *Крах "чёрного понедельника".* Предсказание величины возможных экстремальных подвижек финансовых рынков – одна из основных задач в управлении рисками. К примеру, индекс S&P500 упал 19.10.1987 на 20.5% – худший дневной обвал индекса за 40 лет с 01.01.1960.

Макнил [232] поставил следующий вопрос: имея наблюдения над индексом S&P500 за период с 01.01.1960 по 16.10.1987, возможно ли было предсказать величину наихудшего дневного падения индекса S&P500 за 40 лет (примерно 10000 рабочих дней)?

Используя метод блоков и предполагая, что годовые максимумы есть независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением Фреше, Макнил [232] получил для 0.01%-VaR оценку 7.4%. Применяя иной подход, Ма-

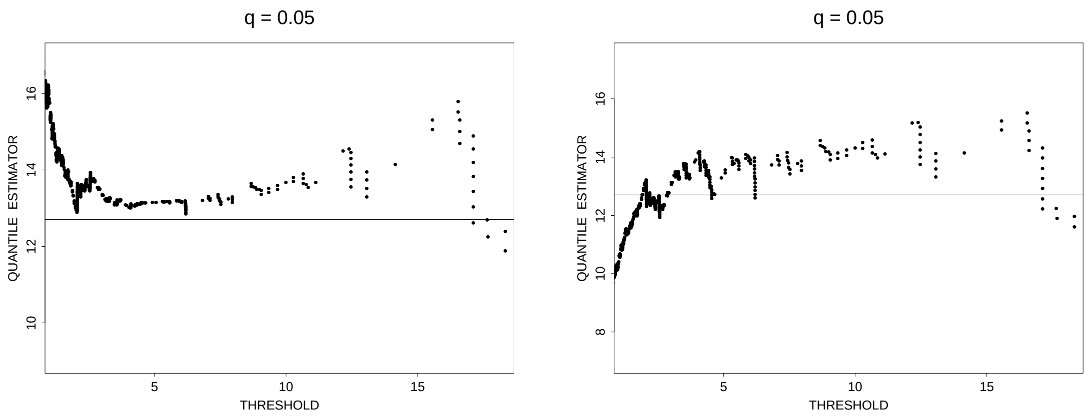

Рис. 4.10: Оценивание экстремальных квантилей в примере 4.5: $\hat{y}_q = 13.34$, $\tilde{y}_q = 13.28$, истинное значение есть $y_q = 12.7$.

тис и Бейрлант [231] получили для 0.01%-VaR оценку 5.8%. Мы позываем ниже, что предложенный в диссертации подход позволяет получить значительно более точную оценку.

В финансовых приложениях наблюдения часто оказываются тяжёлохвостовыми. Этот факт отмечали Мандельброт [224], Фама и Ролл [130], Эмбрехтс и др. [122], стр. 404–405), в том числе для индекса S&P500. Отметим, что если наблюдения оказываются тяжёлохвостовыми, то стандартное уклонение не представляется удовлетворительной мерой риска, связанного с экстремальными подвижками финансовых рынков (ср. рис. 4.11, показывающий убывание стандартного уклонения накануне "чёрного понедельника").

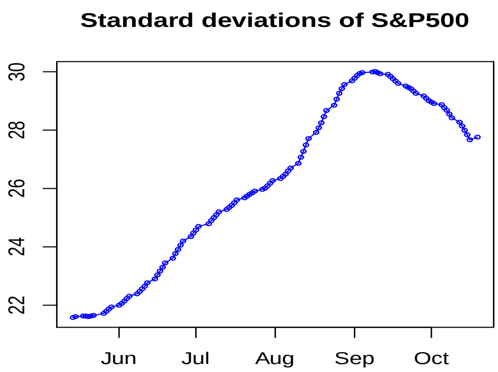

Рис. 4.11: Стандартные уклонения индекса S&P500 с 14.05.1987 по 19.10.1987.

По дневным ценам закрытия $\{Y_i\}$ индекса S&P500 за период с 01.01.1960 по 16.10.1987 (данные Yahoo.Finance) получена выборка $X_1, \ldots, X_n$, где $X_i =$

$\ln(Y_i/Y_{i-1})$ есть логарифм дневного прироста цены. Мы применяем оценки (4.32) и (4.33) и описанный выше алгоритм выбора управляющего параметра.

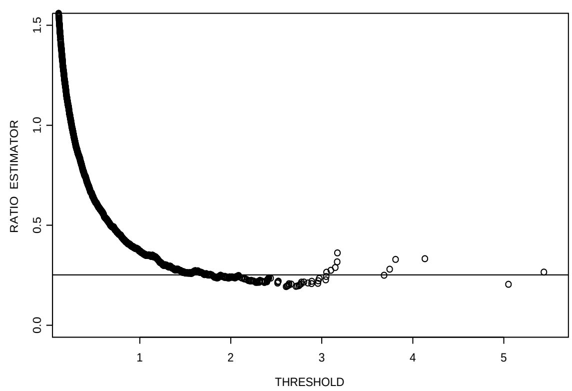

Рис. 4.12: График RE-оценки для логарифма дневного прироста цены индекса S&P500 за период с 01.01.1960 по 16.10.1987. RE-оценка $\hat{a} = 0.252$, оценка ПСУХР есть 3.976; оценка 0.01%–VaR равна 18.1% и оценка 0.01%–CVaR равна 24.2%.

График RE-оценки $a_n^{RE}(\cdot)$ стабилен в интервале $[1.4; 5.4]$ (рис. 4.12). Соответствующий фрагмент графика сформирован 285 элементами выборки. Имели место 3319 дневных падений индекса S&P500 за указанный период, лишь 512 из них превысили уровень в 1%. Мы заключаем, что интервал $[1.4; 5.4]$ сформирован значительным числом элементов выборки. Среднее $a_n^{RE}(x)$ при $x \in [1.4; 5.4]$ есть $\hat{a} = 0.2515$, оценка ПСУХР $1/\hat{a} = 3.976$. Оценки VaR (4.32) и функции M (4.34) с ранее выбранным уровнем $\hat{x}_n$ приводит к значениям 18.1% для 0.01%-VaR и 24.2% для 0.01%-CVaR. Итого, наихудший дневной обвал индекса за 40 лет с 01.01.1960, согласно данным, имевшимся накануне "чёрного понедельника", можно быдо оценить в 24.2%.

Цена закрытия индекса S&P500 16.10.87 была 282.94 (уже на 5% ниже цены предыдущего дня); цена закрытия индекса 19.10.1987 составила 225.06, логарифм дневного прироста цены равен -0.229 (то есть -22.9%). $\square$

Тем же методом ПСУХР за период с "чёрного понедельника" по 2001 год был оценён числом 3.4 (напомним, что ПСУХР за период 01.01.1960 – 16.10.1987 был оценён числом 3.976). Сравнивая эти оценки, мы заключаем, что хвост распределения логарифма дневного прироста цены индекса S&P500 стал тяжелее после "чёрного понедельника", что означает более высокую вероятность дневных падений цены индекса.

4.5 Вероятности выхода за высокий уровень

Этот раздел посвящён задаче оценивания вероятности выхода за высокий уровень.

Обозначим через $\hat{F}_n$ эмпирическую ф.р.. Если $|y|$ “не слишком велик”, то $\hat{F}_n(y)$ удовлетворительно оценивает $F(y)$. Однако если $|y|$ “велик” (возможно, за пределами выборочных максимума и минимума), эмпирическая функция распределения оказывается ненадёжной оценкой.

В этот разделе мы оцениваем $F_c(y)$ по выборке из распределения с тяжёлым хвостом, уровень y может стремиться к K^* с ростом размера выборки.

Холл и Вайсман [166] рассматривали задачу оценивания вероятности выхода за высокий уровень в предположении, что наблюдения являются н.о.р.с.в., неизвестное распределение принадлежит классу $\mathcal{H}_{a,b,c,d}$, существует предел $l = \lim_{n\to\infty}(\ln y)/(\ln n) > a/(1+2b)$ и $\mathbb{P}(X > \varepsilon) = 1$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Они использовали оценку

$$\tilde{F}_c(y) \equiv \tilde{F}_c(y,k,n) = \frac{k}{n}(X_{k,n}/y)^{\alpha_n^H(k)}\,.$$

Обозначим $D_n = \mathbb{E}(\tilde{F}_c(y)/F_c(y) - 1)^2$, $k_{opt} = \mathrm{arcmin}_k D_n$. Согласно [166], $k_{opt} = c_1 n^{-2b/(1+2b)}$, где $c_1 = \big((1+b)^2/(2b^3d^2c^{2b})\big)^{1/(1+2b)}$, и при $k = k_{opt}$

$$D_n \sim c_2(\ln n)^2 n^{-2b/(1+2b)}\,,$$

где $c_2 = ((1+2b)l/a-1)^2\big(2b^3d^2c^{2b}/(1+b)^2\big)^{1/(1+2b)}/2b(1+b)$; см. также [91].

Учитывая, что

$$F_c(y) = F_c(x)\mathbb{P}(X > y|X > x) \sim n^{-1}N_n(x)(x/y)^{\alpha}$$

согласно (4.2), мы предлагаем использовать оценку по методу ВВУ

$$\hat{F}_c(y) \equiv \hat{F}_c(y,x,n) = n^{-1}N_n(x)(x/y)^{1/\hat{a}_n(x)}\,. \tag{4.43}$$

где $\hat{a}_n = a_n^{RE}$. Вариантом (4.43) является оценка

$$\tilde{F}_c(y) \equiv \tilde{F}_c(y,x,n) = n^{-1}N_n(x)(x/y)^{1/\hat{a}}\,, \tag{4.43*}$$

где $1/\hat{a}$ – ранее полученная оценка ПСУХР.

В теореме 4.11, 4.12 мы считаем выполнеными условия (4.7) и (6.27).

Теорема 4.11 *Предположим, что*

$$(\hat{a}_n - a)\ln(y/x) \xrightarrow[p]{} 0\,,\ L(x)/L(y) \to 1\,. \tag{4.44}$$

Тогда оценка (4.43) состоятельна:

$$\hat{F}_c(y)/F_c(y) \xrightarrow[p]{} 1. \tag{4.45}$$

Теорема 4.12 *Предположим, что имеют место (4.15), (4.20) для* $k = 1, 2$, *(4.44),* $\sigma^2 \equiv (a\sigma_1)^2 + \sigma_2^2 - 2a\sigma_{12} > 0$ *и*

$$\ln(y/x) \to ad\,, \ (a^* - a)\sqrt{np_n} \to \mu\,, \ (L(y)/L(x) - 1)\sqrt{np} \to \nu/a \tag{4.46}$$

для некоторых констант d, μ, ν. *Тогда*

$$\left(\hat{F}_c(y)/F_c(y) - 1\right) a\sqrt{np_n} \Rightarrow \mathcal{N}\left(d\mu - \nu; \sigma_{\mathbf{c}}^2\right)\,, \tag{4.47}$$

где $\sigma_{\mathbf{c}}^2 = \mathbf{c}A\mathbf{c}^T = (a(1-d)\sigma_1)^2 + (d\sigma_2)^2 + 2ad(1-d)\sigma_{12}$.

Пример 4.8. *Потери от лесных пожаров в Дании.* Ряд авторов рассматривали задачу о потерях от лесных пожаров в Дании (см., к примеру, Резник [328], Эмбрехтс и др. [122], стр. 359, стр. 367).

В выборке размера 4322 имеют место 2156 наблюдений, превышающих 1m датских крон (DK), 109 наблюдений, превышающих 10м DK, и 7 наблюдений, превышающих 50м DK; наибольший элемент выборки превышает 263м DK (см. http://www.R-project.com, пакет EVIR).

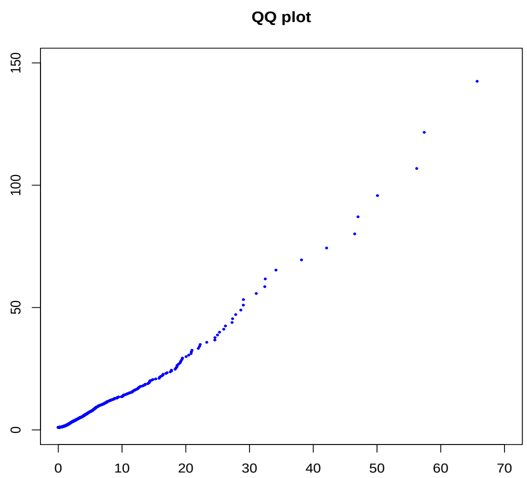

Рис. 4.13: Потери от лесных пожаров в Дании. QQ-графии: эмпирическая верхняя квантиль против верхней квантили ф.р. $F(x) = 1 - x^{-\hat{\alpha}}$, где $\hat{\alpha} = 1.4085$.

Согласно Эмбрехтсу и др. [122], индикатором тяжёлого хвоста является почти линейный вид QQ-графика (графика эмпирической верхней квантили против верхней квантили ф.р. с тяжёлым хвостом). QQ-график (рис. 4.13) свидетельствует в пользу наличия у распределения наблюдений за потерями от лесных пожаров в Дании тяжёлого хвоста.

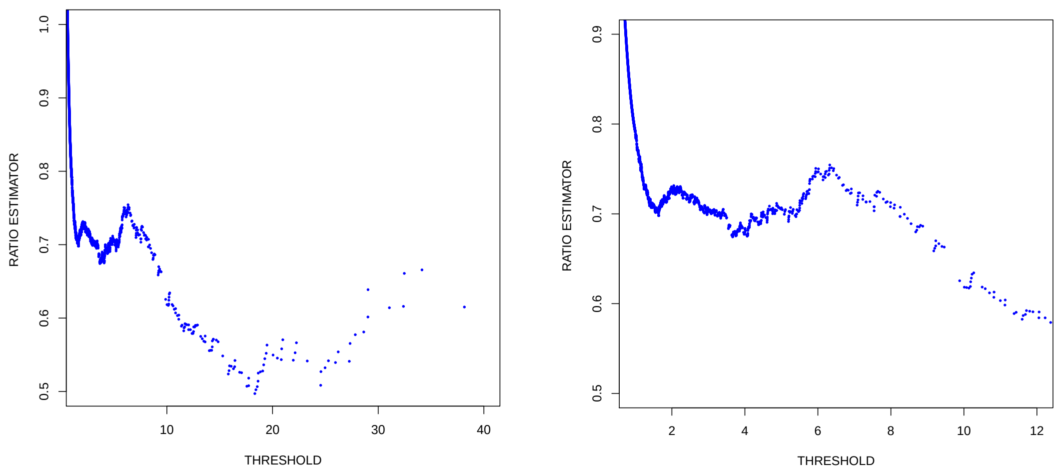

Рис. 4.14: RE-оценка для наблюдений за потерями от лесных пожаров в Дании. График выглядит стабильным в интервале [1.5;6], $\hat{a} = 0.71$, оценка ПСУХР равна 1.41.

Рис. 4.14 представляет RE-оценку оценку для данных о потерях от лесных пожаров в Дании. График выглядит стабильным в интервале [1.5;6], который сформирован 1205 элементами выборки. Среднее RE-оценки в [1.5;6] есть $\hat{a} = 0.71$, оценка ПСУХР равна 1.41.

Рис. 4.15 представляет график оценки (4.43) вероятности выхода за высокий уровень y =1м DK. График $\hat{F}_c(y, \cdot, n)$ демонстрирует стабильность в интервале [1.5;5.5], сформированном 1170 элементами выборки ($n = 4322$). Среднее $\hat{F}_c(y, x, n)$ при $x \in [1.5; 5.5]$ есть 0.573.

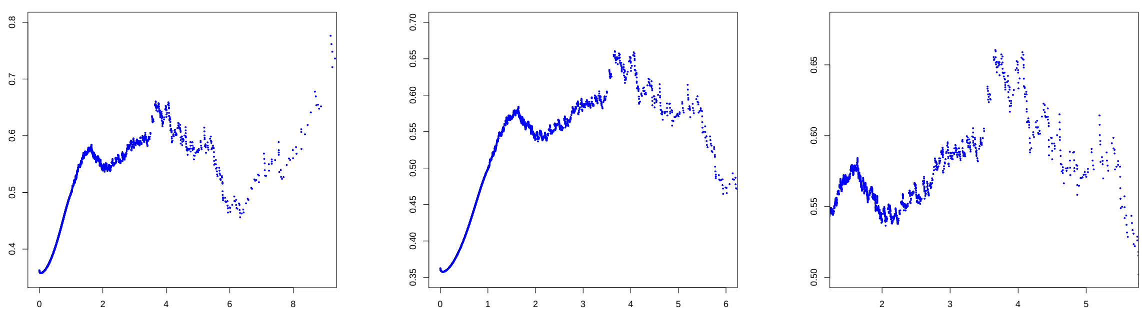

Рис. 4.15: Оценка $\hat{F}_c(y, \cdot, n)$ вероятности выхода за уровень y =1м DK. График выглядит стабильным в интервале [1.5;5.5], среднее $\hat{F}_c(y, x, n)$ при $x \in [1.5; 5.5]$ равно 0.573.

Рис. 4.16 представляет оценку (4.43*) вероятности выхода за уровень y = 1m DK. График $\tilde{F}_c(y, \cdot, n)$ выглядит стабильным в интервале [1.5;5.5]. Среднее

$\tilde{F}_c(y,x,n)$ при $x \in [1.5; 5.5]$ равно 0.569.

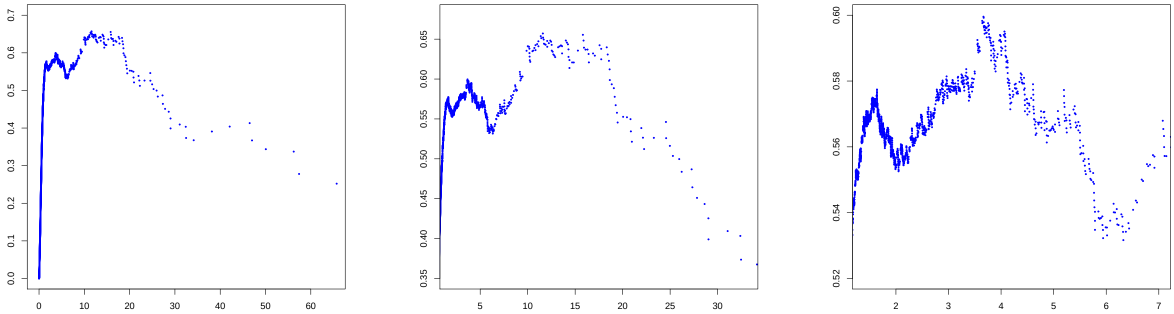

Рис. 4.16: Оценка $\tilde{F}_c(y,\cdot,n)$ вероятности выхода за уровень y =1м DK. График выглядит стабильным в интервале [1.5;5.5], среднее $\tilde{F}_c(y,x,n)$ при $x \in [1.5; 5.5]$ есть 0.569.

График оценки (4.32) верхних квантилей представлен в рис. 4.17. График $\hat{y}_q(\cdot)$ выглядит стабильным в интервале [1.5;6.5], среднее $\hat{y}_q(x)$ при $x \in [1.5; 6.5]$ равно 17.66.

График оценки (4.32*) экстремальных квантилей представлен в рис. 4.18. График $\tilde{y}_q(\cdot)$ выглядит стабильным в интервале [1.5;8], среднее $\tilde{y}_q(\cdot)$ при $x \in [1.5; 8]$ есть 17.6. Что касается эмпирической оценки квантили уровня 1%, заметим, что $X_{43,n} = 18.65$ и $X_{44,n} = 18.63$. $\square$

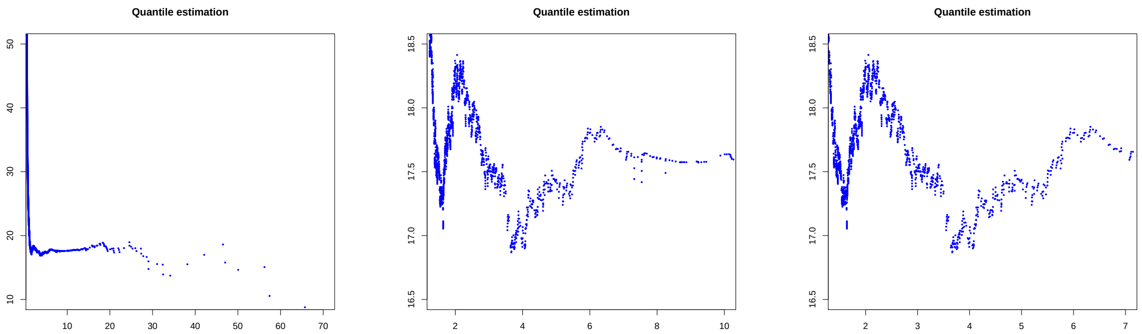

Рис. 4.17: Оценка (4.32) экстремальных квантилей для выборки наблюдений за потерями от лесных пожаров в Дании, $q = 0.01$. График $\hat{y}_q$ демонстрирует стабильность в интервале [1.5;6.5], среднее $\hat{y}_q(x)$ при $x \in [1.5; 6.5]$ есть 17.66.

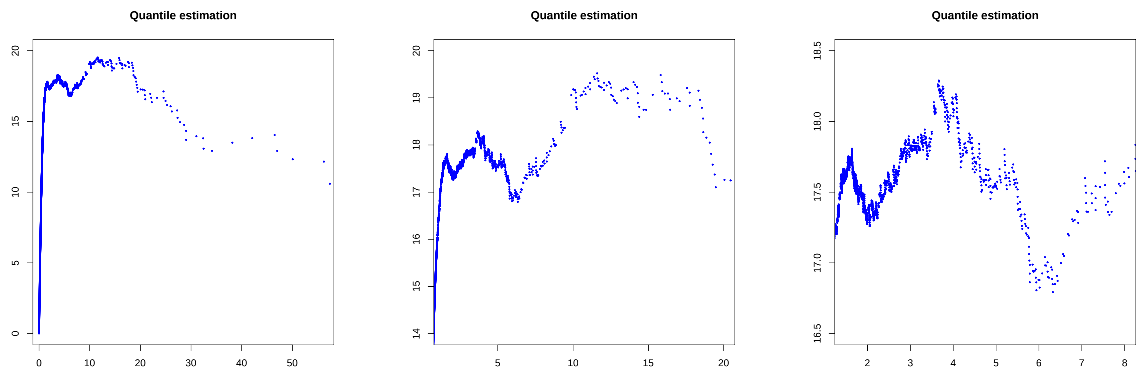

Рис. 4.18: Оценка (4.32*) экстремальных квантилей для выборки наблюдений за потерями от лесных пожаров в Дании, $q = 0.01$. График $\tilde{y}_q$ выглядит стабильным в интервале [1.5;8], среднее $\tilde{y}_q(x)$ при $x \in [1.5; 8]$ равно 17.6.

4.6 Нижние границы точности оценивания

Пусть имеется класс $\mathcal{P}$ вероятностных распределений, и пусть требуется оценить функционал a_P, являющийся элементом метрического пространства $(\mathcal{X}, d)$. В задачах непараметрического оценивания естественно возникает вопрос о нижних границах точности оценивания, а также о возможности локально-равномерной сходимости центрированных оценок к предельному распределению. Этим вопросам посвящён данный раздел.

Модули непрерывности. Для всякого $\varepsilon > 0$ обозначим через

$$\mathcal{P}_{H}(P, \varepsilon) = \{Q \in \mathcal{P} : d_{H}(P; Q) \le \varepsilon\}$$

окрестность распределения $P \in \mathcal{P}$. Будем называть

$$w_{H}(P, \varepsilon) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_H(P,\varepsilon)} d(a_P; a_Q)/2 \quad \text{и} \quad w_{H}(\varepsilon) = \sup_{P \in \mathcal{P}} w_{H}(P, \varepsilon)$$

модулями непрерывности функционала $\{a_P : P \in \mathcal{P}\}$. К примеру, если $\mathcal{P} = \{P_t, t \in \Theta\}$, $d(x; y) = |x - y|$ и $a_{P_t} = t$, то $2w_{H}(P_t, \varepsilon) = \sup\{|h| : d_{H}(P_t; P_{t+h}) \le \varepsilon\}$.

Аналогично определим окрестность $\mathcal{P}_{TV}(P, \varepsilon)$ и модуль непрерывности $w_{TV}(\cdot) \equiv w_{TV}(\cdot, n)$, используя метрику $d_{TV}^{(n)} = d_{TV}(P_0^n; P_1^n)$. Справедлива

Лемма 4.13 *Для любого* $P_0 \in \mathcal{P}$ *и любой оценки* $\hat{a}$

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_H(P_0,\varepsilon)} P(d(\hat{a}; a_P) \ge w_{H}(P_0, \varepsilon)) \ge (1-\varepsilon^2)^{2n}/4, \tag{4.48}$$

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_{TV}(P_0,\varepsilon)} P(d(\hat{a}; a_P) \ge w_{TV}(P_0, \varepsilon)) \ge (1-\varepsilon)^n/2\,. \tag{4.49}$$

Пусть R – функция потерь. Из леммы 4.13 и неравенства Чебышева следует оценка снизу для $\sup_{P\in\mathcal{P}_H(P_0,\varepsilon)}\mathbb{E}_P R(d(\hat a;a_P))$: нижняя граница может быть получена максимизацией $R(w_{_H}(P,\varepsilon))(1-\varepsilon^2)^{2n}$ или $R(w_{_{TV}}(P,\varepsilon))(1-\varepsilon)^n$ по ε. В частности, из (4.48) следует

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_H(P_0,\varepsilon)}\mathbb{E}_P d^2(\hat a;a_P)\geq(1-\varepsilon^2)^{2n}w_{_H}^2(P_0,\varepsilon)/4\,.$$

Положим $\varepsilon^2=c^2/n$. Тогда

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_H(P_0,\varepsilon)}\mathbb{E}_P^{1/2}d(\hat a;a_P)^2\gtrsim e^{-c^2}w_{_H}(P_0,c/\sqrt{n}\,)/2$$

(использование $\gtrsim$ вместо $\geq$ связано с заменой $(1-c^2/n)^n$ на e^{-c^2}). Поэтому порядок точности оценивания a_P в окрестности P_0 не может быть лучше, чем

$$w_{_H}(P_0,1/\sqrt{n}\,)\,.$$

Если для некоторого $P\in\mathcal{P}$ существует число $J_{_{H,P}}>0$, такое что

$$w_{_H}(P,\varepsilon)\geq J_{_{H,P}}\varepsilon^{2r}\tag{4.50}$$

для всех достаточно малых ε, то порядок точности оценивания a_P не может быть лучше, чем n^{-r}. А именно, из (4.50) следует, что

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_H(P_0,c/\sqrt{n}\,)}\mathbb{E}_P^{1/2}d(\hat a;a_P)^2\gtrsim e^{-c^2}c^{2r}J_{_{H,P_0}}n^{-r}/2\,.\tag{4.51}$$

Если для всякого $P\in\mathcal{P}_H(P_0,c/\sqrt{n}\,)$ определено число $J_{_{H,P}}>0$ и семейство $\{J_{_{H,\cdot}}\}$ равномерно непрерывно в $\mathcal{P}_H(P_0,c/\sqrt{n}\,)$, то из (4.51) с $c^2=r$ выводим неравномерную нижнюю границу

$$\sup_{P\in\mathcal{P}_H(P_0,\sqrt{r/n}\,)}J_{_{H,P}}^{-1}\mathbb{E}_P^{1/2}d(\hat a;a_P)^2\gtrsim(r/e)^r n^{-r}/2\,.\tag{4.52}$$

Здесь $I_{_P}=J_{_{H,P}}^{-1}$ играет роль информационного функционала.

Пример 4.9. Если $d=d_{_H}$, то $w_{_H}(P,\varepsilon)=\varepsilon/2$ для всех $P\in\mathcal{P}$, (4.50) выполнено с $r=1/2$, $J_{_{H,P}}=1/2$, и

$$\sup_{P\in\mathcal{P}}\mathbb{E}_P d_{_H}^2(\hat a;a_P)\geq 1/8en\,.\tag{4.53}$$

Пример 4.10. Пусть $\mathcal{P}=\{P_t,t\in\mathbb{R}\}$, где $P_t=\mathcal{N}(t;1)$, и пусть $a_{P_t}=t$ и $d(t;s)=|t-s|$. Тогда

$$w_{_H}(P_t,\varepsilon)=\sqrt{\ln(1-\varepsilon^2)^{-2}}\geq\sqrt{2}\varepsilon$$

для всех t. Следовательно, (4.50) и (4.52) имеют место с $J_{H,P} = \sqrt{2}$ и $r = 1/2$. $\square$

Пример 4.11. Пусть $\mathcal{P} = \{P_t, t > 0\}$, где $P_t = \mathbf{U}[0;t]$, и пусть $a_{P_t} = t$ и $d(t;s) = |t-s|$. Тогда $w_H(P_t, \varepsilon) \geq t\varepsilon^2$. Следовательно, (4.50) и (4.52) выполнены с $J_{H,P} = t$ и $r = 1$. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о возможности локально-равномерной сходимости центрированных оценок к предельному распределению.

Пусть $\mathcal{P}'$ – подкласс $\mathcal{P}$ и $\{v_n\}$ – некоторая последовательность положительных чисел. Будем говорить, что оценка $\hat{a}_n$ сходится к a_P со скоростью v_n равномерно по $\mathcal{P}'$, если существует невырожденное распределение Q с положительной непрерывной производной q относительно меры Лебега, такое что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{P\in\mathcal{P}'} |P\left((\hat{a}_n - a_P)/v_n \in A\right) - Q(A)| = 0 \tag{4.54}$$

для каждого измеримого множества A, удовлетворяющего условию $Q(\partial A) = 0$.

Пусть $\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Пфанцаль [306] имел дело с модулем непрерывности

$$2w_{TV}(P_0, c) = \sup_{P\in\mathcal{P}_{TV}(P_0,c)} |a_P - a_{P_0}|,$$

где $\mathcal{P}_{TV}(P_0, c) = \{P \in \mathcal{P} : d_{TV}(P_0^n; P^n) \leq c\}$. Он показал, что если

$$\lim_{c\downarrow 0} c^{-1} \limsup_{n\to\infty} w_{TV}(P_0, c)/v_n = \infty,$$

то найдётся число $t \in (0;1)$, такое что ни для какой оценки $\hat{a}_n$ статистика $(\hat{a}_n - a_P)/v_n$ не может сходится к предельному распределению равномерно по $\mathcal{P}_{TV}(P_0, t)$.

Следующая теорема устанавливает связь между структурой нижней границы для модуля непрерывности и возможностью локально-равномерной сходимости оценок с оптимальной скоростью.

Теорема 4.14 *Если (4.50) выполнено с $r < 1/2$, то никакая оценка не может сходится к a_P со скоростью n^{-r} равномерно по $\mathcal{P}_H(P, 1/\sqrt{n})$.*

Нижние границы точности оценивания характеристик распределения с тяжёлым хвостом. Важным направлением в статистике экстремальных значений является задача определения нижних границ точности оценивания характеристик неизвестного распределения с тяжёлым хвостом. Этой тематике посвящены работы Бейрлант и др. [33], Холл и Вэлш [167], Донохо и Лиу [113], Дреес [117], Пфанцаль [306] и др..

Указанная литература даёт лишь частичное решение задачи: найден порядок скорости убывания нижних границ [113, 167, 306], а также асимптотические нижние границы при тех или иных ограничениях на класс рассматриваемых оценок и распределений. Например, Бейрлант, Буко и Веркер [33] рассматривают класс оценок показателя скорости убывания хвоста распределения, являющихся $O_p(1)$ равномерно по классу рассматриваемых распределений, а возможные значения показателя скорости убывания хвоста распределения должны принадлежать интервалу фиксированной длины. Дреес [116] получил асимптотическую нижнюю границу для класса аффинных оценок показателя скорости убывания хвоста распределения, возможные значения показателя скорости убывания хвоста распределения (ПСУХР) должны принадлежать интервалу фиксированной длины.

В данном разделе найдены нижние границы точности оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами. При этом не требуется, чтобы возможные значения показателя скорости убывания хвоста распределения принадлежали интервалу фиксированной длины; выявлены соответствующие информационные функционалы; получены нижние границы точности оценивания экстремальных квантилей.

Рассмотрим задачу оценивания ПСУХР α. Холл & Вэлш [167] установили следующий результ. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha_0, C_0, \varepsilon, b, A)$ – класс распределений на $[0;\infty)$ с плотностями

$$f(x) = C\alpha x^{\alpha-1}(1 + r(x)),$$

где $|r(x)| \le Ax^{b\alpha}$ $(x > 0)$, $|\alpha - \alpha_0| \le \varepsilon$, $|C - C_0| \le \varepsilon$. Обозначим через $\hat{\alpha}_n$ произвольную оценку ПСУХР, и пусть $\hat{C}_n$ – произвольная оценка константы хвоста распределения. Если последовательность $\{s_n\}$ положительных чисел удовлетворяет условию

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{F\in\mathcal{D}} \mathbb{P}_F(|\hat{\alpha}_n - \alpha| > s_n) = 0 \qquad (\forall A > 0),$$

то $s_n \gg n^{-b/(2b+1)}$; если $\limsup_{n\to\infty} \sup_{F\in\mathcal{D}} \mathbb{P}_F(|\hat{C}_n - C| > s_n) = 0$ для всех $A > 0$, то $s_n \gg (\ln n)n^{-b/(2b+1)}$.

Бейрлант и др. [33] получили аналогичное утверждение для более общего класса $\mathcal{P}$ распределений, но рассматривают лишь класс оценок, являющихся $O_p(1)$ равномерно по классу рассматриваемых распределений, а возможные значения ПСУХР должны принадлежать интервалу фиксированной длины. Дреес [116] получил асимптотическую нижнюю границу для класса аффинных оценок показателя скорости убывания хвоста распределения в предположении, что возможные значения ПСУХР принадлежат интервалу фиксированной длины.

Точность оценивания зависит от того, насколько "богат" класс распределений. Семейство $\mathcal{H}$ распределений с тяжёлыми хвостами весьма богато, и в литературе по статистике распределений с тяжёлыми хвостами принято (см. [167]) рассматривать непараметрическиq класс

$$\mathcal{H}(b) = \left\{F \in \mathcal{H} : \sup_{x>1} |c_F^{-1} x^{\alpha_F}(1 - F(x)) - 1| x^{b\alpha_F} < \infty\right\},$$

где $b, c_{_F}$ – положительные числа. Если функция распределения $F \in \mathcal{H}(b)$, то

$$1 - F(x) = c_{_F} x^{-\alpha_F} \big(1 + O(x^{-b\alpha_F})\big) \qquad (x \to \infty)\,.$$

Теорема 4.15 устанавливает нижнюю границу точности оценивания ПСУХР по выборке с распределениями из класса $\mathcal{H}(b)$.

Задача оценивания ПСУХР равносильна задаче оценивания индекса α по выборке н.о.р. неотрицательных с.в. $Y_1, \ldots, Y_n$ с распределением

$$F(y) \equiv \mathbb{P}(Y < y) = y^{\alpha}\ell(y) \qquad (y > 0), \tag{4.55}$$

где $\alpha > 0$, а функция ℓ медленно меняется в окрестности нуля. Отметим, что $\mathcal{L}(Y) \in \mathcal{F}$, если и только если $\mathcal{L}(X) \in \mathcal{H}$, где $X = 1/Y$. Традиция рассматривать последнюю задачу восходит к [165].

Обозначим через $\mathcal{F}$ класс распределений, удовлетворяющих (4.55). Заметим, что $\alpha \equiv \alpha_F$ является функционалом F:

$$\alpha_{_F} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{\ln F(y)}{\ln y}\ .$$

Если $\ell(y)$ стремится к константе (скажем, $c_{_F}$) при $y \downarrow 0$, то константа хвоста $c_{_F}$ также является функционалом F:

$$c_{_F} = \lim_{y \downarrow 0} y^{-\alpha_F} F(y).$$

Классу $\mathcal{H}(b)$ соответствует следующий непараметрический класс распределений:

$$\mathcal{F}(b) = \{F \in \mathcal{F} : \sup_{y \in (0;1)} |c_{_F}^{-1} y^{-\alpha_F} F(y) - 1| y^{-b\alpha_F} < \infty\}\,,$$

где b – положительное число. Если $F \in \mathcal{F}(b)$, то

$$F(y) = c_{_F} y^{\alpha_F} \left(1 + O(y^{b\alpha_F})\right) \qquad (y \to 0)\,.$$

В непараметрическом классе $\mathcal{F}(b)$ можно выбрать ф.р. F_0 и $F_1 \in \mathcal{F}(b)$ так, что

$$d_{\chi}^2(F_0; F_1) \asymp d_{_H}^2(F_0; F_1) \ll (\alpha_{F_0} - \alpha_{F_1})^2\,.$$

Поэтому точность минимаксного оценивания оказывается хуже, чем $n^{-1/2}$.

Теоремы 4.15 и 4.17 используют специально подобранные ф.р. F_0 и F_1. Обозначим $\alpha_i = \alpha_{F_i}$, $a_i = 1/\alpha_i$, $\mathbb{E}_i$ есть математическое ожидание по распределению F_i. Пусть $J_n = ((4/n)^b; \sqrt{n}/2]$, и положим

$$r = b/(1 + 2b)\,,\ z_n = (8r/ne)^r e^{-r^2/n}/2\,.$$

Theorem 4.15 *Для любых $b > 0$ и $\alpha \in J_n$ существуют ф.р. $F_0, F_1 \in \mathcal{F}(b)$, такие что для любой оценки $\hat{\alpha}_n$ показателя скорости убывания хвоста распределения и любой оценки $\hat{a}_n$ индекса a*

$$\max_{i\in\{0;1\}} \frac{\alpha_i^{r/b} c^r_{F_i}}{1-(4/n)^r \alpha_i^{-r/b}} \mathbb{E}_i^{1/2}(\hat{\alpha}_n/\alpha_{F_i} - 1)^2 \geq z_n\,, \qquad (4.56)$$

$$\max_{i\in\{0;1\}} \frac{a_i^{-r/b} c^r_{F_i}}{1-(4/n)^r a_i^{r/b}} \mathbb{E}_i^{1/2}(\hat{a}_n/a_{F_i} - 1)^2 \geq z_n\,. \qquad (4.57)$$

Если $\hat{a}_n$ в (4.57) заменить на RE-оценку, то правая часть (4.57) увеличится лишь на множитель $e^r/\sqrt{2r}$.

Согласно теореме 4.15, порядок точности оценивания не может быть лучше, чем n^{-r}. Для многих распределений с тяжёлыми хвостами индекс b равен 1 либо 2, так что порядок точности непараметрического оценивания ПСУХР обычно не может быть лучше, чем $n^{-1/3}$ либо $n^{-2/5}$.

Отметим, что (4.56) и (4.57) – неравномерные нижние границы. Согласно (4.56), для любой оценки $\hat{\alpha}_n$ существует ф.р. F, такая что

$$\mathbb{E}_F^{1/2}(\hat{\alpha}_n/\alpha - 1)^2 \geq C\alpha_F^{-1/(1+2b)}(c_F n)^{-b/(1+2b)}\,.$$

Здесь $I_F = \alpha_F^{1/(1+2b)} c_F^{b/(1+2b)}$ играет роль информационного функционала. Малое α означает более тяжёлый хвост и понижение точности оценивания ПСУХР. Отметим, что равномерные нижние границы могут терять смысл, так как

$$\sup_{F\in\mathcal{F}(b)} \mathbb{E}_F(\hat{\alpha}_n/\alpha_F - 1)^2 = \infty \qquad (0 < b < \infty).$$

Определим класс $\mathcal{F}_1(b)$ подобно $\mathcal{F}(b)$ с $c_F = 1$, и для всякой ф.р. F положим $J_{H,F} = (8\alpha_F^2)^{2r}/2$. Рассмотрим задачу оценивания ПСУХР α по выборке н.о.р. наблюдений из класса $\mathcal{F}_1(b)$. Ввиду (4.81), $w_H(F,\varepsilon) \geq J_{H,F}\varepsilon^{2r}$ при $0 < \varepsilon < 1/\sqrt{8}\alpha_F$ для всякой ф.р. $F(y) = y^\alpha$ $(0 < y \leq 1)$, $\alpha > 0$. Согласно теореме 4.14, никакая оценка $\hat{\alpha}_n$ не будет сходиться к α_F локально-равномерно с оптимальной скоростью n^{-r}.

Следующая теорема устанавливает нижнюю границу для средне-квадратичных ошибок оценок константы хвоста распределения.

Theorem 4.16 *Пусть $\hat{c}_n$ – произвольная оценка константы хвоста распределения. Для любых $\alpha > 0$ и $c > 0$ существуют ф.р. $F_0, F_1 \in \mathcal{F}(b)$, такие что $\alpha_{F_0} = \alpha, c_{F_0} = c^{-\alpha}$, и*

$$\max_{i\in\{0;1\}} t_{i,n} \alpha_i^{r/b} c^r_{F_i} \mathbb{E}_i^{1/2}(\hat{c}_n/c_{F_i} - 1)^2 \geq \frac{r}{2b}(\ln n)(8r/ne)^r \qquad (4.58)$$

для всех достаточно больших n, где $\max_{i\in\{0;1\}} |t_{i,n} - 1| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 4.17 устанавливает нижнюю границу для средне-квадратичных ошибок оценок экстремальных квантилей.

Мы называем квантиль "экстремальным", если уровень $q_n \to 0$ при $n \to \infty$. В теореме 4.17 рассматриваются квантили уровня $q_n \asymp n^{-1/(1+2b)}$. А именно, пусть $q_n = \kappa^\alpha \gamma^{1/b}$, где $\kappa \in (0;1)$ и $\gamma \equiv \gamma_n$ определено в (4.80).

Обозначим через $y_i = F_i^{-1}(q_n)$ квантиль уровня q_n. Другими словами, $1/y_i$ есть квантиль распределения $\mathcal{L}_i(X)$. В финансовых приложениях даже уровень 0.05 может считаться экстремальным.

Theorem 4.17 *Для любых* $b > 0$ *и* $\alpha \in J_n$ *существуют ф.р.* $F_0, F_1 \in \mathcal{F}(b)$, *такие что для любой оценки* $\hat{y}_n$ *экстремальной квантили* $y_i = F_i^{-1}(q_n)$

$$\max_{i\in\{0;1\}} k_{\alpha_i} \alpha_i^{r/b} c_{F_i}^r \mathbb{E}_i^{1/2} (\hat{y}_n/y_i - 1)^2 \quad \geq \quad |\ln \kappa| z_n \,, \tag{4.59}$$

$$\max_{i\in\{0;1\}} k_{\alpha_i} \alpha_i^{r/b} c_{F_i}^r \mathbb{E}_i^{1/2} (y_i/\hat{y}_n - 1)^2 \quad \geq \quad |\ln \kappa| z_n \tag{4.60}$$

для всех достаточно больших n*, где* $\max_{i\in\{0;1\}} |k_{i,n} - 1| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Результаты теорем 4.15 – 4.17 означают, что нормализующие последовательности оценок должны зависеть специальным образом от ПСУХР и константы хвоста. К примеру, неравенства (4.56) и (4.57) означают, что нормализующей последовательностью для $\hat{\alpha}_n/\alpha_F - 1$ является $n^{-r} \alpha_F^{-r/b} c_F^{-r}$.

Классический минимаксный подход ориентирован на установление нижних границ для

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} \mathbb{E}_P |\hat{a}_n - a_P|^2 \,,$$

тогда как теоремы 4.15 – 4.17 предлагают имеет дело с

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} g_P \mathbb{E}_P |\hat{a}_n^* - a_P|^2 \,,$$

где функционал g_P определён нижней границей.

Нижние границы точности оценивания эмпирической ф.р. выборочного максимума. Теоремы 4.18–4.20 устанавливают, что для любой оценки $\hat{F}_n$ ф.р. выборочного максимума существует ф.р. F, такая что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_F \Big(\|\hat{F}_n - F^n\| \geq 1/9 \Big) \geq 1/3 \,. \tag{4.61}$$

Более того, $\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{P}_{F_i} \Big(\|\hat{F}_n - F_i^n\| \geq 1/4 \Big) \geq 1/4 \ (n \geq 1)$, где F_0 имеет равномерное распределение на $[0;1]$ и $F_1 \equiv F_{1,n} \to F_0$ поточечно при $n \to \infty$. Поэтому состоятельное оценивание функции распределения выборочного максимума возможно только при дополнительных ограничениях на класс распределений.

Theorem 4.18 *Для любой оценки $\{\hat F_n\}$ ф.р. выборочного максимума существует ф.р. F, такая что имеет место (4.61).*

Из неравенства Чебышева и (4.61) следует существование ф.р. F, такой что

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}_F \|\hat F_n - F^n\| \geq 1/27,$$

что уточняет результат Бейрланта и Девроя [34].

Оценка $\tilde a_n(\cdot) \equiv \tilde a_n(\cdot, X_1, ..., X_n)$ называется инвариантной относительно сдвига, если

$$\tilde a_n(x, X_1, ..., X_n) = \tilde a_n(x+c, X_1+c, ..., X_n+c) \qquad (x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}).$$

Оценка $\tilde a_n(\cdot)$ называется инвариантной относительно изменения масштаба, если

$$\tilde a_n(x, x_1, ..., x_n) = \tilde a_n(cx, cx_1, ..., cx_n)$$

для любых $x, x_1, ..., x_n, c>0$. Примерами оценок F^n, инвариантных относительно сдвига и изменения масштаба, являются F_n^n, где F_n – эмпирическая ф.р., и оценка $\tilde F_n = \left(\sum_{i=1}^{[n/r]} \mathbb{I}\{M_{i,r} < x\}/[n/r]\right)^{n/r}$, где $M_{i,r} = \max\{X_{(i-1)r+1}, ..., X_{ir}\}$ $(1 \leq r \leq n)$.

Theorem 4.19 *Для любой оценки $\{\hat F_n\}$ ф.р. выборочного максимума*

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{P}_{F_i}\left(\|\hat F_n - F_i^n\| \geq 1/4\right) \geq 1/4 \qquad (n \geq 1), \tag{4.62}$$

где F_0 имеет равномерное распределение на $[0;1]$ и $F_1 \equiv F_{1,n} \to F_0$ поточечно при $n \to \infty$.

Theorem 4.20 *Для любой оценки $\{\tilde F_n\}$ ф.р. выборочного максимума, инвариантной относительно сдвига либо относительно изменения масштаба,*

$$\mathbb{P}_{F_0}\Big(\|\tilde F_n - F_0^n\| \geq 1/4\Big) \geq 1/4 \qquad (n \geq 1), \tag{4.63}$$

где F_0 имеет равномерное распределение на $[0;1]$.

4.7 Доказательства

Ниже символы c_i обозначают положительные константы; черта над случайной величиной означает, что она центрирована своим матожиданием. Мы будем писать $\xi_n \underset{p}{\sim} \eta_n$ или $\xi_n = \eta_n(1 + o_p(1))$, если $\xi_n/\eta_n \xrightarrow[p]{} 1$.

Доказательство утверждения 4.1. Мы приводим доказательство для случая $m=1$; доказательство в случае $m>1$ проводится аналогично.

Ввиду леммы 6.21, условие (6.27) эквивалентно условию

$$\sum\nolimits_{i\geq 1} \rho(2^i) < \infty$$

(отсюда, в частности, $\rho(l) \to 0$ при $l \to \infty$); условие (6.28) эквивалентно условию

$$\sum\nolimits_{i\geq 1} \varphi^{1/2}(2^i) < \infty.$$

Мы используем неравенство Чебышева, (4.11) и оценку дисперсии суммы зависимых случайных величин.

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $Z_i = Y_i^* - (\mathbb{1}_i - p_n)\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a_n^{RE} - a^* > \varepsilon) &= \mathbb{P}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n (Y_i - a^*)\mathbb{1}_i > \varepsilon \sum\nolimits_{i=1}^n \mathbb{1}_i\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum\nolimits^n Z_i > \varepsilon n p_n\right) \leq (\varepsilon n p_n)^{-2}\, \mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n Z_i\right) . \end{aligned}$$

Согласно моментному неравенству Утева (6.30), существует константа c_ρ, зависящая только от $\rho(\cdot)$, такая что

$$\mathbb{D}N_n \leq c_\rho n p_n\,,\ \mathbb{D}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^*\Big) \leq c_\rho n p_n\,,\ \mathbb{D}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^n Z_i\Big) \leq c_\rho n \mathbb{D} Z_1 \leq c n p_n \tag{4.64}$$

(мы используем также (4.11)). Следовательно, $\mathbb{P}(a_n - a^* > \varepsilon) \to 0$. Аналогично проверяем, что

$$\mathbb{P}(a_n^{RE} - a^* < -\varepsilon) \to 0.$$

Напомним, что $a^* \to a$ при $x_n \to \infty$. Следовательно, $a_n \xrightarrow[p]{} a$.

Теперь покажем, что $\hat{C}_n \xrightarrow[p]{} C$. Неравенство Чебышева и (4.64) влекут

$$N_n/np_n \xrightarrow[p]{} 1\,. \tag{4.65}$$

Следовательно, $\hat{C}_n = C x_n^{1/a_n - 1/a}(1 + o_p(1))$. Требуется показать, что $(a_n - a)\ln x_n \xrightarrow[p]{} 0$. По предположению,

$$(a^* - a)\ln x_n \to 0\,.$$

Остаётся проверить, что $(\sum_{i=1}^n Y_i^*)\,(\ln x_n)/np_n \xrightarrow[p]{} 0$. Последнее следует из неравенства Чебышева, предположения и (4.64).

Доказательство (4.8). Покажем, что $\mathbb{E}a_n^{RE}(x) = a^*$, если $\{X_i\}$ – н.о.р.с.в.. Согласно формуле Хинчина (6.3),

$$\left(N_n(x), \sum_{i=1}^n Y_i\right) \stackrel{d}{=} \left(\tau, \sum_{i=1}^\tau Z_i\right),$$

где $\{Z_i\}$ – н.о.р.с.в. с распределением $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{L}(X|X > x)$ и $\tau \stackrel{d}{=} N_n(x)$. Поэтому

$$\mathbb{E}a_n^{RE} = \mathbb{E}\tau^{-1}\mathbb{E}\Big\{\sum\nolimits_{i=1}^\tau Z_i \mathbb{1}\{\tau > 0\}\big|\tau\Big\} = a^*,$$

откуда следует (4.8).

Доказательство соотношения (4.9). Из (5.7) следует, что

$$np\mathbb{E}(a_n^{RE}/a - 1 - v)^2 = 1 + 2(v_2 - v) - v^2 + O(1/np) \qquad (n \to \infty).$$

Из этого соотношения с учётом (4.8) получим (4.9). □

Условия слабой зависимости часто выражены в терминах коэффициентов перемешивания α, β, φ or ρ. Используя метод блоков, можно проверить, что $a_n \xrightarrow[p]{} a$, если (6.27) заменить на условие

$$[n/r](\alpha(l) + lp_n) + \left(np_n^{1/2}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{r} \alpha^{1/2}(i) + rp_n \to 0 \tag{4.66}$$

для некоторых последовательностей $l = l(n)$, $r = r(n)$, таких что $1 \le l \le r \le n$.

Иногда условия типа (4.66) представлены в терминах коэффициента β. В частности, Старика [380] предполагает, что

$$(n/r)\beta(l) + rk^{-1/2+\varepsilon} + krn^{-1} \to 0 \tag{4.67}$$

для некоторого $\varepsilon \in (0;1/2)$ и некоторых последовательностей $l = l(n)$, $k = k(n)$, $r = r(n)$, таких что $1 \ll l \le r \ll n$, $1 \ll k \ll n$; аналогичное условие предполагается выполненым в [115].

Условие (6.27) предпочтительно, если коэффициенты перемешивания β и ρ (или φ) имеют один и тот же порядок скорости убывания, что представляется типичным. Сравним, к примеру, (6.28) с (4.67) в случае, когда $\beta(l) \asymp \varphi(l) \asymp (\ln l)^{-3}$. Поскольку $nr^{-1}\beta(l) = o(1)$ и $k = o(n/r)$, имеем $k = o\left((\ln l)^3\right)$. Поэтому

$$rk^{-1/2+\varepsilon} \gg r(\ln l)^{-4.5+3\varepsilon} \ge l(\ln l)^{-4.5+3\varepsilon} \to \infty.$$

Следовательно, (4.67) не выполнено, в то время как (6.28) имеет место.

Обозначим $A = BA_0B^T$, где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \ B_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a^* & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 4.21 *Если* $\varphi(l) \to 0$ *при* $l \to \infty$ *и (4.20) выполнено для* $k = 1, 2$, *то*

$$(N_n/(np_n) - 1, a_n^{RE} - a^*)\sqrt{np_n} \Longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}; A)\,. \tag{4.68}$$

Доказательство леммы 4.21. Заметим, что

$$a_n^{RE} - a^* = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^*}{\sum^n \mathbb{I}_i} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^*}{np_n}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \bar{\mathbb{I}}_i}{\sum_{i=1}^n \mathbb{I}_i}\right).$$

Принимая во внимание (4.65), требуется проверить, что

$$\left(\frac{N_n}{np_n}-1, \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^*}{np_n}\right)\sqrt{np_n} = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \bar{\mathbb{I}}_i}{\sqrt{np_n}}, \frac{\sum_{i=1}^n Y_i^*}{\sqrt{np_n}}\right) \Longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}; A)\,.$$

Отметим, что $(\bar{\mathbb{I}}_i, Y_i^*)^T = B_*\zeta_i$, где $\zeta_i = (\bar{\mathbb{I}}_i, \bar{Y}_i)^T$. Чтобы проверить, что

$$\sum_{i=1}^n \zeta_i/\sqrt{np_n} \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}; A_0),$$

мы применяем теорему 6.8.

Пусть $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Мы намерены показать, что

$$\sum_{i=1}^n c\zeta_i/\sqrt{np_n} \Longrightarrow \mathcal{N}(\mathbf{0}; cA_0c^T)\,. \tag{4.69}$$

Положим $\xi_i = c_1\bar{\mathbb{I}}_i + c_2(Y_i - a^*p_n)$ и $j_n = 1$. По предположению, $\mathbb{D}(\sum_{i=1}^n \xi_i) \sim \sigma^2 np_n$. Чтобы проверить (6.29), достаточно показать, что

$$\mathbb{P}(Y > \varepsilon\sqrt{np_n}\,|X > x_n) \to 0\,,\ \mathbb{E}\left\{Y^2\mathbb{I}\{Y > \varepsilon\sqrt{np_n}\}\Big|X > x_n\right\} \to 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Согласно свойству (6.54) медленно меняющихся функций,

$$L(y)/L(x) \sim \exp\left(\int_x^y w(u)u^{-1}\,du\right) \tag{4.70}$$

при $x, y \to \infty$, где $w(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > \varepsilon\sqrt{np_n}|X > x_n) &= \mathbb{P}(X > x_n e^{\varepsilon\sqrt{np_n}})/\mathbb{P}(X > x_n)\\ &= L(x_n e^{\varepsilon\sqrt{np_n}})L^{-1}(x_n)e^{-\varepsilon\sqrt{np_n}/a} = e^{-(\varepsilon/a+o(1))\sqrt{np_n}} \to 0\,.\end{aligned}$$

Используя это соотношение и (4.11), получим

$$\mathbb{E}^2\left\{Y^2\mathbb{I}\{Y > \varepsilon\sqrt{np_n}\}\Big|X > x_n\right\} \le \mathbb{E}\{Y^4|X > x_n\}\mathbb{P}\,(Y > \varepsilon\sqrt{np_n}\,|X > x_n) \to 0\,.$$

Следовательно, (6.29) выполнено, и теорема 6.8 влечёт (4.69) и (4.68). □

Доказательство теоремы 4.2. Заметим, что

$$(a_n^{RE} - a)\sqrt{N_n} = (a_n^{RE} - a^*)\sqrt{N_n} + av\sqrt{N_n}$$

и что $N_n/np_n \xrightarrow[p]{} 1$ согласно (4.68). Поэтому достаточно показать, что $(a_n^{RE} - a^*)\sqrt{np_n} \Rightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

Аргументы, используемые в доказательстве леммы 4.21, влекут также

$$\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^* \Big/ \left(\mathbb{D}\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^*\right)^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(0;1)\,.$$

Принимая во внимание (4.65) и (4.17), получим (4.18). □

Лемма 4.22 *Если (4.20) выполнено, то*

$$\hat{\sigma}_k \underset{p}{\longrightarrow} \sigma_k\,, \ \hat{\sigma}_{12} \underset{p}{\longrightarrow} \sigma_{12} \qquad (k \in \mathbb{N})\,. \tag{4.71}$$

Доказательство леммы 4.22. Сначала заметим, что

$$\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{r} Y_i^{k-1}\mathbb{1}_i\right)^2 \sim \sigma_k^2 r p_n \qquad (k \in \mathbb{N})\,. \tag{4.72}$$

Действительно, обозначим $R_n = \mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{[n/r]} T_{k,j}\right) - [n/r]\mathbb{D}T_{k,1}$. По теореме 6.10, $R_n = o([n/r]\mathbb{D}T_{k,1})$. Поэтому $\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{[n/r]} T_{k,j}\right) \sim [n/r]\mathbb{D}T_{k,1} \le c_1 np_n$ и

$$\mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} Y_i^k \mathbb{1}_i\right) = \mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{[n/r]} T_{k,j}\right) + o(np_n) = [n/r]\mathbb{D}T_{k,1} + o(np_n)\,.$$

По предположению, $r/n \to 0$. Поэтому $\mathbb{D}T_{k-1,1} \equiv \mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i^{k-1}\mathbb{1}_i\right) \sim \sigma_k^2 r p_n$, и (4.72) следует.

Мы используем неравенство Чебышева, чтобы доказать (4.71). Заметим, что $\sigma_k^2 - [n/r]\mathbb{E}T_{k-1,1}^2/np_n = o(1)$. По теореме 6.10, $\mathbb{D}T_{k,1}^2 \le \mathbb{E}T_{k,1}^4 \le c_2 r p_n$ и

$$\mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]} T_{k,j}^2\right) \le c_3[n/r]\mathbb{D}T_{k,1}^2 \le c_4 np_n\,.$$

Следовательно, вероятность $\mathbb{P}(\hat{\sigma}_k^2 - \sigma_k^2 > 2\varepsilon)$ не превышает

$$\mathbb{P}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]}(T_{k-1,j}^2 - \mathbb{E}T_{k-1,j}^2) - (\sigma^2 + 2\varepsilon)\sum\nolimits_{i=1}^{n} \bar{\mathbb{1}}_i > \varepsilon np_n\right) \le \frac{c_\varepsilon}{np_n} \to 0$$

$(\forall \varepsilon > 0)$. Аналогично проверяем, что $\mathbb{P}(\hat{\sigma}_k^2 - \sigma_k^2 < -\varepsilon) \to 0$. Поэтому $\hat{\sigma}_k \underset{p}{\longrightarrow} \sigma_k$.

Остаётся показать, что $\hat{\sigma}_{12} \underset{p}{\longrightarrow} \sigma_{12}$. Напомним, что $Y_i^* = Y_i - a^*\mathbb{1}_i$. Согласно (4.20),

$$\sigma_{12} np_n \sim \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_i\right)\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \bar{Y}_i\right) = \mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]} T_{0,j}\right)\left(\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]} T_{1,j}\right) + o(np_n)\,.$$

Аналогично (4.72) можно проверить, что $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{r} \mathbb{1}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} Y_{i+r}\right) \sim \sigma_{12} r p_n$. Применяя теорему 6.10, получим $\mathbb{D}\left(\sum_{j=1}^{[n/r]} T_{0,j}T_{1,j}\right) \sim \frac{n}{r}\mathbb{D}\left(T_{0,1}T_{1,1}\right) \le cnp_n$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\{\hat{\sigma}_{12} - \sigma_{12} > 2\varepsilon\} &= \left\{\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]} T_{0,j}T_{1,j} > (\sigma_{12} + 2\varepsilon)\sum\nolimits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_i\right\} \\ &\subset \left\{\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]}\left(T_{0,j}T_{1,j} - \mathbb{E}T_{0,j}T_{1,j}\right) - (\sigma_{12} + 2\varepsilon)\sum\nolimits_{i=1}^{n} \bar{\mathbb{1}}_i > \varepsilon np_n\right\}\,.\end{aligned}$$

По неравенству Чебышева, для всякого $\varepsilon > 0$ вероятностность $\mathbb{P}(\hat{\sigma}_{12} - \sigma_{12} > 2\varepsilon)$ не превышает

$$\frac{2\mathbb{D}\left(\sum_{j=1}^{[n/r]} T_{0,j}T_{1,j}\right) + 2(\sigma_{12} + 2\varepsilon)^2\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_i\right)}{(\varepsilon np_n)^2} \leq \frac{c_\varepsilon}{np_n} \to 0.$$

Аналогично проверяем, что $\mathbb{P}(\hat{\sigma}_{12} - \sigma_{12} < -2\varepsilon) \to 0$. Доказательство завершено. □

Доказательство следствия 4.3. ЗБЧ (4.65) и лемма 4.21 влекут

$$\zeta_n = (a_n^{RE} - a^*)\, N_n^{1/2} \Longrightarrow \mathcal{N}(0;\sigma^2)\,.$$

Поскольку $(a^* - a)\sqrt{np_n} \to \mu$, имеем

$$\Big(a_n - a\Big)N_n^{1/2} = \zeta_n + (a^* - a)\sqrt{np_n}\sqrt{N_n/np_n} \Longrightarrow \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)\,.$$

Принимая во внимание (4.65) и лемму 4.22, получим (4.21). □

Доказательство теоремы 4.4. Используя теорему 6.10 и (4.11), заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]} \mathbb{1}_{jr}\right) &\sim [n/r]\mathbb{D}\mathbb{1}_1 \sim np_n/r\,, \\ \mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]} Y_{jr}^*\right) &\sim [n/r]\mathbb{D}Y_1^* \sim a^2 np_n/r\,. \end{aligned}$$

Следовательно, $N_{n,r}\big/(np_n/r) \xrightarrow[p]{} 1$. Те же аргументы, что и при доказательстве леммы 4.21, устанавливают, что $\mathbb{P}\left(Y > \varepsilon\sqrt{np_n/r}\,\middle|\,X > x_n\right) \to 0$. Теорема 6.8 с $\xi_i = Y_{ir}^*$ и $j_n = 1$ влечёт

$$\sum\nolimits_{j=1}^{[n/r]} (Y_{jr} - a^*\mathbb{1}_{jr})\Big/ a\sqrt{np_n/r} \Longrightarrow \mathcal{N}(0;1)\,.$$

Заметим, что

$$(a^*/a - 1)\sqrt{N_{n,r}} \underset{p}{\sim} (a^*/a - 1)\sqrt{np_n/r} \xrightarrow[p]{} 0$$

ввиду (4.25) и ЗБЧ для $N_{n,r} = \sum_{j=1}^{[n/r]} \mathbb{1}_{jr}$. Доказательство завершено. □

Доказательство утверждения 4.5. Положим $\hat{a}_n = a_n^{RE}$. Достаточно показать, что

$$\frac{\hat{a}_n(\lambda x) - \hat{a}_n(x)}{\hat{a}_n(\lambda^2 x) - \hat{a}_n(\lambda x)} \xrightarrow[p]{} \lambda^\beta\,.$$

Повторяя аргументы при доказательстве утверждения 4.1, получим

$$\hat{a}_n(x)/a - 1 \underset{p}{\sim} v(x)\,.$$

Поэтому
$$\frac{\hat{a}_n(\lambda x)-\hat{a}_n(x)}{\hat{a}_n(\lambda^2 x)-\hat{a}_n(\lambda x)} \underset{p}{\sim} \frac{v(\lambda x)-v(x)}{v(\lambda^2 x)-v(\lambda x)} \sim \lambda^{\beta}\,.$$
□

Доказательство утверждения 4.6. Пусть $\lambda > 0$. Напомним, что $p_n = \mathbb{P}(X > x)$, $\alpha = 1/a$, $\beta = b/a$, $x = x_n$, $w_x = dx^{-\beta}$. Обозначим $\hat{a}_n = a_n^{RE}$,
$$\mathbb{I}_{i,\lambda} = \mathbb{I}\{X_i > \lambda x\},$$
и пусть статистика $\tilde{w}_x$ определена подобно $\hat{w}_x$ с $\hat{\beta}_n$ вместо β.

Сначала мы покажем, что
$$\tilde{w}_x/w_x \xrightarrow[p]{} 1\,.$$
Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда
$$\{\tilde{w}_x > (1+\varepsilon)w_x\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \bar{Z}_i > -n\mathbb{E}Z_1\right\},$$
где $Z_i = \lambda^{-\alpha}\mathbb{I}_i - [1 + (1+\varepsilon)(1-\lambda^{-\beta})]\mathbb{I}_{i,\lambda}$. Заметим, что $x^{-\beta} \asymp p_n^b$ и
$$-\mathbb{E}Z_1 \sim \varepsilon\lambda^{-\alpha}(1-\lambda^{-\beta})p_n w_x\,.$$
Используя неравенство Чебышева и оценку дисперсии суммы зависимых с.в. (см. Приложение), получим
$$\mathbb{P}(\tilde{w}_x > (1+\varepsilon)w_x) \le C_\varepsilon/np_n^{1+2b} \to 0\,.$$
Аналогично проверяем, что $\mathbb{P}(\tilde{w}_x < (1-\varepsilon)w_x) \to 0$. Следовательно, $\tilde{w}_x/w_x \xrightarrow[p]{} 1$.

Положим
$$w_x^* = \big(N_n(x)\lambda^{-1/a}N_n^{-1}(\lambda x) - 1\big)\Big/(1-\lambda^{-\hat{\beta}_n}).$$
Согласно утверждению 4.5, $w_x^*/\tilde{w}_x \xrightarrow[p]{} 1$. Заметим, что
$$\begin{aligned}\hat{w}_x/w_x^* &= \big[N_n(x)\lambda^{-1/\hat{a}_n}N_n^{-1}(\lambda x) - 1\big]\Big/\big[N_n(x)\lambda^{-1/a}N_n^{-1}(\lambda x) - 1\big]\\ &= 1 + N_n(x)N_n^{-1}(\lambda x)\big(\lambda^{-1/\hat{a}_n} - \lambda^{-1/a}\big)\Big/w_x(1-\lambda^{-\beta})\,.\end{aligned}$$
Остаётся проверить, что $(\hat{a}_n - a)/w_x \xrightarrow[p]{} 1$. Используя неравенство Чебышева и оценку дисперсии суммы зависимых с.в., получим $\mathbb{P}(|\hat{a}_n - a| > \varepsilon p_n^b) \le C/\varepsilon^2 np_n^{1+2b} \to 0$ для каждого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\hat{w}_x/w_x^* \xrightarrow[p]{} 1$. □

Доказательство теоремы 4.7. Обозначим $\hat{a}_n = a_n^{RE}$, $G_n = N_n/n$. Согласно (4.1) и [41, 357],
$$F_c^{-1}(z) = z^{-a}\ell(z),$$

где ℓ – медленно меняюшаяся функция. Это соотношение и (4.70) влекут

$$F_c(\hat{y}_q)/q \underset{p}{\longrightarrow} 1 \iff \hat{y}_q/y_q \underset{p}{\longrightarrow} 1\,.$$

Положим $\hat{a}_n = a_n^{RE}$. Отметим, что $F_c(x_n) = p_n$ и

$$\frac{\hat{y}_q}{x_n} = \left(\frac{G_n}{q}\right)^{\hat{a}_n} = \left(\frac{G_n}{p_n}\right)^{\hat{a}_n}\left(\frac{p_n}{q}\right)^{\hat{a}_n} = \frac{p_n^a}{q^a}\left(\frac{G_n}{p_n}\right)^{\hat{a}_n}\left(\frac{p_n}{q}\right)^{\hat{a}_n-a}. \tag{4.73}$$

Принимая во внимание (4.65) и тождество $p_n^a = x_n^{-1}L^a(x_n)$, выводим

$$\hat{y}_q q^a/L^a(x_n) \underset{p}{\sim} (p_n/q)^{\hat{a}_n-a}\,.$$

Это соотношение и (4.35) влекут

$$\hat{y}_q q^a/L^a(x_n) \underset{p}{\longrightarrow} 1\,.$$

Поскольку $y_q \sim q^{-a}L^a(y_q)$ согласно (4.39), имеем

$$\hat{y}_q/y_q \underset{p}{\sim} L^a(x_n)/L^a(y_q) \to 1,$$

если (4.35) выполнено. Доказательство завершено. □

Доказательство теоремы 4.8. Положим $\hat{a}_n = a_n^{RE}$. Согласно (4.73),

$$\begin{aligned}\hat{y}_q q^a/L^a(x_n) &= (G_n/p_n)^{\hat{a}_n}(p_n/q)^{\hat{a}_n-a}\\ &= 1 + (G_n/p_n - 1)\,\hat{a}_n + (\hat{a}_n - a)\ln(p_n/q) + \delta_n\,,\end{aligned}$$

где $\delta_n = o_p\left(|1 - G_n/p_n| + |\hat{a}_n - a|\right)$. По лемме 4.21,

$$\left(\hat{y}_q q^a/L^a(x_n) - 1\right)\sqrt{np_n} \Longrightarrow \mathcal{N}(d\mu; \mathbf{c}A\mathbf{c}^T)\,.$$

Следовательно, $(\hat{y}_q/y_q - 1)\sqrt{np_n} \Longrightarrow \mathcal{N}(d\mu - \nu; \mathbf{c}A\mathbf{c}^T)$. □

Следствие 4.9 вытекает из теоремы 4.8 и леммы 4.22. Отметим, что

$$\ln\frac{F_c(x_n)}{F_c(y_q)} = \frac{1}{a}\ln\frac{y_q}{x_n} + \ln\frac{L(x_n)}{L(y_q)} = \frac{1}{a}\ln\frac{y_q}{x_n} + o(1)\,.$$

Следовательно, $\hat{a}_n^{-1}\ln(\hat{y}_q/x_n) \underset{p}{\longrightarrow} d.$ □

Доказательство теоремы 4.10. Те же аргументы, что и при доказательстве теоремы 4.8, влекут

$$\frac{\hat{y}_{q,r}q^a}{L^a(x_n)} - 1 = \left(\frac{G_n}{p_n} - 1\right)\hat{a}_{n,r} + (\hat{a}_{n,r} - a)\ln\frac{p_n}{q} + o_p\left(\left|1 - \frac{G_n}{p_n}\right| + |\hat{a}_{n,r} - a|\right).$$

Согласно лемме 4.21, $G_n/p_n - 1 = O_p\left(1/\sqrt{np_n}\right)$. Поэтому

$$\left(\frac{\hat{y}_{q,r}q^a}{L^a(x_n)} - 1\right)\sqrt{np_n/r} = (\hat{a}_{n,r} - a)d\sqrt{np_n/r}\;(1 + o_p(1)) + o_p(1)\,.$$

По предположению, $(y_q q^a L^{-a}(x_n) - 1)\sqrt{np_n/r} \sim \nu/\sqrt{r} \to 0$. Следовательно,

$$(\hat{y}_q/y_q - 1)\sqrt{np_n/r} \Rightarrow \mathcal{N}(0; a^2 d^2)$$

по теореме 4.4. Доказательство завершено. □

Доказательство соотношения (4.22). Непосредственно проверяется, что

$$\mathbb{E}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^*\right)^2 = n\left[\mathbb{E}(Y^*)^2 + 2\sum\nolimits_{i=1}^n (1{-}i/n)\,\mathbb{E}Y_1^*Y_{i+1}^*\right]. \tag{4.74}$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}Y_1^*Y_{i+1}^* = (1-\theta)^i\mathbb{E}(Y^*)^2 \qquad (i \geq 1)\,. \tag{4.75}$$

Действительно, если $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{i+1} = 0$, то $Y_{i+1}^* = Y_1^*$ и $\mathbb{E}Y_1^*Y_{i+1}^* = \mathbb{E}(Y^*)^2$, иначе случайные величины Y_1^* и Y_{i+1}^* независимы, и, следовательно, $\mathbb{E}Y_1^*Y_{i+1}^* = 0$. Соотношение (4.22) следует из (4.74), (4.75) и (4.11).

Те же аргументы влекут $\mathbb{E}\bar{Y}_1^k\mathbb{1}_1\bar{Y}_{i+1}^k\mathbb{1}_{i+1} = (1-\theta)^i\mathbb{E}(\bar{Y}_1^k)^2\mathbb{1}_1$, и $\mathbb{E}\mathbb{1}_1\bar{Y}_{i+1} = \mathbb{E}\bar{Y}_1\mathbb{1}_{i+1} = (1{-}\theta)^i\mathbb{E}\mathbb{1}_1\bar{Y}_1 = (1{-}\theta)^i a^* p_n(1{-}p_n)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\left(\sum\nolimits_{i=1}^n Y_i^k\mathbb{1}_i\right) &= n\mathbb{D}Y^k\left[1 + 2(\theta^{-1}{-}1)\left(1 - \frac{1-(1-\theta)^n}{n\theta}\right)\right]\\ &\sim n(2\theta^{-1}{-}1)\mathbb{E}Y^{2k} \sim np_n(2\theta^{-1}{-}1)a^{2k}(2k)!\end{aligned}$$

($k \geq 0$). Аналогично проверяется, что

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_i\sum_{j=1}^n \bar{Y}_j = n\left[\mathbb{E}\mathbb{1}_1\bar{Y}_1 + \sum_{i=1}^n\left(1{-}\frac{i}{n}\right)\left(\mathbb{E}\mathbb{1}_1\bar{Y}_{i+1} + \mathbb{E}\mathbb{1}_{i+1}\bar{Y}_1\right)\right] \sim np_n\left(\frac{2}{\theta}{-}1\right)a\,.$$

Доказательство завершено. □

Доказательство теоремы 4.11. Положим $\hat{a}_n = a_n^{RE}$, $\hat{\alpha}_n = 1/\hat{a}_n$. Заметим, что

$$\hat{F}_c(y)/F_c(y) = \frac{N_n(x)}{np}\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha\left(\frac{x}{y}\right)^{\hat{\alpha}_n-\alpha}\frac{F_c(x)}{F_c(y)} = \frac{N_n(x)}{np}\left(\frac{x}{y}\right)^{\hat{\alpha}_n-\alpha}\frac{L(x)}{L(y)}\,. \tag{4.76}$$

Ввиду (4.65),

$$N_n(x)/np \xrightarrow[p]{} 1,$$

в то время как $(x/y)^{\hat{\alpha}_n-\alpha} \xrightarrow[p]{} 1$ по предположению. Принимая во внимание (4.70), получим (4.45). □

Доказательство теоремы 4.12. Положим $\hat{a}_n = a_n^{RE}$, $\hat{\alpha}_n = 1/\hat{a}_n$. С учётом (4.76),

$$\hat{F}_c(y)/F_c(y) = (1 + (N_n(x)/np - 1))\,(1 + (L(x)/L(y) - 1))\exp((\hat{\alpha}_n - \alpha)\ln(x/y))\,.$$

Заметим, что

$$\begin{array}{rcl} (\hat{\alpha}_n - \alpha)\ln(x/y) & \underset{p}{\sim} & (\hat{a}_n - a^* + a^* - a)d/a, \\ (\hat{\alpha}_n - \alpha)\ln(x/y)\sqrt{np} & \underset{p}{\sim} & (\hat{a}_n - a^*)\sqrt{np}d/a + d\mu/a. \end{array}$$

Поэтому

$$\left(\hat{F}_c(y)/F_c(y) - 1\right) a\sqrt{np} = a\xi_n + d\eta_n + d\mu - \nu + o_p(1)\,,$$

где $\xi_n = (N_n(x)/np - 1)\sqrt{np}$ и $\eta_n = (\hat{a}_n - a^*)\sqrt{np}$. Применение леммы 4.21 завершает доказательство. □

Доказательство леммы 4.13. Положим $a_i = a_{P_i}$, $w_{_H}^o = w_{_H}(P_0, \varepsilon)$, $w_{\chi}^o = w_{\chi}(P_0, \varepsilon)$, $w_{_{TV}}^o = w_{_{TV}}(P_0, \varepsilon)$. Для всякого $c > 0$ существует распределение $P_1 \in \mathcal{P}_{_H}(P_0, \varepsilon)$, такое что $d(a_1; a_0)/2 \geq w_{_H}^o - c$. Обозначим

$$\mathbb{1}_0 = \mathbb{1}\{d(\hat{a}; a_0) \geq w_{_H}^o - 2c\}\,,\ \mathbb{1}_1 = \mathbb{1}\{d(\hat{a}; a_1) \geq w_{_H}^o\}.$$

Поскольку $1 \leq \mathbb{1}_0 + \mathbb{1}_1$, имеем

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon^2)^n \leq (1 - d_{_H}^2(P_1; P_0))^n &\leq \int \sqrt{f_{0,n} f_{1,n}}\,\mathbb{1}_0 + \int \sqrt{f_{0,n} f_{1,n}}\,\mathbb{1}_1 \\ &\leq \mathbb{P}_0^{1/2}(d(\hat{a}; a_0) \geq w_{_H}^o - 2c) + \mathbb{P}_1^{1/2}(d(\hat{a}; a_1) \geq w_{_H}^o). \end{aligned}$$

По теореме о монотонной сходимости,

$$(1 - \varepsilon^2)^n \leq \mathbb{P}_0^{1/2}(d(\hat{a}; a_0) \geq w_{_H}^o) + \sup_{P \in \mathcal{P}_H} \mathbb{P}_1^{1/2}(d(\hat{a}; a_P) \geq w_{_H}^o)\,.$$

Следовательно, (4.48) выполнено.

Для каждого $c > 0$ существует $P_1 \in \mathcal{P}_{_{TV}}(P_0, \varepsilon)$, такое что $d(a_{P_1}; a_{P_0})/2 \geq w_{_{TV}}^o - c$. Поэтому

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leq & \mathbb{P}_0\left(d(\hat{a}; a_0) \geq w_{_{TV}}^o - 2c\right) + \mathbb{P}_0\left(d(\hat{a}; a_1) \geq w_{_{TV}}^o\right) \\ & \leq & \mathbb{P}_0\left(d(\hat{a}; a_0) \geq w_{_{TV}}^o - 2c\right) + \mathbb{P}_1\left(d(\hat{a}; a_1) \geq w_{_{TV}}^o\right) + d_{_{TV}}^{(n)}\,. \end{array}$$

По теореме о монотонной сходимости,

$$(1 - d_{_{TV}})^n \leq 1 - d_{_{TV}}^{(n)} \leq \mathbb{P}_0(d(\hat{a}; a_{P_0}) \geq w_{_{TV}}^o) + \sup_{P \in \mathcal{P}_n(P_0, \varepsilon)} \mathbb{P}(d(\hat{a}; a_P) \geq w_{_{TV}}^o),$$

откуда выводим (4.49). □

Доказательство теоремы 4.14. Пусть $\hat{a}_n$ – оценка $a(P) := a_P$, и обозначим $w_{n,\alpha} = w_{_H}(P, \alpha/\sqrt{n})$. Для любого $c > 0$ можно найти $P_* \in \mathcal{P}_{_H}(P, \alpha/\sqrt{n})$, такое что $a(P_*) - a(P) \geq w_{n,\alpha} - c$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1 &\leq P(a(P_*) - \hat{a} > -x) + P(\hat{a}_n - a(P) \geq x + w_{n,\alpha} - c) \\ &\leq P_*(\hat{a} - a(P_*) < x) + P(\hat{a} - a(P) \geq x + w_{n,\alpha} - c) + d_{_{TV}}(P_*^n; P^n)\,. \end{aligned}$$

Согласно (6.15), $d_{_{TV}}(P_*^n; P^n) \leq \sqrt{2n} d_{_H}(P_*; P)$. Следовательно,

$$P_*(\hat{a}_n - a(P_*) \geq x) \leq P(\hat{a} - a(P) \geq x + w_{n,\alpha} - c) + \sqrt{2n} d_{_H}(P_*; P)\,.$$

Так как $d_{_H}(P_*; P) \leq \alpha/\sqrt{n}$, из теоремы о монотонной сходимости следует, что для каждого $\alpha > 0$

$$\inf_{P_* \in \mathcal{P}_H(P, \alpha/\sqrt{n})} P_*(\hat{a}_n - a(P_*) \geq x) \leq P\left(\hat{a}_n - a(P) \geq x + J_{_{H,P}} \alpha^{2r}/n^r\right) + \alpha\sqrt{2}\,,$$

если $w_{n,\alpha} \geq J_{_{H,P}} \alpha^{2r}/n^r$ (мы заменяем $J_{_{H,P}}$ на $J_{_{H,P}}(1+o(1))$, если $w_{n,\alpha} \gtrsim J_{_{H,P}} \alpha^{2r}/n^r$).

Предположим, что оценка $\hat{a}$ сходится к a_P равномерно по $\mathcal{P}_{_H}(P, 1/\sqrt{n})$ со скоростью $v_n = n^{-r}$. Тогда существует невырожденнное распределение Q, такое что (4.54) выполнено с $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{_H}(P, 1/\sqrt{n})$ (и, следовательно, (4.54) выполнено с $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{_H}(P, \alpha n^{-1/2})$ для любого $\alpha \in [0; 1]$). Покажем, что это предположение ведёт к противоречию.

Пусть η есть с.в. с распределением $\mathcal{L}(\eta) = Q$, и пусть $x = yn^{-r}$, $y \in \mathbb{R}$. Принимая во внимание (4.50) и (4.54), получим

$$\mathbb{P}(\eta \geq y) \leq \mathbb{P}(\eta \geq y + J_{H,P}\alpha^{2r}) + \alpha\sqrt{2}\,.$$

Следовательно,

$$J_{H,P}\alpha^{2r} \min_{y \leq t \leq y + J_{H,P}\alpha^{2r}} q(t) \leq \mathbb{P}(y \leq \eta \leq y + J_{H,P}\alpha^{2r}) \leq \alpha\sqrt{2}\,.$$

Поэтому $0 < J_{H,P} \min_{y \leq t \leq y + J_{H,P}\alpha^{2r}} q(t) \leq \alpha^{1-2r}\sqrt{2} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Полученное противоречие доказывает результат. □

Пусть $\mathcal{P}$ – произвольный класс распределений, и пусть P_0, P_1 – два распределения из $\mathcal{P}$. Обозначим $a_i = a_{P_i}$,

$$\delta = d(a_0; a_1)/2,$$

и пусть $\mathbb{E}_i = \mathbb{E}_{P_i}$ – соответствующее матожидание. Мы предполагаем, что

$$a_0 \neq a_1\,.$$

Минимаксная нижняя граница в классе $\mathcal{P}$ может быть построена, используя нижнюю границу для

$$P_* = \max_{i \in \{0;1\}} \mathbb{P}_i(d(\hat{a}; a_i) \geq \delta).$$

Хьюбер [183] показала, что если $d_{H}^2(P_0;P_1) \le 1/2$, то

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{E}_i d(\hat{a};a_i) \ge \frac{\delta}{2}\exp\bigl(-4nd_{H}^2(P_0;P_1)\bigr)\ . \tag{4.77}$$

Приводимая ниже лемма уточняет (4.77) в случае больших n, условие $d_{H}^2(P_0;P_1))$ $\le 1/2$ не предполагается выполненым.

Обозначим через $R:[0;\infty)\to[0;\infty)$ функцию потерь (R есть возрастающая функция, $R(0)=0$).

Лемма 4.23 *Для любой оценки* $\hat{a}$

$$P_* \ge \bigl(1-d_{H}^2\bigr)^{2n}\Big/2\min\Bigl\{2;(1-d_{H}^2)^n + d_{H}\sqrt{8n}\Bigr\}\,. \tag{4.78}$$

Если функция $R^{1/2}$ *выпуклая, то*

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{E}_i R(d(\hat{a};a_i)) \ge R(\delta)\,\bigl(1-d_{H}^2\bigr)^{2n}\ . \tag{4.79}$$

Доказательство леммы 4.23. Обозначим

$$1\!\!\mathrm{I}_0 := 1\!\!\mathrm{I}\{d(\hat{a};a_0)\ge\delta\}\,,\ 1\!\!\mathrm{I}_1 := 1\!\!\mathrm{I}\{d(\hat{a};a_1)\ge\delta\}.$$

Заметим, что $1 \le 1\!\!\mathrm{I}_< + 1\!\!\mathrm{I}_>$. Используя определение d_{H}, получим

$$\begin{aligned}(1-d_{H}^2)^n &= \int\sqrt{f_{0,n}f_{1,n}} = \int\sqrt{f_{0,n}f_{1,n}}\,1\!\!\mathrm{I}_0 + \int\sqrt{f_{0,n}f_{1,n}}\,1\!\!\mathrm{I}_1\\ &\le \mathbb{P}_0^{1/2}(\hat{a};a_0)\ge\delta)\mathbb{P}_1^{1/2}(\hat{a};a_0)\ge\delta) + \mathbb{P}_0^{1/2}(d(\hat{a};a_1)\ge\delta)\mathbb{P}_1^{1/2}(d(\hat{a};a_1)\ge\delta)\,.\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\mathbb{P}_i(d(\hat{a};a_i)\ge\delta) \le \mathbb{P}_{1-i}(d(\hat{a};a_i)\ge\delta) + d_{TV}^{(n)}$. Следовательно,

$$(1-d_{H}^2)^{2n}/4 \le P_*\wedge P_*(P_* + d_{TV}^{(n)})\,.$$

Поскольку $d_{TV}^{(n)} \le \sqrt{2n}d_{H}$, имеем

$$P_*^2 + \sqrt{2n}d_{H}P_* \ge (1-d_{H}^2)^{2n}/4\,.$$

Решая это квадратное уравнение, получим (4.78).

Обозначим $\mathbb{E}_* = \max_{i\in\{0;1\}}\mathbb{E}_iR\left(d(\hat{a};a_i)\right)$. Поскольку

$$\begin{aligned}R^{1/2}(\delta) &= R^{1/2}(d(a_1;a_0)/2) \le R^{1/2}\left(d(a_1;\hat{a})/2 + d(\hat{a};a_0)/2\right)\\ &\le R^{1/2}(d(a_1;\hat{a}))/2 + R^{1/2}(d(\hat{a};a_0))/2\,,\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}2R^{1/2}(\delta)\bigl(1-d_{H}^2\bigr)^n &\le \int R^{1/2}(d(a_1;\hat{a}))\sqrt{f_{0,n}}\sqrt{f_{1,n}} + \int R^{1/2}(d(\hat{a};a_0))\sqrt{f_{0,n}}\sqrt{f_{1,n}}\\ &\le \mathbb{E}_0^{1/2}R(d(\hat{a};a_0)) + \mathbb{E}_1^{1/2}R(d(\hat{a};a_1)) \le 2\mathbb{E}_*^{1/2}\,,\end{aligned}$$

и (4.79) следует. □

Доказательство теоремы 4.15. Пусть даны $c \in (0;1]$ и $h \in (0;c)$. Мы используем функции распределения F_0 и F_1, где

$$\begin{aligned} F_0(y) &= (y/c)^{\alpha}\mathbb{1}\{0<y\le c\}, \\ F_1(y) &= (h/c)^{-\gamma}(y/c)^{\alpha_1}\mathbb{1}\{0<y\le h\}+(y/c)^{\alpha}\mathbb{1}\{h<y\le c\} \end{aligned}$$

$(\alpha_1>\alpha)$. Заметим, что $\alpha_{_{F_0}}=\alpha:=\alpha_0$, $\alpha_{_{F_1}}=\alpha_1$. Положим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha+\gamma,\ h\equiv h(\alpha,b,n)=\gamma^{1/b\alpha}\,, \\ \gamma &\equiv \gamma(\alpha,b,n)=(8\alpha^2c^{\alpha})^r/(1+n/r)^r\,. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Проверим, что $F_1\in\mathcal{F}(b)$. Заметим, что $c_{F_1}=c^{-\alpha}h^{-\gamma}$. Поскольку

$$c_{F_1}^{-1}y^{-\alpha_1}F_1(y)=y^{-\gamma}h^{\gamma} \qquad (h<y\le 1),$$

имеем

$$\sup_{y>0}|1-c_{F_1}^{-1}y^{-\alpha_1}F_1(y)|y^{-b\alpha_1}=\sup_{h<y\le 1}\left(1-y^{-\gamma}h^{\gamma}\right)y^{-b\alpha_1}\,.$$

Выражение в правой части достигает своего максимума по y на $y_0=h(1+\gamma/b\alpha_1)^{1/\gamma}$; супремум не превосходит $e^{1/e\alpha}/b\alpha$.

Легко проверить, что

$$d_{_H}^2(F_0;F_1)\sim d_{\chi}^2(F_0;F_1)/8\sim\gamma^{1/r}/8\alpha^2c^{\alpha},$$

и

$$d_{_H}^2\equiv d_{_H}^2(F_0;F_1)\le\gamma^{1/r}/8\alpha^2c^{\alpha}\,. \tag{4.81}$$

Согласно (4.79),

$$\max_{i\in\{0;1\}}\mathbb{E}_i^{1/2}(\hat\alpha_n-\alpha_{F_i})^2\ge\frac{\gamma}{2}\left(1-d_{_H}^2\right)^n\ge\frac{\gamma}{2}\left(1-\gamma^{1/r}/8\alpha^2c^{\alpha}\right)^n.$$

Поскольку

$$\max_{\gamma>0}\gamma(1-\gamma^{1/r}/8\alpha^2c^{\alpha})^n=(8r\alpha^2c^{\alpha}/n)^r(1+r/n)^{-r-n}\,, \tag{4.82}$$

выводим

$$\max_{i\in\{0;1\}}\mathbb{E}_i^{1/2}(\hat\alpha_n-\alpha_i)^2\ge\frac{1}{2}(8r\alpha^2c^{\alpha}/n)^r(1+r/n)^{-n-r}\ge(\alpha^2c^{\alpha})^r z_n\,.$$

Заметим, что $\alpha/\alpha_1=1/(1+\gamma a)=1-\gamma/\alpha_1$ и $\gamma\le(4\alpha^2c^{\alpha}/n)^r$. Следовательно,

$$(\alpha/\alpha_1)^{2r}\ge 1-2r\gamma/\alpha_1\ge 1-2r(8r/n)^r\alpha_1^{2r-1}c^{\alpha r}\ge 1-(4/n)^r\alpha_1^{-r/b}\,,$$

и (4.56) следует. Аналогично ($a_i := 1/\alpha_i$, $a := a_0$),

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{E}_i^{1/2}(a_n - a_i)^2 \geq \frac{aa_1}{2}\gamma\left(1-\gamma^{1/r}a^2/8c^{1/a}\right)^n\,,$$

откуда следует (4.57). Доказательство завершено. □

Аналогично доказывается теорема 4.16.

Доказательство теоремы 4.17. Легко видеть, что

$$y_0 = cq_n^{1/\alpha} = c\kappa h\,,\ \ y_1 = (c\kappa)^{\alpha/\alpha_1}h > y_0\,.$$

Заметим, что $q_n = (\kappa h)^\alpha$. Используя (6.65), выводим

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= cq_n^{1/\alpha_1}\left((h/c)^{\gamma/\alpha_1} - q_n^{\gamma/\alpha\alpha_1}\right) \\ &\geq cq_n^{1/\alpha_1}h^{\gamma/\alpha_1}\left(1-\kappa^{\gamma/\alpha_1}\right) = c\kappa h\Big(\kappa^{-\gamma/\alpha_1}-1\Big) \\ &\geq c\gamma^{1+1/\alpha b}\kappa^{1-\gamma/2\alpha_1}|\ln\kappa|/\alpha_1\,. \end{aligned}$$

Согласно (4.79),

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{E}_i^{1/2}(\hat{y}_n - y_i)^2 \geq \frac{|\ln\kappa|}{2\alpha_1}c\kappa^{1-\gamma/2\alpha_1}\gamma^{1+1/\alpha b}\left(1-\gamma^{1/r}/8\alpha^2c^\alpha\right)^n\,.$$

Следовательно,

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{E}_i^{1/2}(\hat{y}_n/y_i - 1)^2 \geq \frac{|\ln\kappa|}{2\alpha_1}c\kappa^{1-\gamma/2\alpha_1}\gamma^{1+1/\alpha b}\left(1-\gamma^{1/r}/8\alpha^2c^\alpha\right)^n\Big/y_i\,.$$

Используя (4.82), выводим (4.59).

Поскольку

$$|1/y_1 - 1/y_0| = |y_1-y_0|/y_0y_1 \geq |\ln\kappa|(c\kappa)^{-1+\gamma/2\alpha_1}\gamma^{1-1/\alpha b}/\alpha_1\,,$$

имеем

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{E}_i^{1/2}(y_i/\hat{y}_n - 1)^2 \geq \frac{|\ln\kappa|}{2\alpha_1}(c\kappa)^{\gamma/2\alpha_1}\gamma\left(1-\gamma^{1/r}/8\alpha^2c^\alpha\right)^n\,,$$

и (4.60) следует из (4.82). Доказательство завершено. □

Пусть по выборке требуется оценить функционал a_F неизвестной ф.р. F. Будем считать, что a_F является элементом нормированного пространства функций со значентями в $\mathbb{R}$. Примерами являются $a_F = F$, где $F(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $a_F = f$, где $f = F'$ – плотность распределения, $a_{F_\theta} = \theta$, где F_θ – элемент параметрического семейства распределений $\{F_\theta, \theta\in\Theta\}$, и т.д..

Обозначим через $\mathcal{A}_{sh}$ класс сохраняюших сдвиг функционалов: $a \in \mathcal{A}_{sh}$, если $a_{F_c}(\cdot) = a_F(\cdot - c)$ $(\forall c)$, где $F_c(\cdot) = F(\cdot - c)$. Примерами сохраняюших сдвиг функционалов являются $a_F = F$, $a_F = F'$ и ф.р. выборочного максимума.

Обозначим через $\mathcal{A}_{sc}$ класс сохраняюших масштаб функционалов: $a \in \mathcal{A}_{sc}$, если $a_{F_1}(\cdot) = a_F(c\cdot)$, где $F_1(\cdot) = F(c\cdot)$, $(\forall c > 0)$. Примерами сохраняюших масштаб функционалов являются ПСУХР, константа хвоста распределения с тяжёлым хвостом и ф.р. выборочного максимума.

Если даны две ф.р. F_0 и F_1, обозначим $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{F_i}$,

$$s_n = \|a_{F_0} - a_{F_1}\|\,,$$

и пусть $d_n = d_{TV}(\mathbb{P}_0^n; \mathbb{P}_1^n)$.

Лемма 4.24 *Если $a \in \mathcal{A}_{sc}$, то для любой инвариантной относительно изменения масштаба оценки $\{\tilde{a}_n\}$ и любой ф.р. F_0*

$$\mathbb{P}_0(\|\tilde{a}_n - a_{F_0}\| \geq s_n/2) \geq (1 - d_n)/2 \qquad (n \geq 1)\,. \tag{4.83}$$

Если $a \in \mathcal{A}_{sh}$, то для любой инвариантной относительно сдвига оценки $\tilde{a}_n$ и любой ф.р. F_0 имеет место (4.83).

Доказательство леммы 4.24. Пусть F_0 и F_1 – две ф.р.. Заметим, что $1 \leq \mathbb{1}\{\|a_{F_0} - \hat{a}\| \geq s_n/2\} + \mathbb{1}\{\|\hat{a} - a_{F_1}\| \geq s_n/2\}$. Поэтому при $n \geq 1$

$$\mathbb{P}_0(\|\hat{a}_n - a_{F_0}\| \geq s_n/2) + \mathbb{P}_1(\|\hat{a}_n - a_{F_1}\| \geq s_n/2) \geq 1 - d_n \tag{4.84}$$

для любой оценки $\hat{a}_n$.

Если $\tilde{a}_n$ – инвариантная относительно изменения масштаба оценка, $a \in \mathcal{A}_{sc}$ и $F_1(x) = F_0(cx)$ $(\forall x)$, то

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_1\left(\|\tilde{a}_n - a_{F_1}\| \geq s_n/2\right) \\
= & \int \ldots \int \mathbb{1}\{\sup_x |\tilde{a}_n(x, x_1, \ldots, x_n) - a_{F_0}(cx)| \geq s_n/2\} dF_0(cx_1) \ldots dF_0(cx_n) \\
= & \int \ldots \int \mathbb{1}\{\sup_y |\tilde{a}_n(y/c, y_1/c, \ldots, y_n/c) - a_{F_0}(y)| \geq s_n/2\} dF_0(y_1) \ldots dF_0(y_n) \\
= & \mathbb{P}_0\left(\|\tilde{a}_n - a_{F_0}\| \geq s_n/2\right)\,.
\end{aligned}$$

Из этого соотношения и (4.84) выводим (4.83).

Если $\tilde{a}_n$ – инвариантная относительно сдвига оценка, $a \in \mathcal{A}_{sh}$ и $F_1(x) = F_0(x-c)$ $(\forall c)$, то

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}_1\left(\|\tilde{a}_n - a_{F_1}\| > s_n/2\right) \\
= & \int \ldots \int \mathbb{1}\{\sup_x |\tilde{a}_n(x, x_1, \ldots, x_n) - a_{F_0}(x-c)|\} dF_0(x_1-c) \ldots dF_0(x_n-c) \\
= & \mathbb{P}_0\left(\|\tilde{a}_n - a_{F_0}\| > s_n/2\right)\,.
\end{aligned}$$

Из этого соотношения и (4.84) получим (4.83). Доказательство завершено. $\square$

Доказательство теоремы 4.18. Пусть $X_t = 2W + t_W$, где $t \in [0;1]$,

$$\mathbb{P}(W = m) = 2^{-m} \qquad (m \geq 1)$$

и $t_k \in \{0;1\}$ есть k-й элемент двоичного разложения $t = \sum_{k\geq 1} t_k 2^{-k}$ (ср. с [34]). Обозначим через $\mathbb{P}_t$ и F_t распределение и ф.р. с.в. X_t. Ф.р. F_t в (4.61) является членом параметрического семейства $\{F_t\}_{t\in[0;1]}$. По построению,

$$\begin{array}{llll} \mathbb{P}_t(2m) = 2^{-m} & (t \in A_m), & \mathbb{P}_t(2m) = 0 & (t \in B_m), \\ \mathbb{P}_t(2m+1) = 0 & (t \in A_m), & \mathbb{P}_t(2m+1) = 2^{-m} & (t \in B_m), \end{array}$$

где

$$\begin{array}{rcl} A_m & = & [0; 1/2^m) \cup ... \cup [(2^m - 2)/2^m; (2^m - 1)/2^m), \\ B_m & = & [1/2^m; 2/2^m) \cup [(2^m - 1)/2^m; 1]. \end{array}$$

Пусть $k \equiv k(n) = [k_n]$ и $c \equiv c(n) = ((1 - 2^{-k})^n - (1 - 2^{-k+1})^n)/2$, где

$$k_n = -\log_2(1 - (2/3)^{1/n}) = \log_2(n/(\ln 1.5)) + o(1)\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \mathbb{P}_t(|\hat{F}_n(2k+1) - F_t^n(2k+1)| \geq c)\, dt \\ = & \int_0^1 \sum_{m_1,\dots,m_n} \mathbb{I}\{|\hat{F}_n(2k+1) - F_t^n(2k+1)| \geq c\} \mathbb{P}_t(m_1)...\mathbb{P}_t(m_n)\, dt \\ = & \sum_{m_1,\dots,m_n} \left(\int_{A_k} dt + \int_{B_k} dt \right) \mathbb{I}\{|\hat{F}_n(2k+1) - F_t^n(2k+1)| \geq c\} \mathbb{P}_t(m_1)...\mathbb{P}_t(m_n). \end{aligned}$$

Если $t \in A_m$, то

$$\mathbb{P}_t(l) = \mathbb{P}_{t+2^{-m}}(l) \qquad (l \notin \{2m; 2m+1\}).$$

Можно проверить также, что

$$F_t(2k+1) = 1 - 2^{-k} \quad (t \in A_k)\,, \quad F_t(2k+1) = 1 - 2^{-k+1} \quad (t \in B_k).$$

Обозначим $\bar{m} = (m_1, ...m_n), D_n = \{\bar{m} : m_i \notin \{2k; 2k+1\} \ (\forall i \leq n)\}$. Тогда

$$\int_0^1 \mathbb{P}_t(\|\hat{F}_n - F_t^n\| \geq c)\, dt \geq \int_{A_k} dt \sum_{\bar{m}\in D_n} \mathbb{P}_t(m_1)...\mathbb{P}_t(m_n)$$
$$\left(\mathbb{I}\{|\hat{F}_n(2k+1) - (1 - 2^{-k})^n| \geq c\} + \mathbb{I}\{|\hat{F}_n(2k+1) - (1 - 2^{-k+1})^n| \geq c\} \right).$$

Используя неравенство треугольника, выводим

$$\int_0^1 \mathbb{P}_t(\|\hat{F}_n - F_t^n\| \ge c)\,dt \ge \int_{A_k} \sum_{\bar{m}\in D_n} \mathbb{P}_t(m_1)...\mathbb{P}_t(m_n)\,dt$$

$$= \int_{A_k} \mathbb{P}_t((X_1,...,X_n) \in D_n)dt = (1-2^{-k})^n \int_{A_k} dt = (1-2^{-k})^n/2 = 1/3\,. \quad (4.85)$$

Заметим, что

$$(1-2^{-k})^n - (1-2^{-k+1})^n \ge (1-2^{-k})^n - (1-2^{-k})^{2n} = 2/9\,.$$

Следовательно, $c \ge 1/9$, и (4.85) влечёт

$$\int_0^1 \mathbb{P}_t(\|\hat{F}_n - F_t^n\| \ge 1/9)\,dt \ge 1/3 \qquad (n \ge 1).$$

По лемме Фату,

$$\int_0^1 \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_t(\|\hat{F}_n - F_t^n\| \ge 1/9)\,dt \ge$$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 \mathbb{P}_t(\|\hat{F}_n - F_t^n\| \ge 1/9)\,dt \ge 1/3.$$

Следовательно, существует ф.р. F, удовлетворяющая (4.61). Доказательство завершено. □

Доказательство теорем 4.19 и 4.20. Мы построим две ф.р. F_0 и $F_1 \equiv F_{1,n}$, такие что s_n и $d_n = d_{TV}(\mathbb{P}_0^n; \mathbb{P}_1^n)$ отделены от нуля. Одна из этих ф.р., F_0, может быть выбрана почти произвольно, тогда как $F_{1,n}$ является модификацией F_0, такой что d_1 и $\|F_0 - F_1\|$ убывают как $1/n$ при $n \to \infty$.

Положим

$$F_0(x) = x \text{ при } 0 \le x \le 1\,, \quad F_1(x) = F_0(x - \varepsilon_n)\,,$$

где $\varepsilon_n = 1 - 2^{-1/n}$. Так как $a_{P_i} = F_i^n$, имеем

$$d_1 = \varepsilon_n = 1 - 2^{-1/n}\,, \; s_n = 1/2\,. \quad (4.86)$$

Заметим, что $s_n = (1-d_1)^n$. Из (4.49) с $\mathcal{P} = \{P_0, P_1\}$ следует, что

$$\max_{i\in\{0;1\}} \mathbb{P}_i(\|\hat{a}_n - a_{F_i}\| \ge s_n/2) \ge (1-d_1)^n/2 \qquad (n \ge 1)\,. \quad (4.87)$$

Объединяя (4.86) и (4.87), получим (4.62).

Пусть $\{\hat{F}_n\}$ – оценка, инвариантная относительно изменения масштаба. Положим

$$F_0(x) = x \;\text{ as }\; 0 \le x \le 1\,, \quad F_1(x) = x2^{-1/n} \;\text{ as }\; 0 \le x \le 2^{1/n}\,.$$

Так как $a_{F_i} = F_i^n$, имеет место (4.86). Заметим, что $s_n = (1 - d_1)^n$. Объединяя (4.86) и (4.83), получим (4.63). Доказательство завершено. $\square$

Заметим, что F_0 может быть аппроксимирована сколь угодно близко гладкими ф.р.. Поэтому (4.62) имеет место, если ограничиться классом $\mathbf{C}_\infty[0;2]$ бесконечное число раз дифференцируемых ф.р.. Хотя мы выбрали F_0 равномерной ф.р., те же аргументы применимы к спектру функций распределений; например, можно положить $F_0 = 1/|x|,\ x \leq -1$, и т.д..

Глава 5

Самонормированные суммы случайных величин

Многие оценки, используемые в статистике экстремальных значений, являются самонормированными суммами (СНС) случайных величин. Эта глава посвящена задаче оценивания точности нормальной аппроксимации распределения самонормированной суммы случайных величин.

5.1 Точность нормальной аппроксимации

В этом разделе представлены оценки точности нормальной аппроксимации распределения квадратичного функционала суммы с.в..

Неравенство Берри–Эссеена. Оценки точности нормальной аппроксимации хорошо известны для сумм с неслучайной нормировкой.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые с.в. с нулевыми средними. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

$$\Delta_n(x) = |\mathbb{P}(S_n < x) - \Phi(x)|\,,\ \Delta_n = \sup_x \Delta_n(x)\,,$$

и пусть $\mathbb{D}S_n = 1$. Согласно неравенству Берри–Эссеена [127, 128],

$$\Delta_n \leq C \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i^3|, \tag{5.1}$$

где $C \leq 0.7915$ – абсолютная константа ($C \leq 0.7655$ в случае н.о.р.с.в.) [370, **?**]. Чистяков [78] показал, что константа C в (5.1) не может быть лучше, чем

$$C_{_E} = \left(3 + \sqrt{10}\right)\Big/\left(6\sqrt{2\pi}\right)\,.$$

Неравенство (5.1) представляет собой равномерную оценку точности нормальной аппроксимации. Неравномерная версия неравенства Берри–Эссеена:

$$\Delta_n(x) \le C_+ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|X_i^3|/(1+|x|^3)\,, \tag{5.2}$$

где $C_+ \le 31.935$; $C_+ \le C{+}8(1{+}e) \le 30.52$ в случае н.о.р.с.в. [297, 253].

Ниже мы выводим неравенство типа Берри–Эссеена для квадратичных функционалов суммы пар случайных величин (теорема 5.1). Заметим, что традиционный подход, основанный на методе характеристических функций, непосредственно не применим к нелинейным функциалам суммы случайных векторов. Теорема 5.1 получена с применением метода Стэйна.

Нелинейный функционал от сумм с.в.. Пусть $(X,Y),(X_1,Y_1),\ldots$ – н.о.р. пары случайных величин, такие что $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$, $\mathbb{D}S_{n,X} = 1$, где

$$S_{n,X} = \sum_{i=1}^{n} X_i\,,\ S_{n,Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i\,. \tag{5.3}$$

Обозначим

$$r_1 \ = \ \{\sqrt{\pi/8} \wedge 1/|a|\}\left(n\mathbb{E}|X|^3/2 + |c|\mathbb{D}S_{n,Y}\right),\ r_2 = |c|n\Big(\mathbb{E}|X|Y^2{+}2\mathbb{E}|X||Y|\mathbb{E}|S_{n,Y}|\Big)\,,$$
$$r_3 \ = \ \Big(\mathbb{E}|X| + n\mathbb{E}|X|^3/2 + |c|\mathbb{E}Y^2 + 2|c|\mathbb{E}|Y|\mathbb{E}^{1/3}|S_{n,X}|^3\mathbb{E}^{2/3}|S_{n,Y}|^{3/2}\Big)\,.$$

Следующая теорема оценивает точность нормальной аппроксимации распределения нелинейного функционала

$$Z_n = S_{n,X} + cS_{n,Y}^2\,.$$

Этот результат применяется при оценивании точности нормальной аппроксимации распределения статистики Стьюдента.

Теорема 5.1 *Для любого* $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_n \le 9n\mathbb{E}|X|^3/\sqrt{2\pi}\ + 2(r_1+r_2+r_3)\,, \tag{5.4}$$

где $\Delta_n = |\mathbb{P}\left(Z_n < x\right) - \Phi(x)|$.

5.2 Отношения сумм случайных величин

Самонормированные суммы случайных величин (СНС) – это статистики вида

$$Z_{n,b} = \left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i\right)\Big/\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} Y_i\right)^b,$$

где $(X,Y),(X_1,Y_1),\ldots$ – последовательность пар случайных величин, $b>0$ и $Y_i\geq 0$.

Примерами СНС являются ядерная оценка функции регрессии, RE-оценка ПСУХР, оценка функции интенсивности отказов, ряд оценок экстремального индекса, статистика Стьюдента, и т.д.. В типичных приложениях $b=1$ или $b=1/2$. В данном разделе изучается асимптотика распределений статистики $Z_{n,1}$.

Обозначим

$$S_n=\sum_{i=1}^n X_i\,,\ T_n=\sum_{i=1}^n Y_i\,,$$

и пусть

$$m_1=\mathbb{E}S_n\,,\ m_2=\mathbb{E}T_n.$$

Если не оговорено противное, пределы берутся при $n\to\infty$; $N=N(n)\leq\infty$ – положительное число (уровень срезки); черта над с.в. означает, что она центрирована своим матожиданим. Положим

$$Y_i^<=Y_i1\!\!1\{Y_i\leq N\}\,,\ T_n^<=\sum_{i=1}^n Y_i^<\,,\ X_i^*=X_i-Y_i^<m_1/m\,,\ S_n^*=\sum_{i=1}^n X_i^*\,,$$

$$m=\mathbb{E}T_n^<\,,\ m_0=\mathbb{E}S_n^*T_n^<\,,\ \sigma^2=\mathbb{D}S_n^*\,,\ \sigma_2^2=\mathbb{D}T_n^<\,,\ \mu^3=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}|\bar{X}_i^*|^3\,,$$

$$\mu_1^3=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}|X_i|^3\,,\ \mu_2^3=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}|\bar{Y}_i^<|^3\,,\ \mu_>^3=\left(\sum_{i=1}^n\mathbb{E}|X_i|^3 1\!\!1\{|X_i|>\sigma x/6\}\right)\,,$$

$$r_n(x)=x^2\varphi(x/2)\big(|m_0|/m\sigma+4|x|\,(\sigma_2/m)^2\big)\,,\ \rho_n=\sum_{i=1}^n\mathbb{P}(Y_i>N)\,.$$

Пусть C_* и C_+ – константы в равномерном и неравномерном неравенствах Берри–Эссеена,

$$c_*=C_*^{1/3}\,,\ c_+=C_+^{1/3}\,.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
I_n &= [\mu/\sigma(c_*+c_+|m_0|/m\sigma)+c_+\mu_2/m]^3+r_n(x)+\rho_n\,,\\
I_n^* &= \frac{C_+}{1+x^3(1-\gamma_n)^3}\left[\frac{\mu_1}{\sigma}\left(1+\frac{3x(m_0\vee 0)}{2m\sigma}\right)+\frac{3x\mu_2}{2m}\right]^3\\
&+ r_n(x)+[6\mu_>/x\sigma]^3+\rho_n\chi_n+e^{-m/12K}\,,
\end{aligned}$$

где $K=3\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(Y_i^<)^2/m$,

$$\gamma_n=3x|m_0|/2m\sigma+(3x\sigma_2/2m)^2\,,\ \chi_n=\max_{i\leq n}\mathbb{P}(S_n-X_i\geq x\sigma/6).$$

Следующий результ есть неравенство типа Берри–Эссеена для $Z_{n,1}=S_n/T_n$.

Теорема 5.2 *Если* $0 \le x \le m/3\sigma_2$, *то*

$$\Delta(n,x) \equiv |\mathbb{P}\left(S_n/T_n - m_1/m < x\sigma/m\right) - \Phi(x)| \le \min\{I_n; I_n^*\}; \tag{5.5}$$

если $x > m/3\sigma_2$, *то* $\Delta(n,x) \le 17(\sigma_2/m)^2$.

В случае $Y_i \equiv 1$ (5.5) совпадает с неравенством Берри–Эссеена для $S_n/\sqrt{n}$. Предположение, что $Y_i \ge 0$, может быть опущено, если к правой части (5.5) добавить $\mathbb{P}(T_n \le 0)$. В приложениях вероятность $\mathbb{P}(T_n \le 0)$ обычно убывает к нулю быстрее, чем другие члены правой части (5.5).

Если пары $(X,Y),(X_1,Y_1),\ldots$ одинаково распределены, $\mathbb{E}X = 0$ и

$$\mathbb{E}|X|^3 + \mathbb{E}Y^{3/2} < \infty,$$

то из (5.5) следует, что $\sup_x \Delta(n,x) = O(n^{-1/2})$ при $n \to \infty$.

Асимптотика $\mathbb{E}S_n/T_n$ и $\mathbb{D}S_n/T_n$ найдена без предположения о том, что пары $\{(X_i,Y_i)\}$ одинаково распределены (см. теоремы 5.23 – 5.25), но для удобства изложения теорема 5.3 сформулирована для н.о.р.с.в..

Теорема 5.3 *Обозначим* $\tilde{X} = X - Y\mathbb{E}X/\mathbb{E}Y$. *Если пары* $\{(X_i,Y_i)\}$ *одинаково распределены и* $\mathbb{E}Y^3 + \mathbb{E}|X|Y^2 + \mathbb{E}|X_1|/T_m < \infty$ $(\exists m > 1)$, *то*

$$\left|\mathbb{E}S_n/T_n - \mathbb{E}X/\mathbb{E}Y + \mathbb{E}\tilde{X}Y/n(\mathbb{E}Y)^2\right| = O(n^{-2}). \tag{5.6}$$

если $\mathbb{E}Y^3 + \mathbb{E}|X|Y^2 + \mathbb{E}X_1^2(1 + Y_1 + T_m^{-2}) < \infty$ $(\exists m > 1)$, *то*

$$\left|\mathbb{E}(S_n/T_n - \mathbb{E}X/\mathbb{E}Y)^2 - n^{-1}(\mathbb{E}Y)^{-2}\mathbb{D}\tilde{X}\right| = O(n^{-2}). \tag{5.7}$$

если $\mathbb{E}(X_1^2(1+Y_1^2) + Y_1^4 + (X_1/T_m)^2) < \infty$ $(\exists m > 1)$, *то*

$$\begin{aligned}&\Big|\mathbb{E}\left(Z_{n,1}\mathbb{E}Y - \mathbb{E}X\right)^2 - n^{-1}\mathbb{D}\tilde{X} + 2\mathbb{E}\tilde{X}^2\bar{Y}/n^2\mathbb{E}Y \\ &-3(\mathbb{D}\tilde{X})\mathbb{D}Y/n^2(\mathbb{E}Y)^2 - 6(\mathbb{E}\tilde{X}Y)^2/n^2(\mathbb{E}Y)^2\Big| = O(n^{-3}).\end{aligned} \tag{5.8}$$

Случай зависимых случайных пар. Неравенство типа Берри–Эссеена для отношения S_n/T_n сумм зависимых с.в. может быть получено, используя (6.33) вместо (5.1).

Пусть $\{(X_i,Y_i), i \ge 1\}$ – строго стационарная последовательность пар случайных величин. Предположим, что

$$\mathbb{E}X_i = 0 \ (\forall i)\,, \ \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^t + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}Y_i < \infty \quad (\exists t \in (2;3])$$

и имеет место условие перемешивания, при котором справедливо соотношение (6.33) для случайных величин $\{\tilde{X}_i, i \geq 1\}$ с нулевыми средними, такими что $\tilde{X}_i \in \sigma(X_i, Y_i)$ и $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}|\tilde{X}_i|^t < \infty$ $(t \in (2;3])$.

Обозначим $D_n = [0; m/3\sigma_2]$, и пусть

$$c_t^* = (C_t^*)^{1/t}, \quad c_t^+ = (C_t^+)^{1/t}, \quad c_t^\star = c_t^+ \wedge c_t^* m/2\sigma_2 ,$$

$$\mu_{1,t}^t = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^t, \quad \mu_{2,t}^t = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|\bar{Y_i^<}|^t, \quad k_n = (\ln \sigma)^\kappa .$$

Достаточно рассмотреть лишь случай $x \geq 0$.

Теорема 5.4 *Если* $x \in D_n$, *то*

$$\Delta(n,x) \leq k_n \left[\left(c_t^* + c_t^\star \frac{m_0 \vee 0}{m\sigma} \right) \frac{\mu_{1,t}}{\sigma} + c_t^\star \frac{\mu_{2,t}}{m} \right]^t + r_n(x) + \rho_n . \tag{5.9}$$

Это неравенство является равномерной оценкой – $r_n(x)$ может быть заменено на $\sup_x r_n(x)$.

Следствие 5.5 *Если* $\{(X_i, Y_i), i \geq 1\}$ *– последовательность ℓ-зависимых случайных пар, то существует абсолютная константа $C < \infty$, такая что*

$$\Delta(n,x) \leq C(1+\ell)^2 \left[\frac{\mu}{\sigma} \left(1 + \frac{m_0 \vee 0}{m\sigma} \right) + \frac{\mu_2}{m} \right]^3 + r_n + \rho_n \tag{5.10}$$

при $x \in D_n$. *Если* $x > m/3\sigma_2$, *то* $\mathbb{P}(S_n/\sigma > xT_n/m) \leq (4\sigma_2/m)^2$.

Если $N \asymp n$ и

$$\mathbb{E}|X|^3 + \mathbb{E}Y^{3/2} < \infty,$$

то (5.10) влечёт

$$\sup_x \Delta(n,x) = O(n^{-1/2}) .$$

Следствие 5.6 *Предположим, что*

$$\sigma_\infty^2 = \mathbb{E}X_1^2 + 2 \sum_{i=2}^\infty \mathbb{E}X_1 X_i > 0 ,$$

$\mathbb{E}|X|^3 + \mathbb{E}Y^2 < \infty$ *и* $\alpha_n \leq e^{-cn}$ *для некоторой константы* $c \in (0;\infty)$. *Тогда существует константа* $A < \infty$, *такая что*

$$\Delta(n,x) \leq A n^{-1/2} \ln n$$

при $x \in D_n$. *Если* $x > m/3\sigma_2$, *то* $\mathbb{P}(S_n/\sigma > xT_n/m) \leq (4\sigma_2/m)^2$.

Неравномерная оценка. Обозначим

$$p_n = \mathrm{I\!P}(T_n^< < m/3)\,,\ \chi_n^+ = \max_{i\le n} \mathrm{I\!P}(S_n - X_i \ge \sigma x/6 \,|\, Y_i > N)\,,$$

$$\sigma_*^2 \equiv \sigma_*^2(n) = \max_{i\le n} \mathrm{I\!D} X_i\,,\ \mu_t^> = \left(\sum_{i=1}^n \mathrm{I\!E}|X_i|^t \mathrm{1\!I}\{|X_i| > \sigma x/6\}\right)^{1/t}.$$

Теорема 5.7 *Если* $x \in D_n$, *то*

$$\begin{aligned}\Delta(n,x) \quad &\le \quad \frac{C_t^+ k_n}{1 + x^t q_n^t(x)} \left[\frac{\mu_{1,t}}{\sigma}\left(1 + \frac{3x(m_0 \vee 0)}{2m\sigma}\right) + \frac{3x\mu_{2,t}}{2m}\right]^t \\ &+ \quad r_n(x) + [6\mu_t^>/\sigma x]^t + \rho_n \chi_n^+ + p_n\,,\end{aligned} \tag{5.11}$$

где $q_n(x) = (1-\gamma_n) \vee 1/2$ *и* $\gamma_n \equiv \gamma_n(x) = 3x|m_0|/2m\sigma + (3x\sigma_2/2m)^2$.

Если пары $\{(X_i, Y_i), i \ge 1\}$ независимы, то

$$\chi_n^+ \le \Phi_c(x/6) + \frac{C_t^+}{1 + (x/6)^t}\left(\frac{\mu_{1,t}}{\sigma}\right)^t (1 - \sigma_*/\sigma)^{-t}\,,$$

и (5.11) влечёт

$$\Delta(n,x) \le C_+(1+x^3)^{-1}(\mu/\sigma)^3(1+o(1)) + r_n(x) \tag{5.12}$$

равномерно по $x \in [0; (m/3\sigma_2) \wedge \sigma^{1/3}]$.

Пример 5.1 *Оценивание функции регрессии.* Пусть $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ – выборка независимых наблюдений из распределения случайной пары (X, Y), принимающей значения в $\mathrm{I\!R}^d \times \mathrm{I\!R}$. Функции регрессии ψ есть условное матожидание

$$\psi(x) = \mathrm{I\!E}\{Y | X = x\}\,.$$

Предположим, что $\mathrm{I\!E}|Y| < \infty$ и распределение случайного вектора X имеет плотность f по отношению к мере Лебега в $\mathrm{I\!R}^d$; символ f_γ обозначает плотность распределения случайного вектора γ.

Классическая оценка

$$\hat\psi_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i f_\gamma(\varepsilon^{-1}(X_i - x))}{\sum_{i=1}^n f_\gamma(\varepsilon^{-1}(X_i - x))} \tag{5.13}$$

функции $\psi(\cdot)$ была введена Надарайя [246] и Ватсоном [405] (случайный вектор γ выбирается статистиком).

Отметим, что (5.13) есть СНС

$$\hat\psi_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i f_{x+\varepsilon\gamma}(X_i)}{\sum_{i=1}^n f_{x+\varepsilon\gamma}(X_i)}\,. \tag{5.13*}$$

Хорощо известно, что оценка $\hat{\psi}_n(x)$ состоятельна, если

$$0 < \varepsilon \equiv \varepsilon(n) \to 0, \quad n\varepsilon^d \to \infty \tag{5.14}$$

и выполнены определённые условия на γ; при дополнительных ограничениях имеем

$$\left(\hat{\psi}_n(x) - \psi(x)\right)\, \kappa_x^{-1} \sqrt{n\varepsilon^d} \Rightarrow \mathcal{N}(0;1)\,,$$

где $\kappa_x^2 = f^{-1}(x)\,\lambda(x)\,\mathbb{E}f_\gamma(\gamma)$ и $\lambda(x) = \mathbb{E}\{(Y-\psi(x))^2\,|X=x\}$ [110].

Предположим, что (5.14) выполнено и $\|f''\| + \|\psi''\| < \infty$. Обозначим $\nu(x) = \mathbb{E}\{|Y-\psi(x)|^3|X\}$,

$$\begin{aligned}
r_1^* &= \left(\frac{\mathbb{E}f_\gamma(\gamma)}{f(x)}\right)^{1/2}\left(\frac{3}{\sqrt{2\pi}} + 20\,\mathbb{E}\left(\frac{f_\gamma(\gamma)}{\mathbb{E}f_\gamma(\gamma)}\right)^2 \frac{\nu(x)}{\lambda^{3/2}(x)}\right),\\
r_2^* &= (\|(f\psi)''\| + \|\psi\|\|f''\|)\,\mathbb{E}|\gamma|^2/\kappa_x f(x)2\sqrt{\pi}\,,\\
r_3^* &= \frac{\|(\lambda f)''\|\,\mathbb{E}f_\gamma(\gamma)|\gamma|^2}{\lambda(x)f(x)\mathbb{E}f_\gamma(\gamma)\sqrt{2\pi}},\ r_4^* = \|f''\|\,f^{-1}(x)\,\mathbb{E}|\gamma|^2\sqrt{2\pi}\,.
\end{aligned}$$

Мы пишем $a_n(x) \lesssim b_n(x)$, если

$$a_n(x) \le b_n(x)\ (1+o(1))\,.$$

Из теоремы 5.2 вытекает

Следствие 5.8 *Для всех достаточно больших* n

$$\begin{aligned}
&\sup_y \left|\mathbb{P}\left(\hat{\psi}_n(x) - \psi(x) < y\kappa_x(n\varepsilon^d)^{-1/2}\right) - \Phi(y)\right|\\
&\lesssim r_1^*(n\varepsilon^d)^{-1/2} + r_2^*\varepsilon^2(n\varepsilon^d)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Отметим, что правая часть (5.15) достигает своего минимума по ε на

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_n = (dr_1^*/((4+d)r_2^*n))^{1/(2+d)}\,.$$

При таком выборе ε скорость сходимости в (5.15) есть $O(n^{-1/(2+d)})$.

Следствие 5.9 *Если* $\|f^{(4)}\| + \|\psi^{(4)}\| < \infty$, *то для всех достаточно больших* n

$$\begin{aligned}
&\sup_y\left|\mathbb{P}\left(\psi_n(x) - \psi(x) < y\kappa_x\,(n\varepsilon^d)^{-1/2}\right) - \Phi\left(y - w(x)\kappa_x^{-1}\left(n\varepsilon^{d+4}\right)^{1/2}\right)\right|\\
&\le r_1^*(n\varepsilon^d)^{-1/2} + (r_3^*+r_4^*)\varepsilon^2 + (r_5^*+r_6^*)\varepsilon^4(n\varepsilon^d)^{-1/2}\,,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

где $w(\cdot) = \mathbb{E}\left((\psi f)'' - \psi f''\right)\gamma\gamma/2f$,

$$\begin{aligned}
r_5^* &= \left(\|\psi\|\,\|f^{(4)}\| + \|(\psi f)^{(4)}\|\right)\mathbb{E}|\gamma|^4/24f(x)\kappa_x\sqrt{\pi}\ ,\\
r_6^* &= \|f''\|\,(\|(\psi f)''\| + \|\psi\|\|f''\|)\left(\mathbb{E}|\gamma|^2/2\,f(x)\right)^2/\kappa_x\sqrt{\pi}\ .
\end{aligned}$$

Правая часть (5.16) достигает своего минимума по ε на

$$\varepsilon_* = n^{-1/(d+4)} \left(\left(\sqrt{4q_2^2 + q_1 q_3 d(d+8)} - 2q_2 \right) / q_3(d+8) \right)^{2/(4+d)},$$

где $q_1 = r_1^*$, $q_2 = r_3^* + r_4^*$, $q_3 = r_5^* + r_6^*$. При таком выборе ε скорость сходимости в (5.16) есть $n^{-2/(d+4)}$. □

Пример 5.2 *Оценивание функции интенсивности отказов.* Предположим, что случайная величина X имеет дифференцируемую функцию распределения F. Обозначим $F_c = 1 - F$, $f = F'$, и предположим, что $F_c(x) > 0$. Тогда

$$h(x) = f(x)/F_c(x)$$

есть функция интенсивности отказов.

Задача оценивания $h(x)$ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ независимых наблюдений имеет приложения в теории надёжности, сейсмологии, и т.д. [336, 372].

Ватсон и Лидбеттер [406] ввели оценку

$$h_n(x) = f_n(x)/\hat{F}_c(x),$$

где $1 - \hat{F}_c$ – эмпирическая функция распределения и

$$f_n(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_{x+\varepsilon\gamma}(X_i)$$

есть ядерная оценка плотности (записанная в стиле (5.13*)). Предположим, что $\mathcal{L}(\gamma)$ симметрично, $\mathbb{E}\gamma^2 = 1$ и существует f''.

Следствие 5.10 *Если* $\varepsilon \equiv \varepsilon(n) \to 0$, *то*

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &\equiv \sup_y \left| \mathbb{P}\left(h_n(x) - h(x) < y\sigma_x/\sqrt{2\pi n\varepsilon} \right) - \Phi(y) \right| \\ &\lesssim \frac{81 C_* \nu_*}{8\nu^{3/2}\sqrt{f(x) n\varepsilon}} + \frac{\|f''\|\sqrt{n\varepsilon^5}}{2\sqrt{2\pi\nu f(x)}}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

где $\nu = \mathbb{E} f_\gamma(\gamma)$, $\nu_* = \mathbb{E} f_\gamma^2(\gamma)$ *и* $\sigma_x = \sqrt{2\pi\nu f(x)} \Big/ \mathbb{P}(X \geq x)$.

Правая часть (5.17) достигает своего минимума по ε на

$$\varepsilon = \left(81 C_* \nu_* \sqrt{2\pi} \Big/ 20\nu \|f''\| n \right)^{1/3}.$$

При таком выборе ε скорость сходимости в (5.17) есть $O(n^{-1/3})$.

Следствие 5.11 *Предположим, что существует* $f^{(4)}$. *Если* $\varepsilon \equiv \varepsilon(n) \to 0$, *то*

$$\sup_y \left| \mathbb{P}\left(h_n(x) - h(x) < y\sigma_x/\sqrt{2\pi n\varepsilon}\right) - \Phi\left(y - f''(x)c_{n,x}\right)\right| \lesssim \delta_1/\sqrt{n\varepsilon} + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\sqrt{n\varepsilon^9}\,, \tag{5.18}$$

где $c_{n,x} = (n\varepsilon^5/4\nu f(x))^{1/2}$,

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{81C_*\nu_*}{8\nu^{3/2}\sqrt{f(x)}}\,,\ \delta_3 = \frac{\|f^{(4)}\|\mathbb{E}\gamma^4}{24\sqrt{2\pi\nu f(x)}}\,, \\ \delta_2 &= \left(\|f''\|\mathbb{E}\gamma^2 f_\gamma(\gamma)/2 + 2h(x)\|f'\|\mathbb{E}\gamma\right)\Big/\nu f(x)\sqrt{2\pi e}\ . \end{aligned}$$

Правая часть соотношения (5.18) достигает своего минимума по ε, если

$$\varepsilon^{5/2} = \frac{2\delta_2}{9\delta_3}\left(\sqrt{1 + 9\delta_1\delta_3/(4\delta_2^2)} - 1\right)/\sqrt{n}\ .$$

При таком выборе ε скорость сходимости в (5.18) есть $O(n^{-2/5})$.

Из теорему 5.3 следует, что

$$\mathbb{E}\left(h_n(x) - h(x)\right)^2 \sim \nu h(x)/n\varepsilon F_c(x) + \left(\varepsilon^2 f''(x)\mathbb{E}\gamma^2/2F_c(x)\right)^2\ . \tag{5.19}$$

Правая часть соотношения (5.19) достигает своего минимума по ε на

$$\varepsilon = \left(\nu f(x)/n(f''(x)\mathbb{E}\gamma^2)^2\right)^{1/5}.$$

При таком выборе ε правая часть (5.19) есть $\frac{1.25}{n^{4/5}F_c^2(x)}(\nu f(x))^{4/5}\left(f''(x)\,\mathbb{E}\gamma^2\right)^{2/5}$.

5.3 Статистика Стьюдента

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. невырожденные с.в.. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

$$\hat{X} = S_n/n\,,\ T_n = \sum_{i=1}^n X_i^2\,,$$

и пусть

$$t_n^* = S_n/T_n^{1/2}.$$

Статистика Стьюдента

$$t_n = S_n\Big/\sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^n \left(X_i - \hat{X}\right)^2}$$

тесно связана с СНС t_n^*: если $x \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X})^2 > 0$, то

$$\{t_n \geq x\} = \left\{ S_n \geq x \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X})^2} \right\} = \left\{ S_n^2 \geq x^2 \big(T_n - S_n^2/n\big), S_n \geq 0 \right\}$$
$$= \left\{ S_n^2 (1 + x^2/n) \geq x^2 T_n \,,\, S_n \geq 0 \right\} = \left\{ t_n^* \geq x / \sqrt{1 + x^2/n} \right\}$$

[81]. В частности, предельные распределения t_n и t_n^* совпадают.

Статистика t_n^* имеет ряд свойств, отличных от свойств $S_n/\sqrt{n}$:
(a) ограниченность: $|t_n^*| \leq \sqrt{n}$.
(b) матожидание $\mathbb{E}|t_n^*|^s$, $s > 1$, может быть оценено в терминах $H_n = \max_{i \leq n} \mathbb{E}|t_i^*|$. В частности, $\mathbb{E}(t_n^*)^2 \leq 1 + 4H_n^2$ $(n \geq 2)$.
(c) неравномерное неравенство типа Берри–Эссеена, вообще говоря, не имеет места для t_n^* и t_n (см. утверждение 5.17).

Асимптотическая нормальность статистики Стьюдента. Говорят, что $\mathcal{L}(X)$ принадлежит области притяжения распределения P, если существуют числа a_n и $c_n > 0$, такие что $\mathcal{L}((S_n - a_n)/c_n) \Rightarrow P$. Следующий результат принадлежит Малеру [223] и Жине и др. [145].

Теорема 5.12 [223, 145] *Статистика Стьюдента* $t_n \Rightarrow \mathcal{N}(0;1)$, *если и только если* $\mathcal{L}(X)$ *принадлежит области притяжения нормального распределения и* $\mathbb{E}X = 0$.

Теорема 5.13 представляет равномерное неравенство типа Берри–Эссеена для t_n^*. Очевидно, что достаточно оценить $\mathbb{P}(t_n^* < x) - \Phi(x)$ лишь для неотрицательных x.

Пусть $(X, Y), (X_1, Y_1), \ldots$ – н.о.р. пары случайных величин, $Y \geq 0$,

$$\mathbb{E}X = 0\,,\ \mathbb{E}X^2 = 1\,,\ \mathbb{E}|X|^3 + \mathbb{E}Y^{3/2} < \infty\,.$$

Обозначим $Y_i^< = Y_i \mathbb{1}\{Y_i \leq N\}$, где $N > 0$, и положим

$$t_n^o = \frac{S_n}{\sqrt{T_n / \mathbb{E}Y}}\,,\quad t_n^\star = \frac{S_n}{\sqrt{T_n / \mathbb{E}Y^<}}\,.$$

Пусть C_* и C_+ – константы в равномерном и неравномерном неравенствах Берри–Эссеена для сумм н.о.р.с.в. с неслучайной нормировкой (то есть в случае $Y \equiv 1$ [37, 297, 370, **?**]). Обозначим $c_* = C_*^{1/3}$, $c_+ = C_+^{1/3}$,

$$m_0 = \mathbb{E}XY^<\,,\ \sigma_<^2 = \mathbb{E}(Y^<)^2\,,\ \psi_X^3 = \mathbb{E}|X|^3\,,\ \psi_<^3 = \mathbb{E}|\bar{Y}^<|^3\,,$$

$$\psi_* = 1 + 3x\,(m_0 \vee 0)\,/2m_< \sqrt{n}\,,\ \psi = \big(\psi_X + x\psi_< / 2m_< \sqrt{n}\big)\,\psi_*\,,$$

и пусть $m_< = \mathbb{E}Y^<$,

$$\begin{aligned} r_n &= x^2\varphi(x/2)\left[\frac{|m_0|/m_<}{\sqrt{n}} + 4|x|\frac{\sigma_<^2}{nm_<^2}\right],\ r_\star = \frac{\psi^3}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{9}{\sqrt{2\pi}}+\sqrt{\pi/8}\right) \\ &+ \frac{x\sigma_<^2\psi_*}{nm_<^2}\left(\sqrt{\pi/8}+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{2^{5/3}x\psi_*}{m_<^2 n^{4/3}}\left(2+\psi^3/\sqrt{n}\right)^{1/3}\mathbb{E}^{5/3}|\bar{Y}^<|^{3/2}, \\ r_* &= \frac{x\psi_*^2}{m_<^2 n^{3/2}}\left[\psi_X\psi_<^2+\frac{x\psi_<^3}{2m_<\sqrt{n}}+\frac{2^{5/3}}{n^{1/3}}\left(\mathbb{E}|X||\bar{Y}^<|+\frac{x\sigma_<^2}{2m_<\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}^{2/3}|\bar{Y}^<|^{3/2}\right], \\ R_n^* &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\psi_X\left(c_*+0\vee c_+m_0/2m_<\sqrt{n}\right)+c_+\psi_</2m_<\sqrt{n}\right]^3. \end{aligned}$$

Теорема 5.13 *Если* $0 \le x \le m_<\sqrt{n}/3\sigma_<$, *то*

$$-R_n^- \le \mathbb{P}\left(t_n^\star < x\right) - \Phi(x) \le R_n^+, \tag{5.20}$$

где $R_n^- = r_n + r_* + r_\star$ *и* $R_n^+ = R_n^* + r_n/2 + n\mathbb{P}(Y > N)$.

Заметим, что $\mathbb{P}\left(t_n^\star \ge x\right) = O(n^{-2})$, если $x > m_<\sqrt{n}/3\sigma_<$. Из теоремы 5.13 и неравенств

$$\sigma_<^2 \le \mathbb{E}|Y|^{3/2}N^{1/2},\ \psi_<^3 \le \mathbb{E}|Y|^{3/2}N^{3/2}$$

следует, в частности, что существует абсолютная константа $C_\star$, такая что

$$\sup_x |\mathbb{P}(t_n^o < x) - \Phi(x)| \le C_\star n^{-1/2}\left(\mathbb{E}|X|^3 \vee \mathbb{E}Y^{3/2}\right). \tag{5.21}$$

Мы будем писать $a_n \lesssim b_n$, если $a_n \le b_n(1+o(1))$ и $a_n \gtrsim b_n$, если $a_n \ge b_n(1+o(1))$.

Следствие 5.14 *Равномерно по* $x \ge 0$, *при* $n \to \infty$,

$$-An^{-1/2} \lesssim \mathbb{P}\left(t_n^o < x\right) - \Phi(x) \lesssim Bn^{-1/2}, \tag{5.22}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{E}|X|^3\left(1+9/\sqrt{2\pi}+\sqrt{\pi/8}\right)+2\mathbb{E}|X|+8|\mathbb{E}XY|\Big/e\sqrt{2\pi}\,\mathbb{E}Y, \\ B &= C_*\mathbb{E}|X|^3+4|\mathbb{E}XY|\Big/e\sqrt{2\pi}\,\mathbb{E}Y. \end{aligned}$$

Что касается статистики Стьюдента, обозначим

$$\begin{aligned} A_X &= \left(1+9/\sqrt{2\pi}+\sqrt{\pi/8}+8/e\sqrt{2\pi}\right)\mathbb{E}|X|^3+2\mathbb{E}|X|, \\ B_X &= C_*\mathbb{E}|X|^3+4|\mathbb{E}X|^3/e\sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Следствие 5.15 *Если* $Y = X^2$ *и* $\mathbb{E}|X|^3 < \infty$, *то*

$$-A_X n^{-1/2} \lesssim \inf_{x\geq 0} \left[\mathbb{P}\left(t_n^* < x\right) - \Phi(x)\right] \leq \sup_{x\geq 0} \left[\mathbb{P}\left(t_n^* < x\right) - \Phi(x)\right] \lesssim B_X n^{-1/2} .$$

Результ останется в силе, если t_n^* *заменить на* t_n.

Согласно следствию 5.15, для всех $x \geq 0$ и всех достаточно больших n

$$-6.4\mathbb{E}|X|^3 - 2\mathbb{E}|X| \leq \left(\mathbb{P}\left(t_n^* < x\right) - \Phi(x)\right)\sqrt{n} \leq 1.36\mathbb{E}|X|^3 .$$

Естественно спросить, насколько малой абсолютная константа $C_\star$ в (5.21) может быть? В случае $Y_i \equiv 1$ ответ получен Чистяковым [78]: наилучшая возможная константа в неравенстве Берри–Эссеена есть $C_{{}_E} = \left(3+\sqrt{10}\right)/\left(6\sqrt{2\pi}\right)$. Следующее утверждение показывает, что $C_\star \geq 1/\sqrt{2e} > C_{{}_E}$.

Утверждение 5.16 *Если (5.21) выполнено для всех достаточно больших* n, *то* $C_\star \geq 1/\sqrt{2e}$.

Пример 5.3 показывает, что у СНС t_n^* есть недостатки: t_n^* может принимать большие значения, когда все $X_1, \ldots, X_n$ "малы". Действительно, если $X_1 = \ldots = X_n = x > 0$, то $t_n^* = \sqrt{n}$. Пусть

$$\mathbb{P}\left(X = \sqrt{p/(1-p)}\right) = 1-p\,,\ \mathbb{P}\left(X = -\sqrt{(1-p)/p}\right) = p\,. \tag{5.23}$$

Тогда $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}X^2 = 1$, $\mathbb{E}|X|^3 = p^{3/2}/\sqrt{1-p} + (1-p)^{3/2}/\sqrt{p}$ и

$$\mathbb{P}\left(t_n^* \geq \sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = \ldots = X_n = \sqrt{p/(1-p)}\right) = (1-p)^n .$$

Поэтому $\mathbb{P}(t_n^* \geq \sqrt{n}) = (1-p)^n \to 1$ при $p \to 0$ (отметим, что, $S_n/\sqrt{n} \to 0$ при $x \to 0$, если $X_1 = \ldots = X_n = x$). Следовательно,

$$\sup_{X\in\mathbf{L}} \sup_x \left|\mathbb{P}(t_n^* < x) - \Phi(x)\right| \to 1 \qquad (n \to \infty),$$

где $\mathbf{L}$ – класс распределений с нулевыми средними и единичными дисперсиями.

Утверждение 5.17 *Неравенство вида*

$$\left|\mathbb{P}(t_n^* < x) - \Phi(x)\right| \leq Cg(x)\mathbb{E}|X|^3 n^{-1/2} \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{5.24}$$

где C *– абсолютная константа и* $0 < g(\cdot) \downarrow 0$, *вообще говоря, не имеет места.*

Действительно, положим $p = 1/n$ в (5.23), и пусть $x = \sqrt{n}$. Тогда $\mathbb{E}|X|^3 \sim \sqrt{n}$, и левая часть (5.24) стремится к $1/e$, в то время как правая часть стремится к нулю. Поэтому неравномерное неравенство типа Берри–Эссеена, вообще говоря, не имеет места для СНС. $\square$

Неравномерное неравенство типа Берри–Эссеена для статистики Стьюдента может быть получено при дополнительных ограничения на $\mathcal{L}(X)$.

Пусть $\varepsilon \equiv \varepsilon_{n,x} \in [0;1/2)$. Обозначим $m = \mathbb{E}T_n^<$, $\sigma_2^2 = \mathbb{D}T_n^<$,

$$\delta_{n,x} \;=\; \mathbb{P}\left((\bar{T}_n^</m)^2 > 2\varepsilon_{n,x}\right), \; \gamma_n^+ \equiv \gamma_n^+(x) = \frac{3x(-m_0 \vee 0)}{5m\sigma} + \left(\frac{3x\sigma_2}{5m}\right)^2,$$

$$R_n^+(x,t) \;=\; C_t^+ \left[\frac{\mu_{1,t}}{\sigma}\left(1 + \frac{3x(m_0 \vee 0)}{5m\sigma}\right) + \frac{3x\mu_{2,t}}{5m}\right]^t, \; p_n^* = \rho_n\chi_n + p_n\,.$$

Очевидно, $\gamma_n^+ < 1/4$, если $x \in D_n = [0; m/3\sigma_2]$.

Теорема 5.18 *Если* $x \in D_n$, *то*

$$\Phi\left((1-\varepsilon_{n,x})(1-\gamma_n^+)x\right) - \delta_{n,x} - \frac{R_n^+(x,t)}{1+(x/(1-\varepsilon))^t(1-\gamma_n^+)^t} \le \mathbb{P}\left(t_n^\star < x\right)$$
$$\le \Phi\left(x\left(1 + \frac{3x(m_0 \vee 0)}{5m\sigma}\right)\right) + \frac{R_n^+(x,t)}{1+x^t(1-\gamma_n^+)^t} + \left[\frac{3\mu_t^>}{\sigma x}\right]^t + p_n^*\,. \qquad (5.25)$$

Число $\varepsilon_{n,x}$ может быть выбрано, минимумизируя сумму

$$L_n = x\varphi(x)\varepsilon_{n,x} + \delta_{n,x}\,.$$

Поскольку $\delta_{n,x} \le \sigma_2^2/2\varepsilon m^2$, можно положить

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{1}{2} \wedge \sigma_2/\left(m\sqrt{2x\varphi(x)}\right).$$

Тогда $L_n \le 2\,(\sigma_2/m)^2 \wedge \frac{\sigma_2}{m}\sqrt{2x\varphi(x)}$, что есть $O(n^{-1/2}x\varphi(x))$, если $\mathbb{E}X^4 < \infty$.

Если пары $\{(X_i, Y_i)\}$ одинаково распределены и

$$\mathbb{E}|X|^3 + \mathbb{E}Y^{3/2} < \infty,$$

то (5.25) с $N \asymp n/(1+x^2)$ влечёт

$$\Phi\left((1-\varepsilon-\gamma_n^*)x\right) - \delta_{n,x} - C_+(1+x^3)^{-1}(\mu/\sigma)^3\,(1+o(1))$$
$$\le \mathbb{P}\left(t_n^\star < x\right) \le \Phi\left((1+\gamma_n^*)x\right) + C_+(1+x^3)^{-1}(\mu/\sigma)^3\,(1+o(1))$$

равномерно по $x \in [1; \sigma^{1/3}]$, где $\gamma_n^* = 3x|m_0|/5m\sigma$.

Следующий пример показывает, что для определённого класса распределений оценки теоремы 5.13 и теоремы 5.18 асимптотически эквивалентны оценкам в неравенстве Берри–Эссеена для $S_n/\sqrt{n}$.

Пример 5.4. Пусть

$$\mathbb{P}(X=-N) = \mathbb{P}(X=N) = 1/(2N^2)\,,\ \mathbb{P}(X=0) = 1 - N^{-2}\,.$$

Обозначим $\Delta_n^*(x) = \mathbb{P}\,(t_n^* < x) - \Phi(x)$,

$$R_{n,N} = \frac{N}{\sqrt{n}}\left[C_*^{1/3} + C_+^{1/3}N/\sqrt{n}\right]^3\,,\ r_{n,N} = \frac{24\sqrt{6}\,N^2}{e\sqrt{\pi e}\,n}\,.$$

Легко проверить, что $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}|X|^m = N^{m-2}$ $(m \in \mathbb{N})$, $\rho_n = m_0 = 0$, $m/12K = n/36N^2$ и $r_n < 2r_{n,N}$. Кроме того, $\delta_{n,x} \equiv \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 1)/n > \sqrt{2\varepsilon}\,) \le e^{-\varepsilon n/2N^2}$. Из теоремы 5.13 следует, что

$$\Phi(x(1-\varepsilon)) - R_{n,N} - 2r_{n,N} - e^{-\varepsilon n/2N^2} \le \mathbb{P}(t_n < x) \le \Phi(x) + R_{n,N} + r_{n,N}\,.$$

Пусть $N = N(n) \to \infty$, $N^2/n \to 0$, и положим $\varepsilon = 2n^{-1}N^2 \ln(n/N^2)$. Тогда

$$\sup_x |\Delta_n^*(x)| \le C_* n^{-1/2} N + O\big(n^{-1}N^2 \ln(n/N^2)\big)\,.$$

Эта оценка асимптотически эквивалентна оценке в равномерном неравенстве Берри–Эссеена для $S_n/\sqrt{n}$.

Заметим, что $\mu_> = 0$, если $x \ge 6N/\sqrt{n}$. Применение теоремы 5.18 с $\varepsilon_{n,x} = 2n^{-1}N^2 \ln(nN^{-2}(2+x^2))$ влечёт

$$\begin{aligned}
&-C_+\big(1+3xN/(5\sqrt{n})\,\big)^3 - v_n n^{-1} N^2 \ln(n/N^2) \le (1+x^3)\Delta_n^*(x)\sqrt{n}/N \\
&\le C_+\big(1+3xN/(5\sqrt{n})\,\big)^3 (1+x^3)\left(1+x^3(1-\gamma_{n,x}^+)\right)^{-1} + v_n N^2/n\,,
\end{aligned}$$

где $\gamma_{n,x}^+ = 9x^2N^2/25n$ и $v_n \to 0$ равномерно по $x \in [6N/\sqrt{n}; \sqrt{n}/(3N)]$ при $n \to \infty$. Пусть $\{u_n\}$ – последовательность положительных чисел, такая что $u_n \to 0$ и $u_n\sqrt{n}/N \to \infty$. Тогда

$$(1+x^3)|\mathbb{P}(t_n^* < x) - \Phi(x)|\sqrt{n}/N \le C_+ + o(1)$$

при $x \in [0; u_n\sqrt{n}/N]$. Эта оценка асимптотически эквивалентна оценке в неравномерном неравенстве Берри–Эссеена (5.2) для $S_n/\sqrt{n}$. □

Свойства СНС хорошо изучены в случае симметричных с.в. [403]. Лемма 5.19 предлагает характеризацию свойства распределения быть симметричным. В лемме 5.20 предложено новое доказательство результата Бансал и др. [20] о характеризации нормального распределения в терминах СНС.

Лемма 5.19 *Пусть X и Y – н.о.р.с.в., такие что* $\mathbb{E}|X|^{2-2/r} < \infty$ $(r > 0)$. *Если с.в. $\xi \geq 0$ независима от (X,Y), то*

$$\mathbb{E}XY/(X^2+Y^2+\xi)^{1/r} \geq 0\,. \tag{5.26}$$

Равенство $\mathbb{E}XY/\left(X^2+Y^2+\xi\right)^{1/r} = 0$ *имеет место если и только если $\mathcal{L}(X)$ симметрично.*

Согласно лемме 5.19, распределение $\mathcal{L}(X)$ симметрично если и только если

$$\mathbb{E}XY/\big(X^2+Y^2\big) = 0.$$

Выборочная оценка коэффициента корреляции широко используется в литературе (см. [238]). Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р.с.в.. Из леммы 5.19 с $r=1$, $Y = X_2$ и $\xi = X_3^2 + \ldots + X_n^2$ следует, что само-нормированные с.в. неотрицательно коррелированны. Отсюда вытекает, в частности, что выборочная оценка коэффициента корреляции является смешённой оценкой.

Лемма 5.20 [20] *Пусть X и Y – н.о.р.с.в.. Тогда $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0;1)$ если и только если $2XY/\sqrt{X^2+Y^2}$ – стандартная нормальная случайная величина.*

5.4 Доказательства

Доказательство теоремы 5.1. Прежде всего, оценим

$$\Delta_n^+ = \left|\mathbb{P}\left(Z_n + \nu < x\right) - \Phi(x)\right|,$$

где с.в. ν имеет распределение с плотностью

$$f_\nu(y) = n\int_y^\infty u\mathbb{P}(X \in du) \tag{5.27}$$

[381]. Если $X = \xi/\sqrt{n}$, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{D}\xi = 1$, то $\nu = \xi^*/\sqrt{n}$, где $\mathcal{L}(\xi^*)$ имеет плотность $f_{\xi^*}(y) = \int_y^\infty u\mathbb{P}(\xi \in du)$. Легко проверить, что

$$\mathbb{E}|\nu| = n\mathbb{E}|X|^3/2\,,\ \mathbb{E}g'(a+\nu) = n\mathbb{E}Xg(a+X)\,.$$

В частности,

$$\mathbb{E}g'(Z_n+\nu) = n\mathbb{E}X_{n+1}g(Z_n+X_{n+1}).$$

Используя (6.39*), выводим

$$\Delta_n^+ \leq \left|\mathbb{E}g'\left(Z_n+\nu\right) - \mathbb{E}S_{n,X}g\left(Z_n+\nu\right)\right| + r_1\,.$$

Очевидно, $S^2_{n+1,Y} = S^2_{n,Y} + 2Y_{n+1}S_{n,Y} + Y^2_{n+1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}g'(Z_n+\nu) - n\mathbb{E}X_{n+1}g(Z_{n+1})| \\ = \;& n\Big|\mathbb{E}X_{n+1}[g(Z_n+X_{n+1}) - g(Z_{n+1})]\Big| \\ \le \;& |c|\|g'\|n\mathbb{E}|X_{n+1}|(2|Y_{n+1}||S_{n,Y}| + Y^2_{n+1}) \le r_2 \,. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$n\mathbb{E}X_{n+1}g(Z_{n+1}) = \mathbb{E}S_{n,X}g(Z_{n+1})\,.$$

Легко видеть, что

$$|\mathbb{E}S_{n,X}[g(Z_{n+1}) - g(Z_n+\nu)]| \le r_3\,.$$

Следовательно, $\Delta^+_n \le \sum_{i=1}^3 r_i$. Используя (6.8*), получим $\Delta_n \le 2\Delta^+_n + 9n\mathbb{E}|X|^3/\sqrt{2\pi}$, и (5.4) следует. □

Доказательство теоремы 5.4. Обозначим $a = m_0/m\sigma, b = \sigma_2/m$. Для всякого $x \in D_n$ положим

$$y \equiv y(x) = x/\sqrt{1-2ax+b^2x^2}\,. \tag{5.28}$$

Так как $|a| \le b$, имеем $1-2ax+b^2x^2 > 0$ для всех $x \in D_n$.

Заметим, что $y'(x) > 0$ при $x \in D_n$. Действительно,

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2ax+b^2x^2}} - \frac{x(b^2x-a)}{(1-2ax+b^2x^2)^{3/2}} = \frac{1-ax}{(1-2ax+b^2x^2)^{3/2}} > 0\,.$$

Следовательно, $y(\cdot)\uparrow$ on D_n. Поэтому если $x \in D_n$, то

$$0 \le y \le m/2\sigma_2\,. \tag{5.29}$$

Обозначим

$$d \equiv d(y) = \frac{\sigma}{ay + \sqrt{1+a^2y^2-b^2y^2}}\,. \tag{5.30}$$

Функция $d(\cdot)$ коррректно определена и положительна на $D^*_n = [0; m/2\sigma_2]$. Заметим, что

$$x = yd(y)/\sigma, \tag{5.31}$$

если y определено в (5.28). Действительно, (5.31) можно переписать как

$$x = y\Big/\left(ay + \sqrt{1+a^2y^2-b^2y^2}\right), \tag{5.32}$$

и (5.28) является решением (5.32).

Обозначим

$$\xi_i(y) = \xi_i - y\frac{d}{m}\bar{Y}^{<}_i\,, \quad \Delta_n(x,y) = \left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n/\sigma}{T^<_n/m} < x\right) - \Phi(y)\right|\,.$$

Ключевым элементом нашего подхода к выводу неравенств типа Берри–Эссеена для СНС является следующая тождество: если $x \le m/3\sigma_2$, то

$$\left\{\frac{S_n/\sigma}{T_n^{<}/m} < x\right\} = \left\{S_n - \frac{x\sigma}{m}\bar{T}_n^{<} < x\sigma\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\,(y) < yd(y)\right\},$$

где $\xi_i(y) = X_i - \frac{yd}{m}\bar{Y}_i^{<}$ и $y = y(x)$ определено в (5.28). Ввиду (5.30),

$$d^2 = \mathbb{D}\sum \xi_i(y)\,.$$

Теперь (4.68) и неравенство Минковского влекут

$$\Delta_n(x,y) \le (\mathrm{Ln}\,d)^{\kappa}\left(C_t^{*} \wedge C_t^{+}(1+y^t)^{-1}\right)\sum \mathbb{E}|\xi_i(y)|^t d^{-t} \tag{2.1*}$$

$$\le (\mathrm{Ln}\,d)^{\kappa}\left(C_t^{*} \wedge C_t^{+}(1+y^t)^{-1}\right)\left[\mu_{1,t}d^{-1} + y\mu_{2,t}/m\right]^t .$$

Согласно лемме 5.21, $1/2 \le \sigma/d \le 1 + ym_0/\sigma m$. Принимая во внимание (5.29), мы выводим

$$\Delta_n(x,y) \le k_n\left[\frac{\mu_{1,t}}{\sigma}\left(c_t^{*} + c_t^{\star}\frac{m_0 \vee 0}{m\sigma}\right) + c_t^{\star}\frac{\mu_{2,t}}{m}\right]^t . \tag{5.33}$$

Результат следует из (5.33), леммы 5.21 и очевидного неравенства

$$\mathbb{P}(\exists i \le n : \eta_i \ne \eta_i^{<}) \le \rho_n\,. \tag{5.34}$$

Доказательство завершено. □

Доказательство теоремы 5.7. Применяя те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 5.4, получим оценку

$$\Delta_n(x,y) \le \frac{C_t^{+}k_n}{1 + x^t q_n^t(x)}\left[\frac{\mu_{1,t}}{\sigma}\left(1 + \frac{3x(m_0 \vee 0)}{2m\sigma}\right) + \frac{3x\mu_{2,t}}{2m}\right]^t + r_n(x)\,. \tag{5.35}$$

Мы срезаем с.в. $\{\eta_i\}$ на уровне $N = N_x$, который зависит от x. Заметим, что

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n/\sigma}{T_n/m} < x\right) - \mathbb{P}\left(\frac{S_n/\sigma}{T_n^{<}/m} < x\right)\right| \le [6\mu_t^{>}/\sigma x]^t + \rho_n\chi_n + p_n\,. \tag{5.36}$$

Действительно, левая часть (5.36) равна

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n/\sigma}{T_n/m} \ge x, \exists i \le n : \eta_i > N\right) - \mathbb{P}\left(\frac{S_n/\sigma}{T_n^{<}/m} \ge x, \exists i \le n : \eta_i > N\right)\right| .$$

Из (4.68), леммы 5.22 и неравенства Чебышева,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(S_n/\sigma \geq xT_n/m,\ \exists i \leq n : \eta_i > N\right)\\ &\leq p_n + \sum \mathbb{P}\left(|\xi_i| > \frac{\sigma x}{6}\right) + \sum \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma} \geq \frac{x}{3}, |\xi_i| \leq \frac{\sigma x}{6}, \eta_i > N, T_n \geq \frac{m}{3}\right)\\ &\leq p_n + \left[\frac{6\mu_t^{>}}{\sigma x}\right]^t + \sum \mathbb{P}\left(S_n - \xi_i \geq x\sigma/6, \eta_i > N\right) \leq p_n + \left[\frac{6\mu_t^{>}}{\sigma x}\right]^t + \rho_n\chi_n\,.\end{aligned}$$

Аналогично оцениваем $\mathbb{P}(S_n/\sigma \geq xT_n^{<}/m,\ \exists i \leq n : \eta_i > N)$. Утверждение теоремы 5.7 следует из (5.35) и (5.36). □

Доказательство теоремы 5.2. Утверждение теоремы 5.2 вытекает из теорем 5.4, 5.7.

Пусть $x \in [0; m/3\sigma_2]$. Заметим, что $r_n = \sup_x r_n(x)$. Оценка $\Delta(n,x) \leq I_n$ следует из (5.5), где $\kappa = 0$.

Пусть $x > m/3\sigma_2$. Без потери общности мы можем считать, что $m > 0$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(S_n^* > x\sigma T_n^{<}/m\right) \leq \mathbb{P}\left(S_n^*/\sigma \geq T_n^{<}/3\sigma_2; T_n^{<} > 0\right) + \mathbb{P}\left(T_n^{<} \leq 0\right)$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\sum\left(\frac{\xi_i^*}{\sigma} - \frac{\bar\eta_i}{3\sigma_2}\right) \geq \frac{m_2}{3\sigma_2}\right) + \mathbb{P}\left(\sum \bar\eta_i < -m\right) \leq 17\left(\frac{\sigma_2}{m}\right)^2.$$

Кроме того,

$$\mathbb{P}\left(S_n^*/\sigma > m/9\sigma_2\right) \leq \Phi^c\left(m/9\sigma_2\right) + \frac{C_+(\mu/\sigma)^3}{1 + (m/9\sigma_2)^3}\,.$$

Положим $N \equiv N_x = n/(1+x)^2$. Тогда

$$\begin{aligned}&p_n \leq \alpha_n \leq e^{-\sqrt{n}}\,,\ \ (\mu_3^{>}/\sigma x)^3 = o(x^{-3}n^{-1/2})\,,\\ &\rho_n = o(x^3 n^{-1/2})\,,\ \ \chi_n \leq \Phi_c(x/6) + 2C_t^{+}(1 + (x/6)^3)^{-1}n^{-1/2}\,,\end{aligned}$$

и $q_n^3(x) = 1 + o(n^{-1/6})$ равномерно по $x \in [0; \sigma^{1/3}]$. Поэтому оценка $\Delta(n,x) \leq I_n^*$ следует из теоремы 5.7. □

Лемма 5.21 *Если $x \in D_n$ и y определено в (5.28), то*

$$1 - \gamma_n \leq \frac{\sigma}{d} \leq 1 + \frac{ym_0}{\sigma m} \leq 1 + \gamma_n\,, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{\sigma}{d} \leq \frac{3}{2}\,, \tag{5.37}$$

$$|\Phi(y) - \Phi(x)| \leq r_n(x)\,. \tag{5.38}$$

Так как $y = x\sigma/d$, из (5.37) следует, что

$$y \leq 3x/2\,. \tag{5.39}$$

Доказательство леммы 5.21. Соотношения (5.29), (5.30) и неравенство $|m_0| \le \sigma\sigma_2$ влекут
$$\sigma/d \le 1 + ym_0/\sigma m \le 1 + y\sigma_2/m \le 3/2\,. \tag{5.40}$$
Поэтому справедливо (5.39) и $\sigma/d \le 1 + 3x|m_0|/2\sigma m \le 1 + \gamma_n\,.$

Положим $z = \sigma/d$. Так как $y = x\sigma/d$, (5.40) означает, что $z \le 1 + zxm_0/m\sigma$ и, следовательно, $\sigma/d \le 1/(1 - xm_0/m\sigma)$.

Заметим, что $\sigma/d \ge 1 - by \ge 1/2\,$. Действительно, для всякого $\varepsilon \ge by$ неравенство $\sigma/d \ge \varepsilon$ эквивалентно неравенству $\sqrt{1 + a^2y^2 - b^2y^2} \ge \varepsilon - ay$. Легко видеть, что последнее неравенство выполнено при $\varepsilon = 1 - by$.

Так как $\sqrt{1+u} \ge 1 + u$ при $u \in [-1; 0]$, имеем
$$\frac{\sigma}{d} \ge 1 + \frac{ym_0}{\sigma m} - \left(\frac{y\sigma_2}{m}\right)^2 \ge 1 - \gamma_n\,. \tag{5.41}$$

Кроме того,
$$|1 - \sigma/d| \le \frac{x|m_0|}{\sigma m}\frac{\sigma}{d} + \left(\frac{3x\sigma_2}{2m}\right)^2 \le \frac{x|m_0|}{\sigma m} + \left(\frac{2x\sigma_2}{m}\right)^2\,.$$

Поскольку $\sigma/d \ge 1/2$, имеем
$$\begin{aligned} |\Phi(x\sigma/d) - \Phi(x)| &= x|\sigma/d - 1|\varphi(x(1 - \theta + \theta\sigma/d)) \\ &\le x|\sigma/d - 1|\varphi(x/2) \qquad (0 \le \theta \le 1), \end{aligned}$$

откуда следует (5.38). □

Лемма 5.22 *Обозначим* $K = 3\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i^<)^2/m$. *Тогда*
$$\mathbb{P}(T_n < m/3) \le \mathbb{P}(T_n^< < m/3) \le e^{-m/12K}\,. \tag{5.42}$$

Доказательство леммы 5.22. Обозначим $\beta_n = e^{-m/6K}$,
$$\eta_i^* = Y_i^< \mathbb{I}\{\eta_i \le K\}, \quad T_n^* = \sum_{i=1}^n \eta_i^*\,.$$

Ввиду неравенства Чебышева,
$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}Y_i^< \mathbb{I}\{Y_i^< > K\} \le \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i^<)^2/K = m/3\,.$$

Поэтому
$$\mathbb{E}T_n^* = \mathbb{E}T_n^< - \sum_{i=1}^n \mathbb{E}Y_i^< \mathbb{I}\{Y_i^< > K\} \ge 2m/3\,.$$

Рассмотрим сначала случай $K \le N$. Применяя неравенство Бернштейна, получим

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n^< < m/3) &\le \mathbb{P}(T_n^* < m/3) \le \mathbb{P}(\bar{T}_n^* < -m/3) \\ &\le \exp\left(-(m/3)^2/4\max\{Km/3; \mathbb{D}T_n^*\}\right) .\end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbb{D}T_n^* \le \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i^<)^2 = Km/3$. Поэтому $\mathbb{P}(T_n^< < m/3) \le e^{-m/12K}$.

Теперь рассмотрим случай $K > N$. Так как $\mathbb{D}T_n^< \le Km/3$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n^< < m/3) &= \mathbb{P}(\bar{T}_n^< < -2m/3) \\ &\le \exp\left(-(2m/3)^2/4\max\left\{2mN/3; \mathbb{D}T_n^<\right\}\right) \le e^{-m/6K} .\end{aligned}$$

Результат следует. □

Доказательство теоремы 5.13. Первый шаг состоит в сведении задачи для СНС к соответствующей задаче для сумм с неслучайной нормировкой (нормирующая последовательность зависит от x). Затем мы применяем теорему 5.2.

Обозначим

$$\Phi_c = 1 - \Phi, \ a = m_0/2m_<\sqrt{n}\,, \ b = \sigma_</2m_<\sqrt{n}\ .$$

С учётом (5.3), (5.28), (5.30), для любого $x \in [0; m_<\sqrt{n}/3\sigma_<]$ пусть $c = y/2$,

$$\tilde{X}_i \ = \ X_i/d\sqrt{n} - y\bar{Y}_i^</2m_<n\,, \ \ \tilde{Y}_i = \bar{Y}_i^</m_<n\,.$$

Тогда $n\mathbb{E}\tilde{X}^2 = 1$. Поскольку $\sqrt{1+y} \ge 1 + y/2 - y^2/2$ при $y \ge -1$, имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(t_n^\star \ge x\right) &\le \mathbb{P}\left(S_n/\sqrt{n}\sqrt{T_n^</(m_<n)} \ge x\right) \\ &\le \mathbb{P}\left(S_n/\sqrt{n} \ge x\left[1 + \bar{T}_n^</2m_<n - 0.5\left(\bar{T}_n^</m_<n\right)^2\right]\right),\end{aligned}$$

где $\bar{T}_n^< = \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i^<$. Согласно (5.31), $x = yd$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(t_n^\star \ge x\right) \le \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{d\sqrt{n}} - \frac{y\bar{T}_n^<}{2m_<n} + \frac{y}{2}\left(\frac{\bar{T}_n^<}{m_<n}\right)^2 \ge y\right) = \mathbb{P}\left(S_{n,\tilde{X}} + cS_{n,\tilde{Y}}^2 \ge y\right).$$

Теорема 5.1 влечёт

$$\mathbb{P}\left(S_{n,\tilde{X}} + cS_{n,\tilde{Y}}^2 \ge y\right) \le \Phi_c(y) + 2(r_1 + r_2 + r_3) + 9n\mathbb{E}|\tilde{X}|^3/\sqrt{2\pi}\,.$$

Нетрудно проверить, что

$$\Phi_c(y) \le \Phi_c(x) + r\,, \ y \le 3x/2\,, \ 1/d \le 1 + ym_0/m_<\sqrt{n} \le \psi_*\,.$$

Поэтому $y \le x\psi_*$. Заметим, что

$$\mathbb{E}^2|\tilde{X}| \le \mathbb{E}\tilde{X}^2 = 1/n\,,\ n^{3/2}\mathbb{E}|\tilde{X}|^3 \le \psi^3\,,$$

$$n^{3/2}\mathbb{E}|\tilde{X}||\tilde{Y}| \le \frac{\psi_*}{m_<}\left(\mathbb{E}|\tilde{X}||\bar{Y}^<| + \frac{x\sigma_<^2}{2m_<\sqrt{n}}\right),$$

$$n^{5/2}\mathbb{E}|\tilde{X}|\tilde{Y}^2 \le \frac{\psi_*}{m_<^2}\left(\psi_X\psi_<^2 + \frac{x\psi_<^3}{2m_<\sqrt{n}}\right).$$

По неравенству Бара–Эссеена (6.5), $\mathbb{E}|S_{n,\tilde{Y}}|^{3/2} \le 2n\mathbb{E}|\tilde{Y}|^{3/2}$. Следовательно,

$$\mathbb{E}|S_{n,\tilde{Y}}| \le n^{-1/3}m_<^{-1}\left(2\mathbb{E}|\bar{Y}^<|^{3/2}\right)^{2/3}$$

и $2r_2 \le r_*$. Согласно (6.6), $\mathbb{E}\left|S_{n,\tilde{X}}\right|^3 \le 2 + n\mathbb{E}|\tilde{X}|^3$. Поэтому

$$2(r_1 + r_3) + 9n\mathbb{E}|\tilde{X}|^3/\sqrt{2\pi} \le n\mathbb{E}|\tilde{X}|^3\left(\|g\| + \|g'\| + 9/\sqrt{2\pi}\right)$$

$$+ 2|c|\,(n\|g\| + \|g'\|)\,\mathbb{E}Y^2 + 2\|g'\|\mathbb{E}|\tilde{X}|$$

$$+ 4|c|\,\|g'\|\mathbb{E}|\tilde{Y}|\left(2 + n\mathbb{E}|\tilde{X}|^3\right)^{1/3}\left(2n\mathbb{E}|\tilde{Y}|^{3/2}\right)^{2/3} \le r_\star\,.$$

Объединяя эти оценки, получим верхнюю границу в (5.20).

Заметим, что $\mathbb{P}(t_n^* \ge x) \ge \mathbb{P}(t_n^\star \ge x) \ge \mathbb{P}(S_n \ge x(1 + T_n/2m_<))$, и нижняя граница в (5.20) следует из теоремы 5.2. Доказательство завершено. □

Доказательство следствия 5.14. Мы используем разные уровни срезки в нижней и верхней границах. При соответствующем выборе уровней срезки скорость убывания R_n^- и R_n^+ есть $n^{-1/2}$.

Сначала положим $N \asymp n$. Поскольку $\sup_x x^2\varphi(x/2) = 8/e\sqrt{2\pi}$, легко видеть, что

$$n\mathbb{P}(Y > N) = o(n^{-1/2}),\ r_n \lesssim 8|\mathbb{E}XY|/e\sqrt{2\pi n}$$

и $R_n^* \sim C_*\mathbb{E}|X|^3\sigma_X^{-3}n^{-1/2}$, где $\sigma_X = \mathbb{D}X$. Теорема 5.1 влечёт

$$\sup_{0\le x\le x_n}\left[\mathbb{P}\left(t_n^\star < x\right) - \Phi(x)\right] \le Bn^{-1/2}(1 + o(1))\,,$$

где $x_n = \sqrt{n}\,\mathbb{E}Y^</3\sigma_Y$, $\sigma_Y^2 = \mathbb{E}Y^{<2}$. Нетрудно проверить, что

$$\mathbb{P}\left(t_n^\star \ge x_n\right) = o(n^{-1})\,.$$

Кроме того, $n^{1/2}/\sigma_Y \gg n^{1/6}$. Поэтому

$$\sup_{x\ge 0}\left[\mathbb{P}\left(t_n^\star < x\right) - \Phi(x)\right] \le Bn^{-1/2}(1 + o(1))\,.$$

Поскольку $\mathbb{E}Y^< = \mathbb{E}Y + o(n^{-1/2})$, мы можем заменить $t_n^\star$ на t_n^o.

Теперь положим $N \asymp n/(1+x)^2$. Тогда равномерно по $x \in [0; n^{1/6}]$

$$r_* = o(n^{-1/2})\,,\; n^{1/2} r_\star = (\psi/\sigma_X)^3 \Big(1 + 9/\sqrt{2\pi} + \sqrt{\pi/8}\Big) + 2\mathbb{E}|X| + o(1)\,.$$

Теорема 5.1 влечёт

$$\inf_{0\le x\le n^{1/6}} [\mathbb{P}\,(t_n^\star < x) - \Phi(x)] \ge -An^{-1/2}(1+o(1))\,.$$

Поскольку $\mathbb{E}Y^{3/2} < \infty$, имеем $|\mathbb{E}Y^< - \mathbb{E}Y| = \mathbb{E}Y\mathbb{1}\{Y>N\} = (1+x)n^{-1/2}v_n(x)$, где $v_n(x)\to 0$ равномерно по $x\in[0;n^{1/6}]$. Следовательно, мы можем заменить $t_n^\star$ на t_n^o. Заметим, что $\mathbb{P}\left(t_n^o \ge n^{1/6}\right) = O(n^{-1})$. Поэтому

$$\inf_{x\ge 0} [\mathbb{P}\,(t_n^o < x) - \Phi(x)] \ge -An^{-1/2}(1+o(1))\,.$$

Доказательство завершено. □

Доказательство утверждения 5.16. Достаточно построить последовательность распределений, такую что $Y = X^2$ и левая часть (5.21) асимптотически равна $\mathbb{E}|X|^3/\sqrt{2en}$.

Пусть X – с.в. с распределением (5.23), где $p\in(0;1)$. Тогда

$$\mathbb{P}\left(t_n^o \ge \sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(X_1 = \ldots = X_n = \sqrt{p/(1-p)}\right) = (1-p)^n\,.$$

Если (5.21) выполнено, то

$$C_\star \mathbb{E}|X|^3 \ge \left((1-p)^n - \Phi(-\sqrt{n}\,)\right)\sqrt{n}\,.$$

Пусть $p = 1/2n$. Поскольку $\mathbb{E}|X|^3 \sim 1/\sqrt{p}$ при $p\to 0$, имеем

$$C_\star \ge (1-p)^n \sqrt{np}\,(1+o(1)) \sim 1/\sqrt{2e}\,.$$

Результат следует. □

Доказательство леммы 5.19. Если $a>0$, то

$$c_r \int_0^\infty e^{-at^r} dt = a^{-1/r} \qquad (r>0),$$

где $1/c_r = \int_0^\infty e^{-t^r} dt$. Поэтому

$$\mathbb{E}XY/(X^2+Y^2+\xi)^{1/r} = c_r \mathbb{E}XY\int_0^\infty e^{-t^r(X^2+Y^2+\xi)} dt\,.$$

Так как $\mathbb{E}|XY|/\left(X^2+Y^2+\xi\right)^{1/r} < \infty$, можно поменять порядок интегрирования. Поэтому

$$\mathbb{E}XY/(X^2+Y^2+\xi)^{1/r} = c_r \int_0^\infty e^{-t^r\xi}\left[\mathbb{E}Xe^{-t^rX^2}\right]^2 dt \geq 0\,.$$

Интеграл равен нулю, если и только если $g_r(t) \equiv \mathbb{E}Xe^{-t^rX^2} = 0$ п.н..

Если распределение $\mathcal{L}(X)$ симметрично, то $g_r(t) = 0$ для всех t, и (5.26) превращается в равенство.

Предположим теперь, что $g_r(t) = 0$ п.н., и определим меру m на классе $\mathcal{B}$ борелевых множеств на $[0;\infty)$ равенством

$$m(dx) = x[\mathbb{P}(X \in dx) - \mathbb{P}(-X \in dx)].$$

Тогда

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} m(dx) = 0 \qquad \text{(п.н.)}.$$

Пусть $m^*(A) = m(T(A))$, где $T(x) = x^2$ $(x \geq 0)$. Тогда $\int_0^\infty e^{-ty} m^*(dy) = 0$ п.н., то есть преобразование Лапласа меры m^* равно нулю п.н.. Следовательно, $m^*(B) = 0$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Отсюда $m(B) = 0$ $(\forall B \in \mathcal{B})$. Таким образом, $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(-X \in B)$ для всех $B \in \mathcal{B}$. □

Доказательство леммы 5.20. Шэп [367] показал, что

$$\mathcal{L}\left(2XY/\sqrt{X^2+Y^2}\right) = \mathcal{N}(0;\sigma^2), \tag{5.43}$$

если $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0;\sigma^2)$. Поэтому достаточно показать, что X – нормальная с.в., если имеет место (5.43).

Обозначим

$$Z = 2XY/\sqrt{X^2+Y^2}\ .$$

Для всякого положительного числа b имеем $bZ = 2\tilde{X}\tilde{Y}/\sqrt{\tilde{X}^2+\tilde{Y}^2}$, где $\tilde{X} = bX$ и $\tilde{Y} = bY$. Поэтому достаточно показать, что (5.43) с $\sigma = 1$ влечёт $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0;1)$.

Предположим, что $\mathcal{L}(Z) = \mathcal{N}(0;1)$. Известно, что с.в. Z^{-2} имеет устойчивое распределение $L_{0.5,-1}$ с х.ф.

$$\varphi(t) = \exp\left(-\sqrt{|t|}(1 - \mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(t))\right)$$

и плотностью

$$f(x) = \frac{e^{-1/2x}}{\sqrt{2\pi x^3}} \qquad (x > 0)$$

(ср. Шэп [367]). Так как

$$Z = 2\mathrm{sgn}(XY)/\sqrt{X^{-2}+Y^{-2}}\ ,$$

случайная величина $(X^{-2}+Y^{-2})/4$ имеет распределение $L_{0.5,-1}$.

Пусть $\varphi_o(t)$ обозначает х.ф. $\mathcal{L}(X^{-2})$. Тогда х.ф. $(X^{-2}+Y^{-2})/4$ есть φ:

$$\varphi_o^2(t/4)=\exp\left(-\sqrt{|t|}(1-i\mathrm{sgn}(t))\right).$$

Отсюда $\varphi_o=\varphi$, т.е., $\mathcal{L}(X^{-2})=L_{0.5,-1}$. Поэтому $|X|\stackrel{d}{=}|\eta|$, где η – стандартная нормальная с.в..

Из леммы 5.19 с $r=2$ и $\xi=0$ следует, что $\mathcal{L}(X)$ симметрично. Каждая симметричная с.в. X допускает представление $X\stackrel{d}{=}\tau|X|$, где τ не зависит от X и имеет симметричное распределение Бернулли. Следовательно, $\mathcal{L}(X)=\mathcal{N}(0;1)$. Доказательство завершено. □

Утверждение теоремы 5.3 является частным случаем следующих результатов, установленных для пар (ξ,η), $(\xi_1,\eta_1),\ldots$ независимых необязательно одинаково распределенных случайные величин, таких что $\eta_i\geq 0$ $(\forall i)$. В теоремах 5.23–5.25 мы считаем, что $\mathbb{E}|\xi_1|/(\eta_1+\ldots+\eta_m)<\infty$ $(\exists\, m\geq 1)$, и для всякого $i\in J_n=\{1,\ldots,n\}$ выбрана "окрестность" $A_i\subset J_n$ "точки" i, такая что $\max_i \mathrm{card}A_i\leq k_*<\infty$.

Положим $B_n=\{x:|x|\sigma_2\leq m_2/3\}$,

$$\begin{aligned}
&S_n=\sum\xi_i\,,\ T_n=\sum\eta_i\,,\ Z_n=S_n/T_n\,,\ \xi_i^*=\xi_i-\eta_i m_1/m_2\,,\ S_n^*=\sum\xi_i^*\,,\\
&m_1\equiv m_1(n)=\sum\mathbb{E}\xi_i\,,\qquad m_2\equiv m_2(n)=\sum\mathbb{E}\eta_i\,,\\
&\sigma_1^2=\sigma_1^2(n)=\sum\mathbb{D}\xi_i^*\,,\qquad \sigma_2^2\equiv\sigma_2^2(n)=\sum\mathbb{D}\eta_i\,,\\
&\mu_1\equiv\mu_1(n)=\sum\mathbb{E}\,|\xi_i^*|^3\,,\quad \mu_2^*\equiv\mu_2^*(n)=\sum\mathbb{E}\left|\frac{\bar\eta_i}{\sigma_2}\right|^3,\\
&\mu\equiv\mu(n)=\mu_1+3\mu_2^*\sigma_1^3+3\sigma_1(\mu_1^2\mu_2^*)^{1/3}\,,\qquad \|x\|_*^3=|x|^3+(2/3)^3\,.
\end{aligned}$$

Символ $\sum$ обозначает сумму по множеству $J_n=\{1,\ldots,n\}$, черта над с.в. значает центрирование матожиданием. Обозначим

$$\Delta(n,x)=\left|\mathbb{P}\left(S_n^*/T_n<x\sigma_1/m_2\right)-\Phi(x)\right|,$$

и пусть $\eta_{(i)}=\sum_{j\in A_i}\eta_j$, $A(i,j)=A_i\cup\{j\}$,

$$\begin{aligned}
&T_{nij}=T_n-\eta_i-\eta_j\mathbb{I}\{i\neq j\}\,,\quad \hat T_{nij}=\sum_{k\notin A(i,j)}\eta_k\,,\qquad m^+=\min_{i,j\in J_n}\mathbb{E}\hat T_{nij}/3,\\
&\rho_1=\delta^{-3}m_2^{-2}\sum\mathbb{E}\,|\xi_i^*|\,\eta_i^2\,,\qquad \rho_2=3\,\delta^{-3}m_2^{-2}\sum|\mathbb{E}\xi_i^*|\,\mathbb{D}\eta_i+\delta^{-1}\alpha(n)\sum|\mathbb{E}\xi_i^*|,\\
&\rho_3=m_2\alpha(n)\sum=\mathbb{E}\left|\xi_i^*/\eta_{(i)}\right|,\quad \rho_4=\rho^*\sum|\mathbb{E}\xi_i^*\bar\eta_i|/m_2\,,\quad \delta=m^+/m_2,\\
&\rho^*=3\,\alpha(n)+3\left(\sigma_2/m^+\right)^2\,,\qquad \alpha(n)=\exp\left(-(m^+)^2/8\sum\mathbb{E}\eta_i^2\right)\,.
\end{aligned}$$

Теорема 5.23 *Для любого* $n \geq k_*$,

$$\left| m_2 \mathbb{E} Z_{n,1} - m_1 + \sum \mathbb{E} \xi_i^* \bar{\eta}_i / m_2 \right| \leq \sum_{i=1}^{4} \rho_i(n) .$$

Если пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены, то из теоремы 5.23 следует (5.6).

Положим $\eta_{ij} = \sum_{k \in A_i \cup A_j} \eta_k$,

$$R_1 = 6\delta^{-4} m_2^{-2} \left(\sum \mathbb{E} \left| \bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i \right| \right)^2, \quad R_2 = 2\delta^{-3} \sum \mathbb{E} \left(\bar{\xi}_i^* \right)^2 \left| \bar{\eta}_i / m_2 \right|,$$

$$R_3 = \rho^* \sigma_1^2 , \quad R_5 = m_2^2 \alpha(n) \left(\left(\sum_i \mathbb{E} \left| \xi_i^* \eta_{(i)} \right| \right)^2 + \sum_i \sum_j{}^* \mathbb{E} \left| \xi_i^* \xi_j^* \right| \eta_{ij}^{-2} \right),$$

$$R_4 = \delta^{-2} \alpha(n) \sum_j \left| \mathbb{E} \xi_j^* \right| \sum_i \mathbb{E} \left| 2\xi_i^* - \mathbb{E} \xi_i^* \right|, \quad R_8 = 3\delta^{-4} \sum \mathbb{E} \ \left(\bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i / m_2 \right)^2 ,$$

$$R_6 = 24 m_2^{-3} \delta^{-5} \left(\sum_i \mathbb{E} \left| \bar{\xi}_i^* \bar{\eta}_i \right| \right) \left(\sum_j \mathbb{E} \left| \bar{\xi}_j^* (\bar{\eta}_j)^2 \right| \right),$$

$$R_7^* = 5\alpha(n) + 10\delta^{-4} \left(\sigma_2 / m_2 \right)^2 , \quad \rho_1^* = 4\alpha(n) + 6\delta^{-3} \left(\sigma_2 / m_2 \right)^2 ,$$

$$R_7 = 6 m_2^{-2} \left(\sum_i \left| \mathbb{E} \bar{\xi}_i^* \eta_i \right| \right)^2 R_7^* + 6 m_2^{-2} \sum \left(\mathbb{E} \bar{\xi}_i^* \eta_i \right)^2 ,$$

$$R_9(n,i) = 10\alpha(n) \ + \ 3\mathbb{E} \left(\frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2 + 4 \sum \left| \mathbb{E} \left(\frac{\bar{\eta}_i}{m_2} \right)^3 \right| + \frac{5}{\delta^6 m_2^4} \left(3\sigma_2^4 + \sum \mathbb{E} \bar{\eta}_j^4 \right),$$

$$R_9 = \sum_i R_9(n,i) \mathbb{D} \xi_i^* , \quad R_{10} = 2 \sum_i \mathbb{E} \left| \left(\bar{\xi}_i^* \right)^2 \bar{\eta}_i / m_2 \right| \rho_1^* ,$$

где $\sum_j^*$ обозначает сумму по множеству $\{j : A_j \cap A_i \neq \varnothing\}$.

Теорема 5.24 *Предположим, что* $\mathrm{card} A_i \geq 2$ $(1 \leq i \leq n)$. *Если* $n \geq k_*$, *то*

$$\left| \mathbb{E} \left(m_2 Z_{n,1} - m_1 \right)^2 - \sigma_1^2 \right| \leq \sum_{j=1}^{5} R_j(n). \tag{5.44}$$

Если пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены, то из теоремы 5.24 следует (5.7).

Теорема 5.25 *В условиях теоремы 5.24*

$$\left| \mathbb{E}(m_2 Z_{n,1} - m_1)^2 - \sigma_1^2 + 2 \sum \frac{\mathbb{E}(\bar{\xi}_i^*)^2 \bar{\eta}_i}{m_2} - 3 \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{m_2} \right)^2 - 6 \left(\sum \frac{\mathbb{E} \xi_i^* \bar{\eta}_i}{m_2} \right)^2 \right| \leq \sum_{j=5}^{10} R_j(n).$$

Если пары $\{(\xi_i, \eta_i)\}$ одинаково распределены, то из теоремы 5.25 следует (5.8).

Обозначим
$$\zeta_n = \bar{T}_n/m_2\,, \ \ \zeta_{ni} = \bar{T}_{ni}/m_2, \quad T_{ni} = T_n - \eta_i,$$
$$\tau_n = \mathbb{I}\{T_n > m^+\}, \quad \tau_{ni} = \mathbb{I}\{T_{ni} > m^+\},$$
и пусть $\tau_n^* = 1 - \tau_n$, $\tau_{ni}^* = 1 - \tau_{ni}$ и $\tau_{nij}^* = 1 - \tau_{nij}$.

Доказательство теоремы 5.23. Заметим, что
$$m_2\mathbb{E}Z_n - m_1 = m_2\mathbb{E}S_n^*/T_n = \sum \mathbb{E}\xi_i^* / \left(1 + \bar{\eta}_i/m_2 + \zeta_{ni}\right).$$

Используя неравенство
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2(1+x)^{-1}$$
с $x = \bar{\eta}_i/m_2(1+\zeta_{ni})$, получим
$$\left|\sum \mathbb{E}\xi_i^*\tau_{ni}\left(1+\frac{\bar{\eta}_i}{m_2}+\zeta_{ni}\right)^{-1} - \sum \mathbb{E}\xi_i^*\mathbb{E}\frac{\tau_{ni}}{1+\zeta_{ni}} + \sum \mathbb{E}\xi_i^*\bar{\eta}_i\mathbb{E}\left(1+\zeta_{ni}\right)^{-2}\frac{\tau_{ni}}{m_2}\right| \le \rho_1\,.$$

Заметим, что
$$\left|\sum \mathbb{E}\xi_i^*\mathbb{E}\tau_{ni}/\left(1+\zeta_{ni}\right)\right| \le \rho_2\,. \tag{5.45}$$

Действительно,
$$1+\zeta_{ni} = 1+\zeta_n - \frac{\bar{\eta}_i}{m_2} = \left(1+\zeta_n\right)\left(1-\bar{\eta}_i/m_2(1+\zeta_n)\right).$$

Принимая во внимание (5.26), получим
$$\left|\sum \mathbb{E}\xi_i^*\mathbb{E}\frac{\tau_{ni}}{1+\zeta_{ni}} - \sum \mathbb{E}\xi_i^*\mathbb{E}\frac{\tau_{ni}}{1+\zeta_n} - \sum \mathbb{E}\xi_i^*\mathbb{E}\frac{\bar{\eta}_i\tau_{ni}}{(1+\zeta_n)^2 m_2}\right| \le \delta^{-3}m_2^{-2}\sum |\mathbb{E}\xi_i^*|\mathbb{D}\eta_i\,.$$

Легко видеть, что
$$\tau_n \equiv \mathbb{I}\{T_n > m^+\} = \tau_{ni} + \mathbb{I}\{T_{ni} \le m^+ < T_n\}.$$

Из этого равенства и леммы 5.26 мы выводим
$$\left|\mathbb{E}\left(1+\zeta_n\right)^{-1}\tau_{ni} - \mathbb{E}\left(1+\zeta_n\right)^{-1}\tau_n\right| \le \delta^{-1}\alpha(n).$$

Учитывая, что $(1+x)^{-2} = 1 - x(1+x)^{-1} - x(1+x)^{-2}$ и
$$1+\zeta_n \ = \ 1+\zeta_{ni}+\bar{\eta}_i/m_2\,,$$

заключаем, что

$$\tau_{ni}\left|(1+\zeta_n)^{-2}-(1+\zeta_{ni})^{-2}\right|\le 2\delta^{-3}\left|\bar\eta_i/m_2\right|.$$

Оценка (5.45) следует из приведённых выше неравенств и тождества

$$\sum \mathbb{E}\xi_i^* = \sum \mathbb{E}\xi_i^*\mathbb{E}\tau_n/(1+\zeta_n) = 0\,.$$

Учитывая лемму 5.26,

$$\left|\sum \mathbb{E}\xi_i^*\tau_{ni}^*/\left(1+\bar\eta_i/m_2+\zeta_{ni}\right)\right|\le m_2\alpha(n)\sum\mathbb{E}\left|\xi_i^*/\eta_{(i)}\right| = \rho_3\,.$$

Так как $|\zeta_{ni}|\tau_{ni}^*\le\tau_{ni}^*$, из леммы 5.26 следует

$$\left|\mathbb{E}\zeta_{ni}\tau_{ni}\right|\le\alpha(n).$$

Заметим, что $(1+x)^{-2}=1-2x+2x^2(1+x)^{-1}+x^2(1+x)^{-2}$. Поэтому

$$\left|\mathbb{E}(1+\zeta_{ni})^{-2}\tau_{ni}-1\right|\le 3\alpha(n)+3\left(\sigma_2/m^+\right)^2=\rho^*(n). \tag{5.46}$$

Объединяя приведённые выше оценки, получим утверждение теоремы 5.23. □

Доказательство теоремы 5.24. Обозначим

$$T_{nij}=T_n-\eta_i-\eta_j\mathbb{I}\{i\ne j\}\,,\quad \zeta_{nij}=\bar T_{nij}/m_2\,,\quad \tau_{nij}=\mathbb{I}\{T_{nij}>m^+\}$$

(отметим, что $\tau_{nij}=\tau_{ni}$, если $i=j$). Нашей отправной точкой является тождество

$$(m_2Z_n-m_1)^2=\left(\frac{m_2S_n^*}{T_n}\right)^2=\sum_i(\xi_i^*)^2\left(1+\frac{\bar\eta_i}{m_2}+\zeta_{ni}\right)^{-2}+\sum_{i\ne j}\xi_i^*\xi_j^*(1+\zeta_n)^{-2}\,.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum\mathbb{E}(\bar\xi_i^*)^2\left(1+\bar\eta_i/m_2+\zeta_{ni}\right)^{-2}\tau_{ni}+\sum_{i\ne j}\mathbb{E}\bar\xi_i^*\bar\xi_j^*(1+\zeta_n)^{-2}\tau_{nij}\,. \tag{5.47}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\lambda_{ij}&\equiv\mathbb{E}\bar\xi_i^*\bar\xi_j^*\left(1+(\bar\eta_i+\bar\eta_j)/m_2+\zeta_{nij}\right)^{-2}\tau_{nij}\\&=-2\mathbb{E}\bar\xi_i^*\bar\xi_j^*\bar\eta_j\left(1+(\bar\eta_i+\theta_j\bar\eta_j)/m_2+\zeta_{nij}\right)^{-3}\tau_{nij}/m_2\\&=6\mathbb{E}\bar\xi_i^*\bar\eta_i\bar\xi_j^*\bar\eta_j\left(1+(\theta_i\bar\eta_i+\theta_j\bar\eta_j)/m_2+\zeta_{nij}\right)^{-4}\tau_{nij}/m_2^2\end{aligned} \tag{5.48}$$

при $i\ne j$, где каждая с.в. θ_j имеет равномерное распределение $\mathbf{U}[0,1]$ и не зависит от остальных с.в.. Поэтому

$$\sum_{i\ne j}|\lambda_{ij}|\le 6\delta^{-4}m_2^{-2}\left(\sum\mathbb{E}|\bar\xi_i^*\bar\eta_i|\right)^2=R_1\,.$$

Легко видеть, что

$$\left|\sum\left\{\mathbb{E}(\bar{\xi}_i^*)^2\left(1+\bar{\eta}_i/m_2+\zeta_{ni}\right)^{-2}\tau_{ni}-(\mathbb{D}\xi_i^*)\mathbb{E}(1+\zeta_n)^{-2}\tau_{ni}\right\}\right|$$
$$\leq 2\delta^{-3}\sum\mathbb{E}(\bar{\xi}_i^*)^2\Big|\bar{\eta}_i/m_2\Big|=R_2\,. \qquad (5.49)$$

Ввиду (5.46) и (5.49),

$$\left|\sum\left(\mathbb{E}(\bar{\xi}_i^*)^2\tau_{ni}\left(1+\bar{\eta}_i/m_2+\zeta_{ni}\right)^{-2}-\mathbb{D}\xi_i^*\right)\right|\leq R_2(n)+\rho^*(n)\sigma_1^2=R_2+R_3\,.$$

Согласно лемме 5.26,

$$\left|\sum\mathbb{E}(\xi_i^*)^2\left(1+\bar{\eta}_i/m_2+\zeta_{ni}\right)^{-2}\tau_{ni}^*+\sum_{i\neq j}\mathbb{E}\xi_i^*\xi_j^*(1+\zeta_n)^{-2}\tau_{nij}^*\right|$$
$$\leq m_2^2\alpha(n)\left(\left(\sum_i\mathbb{E}\Big|\xi_i^*/\eta_{(i)}\Big|\right)^2+\sum_i{\sum_j}^*\mathbb{E}\big|\xi_i^*\xi_j^*\big|\,\eta_{ij}^{-2}\right)=R_5\,,$$

где суммирование $\sum_j^*$ ведётся по множеству $\{j: A_j\cap A_i\neq\varnothing\}$. Объединяя полученные соотношения и принимая во внимание (5.51), получим (5.44). Доказательство теоремы завершено. □

Доказательство теоремы 5.25 использует тождество $\mathbb{E}\bar{\xi}_i^*=0$ $(i\geq 1)$. Ввиду (5.48),

$$\sum_{i\neq j}\left|\lambda_{ij}-6m_2^{-2}\mathbb{E}\bar{\xi}_i^*\bar{\eta}_i\mathbb{E}\bar{\xi}_j^*\bar{\eta}_j\mathbb{E}\left(1+\zeta_{nij}\right)^{-4}\tau_{nij}\right|$$
$$\leq 24m_2^{-3}\delta^{-5}\Big(\sum_i\mathbb{E}|\bar{\xi}_i^*\bar{\eta}_i|\Big)\Big(\sum_j\mathbb{E}\big|\bar{\xi}_j^*(\bar{\eta}_j)^2\big|\Big)\equiv R_6.$$

Заметим, что $\mathbb{E}\zeta_{nij}=0$ и

$$(1+x)^{-4}-1+4x=x^2\big\{(1+x)^{-4}+2(1+x)^{-3}+3(1+x)^{-2}+4(1+x)^{-1}\big\}$$

при $x>-1$. Из этого соотношения и леммы 5.26 выводим

$$\big|\mathbb{E}(1+\zeta_{nij})^{-4}\tau_{nij}-1\big|\leq 5\alpha(n)+10\delta^{-4}\left(\sigma_2/m_2\right)^2\equiv R_7^*\,. \qquad (5.50)$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{i\neq j}\lambda_{ij}-6m_2^{-2}\Big(\sum\mathbb{E}\xi_i^*\bar{\eta}_i\Big)^2\right|$$

$$\leq R_6 \,+\, 6\,m_2^{-2}\Big(\sum_i |\mathbb{E}\bar{\xi}_i^*\eta_i|\Big)^2 R_7^* + 6m_2^{-2}\sum_i \left(\mathbb{E}\bar{\xi}_i^*\eta_i\right)^2 = R_6 + R_7\,.$$

Рассмотрим первый член в (5.47). Легко проверить, что

$$\sum\left(\mathbb{E}\frac{\left(\bar{\xi}_i^*\right)^2\tau_{ni}}{(1{+}\bar{\eta}_i/m_2{+}\zeta_{ni})^2} - (\mathbb{D}\xi_i^*)\,\mathbb{E}\frac{\tau_{ni}}{(1{+}\zeta_{ni})^2} + \frac{2}{m_2}\mathbb{E}\left(\bar{\xi}_i^*\right)^2\bar{\eta}_i\mathbb{E}\frac{\tau_{ni}}{(1{+}\zeta_{ni})^3}\right)$$

$$= 3\sum \mathbb{E}\left(\bar{\xi}_i^*\bar{\eta}_i/m_2\right)^2\left(1+\theta_i'\bar{\eta}_i/m_2+\zeta_{ni}\right)^{-4}\tau_{ni} \leq R_8$$

и что

$$\left|\mathbb{E}(1+\zeta_{ni})^{-3}\tau_{ni} - 1\right| \leq 4\alpha(n) + 6\delta^{-3}\left(\sigma_2/m_2\right)^2 = \rho_1^*$$

(ср. с (5.50)). Аналогично мы проверяем, что

$$\left|\mathbb{E}(1+\zeta_{ni})^{-2}\tau_{ni} - \left(1+3\left(\sigma_2/m_2\right)^2\right)\right|$$

$$\leq 10\alpha(n) + 3\mathbb{E}\bar{\eta}_i^2/m_2^2 + 4m_2^{-3}\sum\left|\mathbb{E}\bar{\eta}_i^3\right| + 5\delta^{-6}m_2^{-4}\Big(3\sigma_2^4 + \sum \mathbb{E}\bar{\eta}_j^4\Big) = R_9(n,i).$$

Тогда

$$\sum_i\left|\mathbb{E}\left(\bar{\xi}_i^*\right)^2(1{+}\bar{\eta}_i/m_2{+}\zeta_{ni})^{-2}\tau_{ni} - (\mathbb{D}\xi_i^*)\left(1+3\sigma_2^2/m_2^2\right) + 2\mathbb{E}\left(\bar{\xi}_i^*\right)^2\bar{\eta}_i/m_2\right|$$

$$\leq R_8 + R_9 + R_{10}\,.$$

Заметим, что

$$\Big|\sum_{i,j}\mathbb{E}\big\{\xi_i^*\xi_j^* - \bar{\xi}_i^*\bar{\xi}_j^*\big\}\,(1+\zeta_n)^{-2}\tau_{nij}\Big| \leq R_4(n). \tag{5.51}$$

Действительно, поскольку

$$\sum \xi_i^* = \sum \bar{\xi}_i^*\,,$$

имеем:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}\xi_i^*\xi_j^*\tau_{nij} &= \sum_{i,j}\xi_i^*\xi_j^*(\tau_{nij}-\tau_n) + \sum_{i,j}\bar{\xi}_i^*\bar{\xi}_j^*\tau_n \\
&= \sum_{i,j}\bar{\xi}_i^*\bar{\xi}_j^*\tau_{nij} + \sum_{i,j}\left\{\xi_i^*\xi_j^* - \bar{\xi}_i^*\bar{\xi}_j^*\right\}(\tau_{nij}-\tau_n) \\
&= \sum_{i,j}\bar{\xi}_i^*\bar{\xi}_j^*\tau_{nij} + \sum_{i,j}(\tau_{nij}-\tau_n)\left\{2\xi_i^* - \mathbb{E}\xi_i^*\right\}\mathbb{E}\xi_j^*\,.
\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (5.52) и тождество

$$\tau_{nij} = \tau_n - \mathbb{I}\{T_{nij} \leq m^+ < T_n\},$$

приходим к (5.51). Объединяя полученные неравенства и принимая во внимание (5.51), получим утверждение теоремы. □

Пусть

$$K \equiv K(n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\eta_i^2/m^+ \,, \ \eta_i^* = \eta_i \mathbb{I}\{\eta_i \le K\} \,,$$

$$\hat{T}_{nij} = \sum_{k \notin A(i,j)} \eta_k \,, \ T^*_{nij} = \sum_{k \notin A(i,j)} \eta^*_k \,.$$

Лемма 5.26 *Для любых* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\hat{T}_{nij} \le m^+\right) \le \exp\Big(- (m^+)^2/8 \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\eta_i^2 \Big). \tag{5.52}$$

Доказательство леммы 5.26. Заметим, что

$$\min_{i,j \in J_n} \mathbb{E}\hat{T}_{nij} = 3m^+, \quad \min_{i,j \in J_n} \mathbb{E}T^*_{nij} \ge 2m^+ \,.$$

Последнее неравенство вытекает из оценки

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\eta_i \mathbb{I}\{\eta_i > K\} \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\eta_i^2/K = m^+ \,.$$

Поэтому

$$\{\hat{T}_{nij} \le m^+\} \subset \{T^*_{nij} \le m^+\} \subset \{T^*_{nij} - \mathbb{E}T^*_{nij} \le -m^+\}. \tag{5.53}$$

Легко видеть, что

$$\mathbb{D}T^*_{nij} \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\eta_i^*)^2 \le Km^+ \,.$$

Применяя неравенство Бернштейна к вероятности события в правой части (5.53), получим (5.52). □

Глава 6

Приложение

Заключительная глава содержит необходимые сведения по теории вероятностей и математической статистике, используемые в диссертации (см. [41, 25, 74, 131, 186, 202, 305, 357]).

6.1 Свойства распределений

В этом разделе $X_1, \ldots, X_n$ – независимые с.в., $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ – монотонные последовательности событий, $A = \bigcup_n A_n$ и $B = \bigcap B_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A)\,, \ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B)\,.$$

2. Пусть $\{X_i^A\}$ – независимые с.в., $\mathcal{L}(X_i^A) = \mathcal{L}(X_i|X_i \in A_i)$. Тогда

$$\mathbb{P}(S_n \in A|X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1^A + \ldots + X_n^A \in A)\,. \tag{6.1}$$

3. Любая с.в. X допускает представление

$$X \stackrel{d}{=} \alpha X'\,,$$

где α и X' – независимые с.в., $\alpha \in \mathbf{B}(p)$ с $p = \mathbb{P}(X \neq 0)$ и $\mathcal{L}(X') = \mathcal{L}(X|X \neq 0)$. Более того,

$$X \stackrel{d}{=} \tau X_A + (1-\tau)X_{A^c}\,, \tag{6.2}$$

где X^A, X^{A^c} и τ – независимые с.в.,

$$\mathcal{L}(X^A) = \mathcal{L}(X|X \in A)\,, \mathcal{L}(X^{A^c}) = \mathcal{L}(X|X \in A^c)\,,$$

и $\tau \in \mathbf{B}(p)$, где $p = \mathbb{P}(X \in A)$.

4. Если $X, X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р.с.в. и $N_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i \in A\}$, то

$$\left(N_n\,, \sum_{i=1}^n f(X_i)\mathbb{I}\{X_i \in A\}\right) \stackrel{d}{=} \left(\nu\,, \sum_{j=1}^{\nu} Y_j\right) \tag{6.3}$$

для всякой функции f, где $Y_1, \ldots, Y_n\,,\ \nu$ – независимые с.в., $\nu \in \mathbf{B}(n,p)$, $p = \mathbb{P}(X \in A)$, $\mathcal{L}(Y_i) = \mathcal{L}(f(X)|X \in A)$.

5. Пусть $X_1^A, \ldots, X_n^A, X_1^{A^c}, \ldots, X_n^{A^c}, \nu$ – независимые случайные величины, $\mathcal{L}(X_i^A) = \mathcal{L}(X_i|X_i \in A)$, $\mathcal{L}(X_i^{A^c}) = \mathcal{L}(X_i|X_i \in A^c)$ и $\nu \in \mathbf{B}(n,p)$, где $p = \mathbb{P}(X \in A)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n X_i \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\nu} X_i^A + \sum_{j=1}^{n-\nu} X_j^{A^c}\,. \tag{6.4}$$

Формулы (6.2) – (6.4) справедливы и для случайных векторов.

7. *Обращение функции распределения (квантиль).* Пусть

$$F^{-1}(x) = \inf\{t : F(t) \ge x\}\,,$$

где $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$. Тогда

$$\{F^{-1}(x) > t\} = \{x > F(t)\}\,.$$

Если $\mathcal{L}(U) = \mathbf{U}(0;1)$, то

$$F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X\,.$$

Обратная к $F_c = 1 - F$ функция F_c^{-1} может быть определена как

$$F_c^{-1}(x) = \inf\{t : F_c(t) \le x\} = F^{-1}(1-x)\,.$$

Функция F непрерывна справа: $F(x+) = F(x)$, как и F_c и F_c^{-1}. Функция F^{-1} непрерывна слева.

8. Сходимость квантилей. Если $X_n \Rightarrow X$, то

$$F_n^{-1}(x) \to F^{-1}(x) \qquad (\forall x \in [0;1])\,.$$

6.2 Вероятностные тождества и неравенства

Моментные неравенства. Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые с.в., $\mathbb{E}X_i = 0$ и $\mathbb{E}|X_i|^t < \infty\, (t > 0)$. Обозначим

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n\,,\ \sigma_n^2 = \mathbb{D}S_n\,,\ A_n(t) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^t\,.$$

Из (6.66) следует, что

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le A_n(t) \qquad (0 < t \le 1)\,.$$

Неравенство Бара–Эссеена [19]:

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le 2A_n(t) \qquad (1 \le t \le 2)\,. \tag{6.5}$$

Существует абсолютная константа c, такая что

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le (ct)^t \left(A_n(t) + \sigma_n^t\right) \qquad (t \ge 2)\,.$$

Если $t \in (2;3]$, то [74]

$$\mathbb{E}\,|S_n|^t \le A_n(t) + (t-1)\sigma_n^t\,. \tag{6.6}$$

Обозначим $c_t = \max\{1; 2^{t-3}\}$. Если $t \in [3;4]$, то [273]

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le c_t \left(A_n(t) + t(t-1)2^{-t/2}\sigma_n^t\right)\,. \tag{6.7}$$

Если $t/2 \in \mathbb{N}$, то

$$\mathbb{E}\,|S_n|^t \le \mathbb{E}(\zeta-1)^t \max\{A_n(t); \sigma_n^t\},$$

где $\mathcal{L}(\zeta) = \mathbf{\Pi}(1)$; константа $\mathbb{E}(\zeta-1)^t$ не улучшаема [190].

Неравенство Бернштейна. Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые с.в., $\mathbb{E}X_i = 0$ $(i \ge 1)$. Обозначим

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n\,,\ \sigma_n^2 = \mathbb{D}S_n\,.$$

Если существует константа $K \in (0;\infty)$, такая что

$$\mathbb{E}\max\{X_i^m; 0\} \le K^{m-2}(m-2)!\,\mathbb{D}X_i \qquad (m \ge 3, i \ge 1),$$

то

$$\mathbb{P}(S_n \ge x) \le \exp\left(-x^2/2\max\{Kx; 2\sigma_n^2\}\right)\,.$$

Неравенство Вэйла. Предположим, что распределение с.в. X абсолютно непрерывно относительно меры Лебега и имеет конечный второй момент. Обозначим через f плотность распределения $\mathcal{L}(X)$, и пусть

$$I_X = \mathbb{E}\left(f'(X)/f(X)\right)^2$$

обозначает информацию Фишера. Если f абсолютно непрерывна, функция $xf(x)$ имеет ограниченную вариацию и $\lim\limits_{|x|\to\infty} xf(x) = 0$, то

$$I_X \mathbb{D}X \ge 1\,.$$

Неравенство сглаживания Эссеена. Пусть ν, X и $Y \in \mathcal{N}(0;1)$ – независимые с.в.. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \sup_x |\mathbb{P}(X<x) - \Phi(x)|\,, \ \Delta_X^+ = \sup_x |\mathbb{P}(X+\nu<x) - \Phi(x)|\,, \\ \Delta_X^* &= \sup_x |\mathbb{P}(X+\nu<x) - \mathbb{P}(Y+\nu<x)|\,. \end{aligned}$$

Лемма 6.1 *Если число* ε *выбрано так, что* $2\mathbb{P}(|\nu| > \varepsilon) < 1$, *то*

$$\Delta_X \le \left(\Delta_X^* + \varepsilon\sqrt{2/\pi}\right) \Big/ (1 - 2\mathbb{P}(|\nu| > \varepsilon))\,.$$

Если $2\mathbb{E}|\nu| < \varepsilon$, то лемма 6.1 влечёт

$$\Delta_X \le \left(\Delta_X^+ + \varepsilon\sqrt{2/\pi} + \mathbb{E}|\nu|/\sqrt{2\pi}\right) / (1 - 2\mathbb{E}|\nu|/\varepsilon)\,. \tag{6.8}$$

В частности, (6.8) с $\varepsilon = 4\mathbb{E}|\nu|$ влечёт

$$\Delta_X \le 2\Delta_X^+ + 18\mathbb{E}|\nu|/\sqrt{2\pi}\,. \tag{6.8*}$$

Неравенство Эрдеша–Чунга: для произвольных событий $A_1, \ldots, A_n$

$$\mathbb{P}\,(A) \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) + \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_iA_j)}\,, \tag{6.9}$$

где $A = \bigcup\limits_{i=1}^n A_i$. Если $\{A_i\}$ – стационарная последовательность событий, то

$$\mathbb{P}\,(A) \ge n\mathbb{P}(A_1)\Big/\left(1 + \sum\nolimits_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i|A_1)\right).$$

Неравенство Пали-Зигмунда: если $X \ge 0$ и $\mathbb{E}X < \infty$, то

$$\mathbb{P}(X \ge \theta\mathbb{E}X) \ge (1-\theta)^2(\mathbb{E}X)^2\big/\mathbb{E}X^2 \tag{6.10}$$

для любого $\theta \in [0;1]$. Если с.в. X ограничена числом $K < \infty$, то

$$\mathbb{P}(X \ge \theta\mathbb{E}X) \ge (1-\theta)\mathbb{E}X/K \qquad (\theta \in [0;1])\,. \tag{6.11}$$

Неравенство Бонферони. Для произвольных событий $A_1, \ldots, A_n$

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \ge \mathbb{P}(\cup_i A_i) \ge \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_iA_j)\,.$$

Доказательство неравенства (6.7). Обозначим

$$\begin{aligned} b_i &= \mathbb{D}X_i\,,\ \nu_i = \mathbb{E}|X_i|^t\,,\ G_1 = 0\,,\ G_n^* = 0\,, \\ G_i &= \left(\sum\nolimits_{j=1}^{i-1} b_j\right)^{t/2-1} \ (i>1)\,,\ \ G_i^* = \left(\sum\nolimits_{j=i+1}^{n} b_j\right)^{t/2-1} \ (i<n). \end{aligned}$$

Из формулы Тэйлора (6.58) следует, что

$$|S_n|^t = |S_{n-1}|^t + tX_n|S_{n-1}|^{t-1}\mathrm{sgn}(S_{n-1}) + \frac{t(t-1)}{2}|S_{n-1}+\theta X_n|^{t-2}X_n^2\,,$$

где с.в. $\theta \in [0;1]$ и $\mathbb{E}\theta^{t-2} = 2/t(t-1)$. По неравенству Йенсена,

$$\begin{array}{lcll} |a+b|^{t-2} & \le & 2^{t-3}\left(|a|^{t-2}+|b|^{t-2}\right) & \text{если} \quad t \ge 3, \\ |a+b|^{t-2} & \le & |a|^{t-2}+|b|^{t-2} & \text{если} \quad t \in [2;3]. \end{array}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|S_n|^t &\le \mathbb{E}|S_{n-1}|^t + \frac{1}{2}t(t-1)c_t\left(\frac{2\nu_n}{t(t-1)} + b_nG_n\mathbb{I}\{t>2\}\right) \le \ldots \\ &\le \nu_1 + c_t\sum_{i=2}^n \nu_i + \frac{1}{2}t(t-1)c_t\sum_{i=2}^n b_iG_i\mathbb{I}\{t>2\}\,. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le \nu_n + c_t\sum_{i=1}^{n-1}\nu_i + \frac{1}{2}t(t-1)c_t\sum_{i=1}^{n-1}b_iG_i^*\mathbb{I}\{t>2\}\,.$$

Объединяя эти неравенства, получим

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le c_t\sum_{i=1}^n \nu_i + \frac{1}{4}t(t-1)c_t\sum_{i=1}^n b_i(G_i+G_i^*)\mathbb{I}\{t>2\}\,.$$

Отметим, что $\frac{1}{2}\left(a^{t/2-1}+b^{t/2-1}\right) \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^{t/2-1}$ для всех $a \ge 0$, $b \ge 0$. Следовательно,

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le c_t\sum_{i=1}^n \nu_i + \frac{t(t-1)}{2}c_t\sum_{i=1}^n b_i\left(\sum_{j<i}b_j + \sum_{j>i}b_j\right)^{t/2-1}2^{1-t/2}\mathbb{I}\{t>2\}\,.$$

Доказательство завершено. □

6.3 Расстояния

Расстояние по вариации между распределениями $\mathbb{P}_X = \mathcal{L}(X)$ и $\mathbb{P}_Y = \mathcal{L}(Y)$ случайных величин X и Y есть

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mathbb{P}_X;\mathbb{P}_Y) \;\equiv\; d_{TV}(X;Y) &= \sup_{A\in\mathcal{A}}|\mathbb{P}_X(A)-\mathbb{P}_Y(A)| \\ &= \sup_{g\in\mathcal{S}}\left|\int g\,dP_X - \int g\,dP_Y\right|, \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}$ – борелева σ-алгебра и $\mathcal{S}$ – класс измеримых функций, принимающих значения в $[0;1]$. Если распределения $\mathbb{P}_X$ и $\mathbb{P}_Y$ имеют плотности f_X и f_Y по отношению к мере μ, то

$$d_{TV}(X;Y) = \frac{1}{2}\int |f_X - f_Y| d\mu = 1 - \int \min\{f_X; f_Y\} d\mu \,. \tag{6.12}$$

Если X и Y принимают значения в $\mathbf{Z}$, то

$$d_{TV}(X;Y) = \frac{1}{2}\sum_j |\mathbb{P}(X=j) - \mathbb{P}(Y=j)| = \mathbb{P}(X\in B) - \mathbb{P}(Y\in B)\,,$$

где $B = \{j \in \mathbf{Z} : \mathbb{P}(X=j) > \mathbb{P}(Y=j)\}$. Отметим, что

$$d_{TV}(X;Y) \le \mathbb{P}(X \ne Y),$$

если X и Y определены на общем вероятностном пространстве (ОВП). Согласно теореме Добрушина, можно определить X и Y на общем вероятностном пространстве таким образом, что

$$d_{TV}(X;Y) = \mathbb{P}(X \ne Y)\,.$$

Равномерное расстояние между распределениями случайных величин X и Y с ф.р. F_X и F_Y есть

$$\|F_X - F_Y\| = \sup_x |F_X(x) - F_Y(x)|\,.$$

Очевидно, $\|F_X - F_Y\| \le d_{TV}(X;Y)$. Если X и Y – целочисленные с.в., то [394]

$$\|F_X - F_Y\| \le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\mathbb{E}e^{itX} - \mathbb{E}e^{itY}|}{4|t|} dt\,.$$

Расстояние Джини-Канторовича-Васерштейна $d_G(X;Y)$ между распределения $\mathbb{P}_X$ и $\mathbb{P}_Y$ случайных величин X и Y с конечными первыми моментами:

$$d_G(\mathbb{P}_X;\mathbb{P}_Y) \equiv d_G(X;Y) = \sup_{g\in\mathcal{L}} |\mathbb{E}g(X) - \mathbb{E}g(Y)|\,, \tag{6.13}$$

где $\mathcal{L} = \{g : |g(x) - g(y)| \le |x-y|\}$ – множество липшицевых функций. Если X и Y принимают значения в $\mathbf{Z}_+$, то $\mathcal{L} = \{g : \Delta g \le 1\}$. Известно, что

$$d_G(\mathbb{P}_X;\mathbb{P}_Y) = \int |\mathbb{P}(X<x) - \mathbb{P}(Y<x)| dx$$

($\sum_{i\ge1} |\mathbb{P}(X<i) - \mathbb{P}(Y<i)|$, если X и Y принимают значения в $\mathbf{Z}_+$),

$$d_G(\mathbb{P}_X;\mathbb{P}_Y) = \inf_{X,Y} \mathbb{E}|X-Y|, \tag{6.14}$$

где инфимум берётся по всем случайные парам (X,Y) с маргинальными распределениями $\mathbb{P}_X$ и $\mathbb{P}_Y$ соответственно [25, 112, 319].

Если X и Y принимают значения в $\mathbf{Z}_+$, то

$$d_{TV}(X;Y) \le d_G(X;Y).$$

Расстояние Хеллингера и расстояние Кульбака-Лейблера. Предположим, что распределения P_1 и P_2 имеют плотности f_1 и f_2 по отношению к мере μ (например, $\mu = P_1 + P_2$). Обозначим

$$\begin{aligned} d_H^2(P_1;P_2) &= \frac{1}{2}\int\left(f_1^{1/2} - f_2^{1/2}\right)^2 d\mu = 1 - \int\sqrt{f_1 f_2}\,d\mu\,, \\ d_{KL}^2(P_1;P_2) &= \int \ln(f_1/f_2)\,dP_1\,. \end{aligned}$$

Здесь d_H – расстояние Хеллингера и d_{KL}^2 – расстояние Кульбака-Лейблера.

Используя неравенства

$$\begin{aligned} &(x-1)^2 \le (x^2-1)^2 && (x \ge 0), \\ &\ln(1+x) \le 2(\sqrt{1+x} - 1) && (x \ge -1), \end{aligned}$$

можно проверить, что

$$d_H^2 \le d_{TV} \le \sqrt{2}d_H \le d_{KL}\,. \tag{6.15}$$

Пусть $P_i^n = \mathcal{L}_i(X_1,\ldots,X_n)$, где $X_1,\ldots,X_n$ – н.о.р.с.в. с $P_i = \mathcal{L}_i(X_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} d_{LP}(P_1^n;P_2^n) &\le nd_{LP}(P_1;P_2)\,,\ d_H^2(P_1^n;P_2^n) \le nd_H^2(P_1;P_2)\,, \\ d_{KL}^2(P_1^n;P_2^n) &= nd_{KL}^2(P_1;P_2)\,. \end{aligned}$$

6.4 Вероятности больших уклонений

Пусть $X, X_1, \ldots, X_n$ – н.о.р.с.в.. Обозначим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$,

$$\psi(t) = \ln \mathbb{E}e^{tX}\,,\ t_+ = \sup\{t : \psi(t) < \infty\}\,.$$

Предположим, что $t_+ > 0$, $\mathbb{E}X = 0$ и $\mathbb{D}X \in (0;\infty)$.

Очевидно, что ψ дважды дифференцируема в $(0;t_+)$, $\psi'' > 0$ и $\lim_{t\to 0}\psi'(t) = \mathbb{E}X$. Следовательно, $\psi' \ge 0$, $\psi' \uparrow$ и существует $(\psi')^{-1}$. Положим

$$g(t) = t\psi'(t) - \psi(t)\,,\ m(t) = \psi'(t)\,,\ m_+ = \lim_{t\uparrow t_+} m(t)\,.$$

Пусть $Y, Y_1, \ldots$ – независимые с.в. с общим распределением

$$\mathbb{P}(Y \in dy) = e^{ty-\psi(t)}\mathbb{P}(X \in dy) \qquad (0 \le t < t_+)\,.$$

Заметим, что
$$\mathbb{E}Y = m(t)\,,\ \mathbb{D}Y = m'(t) = \psi''(t)\,.$$
Функции ψ и g связаны следующими соотношениями: если $\mathbb{E}X = 0$, то
$$\psi(t) = d^2_{KL}(X,Y)\,,\ g(t) = d^2_{KL}(Y,X)\,.$$

Для всякого борелева множества $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, где $\mathcal{B}$ – борелева σ-алгебра, обозначим
$$\begin{aligned} A_a &= \{(y_1,\ldots,y_n) : (y_1+a,\ldots,y_n+a) \in A\}\,, \\ \mathcal{A}_+ &= \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : \sum_i y_i \ge 0 \text{ для всех } (y_1,\ldots,y_n) \in B\}\,. \end{aligned}$$
Пусть $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_n)$ и $\mathbf{Y} = (\bar{Y}_1,\ldots,\bar{Y}_n)$.

Теорема 6.2 *Если* $\mathbb{D}X = 1$ *и* $t \in (0;t_+)$, *то*
$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = e^{-ng(t)}\mathbb{E}e^{-t(\bar{Y}_1+\ldots+\bar{Y}_n)}\mathbb{I}\{\mathbf{Y} \in A_{m(t)}\}\,.$$
Пусть $\eta_t \in \mathbf{E}(t)$ *– независимая от* $\{Y_i\}$ *с.в.. Если* $A_{m(t)} \in \mathcal{A}_+$, *то*
$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in A) = e^{-ng(t)}\mathbb{P}\Big(\mathbf{Y} \in A_{m(t)}, \sum\nolimits_{i=1}^n \bar{Y}_i \le \eta_t\Big)\,. \tag{6.16}$$

Обозначим $\lambda(\cdot) = m^{-1}(\cdot)$, и пусть
$$\Lambda(a) = g(\lambda(a)) = a\lambda(a) - \psi(\lambda(a)) \qquad (0 \le a < m_+)\,. \tag{6.17}$$
Функция больших уклонений Λ играет ключевую роль в теории больших уклонений (в случае распределений с лёгкими хвостами). Нетрудно проверить, что
$$\Lambda \ge 0\,,\ \Lambda' = \lambda\,,\ \Lambda(0) = \lambda(0) = 0\,,\ \Lambda'' = 1/\psi(\lambda)\,,\ \Lambda''(0) = 1/\mathbb{D}X > 0\,.$$
Следовательно, Λ выпукла, $\Lambda\uparrow$ и $\lambda\uparrow$.

Обозначим $\Lambda = \Lambda_X = \Lambda_{\mathcal{L}(X)}$. К примеру,
$$\begin{aligned} \Lambda_X(x) &= x^2/2b^2 && (x \ge 0), \\ \Lambda_Y(x) &= x\ln(x/p) + (1-x)\ln((1-x)/(1-p)) && (0 < x < 1), \\ \Lambda_Z(x) &= ax - \ln(1+ax) && (x \ge 0), \\ \Lambda_{\pi-\nu}(x) &= (\nu+x)\ln(1+x/\nu) - x && (x \ge 0), \\ \Lambda_{\nu-\pi}(x) &= (\nu-x)\ln(1-x/\nu) + x && (0 \le x < \nu), \end{aligned}$$
где $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(0;b^2)$, $\mathcal{L}(Y) = \mathbf{B}(p)$, $Z = Z_a - \mathbb{E}Z_a$, $\mathcal{L}(Z_a) = \mathbf{E}(a)$, $\mathcal{L}(\pi) = \mathbf{\Pi}(\nu)$. Заметим, что
$$\Lambda_{bX+c}(x) = \Lambda_X((x-c)/b)\,.$$

Если $a \in (0; m_+)$, то

$$\Lambda(a) = \sup_{t \ge 0}\{at - \psi(t)\}.$$

Функция $g_a(t) = at - \psi(t)$ достигает своего максимума на $t = \lambda(a)$.

Предположим, что $\mathbb{D}X = 1$. Функция

$$G(x) = \big(x^2/2 - \Lambda(x)\big)/x^3$$

есть ряд Крамера. Коэффициенты $\{b_k\}$ ряда Крамера

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

можно выразить через кумулянты $\gamma_k = \frac{d^k}{dt^k}\left(\ln \mathbb{E}e^{tX}\right)\Big|_{t=0}$ [304, 347]:

$$\begin{aligned} b_0 &= \gamma_3/6\,,\ b_1 = (\gamma_4 - 3\gamma_3^2)/24\,,\ b_2 = (\gamma_5 - 10\gamma_4\gamma_3 + 15\gamma_3^3)/5!\,, \\ b_3 &= \gamma_6 - 15\gamma_5\gamma_3 - 10\gamma_4^2 + 105\gamma_4\gamma_3^2 - 105\gamma_3^4/6! \end{aligned}$$

Пусть $a \in (0; m_+)$. Если $A = \{(y_1, \ldots, y_n) : \sum y_i \ge na\}$, то $A_a = \{(y_1, \ldots, y_n) : \sum y_i \ge 0\}$, и (6.16) с $t = \lambda(a)$ влечёт

$$\mathbb{P}(S_n \ge na) = e^{-n\Lambda(a)}\mathbb{P}\Big(0 \le \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i \le \eta_t\Big) \le e^{-n\Lambda(a)}\,. \tag{6.18}$$

Положим $x_a = \lambda(a)\sigma_a\sqrt{n}$, где $\sigma_a^2 = \psi''(\lambda(a))$. Используя неравенство Берри-Эссеена и тот факт, что

$$\mathbb{E}\Phi(0; \eta/c) = e^{c^2/2}\Phi(-c) \qquad (c > 0), \tag{6.19}$$

получим

$$\Big|e^{n\Lambda(a)}\mathbb{P}(S_n \ge na) - e^{x_a^2/2}\Phi(-x_a)\Big| \le \frac{C_*\mathbb{E}|\bar{Y}|^3}{\sigma_a^3\sqrt{n}}\,, \tag{6.20}$$

если $a \in (0; m_+)$.

Если a отделено от 0, то $e^{x_a^2/2}\Phi(-x_a) \asymp \mathbb{E}|\bar{Y}|^3/\sigma_a^3\sqrt{n}$, и асимптотика $\mathbb{P}(S_n \ge na)$ описывается теоремой Петрова.

Пусть $\kappa(y) = \lambda(y)$, если распределение с.в. X нерешётчато; $\kappa(y) = (1 - e^{-h\lambda(y)})/h$, если распределение решётчато с шагом h.

Теорема 6.3 (Петров) *Если интервал $I \subset (0; m_+)$, то*

$$\mathbb{P}(S_n \ge ny) \sim \frac{\exp(-n\Lambda(y))}{\kappa(y)\sigma(y)\sqrt{2\pi n}} \tag{6.21}$$

равномерно по $y \in I$.

Вероятности больших уклонений в случае распределений с тяжёлыми хвостами описывает следующий результ (Хейди и Нагаев [171, 247]).

Теорема 6.4 [171, 247] *Если* $\mathcal{L}(X)$ *удовлетворяет (4.2) для некоторого* $\alpha > 1$ *и* $\mathbb{E}X = 0$, *то для каждого фиксированного* $c > 0$

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim n\mathbb{P}(X > x)$$

равномерно по $x \geq cn$. *Если (4.2) выполнено для некоторого* $\alpha > 2$, $\mathbb{E}|X|^{2+q} < \infty$ $(\exists q > 0)$, $\mathbb{E}X = 0$ *и* $\mathbb{D}X = 1$, *то*

$$\mathbb{P}(S_n > x) \sim \Phi_c\left(x/\sqrt{n}\right) + n\mathbb{P}(X > x)$$

равномерно по $x \geq \sqrt{n}$. *В частности,*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n > x) &\sim \Phi_c\left(x/\sqrt{n}\right) \qquad \text{если } \sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{bn\ln n}\,,\ b < \alpha - 2\,, \\ \mathbb{P}(S_n > x) &\sim n\mathbb{P}(X > x) \qquad \text{если } x \geq \sqrt{bn\ln n}\,,\ b > \alpha - 2\,. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 6.2. Пусть $a = m(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\mathbf{X} \in A\right) &= \int \cdots \int_{(x_1,\ldots,x_n)\in A} \mathbb{P}_X(dx_1)\ldots\mathbb{P}_X(dx_n) \\ &= e^{n\psi(t)} \int \cdots \int_{(x_1,\ldots,x_n)\in A} e^{-t(x_1+\ldots+x_n)}\mathbb{P}_Y(dx_1)\ldots\mathbb{P}_Y(dx_n) \\ &= e^{-ng(t)} \int \cdots \int_{(y_1,\ldots,y_n)\in A_a} e^{-t(y_1+\ldots+y_n)}\mathbb{P}_{\bar{Y}}(dy_1)\ldots\mathbb{P}_{\bar{Y}}(dy_n) \\ &= e^{-ng(t)}\mathbb{E}e^{-t(\bar{Y}_1+\ldots+\bar{Y}_n)}\mathbb{1}\{\mathbf{Y} \in A_a\}\,. \end{aligned}$$

Доказательство завершено. □

6.5 Элементы теории восстановления

Пусть $X, X_1, \ldots$ – независимые с.в., такие что $X_k \stackrel{d}{=} X$ при $k \geq 1$ и

$$a := \mathbb{E}X \in (0; \infty).$$

Обозначим

$$S_0 = 0,\ S_n = X_1 + \ldots + X_n \qquad (n \geq 1)\,.$$

Теория восстановления имеет дело с процессами

$$\nu(t) = \min\{n \geq 1 \colon S_n > t\}\,,\ \nu_*(t) = \max\{n \geq 0 \colon S_n \leq t\}$$

($t > 0$). Очевидно, что случайная функция $\nu(\cdot)$ является неубывающей и

$$\{\nu(t) > n\} = \{S_1 \le t, \ldots, S_n \le t\}\,. \tag{6.22}$$

Следствием (6.22) является тождество Вальда

$$\mathbb{E}S_{\nu(t)} = a\mathbb{E}\nu(t)\,.$$

Соотношение (6.22) означает также, что последовательности $\big(\nu(t), X_1, \ldots, X_{\nu(t)}\big)$ и $\big(X_{\nu(t)+1}, X_{\nu(t)+2}, \ldots\big)$ независимы и

$$\big(X_{\nu(t)+1}, X_{\nu(t)+2}, \ldots\big) \stackrel{d}{=} (X_2, X_3 \ldots)\ .$$

Функция

$$H(t) = \mathbb{E}\nu(t)\,,$$

называется функцией восстановления.

Поскольку $S_{\nu(t)} > t$, имеем

$$\nu(t+s) \le \nu(t) + \min\{m : X_{\nu(t)+1} + \ldots + X_{\nu(t)+m} > s\}\,.$$

Поэтому

$$\mathbb{E}\nu(t+s) \le \mathbb{E}\nu(t) + \mathbb{E}\nu(s)\,. \tag{6.23}$$

В частности, $H(kt) \le kH(t)$ и $H(t/m) \ge H(t)/m$ $(k, m \in \mathbb{N})$.

Для любого $t > 0$

$$aH(t) - t \le \mathbb{E}X_{\nu(t)} \le aH(t) - t + \mathbb{E}X^2/a \le 2\mathbb{E}X^2/a\,. \tag{6.24}$$

Если X_1 имеет распределение

$$P_\star(dy) = \mathbb{P}(X \ge y)dy/a \qquad (y > 0)\,, \tag{6.25}$$

то функция восстановления является линейной:

$$H(t) = \sum_{k\ge 0} \mathbb{P}(S_k \le t) = t/a\,.$$

Очевидно, что $X_{\nu(t)} > 0$. Обозначим через

$$\gamma(t) = t - S_{\nu_*(t)}\,,\ \chi(t) = S_{\nu(t)} - t$$

времена “недоскока” и “перескока”. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\gamma(t) > x, \chi(t) > y) = \int_{x+y}^{\infty} F_c(u)du/a \qquad (x > 0, y > 0)\,.$$

Поэтому (6.25) есть предельное распределение $\gamma(\cdot)$ и $\chi(\cdot)$.

Известен следующий результат (см. [208]).

Теорема 6.5 *Если $X \ge 0$ и $\mathcal{L}(X_1) = P_\star$, то процесс восстановления $\nu(\cdot)$ имеет стационарные приращения, процесс $\{\chi(t), t > 0\}$ стационарен и $\mathcal{L}(\chi(t)) = P_\star$.*

6.6 Зависимые случайные величины

Коэффициенты перемешивания. Обозначим σ-алгебру, порождённую случайными величинами $\{X_i, k \le i \le m\}$, через $\mathcal{F}_{k,m}$, и положим

$$\begin{aligned}
\alpha(k) &= \sup |\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)|\,,\ \varphi(k) = \sup |\mathbb{P}(B|A) - \mathbb{P}(B)|\,,\\
\beta(k) &= \sup_m \mathbb{E} \sup\nolimits_B |\mathbb{P}(B|\mathcal{F}_{1,m}) - \mathbb{P}(B)|\,,\\
\rho(k) &= \sup |\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y| \Big/ \sqrt{\mathbb{D}X\mathbb{D}Y}\,,
\end{aligned}$$

где супремум берётся по $A \in \mathcal{F}_{1,m}$, $B \in \mathcal{F}_{m+k+1,\infty}$, $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$, $m \ge 1$, $\mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}Y^2 < \infty$, X измерима относительно $\mathcal{F}_{1,m}$ и Y измерима относительно $\mathcal{F}_{m+k+1,\infty}$.

Коэффициент α был введён Розенблатом [345], коэффициент φ – Ибрагимовым [184], коэффициент ρ – Гебеляйном [142], коэффициент β, по-видимому, был введён Колмогоровым (см. [401, 385]).

Случайные величины $\{X_i, i \ge 1\}$ называются m-зависимыми, если $\mathcal{F}_{1,\ell}$ и $\mathcal{F}_{\ell+m+1,\infty}$ независимы для всех $\ell \ge 1$. Известно [60], что

$$2\alpha(k) \le \beta(k) \le \varphi(k)\,,\ \ 4\alpha(k) \le \rho(k) \le 2\varphi^{1/2}(k)\,.$$

В основе многих доказательств теории сумм зависимых случайных величин лежит идея перехода от зависимых с.в. к независимым. При этом часто используется результаты о задании с.в. на ОВП.

Пусть (X, Y) – случайный вектор, принимающие значения в $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, и пусть α, β, φ и ρ – коэффициенты перемешивания, соответствующие σ-алгебрам $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$. Для любого $v \in \mathbb{R}^m$ положим $|v| = \max_{i\le m} |v_i|$.

Лемма 6.6 [38] *Можно задать X, Y, Y^* на ОВП так, что $Y^* \stackrel{d}{=} Y$, Y^* не зависит от X и $\mathbb{P}(Y^* \ne Y) = \beta$.*

Условия перемешивания. Последовательность $\{X_i, i \ge 1\}$ удовлетворяет условию *α-перемешивания*, если $\lim_{l\to\infty} \alpha(l) = 0$. Аналогично определяются условия *φ-перемешивания* и *ρ-перемешивания*.

Условие Лидбеттера: [210]

$$\lim_{l\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \alpha_n(l) = 0\,, \qquad (D\{u_n\})$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_n(l) \;=\; & \sup\nolimits_* \Big| \mathbb{P}\Big(\max_{1\le l\le k} X_{i_l} \le u_n,\ \max_{1\le l\le m} X_{j_l} \le u_n \Big) \\
& - \mathbb{P}\Big(\max_{1\le l\le k} X_{i_l} \le u_n \Big) \mathbb{P}\Big(\max_{1\le l\le m} X_{j_l} \le u_n \Big) \Big|\,,
\end{aligned}$$

супремум $\sup_*$ берётся по всем целым $k, m, i_1 < \ldots < i_k < i_k + l < j_1 < \ldots < j_m$.

Пусть $\{u_n(\cdot), n \ge 1\}$ – последовательность функций из $[0;\infty)$ в $\mathbb{R}$, такая что $u_n(\cdot)$ – строго убывающая для всех достаточно больших n и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \le u_n(t)) = e^{-t} \ (\forall t > 0)\,.$$

Можно считать, что $u_n(0)=\infty$. Обозначим $\bar t = (t_1, \ldots, t_k)$, $u_n(\bar t\,) = (u_n(t_1), \ldots, u_n(t_k))$, и пусть $\mathcal{F}_{l,m}(\bar t\,)$ – σ-алгебра, соответствующая событиям $\{X_i > u_n(t_j)\}$, $l \le i \le m, 1 \le j \le k$. Положим

$$\begin{aligned}
\alpha(l, u_n(\bar t\,)) &= \sup |\,\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,|\ ,\\
\beta(l, u_n(\bar t\,)) &= \sup_m \mathbb{E} \sup_B |\mathbb{P}(B|\mathcal{F}_{1,m}(\bar t\,)) - \mathbb{P}(B)|\ ,\\
\varphi(l, u_n(\bar t\,)) &= \sup |\,\mathbb{P}(B|A) - \mathbb{P}(B)\,|\ ,
\end{aligned}$$

где супремум sup берётся по $m \ge 1$, $A \in \mathcal{F}_{1,m}(\bar t\,)$, $B \in \mathcal{F}_{m+l+1,n}(\bar t\,)$, таким что $\mathbb{P}(A) > 0$.

Условие $\Delta\{u_n(\bar t\,)\}$ выполнено, если $\alpha_n := \alpha\,(l_n, u_n(\bar t\,)) \to 0$ для некоторой последовательности $\{l_n\}$ (вообще говоря, зависимой от $\{u_n(\bar t\,)\}$), такой что $l_n \to \infty$, $l_n/n \to 0$.

Условие Δ выполнено, если $\Delta\{u_n(\bar t\,)\}$ выполнено для любого набора $0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Условие Δ^* выполнено, если $\alpha([cn], u_n(\bar t\,)) \to 0$ для каждого $c \in (0;1)$ и любого набора $0 < t_1 < \ldots < t_k < \infty$, $k \in \mathbb{N}$.

Если $\Delta\{u_n(\bar t\,)\}$ выполнено, то существует последовательность $\{r_n\}$, такая что

$$n \gg r_n \gg l_n\,,\ n r_n^{-1}\alpha_n \to 0 \tag{6.26}$$

(к примеру, можно положить $r_n = [\sqrt{n \max\{l; n\alpha_n\}}\,]$). Обозначим через $\mathcal{R}(\bar t\,)$ класс всех таких последовательностей.

Суммы зависимых случайных величины. Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – строго стационарная последовательность зависимых случайных величин, таких что $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Теорема 6.7 [366, 397] *Если*

$$\sum_{i\ge1} i^{-1}\rho(i) < \infty, \tag{6.27}$$

то $\sum_{i=1}^n X_i/n \to \mathbb{E}X$ *п.н.*.

Известно (см. [266]), что условие (6.27) равносильно условию $\sum_{k\ge1}\rho(2^k) < \infty$. Так как $\rho \le 2\sqrt{\varphi}$, (6.27) выполнено, если

$$\sum_{i\ge1} i^{-1}\varphi^{1/2}(i) < \infty\,. \tag{6.28}$$

ЦПТ для схемы серий $\{\xi_{i,n}, 1 \le i \le k_n\}_{n\ge 1}$ зависимых с.в. с конечными вторыми моментами [398]).

Пусть $\varphi_n(\cdot)$ – соответствующий коэффициент φ-перемешивания, и обозначим

$$S_n = \xi_{1,n} + \ldots + \xi_{k_n,n},\ \sigma_n^2 = \mathbb{D}S_n\,.$$

Теорема 6.8 [398] *Если* $\sigma_n > 0$, $\sup_n \varphi_n(lj_n) \to 0$ *при* $l \to \infty$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} j_n \sigma_n^{-2} \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{E}\xi_{i,n}^2 \mathbb{I}\{|\xi_{i,n}| > \varepsilon\sigma_n/j_n\} = 0 \qquad (\forall \varepsilon > 0) \tag{6.29}$$

для некоторой последовательности $\{j_n\}$ *целых чисел, то* $S_n/\sigma_n \Rightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

Следствие 6.9 *Пусть* $X, X_1, X_2, \ldots$ *– строго стационарная последовательность с.в., такая что* $\mathbb{E}X^2 < \infty$ *и выполнено условие* φ*-перемешивания. Если* $\sigma_n > 0$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{-2} n \mathbb{E}X^2 \mathbb{I}\{|X| > \varepsilon\sigma_n\} = 0 \qquad (\forall \varepsilon > 0),$$

то $S_n/\sigma_n \Rightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

Моментные неравенства для сумм зависимых с.в..

Теорема 6.10 [397, 399] *Предположим, что условие (6.27) выполнено. Тогда существует константа* $c_\rho \in (0;\infty)$, *зависящая только от* $\rho(\cdot)$, *такая что*

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le (tc_\rho)^t \left(\sum\nolimits_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^t + \left(\sum\nolimits_{i=1}^n X_i^2\right)^{t/2}\right) \qquad (t \ge 2) \tag{6.30}$$

$$\mathbb{E}|S_n|^t \le c_\rho \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^t \qquad (1 \le t \le 2) \tag{6.31}$$

$$\left|\sum_{\substack{1\le i,j\le n\\ |i-j|\ge m}} \mathbb{E}X_iX_j\right| \le c_\rho \Big(\sum_{j>m} \rho^{1/2}(j)/j\Big) \sum_{i=1}^n X_i^2\,. \tag{6.32}$$

Точность нормальной аппроксимации. Предположим, что $\sigma_n > 0$ и

$$\mathbb{E}|X|^t < \infty \qquad (\exists t \in (2;3]).$$

Обозначим

$$\Delta_n(x) = \left|\mathbb{P}\left(S_n/\sigma_n < x\right) - \Phi(x)\right|\,,\ \Delta_n = \sup_x \Delta_n(x)\,.$$

Ряд авторов [334, 390, 419] получили неравенство Берри–Эссеена для сумм зависимых с.в., сформулированное следуюшим образом:

$$\Delta_n(x) \le \left(C_t^* \wedge \frac{C_t^+}{1+|x|^t}\right) (\ln \sigma_n)^\kappa \sum_{i=1}^n \mathbb{E}|X_i|^t/\sigma_n^t\,, \tag{6.33}$$

где константы $\kappa \geq 0, C_t^*$ и C_t^+ могут принимать разные значения при различных условиях на коэффициенты перемешивания; $\kappa = 0$ в случае независимых с.в. (мы объединили равномерную и неравномерную оценки в одно неравенство).

Теорема 6.11 [390] *Если для некоторых констант $C > 0$ и $b > 1$ выполнено*

$$\alpha(n) \leq Cn^{-bt(t-1)/(t-2)^2} \qquad (n \geq 1),$$

то существует константа $C_\alpha \equiv C_\alpha(C, b, t)$, такая что

$$\Delta_n \leq C_\alpha n^{(1-t/2)(b-1)/(b+1)} .$$

Если $\alpha(n) \leq Ce^{-bn}$ для всех $n \geq 1$, то

$$\Delta_n \leq C_\alpha n^{1-t/2}(\ln n)^{t-1} .$$

Если $\rho(n) \leq Ce^{-bn}$ для всех $n \geq 1$, то существует константа $C_\rho \equiv C_\rho(C, b, t)$, такая что

$$\Delta_n \leq C_\rho n^{1-t/2}(\ln n)^{t/2} .$$

Теорема 6.12 [390, 392, 157] *Если $\alpha(n) \leq Ce^{-bn}$ для всех $n \geq 1$ и $\mathbb{E}|X|^3 < \infty$, то существует константа $C_1 \equiv C_1(C, b)$, такая что*

$$\Delta_n \leq C_1 n^{-1/2} \ln n\,, \quad \Delta_n(x) \leq C_1(1 + |x|)^{-4} n^{-1/2}(\ln n)^3 .$$

Если, сверх того, $\mathbb{E}|X|^{4+s} < \infty$ $(\exists s > 0)$, то существует константа $C_2 \equiv C_2(C, b, s)$, такая что $\Delta_n \leq C_2 n^{-1/2}(\ln n)^{1/3}$.

Теорема 6.13 [419] *Если $\rho(k) \leq Ck^{-d}$ и $\sigma_n^2 \geq cn\mathbb{E}X^2$ $(\exists c > 0, d > 0)$ и $\mathbb{E}|X|^s < \infty$ $(\exists s \in (2; s_d))$, где $s_d = 1 - 1/d + \sqrt{(1-1/d)^2 + 2 + 4/d}$, то существует константа $C_s = C_s(c, C, d)$, такая что*

$$\Delta_n \leq C_s n^{1-s/2} \mathbb{E}|X|^s / (\mathbb{E}|X|^2)^{s/2} .$$

Теорема 6.14 [390] *Если $\{X_i, i \geq 1\}$ – m-зависимые с.в., $\mathbb{E}|X|^3 < \infty$ и*

$$\sigma := \mathbb{E}X^2 + 2\sum_{k \geq 2} \mathbb{E}X_1 X_k > 0,$$

то существуют абсолютные константы C_1, C_2, такие что

$$\Delta_n \leq C_1 b_m^2 \mathbb{E}^{1/3}|X|^3 \sigma^{-3} n^{-1/2} + C_2 b_m \mathbb{E}^{1/3}|X|^3 \sigma^{-2} n^{-1} \ln n\,,$$

где $b_m = \max_{1 \leq k \leq m+1} \mathbb{E}^{1/3}|S_k|^3$.

6.7 Точечные процессы

Пусть $\mathcal{X}$ – метрическое пространство (например, $\mathbb{R}^k$ или $(0;1] \times [0;\infty)$). Будем обозначать через $\mathcal{B}(\cdot)$ борелеву σ–алгебру.

Мера называется считающей, если она принимает значения в $\mathbf{Z}_+$.

Пусть $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}(\mathcal{X})$ – множество всех считающих мер на $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Снабдим $\mathbf{M}$ слабой топологией. Точечный процесс есть случайный элемент в $\mathbf{M}$ (случайная считающая мера).

Точечный процесс P имеет независимые приращения, если случайные величины $P(B_1), \ldots, P(B_k)$ независимы, когда множества $B_1, \ldots, B_k$ не пересекаются.

Точечный процесс с независимыми приращениями называется пуассоновским, если приращения имеют пуассоновское распределение. Точечный процесс с независимыми приращениями называется сложно-пуассоновским, если приращения имеют сложно-пуассоновское распределение.

Распределение точечного процесса P безгранично делимо, если для всякого $n \in \mathbb{N}$ существуют н.о.р. точечные процессы $P_1, \ldots, P_n$, такие что $P \stackrel{d}{=} P_1 + \ldots + P_n$.

Распределение точечного процесса P однозначно определяется его преобразованием Лапласа

$$L_P(f) = \mathbb{E}e^{-\int f dP} \qquad (f \in \mathcal{F}),$$

где $\mathcal{F}$ – пространство неотрицательных измеримых функций на $\mathcal{X}$.

Если Π_λ – пуассоновский точечный процесс на $\mathcal{X} = [0;1]$ с мерой интенсивности λm, где коэффициент интенсивности $\lambda > 0$ и m – мера Лебега, то

$$L_{\Pi_\lambda}(f) = \exp\left(-\lambda \int_0^1 (1 - e^{-f(t)}) dt\right).$$

Если Π_λ^ζ – сложно-пуассоновский точечный процесс на $\mathcal{X} = [0;1]$ с мерой интенсивности λm и распределением кластера $\mathcal{L}(\zeta)$, то

$$-\ln L_{\Pi_\lambda^\zeta}(f) = \lambda \int_0^1 (1 - \psi_\zeta(f(t)))\, dt,$$

где ψ_ζ есть преобразование Лапласа распределения $\mathcal{L}(\zeta)$: $\psi_\zeta(s) = \mathbb{E}e^{-s\zeta}$.

Сложно-пуассоновский точечный процесс Π_λ^ζ on $\mathcal{X} = [0;\infty)$ можно рассматривать как скачкообразный процесс $\{\pi_\lambda^\zeta(t), t \geq 0\}$, где $\pi_\lambda^\zeta(t) = \Pi_\lambda^\zeta([0;t])$ имеет распределение $\mathbf{\Pi}(\lambda t, \zeta)$. С другой стороны, скачкообразный процесс $\{\pi_\lambda^\zeta(t), t \geq 0\}$ порождает точечный процесс $\Pi_\lambda^\zeta(B) = \int_B \pi_\lambda^\zeta(dt)$.

Имеет место взаимнооднозначное соответствие между распределениями безгранично делимых точечных процессов на $\mathcal{X}$ и мерами $\mathbf{m}$ на $\mathcal{B}(\mathbf{M})$, такими что

$$\int_{\mathbf{M}} \left(1 - \exp\Big(-\int f d\mu\Big)\right) \mathbf{m}(d\mu) < \infty \qquad (f \in \mathcal{F}).$$

Пусть $\mathbf{M_f} = \{\mu \in \mathbf{M} : \int f d\mu > 0\}$. Тогда

$$-\ln L_P(f) = \int_{\mathbf{M_f}} \left(1 - \exp\left(-\int f d\mu\right)\right) \mathbf{m}_P(d\mu)\,.$$

Это каноническое представление L_P, и $\mathbf{m}_P$ называется канонической мерой P.

Пусть $P, P_1, P_2, \ldots$ – последовательность точечных процессов. Мы говорим, что $P_n \Rightarrow P$, если $(P_n(B_1), \ldots, P_n(B_k)) \Rightarrow (P(B_1), \ldots, P(B_k))$ для произвольных множеств $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, таких что $P(\cup_i \partial B_i) = 0$ п.н.. Слабая сходимость точечных процессов часто называется *полной* сходимостью.

6.8 Метод Стэйна

В этом разделе описывается метод Стэйна в задачах оценивания точности нормальной и пуассоновской аппроксимации распределения сумм с.в..

Нормальная аппроксимация по методу Стейна. Исходное наблюдение в методе Стэйна оценивания точности нормальной аппроксимации связано с существованием абсолютно непрерывной функции g, такой что

$$g'(y) - yg(y) = \mathbb{I}\{y < x\} - \Phi(x)\,,$$

где Φ – ф.р. стандартного нормального закона. Следовательно,

$$\mathbb{P}(\xi < x) - \Phi(x) = \mathbb{E}g'(\xi) - \mathbb{E}\xi g(\xi) \tag{6.34}$$

для любой с.в. ξ с конечным вторым моментом. Чтобы оценить $\mathbb{P}(\xi < x) - \Phi(x)$, достаточно оценить

$$\mathbb{E}g'(\xi) - \mathbb{E}\xi g(\xi).$$

Пусть η – стандартная нормальная с.в., и пусть $\mathcal{S}$ обозначает класс абсолютно непрерывных комплексных функций g на $\mathbb{R}$, таких что $\mathbb{E}|\eta g(\eta)| < \infty$. Легко видеть, что

$$\mathbb{E}g'(\eta) - \mathbb{E}\eta g(\eta) = 0 \tag{6.35}$$

для каждой $g \in \mathcal{S}$. Действительно, интегрирование по частям даёт

$$\mathbb{E}g'(\eta) = \int g'(x)\varphi(x)dx = -\int g(x)\varphi'(x)dx = \mathbb{E}\eta g(\eta).$$

Свойство (6.35) характеризует стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}(0;1)$: если с.в. η такова, что (6.35) выполнено для каждой ограниченной абсолютно непрерывной g, то $\mathcal{L}(\eta) = \mathcal{N}(0;1)$.

Определим вспомогательную функцию $g = g(\cdot|h)$ уравнением

$$\begin{aligned} g(x|h) &= \varphi^{-1}(x)\int_{-\infty}^{x}[h(y)-\mathbb{E}h(\eta)]\varphi(y)dy \\ &= \varphi^{-1}(x)\int_{x}^{\infty}[\mathbb{E}h(\eta)-h(y)]\varphi(y)dy\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Заметим, что

$$g(x|h) = [\mathbb{E}h(\eta)\mathbb{I}\{\eta<x\}\Phi_c(x) - \mathbb{E}h(\eta)\mathbb{I}\{\eta\geq x\}\Phi(x)]/\varphi(x)\,, \tag{6.37}$$

где $\Phi_c = 1-\Phi$. Мы называем g функцией Стейна. Легко проверить, что

$$g'(x) - xg(x) = h(x) - \mathbb{E}h(\eta) \qquad (x\in\mathbb{R}). \tag{6.38}$$

Мы называем (6.38) уравнением Стейна. Следовательно,

$$\mathbb{E}h(\xi) - \mathbb{E}h(\eta) = \mathbb{E}g'(\xi) - \mathbb{E}\xi g(\xi). \tag{6.39}$$

Лемма 6.15 *Свойства функции Стейна (6.36):*
(i) $g(x|ah+b) = ag(x|h),\ g(x|h_1+h_2) = g(x|h_1)+g(x|h_2)$.
(ii) *если* h *– невозрастающая, то* $g\geq 0$*; если* h *– неубывающая, то* $g\leq 0$.
(iii) *если* $0\leq h\leq 1$*, то*

$$||g|| \leq \sqrt{\pi/8}\ ,\ ||g'||\leq 2\,,\ \sup_x |xg(x)|\leq 1,$$

где $\|\cdot\|$ *есть равномерная норма. Если* $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна, то*

$$||g|| \leq \min\{\sqrt{\pi/2}\|h-\mathbb{E}h(\eta)\|; 2\|h'\|\}\,,\ ||g'||\leq 2\min\{\|h-\mathbb{E}h(\eta)\|; 2\|h'\|\}\,.$$

(iv) *если* $||h||<\infty$*, то* g *абсолютно непрерывна.*

Рассмотрим функцию

$$h(y)\equiv h(y,a) = \mathbb{I}\{y<a\} \qquad (a\in\mathbb{R})\,.$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} g_a(x) &= \varphi^{-1}(x)\int_{-\infty}^{x}[\mathbb{I}\{y<a\}-\Phi(a)]\varphi(y)dy \\ &= \varphi^{-1}(x)\int_{x}^{\infty}[\mathbb{I}\{y\geq a\}-\Phi_c(a)]\varphi(y)dy \end{aligned} \tag{6.40}$$

соответствующую функцию Стейна. Заметим, что

$$g_a(x) = \begin{cases} \Phi(a)\Phi_c(x)/\varphi(x) & (x\geq a) \\ \Phi_c(a)\Phi(x)/\varphi(x) & (x<a) \end{cases} \tag{6.41}$$

Следовательно,

$$g_a'(x) = \begin{cases} \Phi(a)[-1 + x\Phi_c(x)/\varphi(x)] & (x > a) \\ \Phi_c(a)[1 + x\Phi(x)/\varphi(x)] & (x < a) \end{cases} \tag{6.42}$$

Уравнение Стейна:

$$g_a'(x) - xg_a(x) = \mathbb{I}\{x < a\} - \Phi(a)\,.$$

Следовательно, для любой с.в. ξ

$$\mathbb{P}(\xi < a) - \Phi(a) = \mathbb{E}g_a'(\xi) - \mathbb{E}\xi g_a(\xi). \tag{6.39*}$$

Лемма 6.16 *Свойства функции* (6.40) :
1. g_a *возрастает на* $(-\infty; a)$, g_a *убывает на* $(a; +\infty)$, $g_{-a}(x) = g_a(-x)$, $g_a \geq 0$.
2. $\sup_x |xg(x)| = \max\{\Phi(a); \Phi_c(a)\} < 1$ *и*

$$||g_a|| = \Phi(a)\Phi_c(a)/\varphi(a) \leq \min\{\sqrt{\pi/8}\,; 1/|a|\}\ . \tag{6.43}$$

3. $g_a' > 0$ *при* $x < a$, $g_a' < 0$ *при* $x > a$, $||g_a'|| < 1$.
4. $g_a'' > 0 \quad (x \neq a)$.

Пуассоновская аппроксимация по методу Стейна. Обозначим

$$\Delta g(n) = g(n+1) - g(n)\,.$$

Пусть Y – с.в., принимающие значения в $\mathbf{Z}_+$, $\mathcal{L}(X) = \mathbf{\Pi}(\nu)$, $\nu > 0$, и функция $h : \mathbf{Z}_+ \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $|\mathbb{E}h(X)| + |\mathbb{E}h(Y)| < \infty$.

Метод Стэйна предлагает применять функцию $g(\cdot) \equiv g(\cdot|h)$, такую что

$$g(n+1) - \nu^{-1}ng(n) = h(n) - \mathbb{E}h(X) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{6.44}$$

Поэтому $|\mathbb{E}h(Y) - \mathbb{E}h(X)|$ можно оценить, работая с $\nu\mathbb{E}g(Y+1) - \mathbb{E}Yg(Y)$.

Мы будем называть (6.44) уравнением Стэйна. Решение (6.44) есть $g(0) = 0$,

$$g(n) = [\mathbb{E}h(X)\mathbb{I}\{X < n\} - \mathbb{E}h(X)\mathbb{P}(X < n)]/\mathbb{P}(X = n-1) \tag{6.45}$$

$(n \geq 1)$. Это соотношение можно переписать как

$$g(n) = \frac{\mathbb{E}h(X)\mathbb{I}\{X < n\}\mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{E}h(X)\mathbb{I}\{X \geq n\}\mathbb{P}(X < n)}{\mathbb{P}(X = n-1)}\,. \tag{6.46}$$

Свойства функции g хорошо изучены [25, 29]. В частности, справедлива

Лемма 6.17 [25] *Свойства функции* g*:*
(i) $g(\cdot|c_1h_1 + c_2h_2) = c_1g(\cdot|h_1) + c_2g(\cdot|h_2)$;
(ii) если $h\downarrow$, *то* $g \geq 0$, *если* $h\uparrow$, *то* $g \leq 0$;
(iii) $g(\cdot|1-h) = -g(\cdot|h)$;
(iv) если $h(\cdot) : \mathbf{Z}_+ \to [0; 1]$, *то*

$$\|g\| \leq \max_{n\geq 0} \mathbb{P}(X \leq n)\mathbb{P}(X > n)/\mathbb{P}(X = n) \leq \nu\,, \tag{6.47}$$

$$\|\Delta g\| \leq 1 - e^{-\nu}\,. \tag{6.48}$$

Обозначим $g_A(\cdot) = g(\cdot|h_A)$, где $h_A(x) = 1\!\!\mathrm{I}\{x \in A\}$, $A \subset \mathbf{Z}_+$. Тогда уравнение Стэйна есть

$$g_A(n+1) - \nu^{-1} n g_A(n) = 1\!\!\mathrm{I}\{n \in A\} - \mathrm{I\!P}(X \in A) \qquad (A \subset \mathbf{Z}_+). \tag{6.44*}$$

Ввиду (6.45),

$$g_A(n) = [\mathrm{I\!P}(X \in A, X < n) - \mathrm{I\!P}(X \in A)\mathrm{I\!P}(X < n)]/\mathrm{I\!P}(X = n-1). \tag{6.49}$$

Замечание. Функцию Стэйна f можно определить как решение уравнения

$$\nu f(n+1) - n f(n) = h(n) - \mathrm{I\!E} h(X) \qquad (n \in \mathrm{I\!N}).$$

Тогда $f = g/\nu$.

Пусть с.в. X принимает значения в $\mathbf{Z}_+$, $\mathrm{I\!E}X \in (0; \infty)$, и пусть $X^\star$ обозначает с.в. с распределением

$$\mathrm{I\!P}(X^\star = k) = \mathrm{I\!P}(X = k)(k - \mathrm{I\!E}X)^2/\mathrm{I\!E}X \qquad (k \in \mathbf{Z}_+). \tag{6.50}$$

Ниже X – пуассонова $\mathbf{\Pi}(\nu)$ с.в.. Обозначим $\mathcal{L}(X^\star)$ через $\mathbf{\Pi}^\star(\nu)$. Тогда

$$d_{TV}(X+1; X^\star)\sqrt{\pi[\nu]/8} \le \sup_{A \subset \mathbf{Z}_+} \|g_A\| \le \sqrt{2\nu/e}\,, \tag{6.51}$$

где $[\nu]$ обозначает целую часть ν. Ввиду (2.62), левая часть (6.51) равна $\frac{1}{2}\sqrt{\nu/e}$ $(1 + O(1/\sqrt{\nu}\,))$, если $\nu \to \infty$.

Согласно замечанию 1.1.2 в [25], $\|g_A\| \le \sqrt{2\nu/e}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{I\!P}(X+1 \in A) - \mathrm{I\!P}(X^\star \in A))\,/2 = \mathrm{I\!E}\Delta g_A(X+1) \\
= \; & \sum_k g_A(k+2)\,(\mathrm{I\!P}(X = k) - \mathrm{I\!P}(X = k+1)) \\
\le \; & 2\|g_A\| d_{TV}(X; X-1) = 2\|g_A\|\mathrm{I\!P}(X = [\nu]) < 2\|g_A\|/\sqrt{2\pi[\nu]}
\end{aligned}$$

ввиду (2.61), и (6.51) следует.

Если g – функция Стэйна (6.44) и $h \in \mathcal{L}$, где $\mathcal{L} = \{g : |g(x) - g(y)| \le |x - y|\}$ – множеств липшицевых функций, то

$$\|g\| \le \nu\,, \;\; \|\Delta g\| \le \nu \wedge \tfrac{4}{3}\sqrt{2\nu/e} \tag{6.52}$$

([25], p. 15, 16). Поэтому (2.60) влечёт

$$d_G(W; \pi_\nu) \le \left(1 \wedge \tfrac{4}{3}\sqrt{2/e\nu}\right) \sum_{i=1}^n p_i^2\,. \tag{6.53}$$

6.9 Медленно меняющиеся функции

Функция L медленно меняется на ∞, если

$$\lim_{x\to\infty} L(xt)/L(x) = 1 \qquad (\forall t > 0)\,.$$

Функция ℓ медленно меняется в окрестности 0, если $\lim\limits_{x\to 0} \ell(xt)/\ell(x) = 1$ $(\forall t > 0)$.

Каждая медленно меняющаяся на ∞ функция L допускает представление

$$L(x) = c(x)\exp\left(\int_{x_1}^{x} \frac{v(y)}{y}dy\right) \qquad (x \ge x_1) \tag{6.54}$$

для некоторого $x_1 > 0$, где $c(x) \to const \ne 0$ и $v(x) \to 0$ при $x \to \infty$. В частности, для всякого $\varepsilon > 0$

$$x^{-\varepsilon} \ll L(x) \ll x^{\varepsilon} \qquad (x \to \infty)\,.$$

Если L медленно меняется на ∞, то существует дифференцируемая функция L_*, такая что

$$L(x) \sim L_*(x) \qquad (x \to \infty).$$

Если L – медленно меняющаяся на ∞ и

$$F_c(x) \equiv \mathbb{P}(X > x) = L(x)x^{-1/a} \qquad (a > 0, x > 0), \tag{6.55}$$

то существует медленно меняющаяся в окрестности 0 функция ℓ, такая что

$$F_c^{-1}(y) = y^{-a}\ell(y)\,. \tag{6.56}$$

Предположим, что имеет место (6.55). Тогда

$$F_c(F_c^{-1}(y)) \sim y \quad (y \to 0)\,,\ F_c^{-1}(F_c(x)) \sim x \quad (x \to \infty)\,.$$

Следующие соотношения равносильны:

$$F_c(x) = \frac{c}{x^{1/a}}\left(1 + x^{-b/a}L(x)\right) \Longleftrightarrow F_c^{-1}(t) = \frac{c^a}{t^a}\left(1 + t^b\ell(t)\right)\,,$$

где ℓ – медленно меняющаяся функция при $t \to 0$.

Если L медленно меняется на ∞ и $a > 1$, то при $x \to \infty$

$$\int_x^{\infty} L(t)t^{-a}dt \sim (a-1)^{-1}x^{1-a}L(x)\,.$$

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные с.в.. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$,

$$\mu^*(x) = \mathbb{E}X\mathbb{1}\{X < x\}\,.$$

Функция μ^* медленно меняется на ∞ если и только если существуют положительные константы $\{c_n\}$, такие что

$$S_n/c_n \xrightarrow[p]{} 1,$$

при этом можно положить $c_n = s_n$, где $\{s_n\}$ является решением уравнения

$$n\mu^*(s_n) = s_n\,.$$

Функция g называется *регулярно меняющейся* на ∞, если для любого $t > 0$ существует предел $h(t) = \lim_{x\to\infty} g(tx)/g(x)$, при этом $h(ts) = h(s)h(t)$ и

$$\lim_{x\to\infty} g(tx)/g(x) = t^a \qquad (\exists a \in \mathbb{R}),$$

то есть

$$g(x) = x^a L(x),$$

где функция $L(x) = g(x)/x^a$ медленно меняется на ∞. Мы будем говорить, что g регулярно меняется с индексом a.

Обозначим

$$\mu(x) = \mathbb{E}X^2 \mathbb{I}\{|X| < x\}.$$

Функция μ регулярно меняется с индексом $2-\alpha \in (0;2)$ если и только если

$$x^2 \mathbb{P}(|X| > x)/\mu(x) \to (2-\alpha)/\alpha \qquad (x \to \infty). \tag{6.57}$$

Из (6.57) следует, что $\mathbb{P}(|X| > x)$ регулярно меняется с индексом $-\alpha$:

$$\mathbb{P}(|X| > x) = x^{-\alpha} L(x).$$

Если $F(-x)/F_c(x) \to const$ при $x \to \infty$, то соотношение (6.57) с $\alpha \in (0;2)$ необходимо и достаточно для того, чтобы распределение $\mathcal{L}(X)$ принадлежало области притяжения устойчивого закона с индексом α.

6.10 Вспомогательные тождества и неравенства

Вероятностностная версия формулы Тэйлора. Пусть $\mathbf{C_k}$ – класс функций с непрерывными k-ми производными.

Лемма 6.18 *Если* $g \in \mathbf{C_{k-1}}$ *и функция* $g^{(k-1)}$ *абсолютно непрерывна, то*

$$g(t) = \sum_{i=0}^{k-1} g^{(i)}(0)t^i/i! \; + \; \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}g^{(k)}(\tau_k t)\,, \tag{6.58}$$

где с.в. τ_k *имеет распределение*

$$\mathbb{P}(\tau_k < u) = 1-(1-u)^k \qquad (0 \le u \le 1)\,.$$

Многомерная версия (6.58): если $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ и $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$, положим $g(t) = f(t\bar{x})$. Тогда из (6.58) следует

$$f(\bar{x}) = f(\bar{0}) + \sum_{i=1}^{k-1} g^{(i)}(\bar{0})/i! \; + \; \mathbb{E} g^{(k)}(\tau_k)/k! \,.$$

В частности,

$$f(\bar{x}) - f(\bar{0}) = \int_0^1 \nabla f(t\bar{x})\bar{x}dt \,.$$

Лемма Бореля-Кантелли. *Пусть* $A_1, A_2, \ldots$ *– последовательность независимых событий. Вероятность* $\mathbb{P}(A_i \text{ б.ч.}) \equiv \mathbb{P}(\cup_{i \geq 1} \cap_{j \geq i} A_j)$ *равна 0 или 1 в зависимости от того, сходится ряд* $\sum_i \mathbb{P}(A_i)$ *или рассходится.*

В случае зависимых событий может быть использован один из следующих двух результатов.

Лемма 6.19 [324] *Если* $\sum_i \mathbb{P}(A_i) = \infty$ *и*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_i A_j) \Big/ \Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \Big)^2 \to 1,$$

то $\mathbb{P}(A_i \text{ б.ч.}) = 1$.

Лемма 6.20 [254] *Пусть* $g(\cdot)$ *– возрастающая функция, такая что* $0 < g(n) = o\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$. *Если* $\sum_i \mathbb{P}(A_i) = \infty$ *и*

$$\mathbb{P}(A_i A_j) \sim \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

при $j \geq i + g(i)$, *то* $\mathbb{P}(A_i \text{ б.ч.}) = 1$.

Формула Стирлинга:

$$n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} < n! < n^n e^{-n+1/12n} \sqrt{2\pi n} \;.$$

Неравенство Гёлдера: если функции f и g неотрицательны и μ – некоторая мера, то

$$\int f^p g^{1-p} d\mu \leq \left(\int f d\mu \right)^p \left(\int g d\mu \right)^{1-p} \qquad (0 \leq p \leq 1).$$

Лемма 6.21 *Если* $\{q(n), n \in \mathbb{N}\}$ *– невозрастающая последовательность неотрицательных чисел и* $a > 0$, *то* $\sum_{k \geq 1} q^a(2^k) < \infty$ *если и только если*

$$\sum_{i \geq 1} q^a(i)/i < \infty \,.$$

Утверждение леммы 6.21 выполнено, если 2 заменить на произвольное $b>1$.

Если $x \geq -1$, то

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{1+\sqrt{1+x}} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2/2}{(1+\sqrt{1+x})^2}\,, \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{\sqrt{1+x}\,(1+\sqrt{1+x}\,)}\,, \\
1+x/2-x^2/2 &\leq \sqrt{1+x} \leq 1+x/2 \qquad (x\geq -1)\,, \\
\sqrt{1-x} &\geq 1-x \qquad (-1\leq x\leq 0)\,.
\end{aligned}$$

Согласно формуле Тэйлора,

$$x-x^2/2 \leq \ln(1+x)\leq x \quad (x\geq 0)\,,$$

$$\ln(1-x) \geq -x-\frac{x^2/2}{(1-x)^2} \quad (0\leq x<1)\,, \tag{6.59}$$

$$\ln(1+x) \leq x\max\{1/(1+x/2);1/\sqrt{1+x}\} \quad (x>-1)\,. \tag{6.60}$$

Для произвольных $x,y\in\mathbb{R}$,

$$|x-y|\exp(\min\{x,y\})\leq |e^x-e^y|\leq |x-y|\exp(\max\{x,y\})\,. \tag{6.61}$$

Если $|y|\leq 1$ и $n\in\mathbb{N}$, то

$$1+ny \leq (1+y)^n\leq 1+ny(1+y)^{n-1}\,, \tag{6.62}$$

$$(1+y)^n \leq 1+ny+(ny)^2(1+y)^n/2\,. \tag{6.63}$$

Если $x\geq 0$, то

$$\frac{x^2}{2} \leq e^x-1-x\leq \frac{x}{2}\left(e^x-1\right)\,, \tag{6.64}$$

$$e^x \geq 1+xe^{x/2}\,. \tag{6.65}$$

Если $x\geq 0$, $y\geq 0$ и $q\in(0;1)$, то

$$(x+y)^q \leq x^q+y^q\,, \tag{6.66}$$

$$xy \leq qx^{1/q}+py^{1/p} \quad (p=1-q).$$

Комбинаторные тождества. Пусть $m,n\in\mathbf{Z}_+$, $a\in\mathbf{Z}$. Тогда

$$n^{(m)} = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}(n-a)^{(j)}a^{(m-j)}\,, \tag{6.67}$$

$$\sum_{j=0}^{m} j^{(d)} = (m+1)^{(d+1)}/(d+1) = m^{(d+1)}/(d+1)+m^{(d)}\,. \tag{6.68}$$

Литература

[1] Acerbi C. (2002) Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion. — J. Business Fin., v. 26, 1505–1518.

[2] Adler R.J. (1978) Weak convergence results for extremal processes generated by dependent случайные величины. — Ann. Probab., v. 6, No 4, 660–667.

[3] Adler R.J. (1997) Discussion. — Ann. Statist., v. 25, No 5, 1849–1852.

[4] Alberink I.B. (2000) A Berry-Esseen bound for U-statistics in the non-i.i.d. case. — J. Theoret. Probab., v. 13, No 2, 519–533.

[5] Alexander C. (2001) Market models. — New Jersey: Wiley.

[6] Alexander C. (2008) Value–at–Risk models. — New Jersey: Wiley.

[7] Alsmeyer G. (1988) Second order approximation for certain stopped sums in extended renewal theory. — Adv. Appl. Probab., v. 20, No 2, 391–410.

[8] Anderson C.W. (1970) Extreme value theory for a class of discrete distributions with applications to some stochastic processes. — J. Appl. Probab., v. 7, 99–113.

[9] Araman V.F., Glynn P.W. (2006) Tail asymptotics for the maximum of perturbed random walk. — Ann. Appl. Probab., v. 16, No 3, 1411–1431.

[10] Arenbaev N.K. (1976) The asymptotic behavior of a multinomial distribution. — Theory Probab. Appl., v. 21, No 4, 826–831.

[11] Aronson D.R. (2006) *Evidence-based Technical Analysis.* — New Jersey: Wiley.

[12] Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M. and Heath D. (1999) Coherent measures of risk. — Math. Finance, v. 9, 203–228.

[13] Arratia R., Gordon L. and Waterman M.S. (1986) An extreme value theory for sequence matching. — Ann. Statist., v. 14, No 3, 971–993.

[14] Arratia R., Gordon L. and Waterman M.S. (1990) The Erdös–Rényi law in distribution, for coin tossing and sequence matching. — Ann. Statist., v. 18, No 2, 539–570.

[15] Arratia R., Goldstein L. and Gordon L. (1989) Two moments suffice for Poisson approximation. — Ann. Probab., v. 17, No 1, 9–25.

[16] Arratia R. and Waterman M.S. (1989) The Erdös–Rényi strong law for pattern matching with a given proportion of mismatches. — Ann. Probab., v. 17, No 4, 1152–1169.

[17] Athreya K.B. and Fukuchi J. (1994) Bootstrapping extremes of i.i.d. random variables. In: Proc. Conf. Extreme Value Theory Appl. (J. Galambos, J. Lechner, Simiu E., eds.), v. 3, NIST 866.

[18] Athreya K.B., Fukuchi J., Lahiri S.N. (1999) On the bootstrap and the moving block bootstrap for the maximum of a stationary process. — J. Statist. Plan. Infer., v. 76, 1–17.

[19] von Bahr B. and Esseen C.–G. (1965) Inequalities for the r–th absolute moment of a sum of random variables, $1 \le r \le 2$. — Ann. Math. Statist., v. 36, No 1, 299–303.

[20] Bansal N., Hamedani G.G., Key E.S., Volkmer H., Zhang H. and Behboodian J. (1999) Some characterizations of the normal distribution. — Statist. Probab. Lett., v. 42, No 4, 393–400.

[21] Barankin E. W. (1949) Locally best unbiased estimates. Ann. Math. Statist., v. 20, 477–501.

[22] Barbour A.D. and Eagleson G.K. (1983) Poisson approximation for some statistics based on exchangeable trials. — Adv. Appl. Probab., v. 15, No 3, 585–600.

[23] Barbour A.D. and Hall P. (1984) Stein's method and the Berry–Esseen theorem. — Austral. J. Statist., v. 26, No 1, 8–15.

[24] Barbour A.D. and Hall P. (1984) On the rate of Poisson convergence. — Math. Proceedings Cambridge Phil. Soc., v. 95, 473–480.

[25] Barbour A.D., Holst L. and Janson S. (1992) *Poisson Approximation.* Oxford: Clarendon Press.

[26] Barbour A.D. (1987) Asymptotic expansions in the Poisson limit theorem. — Ann. Probab., v. 15, No 2, 748–766.

[27] Barbour A.D., Chen L.H.Y. and Loh W.–L. (1992) Compound Poisson approximation for nonnegative random variables via Stein's method. — Ann. Probab., v. 20, No 4, 1843–1866.

[28] Barbour A.D., Novak S.Y. and Xia A. (2002) Compound Poisson approximation for the distribution of extremes. — Adv. Appl. Probab., v. 34, No 1, 223–240.

[29] Barbour A.D. and Chen L.H.Y. (2005) *An introduction to Stein's method.* — Lecture Notes Series, Institute for Mathematical Seiences, Singapore University Press – World Scientific.

[30] Barbour A.D. and Utev S.A. (1998) Solving the Stein equation in compound Poisson approximation. — Adv. Appl. Probab., v. 30, No 2, 449–475.

[31] Barbour A.D. and Xia A. (1999) Poisson perturbations. — ESAIM: Probab. Stat., v. 3, 131–150.

[32] Barbour A.D. and Chryssaphinou O. (2001) Compound Poisson approximation: a user's guide. — Ann. Appl. Probab., v. 11, No 3, 964–1002.

[33] Beirlant J., Bouquiaux C., Werker B.J.M. (2006) Semiparametric lower bounds for tail index estimation. — J. Statist. Plann. Inference, v. 136, ? 3, 705–729.

[34] Beirlant J. and Devroye L. (1999) On the impossibility of estimating densities in the extreme tail. — Statist. Probab. Letters, v. 43, No 1, 57–64.

[35] Beirlant J., Goegebeur Y., Teugels J. and Segers J. (2004) *Statistics of extremes. Theory and applications.* — Chichester: Wiley.

[36] Benevento R.V. (1984) The occurrence of sequence patterns in ergodic Markov chains. — Stochastic Proc. Appl., v. 17, No 4, 369–373.

[37] Bentkus V. (1994) On the asymptotical behavior of the constant in the Berry–Esseen inequality. — J. Theor. Probab., v. 7, No 2, 211–224.

[38] Berbee H.C.P. (1979) *Random walks with stationary increments and renewal theory.* — Amsterdam: Mathematisch Centrum Tract 112.

[39] Bernstein S.N. (1941) On one property characterising the Gauss law. — Trudy Leningrad. Politech. Inst., No 3, 21–22.

[40] Bernstein S.N. (1946) *Probability Theory.* — Moscow: Nauka.

[41] Bingham N.H., Goldie C.M. and Teugels J.L. (1987) *Regular Variation.* — Cambridge: Cambridge University Press.

[42] Bingham N.H. and Kiesel R. (2004) *Risk-neutral valuation. Pricing and hedging of financial derivatives.* — London: Springer. ISBN: 1-85233-458-4

[43] Berman S.M. (1962) Limiting distribution of the maximum term in sequences of dependent random variables. — Ann. Math. Statist., v. 33, 894–908.

[44] Berry A.C. (1941) The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent varieties. — Trans. Amer. Math. Soc., v. 49, No 1, 122–136.

[45] Birgé L. (1986) On estimating a плотность using Hellinger distance and some other strange facts. — Probab. Theory Rel. Fields, v. 71, 271–291.

[46] Bloznelis M. (1998) Second order approximation to the Student test. — Abstr. Commun. 7-th Vilnius Conf. Probab. Theory Math. Statistics. Vilnius: TEV, p. 152.

[47] Bloznelis M. and Putter H. (2002) Second-order and bootstrap approximation to Student's t-statistic. — Theory Probab. Appl., v. 47, No 2, 300–307.

[48] Bolthausen E. (1984) An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem. — Z. Wahrscheinich. verw. Gebiete, v. 66, No 3, 379–386.

[49] Borisov I.S. (1993) Strong Poisson and mixed approximations of sums of independent random variables in Banach spaces. — Siberian Adv. Math., v. 3, No 2, 1–13.

[50] Borisov I.S. (1996) Poisson approximationof the partial sum process in Banach spaces. — Siberian Math.J., v. 37, No 4, 627–634.

[51] Borisov I.S. and Ruzankin P.S. (2002) Poisson approximation for expectations of unbounded function of independent random variables. — Ann. Probab., v. 30, No 4, 1657–1680.

[52] Borisov I.S. and Vorozheikin I.S. (2008) Accuracy of approximation in the Poisson теорема in terms of χ^2 distance. — Sibir. Math. J., v. 49, No 1, 5–17.

[53] Borisov I.S. (2003) A remark on a теорема of R.L. Dobrushin, and couplings in the Poisson approximation in abelian groups. — Theory Probab. Appl., v. 48, No 3, 521–528.

[54] Borovkov A.A. and Utev S.A. (1983) On an inequality and a related characterization of the normal distribution. — Theory Probab. Appl., v. 28, 219–228.

[55] Bosq D. (1996) *Nonparametric statistics for stochastic processes.* — New York: Springer.

[56] Borovkov K.A. and Novak S.Y. (2010) On limiting cluster size distributions for processes of exceedances for stationary sequences. — Statist. Probab. Letters, v. 80, 1814–1818.

[57] Borovkov A.A. and Sahanenko A.I. (1980) Estimates for averaged quadratic risk. — Probab. Math. Statist., v. 1, No 2, 185–195.

[58] Borovkov K. A. (1988) On the problem of improving Poisson approximation. — Theory Probab. Appl., v. 33, No 2, 343–347.

[59] Bradley R.C. (1983) Approximation theorems for strongly mixing random variables. — Michigan Math. J., v. 30, 69-81.

[60] Bradley R.C. (1986) Basic properties of strong mixing conditions. — In: *Dependence in Probability and Statistics* (E.Eberlein and M.S.Taqqu, eds.), 165–192. Boston: Birkhäuser.

[61] Bestsennaya E.V. and Utev S.A. (1991) Supremum of an even moment of sums of independent random variables. — Siberian Math. J., v. 32, No 1, 139–141.

[62] Brock W., Lakonishok J. and LeBaron B. (1992) Simple technical trading rules and the stochastic properties of stock returns. — J. Finance, v. 47, No 5, 1731–1764.

[63] Broniatowski M. and Weber M. (1997) Strong laws for sums of extreme values. — Theory Probab. Appl., v. 42, No 3, 395–404.

[64] Brown T.C., Xia A. (2002) How many processes have Poisson counts? — Stoch. Processes Appl., v. 98, 331 – 339.

[65] Brown T.C., Weinberg G.V. and Xia A. (2000) Removing logarithms from Poisson process error bounds. — Stoch. Proc. Appl., v. 87, 149-Ц165.

[66] Carlsson H., Nerman O. (1986) An alternative proof of Lorden's renewal inequality. — Adv. Appl. Probab., v. 18, No 4, 1015–1016.

[67] Čekanavičius V. and Roos B. (2006) An expansion in the exponent for compound binomial approximations. Liet. Matem. Rink., v. 46, 67–110.

[68] Chapman D.G., Robbins H. (1951) Minimum variance estimation without regularity assumptions. — Ann. Math. Statist., v. 22, 581–586.

[69] Cartan H. (1971) Differential calculus. Hermann: Paris; Boston (Mass.): Houghton Mifflin, 160 pp.

[70] Tchebychef P.L. (1867) Des valeurs moyennes. — J. Pures Appl., v. 12, 177–184.

[71] Chen L.H.Y. (1975) Poisson approximation for dependent trials. — Ann. Probab., v. 3, 534–545.

[72] Chen L.H.Y. and Lou J.H. (1987) Characterisation of probability distributions by Poincaré–type inequalities. — Ann. Inst. Henri Poincaré, v. 23, No 1, 91–110.

[73] Chen L.H.Y. and Shao Q.-M. (2001) A non-uniform Berry-Esseen bound via Stein's method. — Probab. Theory Rel. Fields, v. 120, 236–254.

[74] Chen L.H.Y. and Shao Q.-M. (2005) Stein's method for normal approximation. An introduction to Stein's method. — Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., 1–59. Singapore Univ. Press, Singapore.

[75] Chen L.H.Y. and Shao Q.-M. (2007) Normal approximation for nonlinear statistics using a concentration inequality approach. — Bernoulli, v. 13, No 2, 581–599.

[76] Cheng S. and Pan J. (1998) Asymptotic expansions of estimators for the tail index with applications. — Scand. J. Statist., v. 25, No 4, 717–728.

[77] Chernick M.R., Hsing T. and McCormick W.P. (1991) Calculating the extremal index for a class of stationary sequences. — Adv. Appl. Probab., v. 23, 835–850.

[78] Chistyakov G.P. (2001) Chistyakov G.P. A new asymptotic expansion and asymptotically best constants in Lyapunov's theorem. — Theory Probab. Appl., v. 46, 226–242, 516–522.

[79] Chistyakov G.P. and Götze F. (2004) Limit distributions of Studentized means. — Ann. Probab., v. 32, No 1A, 28–77.

[80] Chow Y.S. and Teicher H. (1997) *Probability theory. Independence, interchangeability, martingales.* — New York: Springer.

[81] Chung K.–L. (1946) The approximate distribution of Student's statistic. — Ann. Math. Statistics, v. 17, 447–465.

[82] Clarke J., Jandik T. and Mandelker G. (2001) The efficient markets hypothesis. — In: Expert Financial Planning: Advice from Industry Leaders (R.Arffa, ed.), 126–141. New York: Wiley.

[83] Csörgö S. and Viharos L. (1998) Estimating the tail index. — In: *Asymptotic Methods in Probability and Statistics* (B.Szyszkowicz, ed.), 833–881. Amsterdam: Elsevier.

[84] Csörgö M., Horváth L., Révész P. (1987) On the optimality of estimating the tail index and a naive estimator. — Austral. J. Statist., v. 29, No 2, 166–178.

[85] Csörgö M., Szyszkowicz B., Wang Q. (2004) On weighted approximations and strong limit theorems for self–normalized partial sums processes. — In: Asymptotic methods in stochastics, Fields Inst. Commun., v. 44, 489–521.

[86] Daley D.J. and Vere-Jones D. (1988) *An introduction to the theory of point processes.* — New York: Springer.

[87] Danielsson J., Jansen D.W. and de Vries C.G. (1996) The method of moments ratio estimator for the tail shape parameter. — Commun. Statist. Theory Meth., v. 25, No 4, 711–720.

[88] Danielsson J., de Haan L., Peng L. and de Vries C. (2001) Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation. — J. Multivar Anal., v. 76, No 2, 226–248.

[89] Darling D.A. (1952) The influence of the maximum term in the addition of independent random variables. — Trans. Amer. Math. Soc, v. 73, 95–107.

[90] Darling D.A. (1975) Note on a limit theorem. — Ann. Probab., v. 3, No 5, 876–878.

[91] Davis R.A. and Resnick S.I. (1984) Tail estimates motivated by extreme value theory. — Ann. Statist., v. 12, No 4, 1467–1487.

[92] Davis R. and Mikosch T. (1997) The sample autocorrelations of heavy-tailed stationary processes with applications to ARCH. — Ann. Statist., v. 26, No 5, 2049–2080.

[93] Davis R., Mikosch T. and Basrak B. (1999) Sample ACF of multivariate stochastic recurrence equations with applications to GARCH. — Preprint, University of Groningen.

[94] Davydov Y.A. (1968) Convergence of distributions generated by stationary stochastic processes. — Theory Probab. Appl., v.13, 691–696.

[95] Davydov Yu., Paulauskas V. and Rachkauskas A. (2000) More on p-stable convex sets in Banach spaces. — J. Theoret. Probab., v. 13, No 1, 39–64.

[96] Deheuvels P., Devroye L. and Lynch J. (1986) Exact convergence rates in the limit theorems of Erdös–Rényi and Shepp. — Ann. Probab., v. 14, No 1, 209–223.

[97] Deheuvels P. and Devroye L. (1987) Limit laws of Erdös-Rényi-Shepp type. — Ann. Probab., v. 15, No 4, 1363–1386.

[98] Deheuvels P., Erdös P., Grill K. and Révész P. (1987) Many heads in a short block. — Math. Statist. Probab. Theory (M.L.Puri et al., eds.), v. A, 53–67.

[99] Deheuvels P. and Pfeifer D. (1986) A semigroup approach to Poisson approximation. — Ann. Probab., v. 14, No 2, 663–676.

[100] Deheuvels P. and Pfeifer D. (1988) Poisson approximation of distributions and point processes. — J. Multivar. Anal., v. 25, 65–89.

[101] Deheuvels P. and Pfeifer D. (1988) On a relationship between Uspensky's теорема and Poisson approximation. — Ann. Inst. Statist. Math., v. 40, 671–681.

[102] Deheuvels P. and Révész P. (1987) Weak laws for the increments of Wiener processes, brownian bridges, empirical processes and partial sums of i.i.d.r.v.'s. — Math. Statist. Probab. Theory (M.L.Puri et al., eds.), v. A, p. 69–88.

[103] Dekkers A.L.M., Einmahl J.H.J. and de Haan L. (1989) A moment estimator for the index of an extreme–value distribution. — Ann. Statist., v. 17, No 4, 1833–1855.

[104] Dekkers A.L.M. and de Haan L. (1989) On the estimation of the extreme value index and large quantile estimation. — Ann. Statist., v. 17, 1833-1855.

[105] Dembo R.C. and Freeman A. (2001) *The rules of risk.* — N.Y.: Wiley.

[106] Dembo A., Kagan A. and Shepp L.A. (2001) Remarks on the maximum correlation coefficient. — Bernoulli, v. 7, No 2, 343 – 350.

[107] Dembo A., Karlin S. and Zeitouni O. (1994) Limit distribution of maximal non-aligned two-sequence segmental score. — Ann. Probab. 22, No 4, 2022–2039.

[108] Denzel G.E. and O'Brien G.L. (1975) Limit theorems for extreme values of chain-dependent processes. — Ann. Probab., v. 3, No 5, 773–779.

[109] Devroye L. (1995) Another proof of a slow convergence result of Birgé. — Statist. Probab. Letters, v. 23, No 1, 63–67.

[110] Devroye L. and Györfi L. (1985) *Nonparametric плотность estimation: the L_1–view.* — N.Y.: Wiley.

[111] Ding Z., Granger C.W.J. and Engle R.F. (1993) A long memory property of stock market returns and a new model. — J. Empir. Finance, v. 1, 83–106.

[112] Dobrushin R. L. (1970) Prescribing a system of random variables by conditional distributions . — Theory Probab. Appl., v. 15, No 3, 458–486.

[113] Donoho D.L. & Liu R.C. (1991) Geometrizing rates of convergence II, III. — Ann. Statist., v. 19, No 2, 633–667, 668–701.

[114] Drees H. and Kaufman E. (1998) Selecting the optimal sample fraction in univariate extreme value estimation. — Stochastic Processes Appl., v. 75, 149–172.

[115] Drees H. (2000) Weighted approximations of tail processes for β–mixing random variables. — Ann. Appl. Probab., v. 10, No 4, 1274–1301.

[116] Drees H. (2001) Minimax risk bounds in extreme values theory. — Ann. Statist., v. 29, No 1, 266–294.

[117] Drees H. (2003) Extreme quantile estimation for dependent data, with applications to finance. — Bernoulli, v. 9, No 4, 617–657.

[118] DuMouchel W.H. (1983) Estimating the stable index α in order to measure tail thickness: a critique. — Ann. Statist., v. 11, No 4, 1019–1031.

[119] Egorov V.A., Nevzorov V.B. (1976) Limit theorems for linear combinations of order statistics. — Lecture Notes Math., 1976,v. 550, 63–79.

[120] Elder A. (2002) Come into my trading room. New York: Wiley.

[121] Elton E.J. and Gruber M.J. (1995) YModern portfolio theory and investment analysisY. New York: Wiley.

[122] Embrechts P., Klüppelberg C. and Mikosch T. (1997) *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* — Berlin: Springer.

[123] Embrechts P. and Novak S.Y. (2002) Long head-runs and long match patterns. — Advances in finance and stochastics, 57–69. Berlin: Springer.

[124] Erdös P., Rényi A. (1970) On a new law of large numbers. — J. Anal. Math., v. 22, 103–111.

[125] Erhardsson T. (2000) Compound Poisson approximation for counts of rare patterns in Markov chains and extreme sojourns in birth-death chains. — Ann. Appl. Probab., v. 10, 573–591.

[126] van Es A.J. and Helmers R. (1988) Elementary symmetric polynomials of increasing order. — Probab. Theory Related Fields, v. 80, No 1, 21–35.

[127] Esseen C.–G. (1942) On the Liapounoff limit of error in the theory of probability. — Arkiv Mat. Astr. Fysik., v. 28 A, No 2, 1–19.

[128] Esseen C.–G. (1945) Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. — Acta Math., v. 77, 1–125.

[129] Falk M., Hüsler J. and Reiss R.–D. (1994) *Laws of small numbers: extremes and rare events.* — Basel: Birkhaeuser.

[130] Fama E.F. and Roll R. (1968) Some properties of symmetric stable distributions. — J. American Statist. Assoc., v. 63, 817–836.

[131] Feller W. (1971) *An introduction to probability theory and its applications.* — New York: Wiley.

[132] Ferro C.A.T. and Segers J. (2003) Inference for clusters of extreme values. — J. R. Statist. Soc. B, v. 65, No 2, 545–556.

[133] Fisher R.A. and Tippet L.H.C. (1928) Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. — Proc. Cambridge Phil. Soc., v. 24, 180–190.

[134] Fihtengolts G.M. (1947) *A course of differential and integral calculus.* — Moscow: OGIZ.

[135] Franken P. (1963) Approximation der verteilungen von summen unabhängiger nichtnegativer ganzzahliger zufallsgrössen durch Poissonsche verteilungen. — Math. Nachr., v. 27, 303–340.

[136] French K.R. (1980) Stock returns and the weekend effect. — J. Financ. Econom., v. 8, 55–69.

[137] Frolov A.N. and Martikainen A.I. (1999) On the length of the longest increasing run in R^d. — Statist. Probab. Letters, v. 41, 153–161.

[138] Frolov A.N., Martikainen A. and Steinebach J. (2001) On the maximal excursion over increasing runs. — In: Asymptotic methods in probability and statistics with applications (St. Petersburg, 1998), 225–242. Stat. Ind. Technol., Birkhaüser: Boston, MA.

[139] Frolov A.N. (2005) Converses to the Csörgö–Révész laws. — Statist. Probab. Letters, v. 72, 113–123.

[140] Galambos J. (1987) *The asymptotic theory of extreme order statistics.* — Melbourne: R.E.Krieger Publishing Co..

[141] Geary R.C. (1936) The distribution of “Student’s” ratio for non-normal samples. — J. Roy. Statist. Soc., v. 3, 178–184.

[142] Gebelein H. (1941) Das statistische problem der korrelation als variations und eigenwertproblem und sein zusammenhang mit der ausgleichsrechnung. — Z. Angew. Math. Mech., v. 21, 364–379.

[143] Germogenova A.P. and Los A.B. (2005) On the limiting distribution of the Erdös–Rényi maximum of partial sums. — Surveys Appl. Industr. Math. (to appear).

[144] Geske M.X., Godbole A.P., Schaffner A.A., Skolnik A.M. and Wallstrom G.L. (1995) Compound Poisson approximation for word patterns under Markovian hypotheses. — J. Appl. Probab., v. 32, 877–892.

[145] Giné E., Götze F. and Mason D.M. (1997) When is the Student t-statistic asymptotically standard normal? — Ann. Probab., v. 25, No 3, 1514–1531.

[146] Gini C. (1914) Di una misura della relazioni tra le graduatorie di due caratteri. In: Hancini A. *Le elezioni Generali Politiche de 1913 nel comune di Roma*, Rome: Ludovico Cecehini.

[147] Giraitis L., Leipus R. and Philipe A. (2006) A test for stationarity versus trends and unit roots for a wide class of dependent errors. — Econometric Theory, v. 22, No 6, 989–1029.

[148] Godbole A.P., Schaffner A.A. (1993) Improved Poisson approximations for word patterns. — Adv. in Appl. Probab., v. 25, No 2, 334–347.

[149] Goldie C.M. (1991) Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. — Ann. Appl. Probab., v. 1, 126–166.

[150] Goldie C.M. and Smith R.L. (1987) Slow variation with remainder: theory and applications. — Quart. J. Math. Oxford, v. 38, 45–71.

[151] Götze F. On the rate of convergence in the multivariate CLT. — Ann. Probab., v. 19, No 2, 724–739.

[152] Gnedenko B.V. (1943) Sur la distribution du terme maximum d'une série aléatoire. — Ann. Math., v. 44, 423–453.

[153] Gnedenko B.V. and Kolmogorov A.N. (1954) *Limit distributions for sums of independent random variables.* — New York: Addison Wesley.

[154] Goncharov V.L. (1944) On the field of combinatory analysis. — Amer. Math. Soc. Transl., v. 19, No 2, 1–46.

[155] Grigelionis B.I. (1962) Sharpening of a higher-dimensional limit theorem on convergence to the Poisson law. — Litovsk. Mat. Sb., v. 2, No 2, 127–133.

[156] Grill K. (1987) Erdös–Révész type bounds for the length of the longest run from a stationary mixing sequence. — Probab. Theory Rel. Fields, v. 75, No 3, 77–85.

[157] Grin' A. G. (1995) *Limit theorems for weakly dependent variables.* — Doctor Sci. Thesis. Omsk: Omskiy State University.

[158] Gujarati D.N. (2003) *Basic Econometrics.* — McGraw-Hill.

[159] Gusak D., Kukush A., Kulik A., Mishura Y. and Pilipenko A. (2010) *Theory of stochastic processes. With applications to financial mathematics and risk theory.* New York: Springer. ISBN: 978-0-387-87861-4

[160] de Haan L. (1970) *On regular variation and its applications to weak convergence of sample extremes.* — Amsterdam: CWI Tract, v. 32.

[161] de Haan L. and Peng L. (1998) Comparison of tail index estimators. — Statistica Neerlandica, v. 52, No 1, 60–70.

[162] de Haan L. and Rootzen H. (1993) On the estimation of high quantiles. — J. Statist. Plann. Inf., v. 35, 1-13.

[163] Haeusler E. and Teugels J.L. (1985) On asymptotic normality of Hill's estimator for the exponent of regular regulation. — Ann. Statist., v. 13, No 2, 743–756.

[164] Haight F.A. (1967) *Handbook of the Poisson distribution.* — New York: Wiley.

[165] Hall P. (1982) On estimating the endpoint of a distribution. — Ann. Statist., v. 10, No 2, 556–568.

[166] Hall P. and Weissman I. (1997) On the estimation of extreme tail probabilities. — Ann. Statist., v. 25, No 3, 1311–1326.

[167] Hall P. and Welsh A.H. (1984) Best attainable rates of convergence for estimates of parameters of regular variation. — Ann. Statist., v. 12, No 3, 1079–1084.

[168] Hall P. and Welsh A.H. (1985) Adaptive estimates of parameters of regular variation. — Ann. Statist., v. 13, No 1, 331–341.

[169] Hao X., Tang Q., Wei L. (2009) On the maximum exceedance of a sequence of random variables over a renewal threshold. — J. Appl. Probab., v. 46, 559–570.

[170] Heinrich L. (1982) A method of derivation of limit theorems for sums of m-dependent random variables. — Z. Wahrscheinich. verw. Gebiete, v. 60, No 4, 501–515.

[171] Heyde C.C. (1967) On large deviation problems for sums of random variables not attracted to the normal law. — Ann. Math. Statist., v. 38, 1575–1578.

[172] Higson C. (2001) Did Enron's investors fool themselves? — Business Strat. Rev., v. 12, No 4, 1–6.

[173] Hill B.M. (1975) A simple general approach to inference about the tail of a distribution. — Ann. Statist., v. 3, 1163–1174.

[174] Hipp C. (1979) Convergence rates of the strong law for stationary mixing sequences. — Z. Wahrsch. Ver. Geb., v. 49, No 1, 49–62.

[175] Hsing T. (1987) On the characterization of certain point processes. — Stochastic Processes Appl., v. 26, 297–316.

[176] Hsing T. (1988) On the extreme order statistics for a stationary sequence. — Stochastic Processes Appl., v. 29, 155–169.

[177] Hsing T., Hüsler J. and Leadbetter M.R. (1988) On the exceedance point process for stationary sequence. — Probab. Theory Rel. Fields, v. 78, 97–112.

[178] Hsing T. (1991) On tail index estimation for dependent data. — Ann. Statist., v. 19, No 3, 1547–1569.

[179] Hsing T. (1991) Estimating the parameters of rare events. — Stochastic Processes Appl., v. 37, No 1, 117–139.

[180] Hsing T. (1993) Extremal index estimation for a weakly dependent stationary sequence. — Ann. Statist., v. 21, No 4, 2043–2071.

[181] Hsing T. (1995) On the asymptotic independence of the sum and rare values of weakly dependent stationary random variables. — Stochastic Process. Appl., v. 60, No 1, 49–63.

[182] Huber P.J. (1981) Robast Statistics. — New York: Wiley.

[183] Huber C. (1997) Lower bounds for function estimation. — Festschrift for L. le Cam, 245–258, Springer, New York.

[184] Ibragimov I.A. (1959) Some limit theorems for stochastic processes stationary in the strict sense. — Dokl. Akad. Nauk U.S.S.R., v. 125, No 4, 711–714.

[185] Ibragimov I.A. (1975) A remark on the central limit theorem for dependent random variables. — Theory Probab. Appl., v. 20, No 1, 134–140.

[186] Ibragimov I.A. and Linnik Yu.V. (1971) *Independent and stationary sequences of random variables.* — Groningen: Wolters–Noordhoff Publishing, 443 pp.

[187] Ibragimov I.A. and Khasminskii R.Z. (1980) Estimation of distribution плотность. — Zap. Nauch. Sem. LOMI, v. 98, 61–85.

[188] Ibragimov I.A. and Khasminskii R.Z. (1981) *Statistical Estimation.* — Berlin: Springer.

[189] Ibragimov P. and Sharakhmedov S. (1997) On exact constant in Rosenthal's inequality. — Theory Probab. Appl., v. 42, No 2, 341–350.

[190] Ibragimov P. and Sharakhmedov S. (2001) The exact constant in the Rosenthal inequality for random variables with mean zero. — Theory Probab. Appl., v. 46, No 1, 127–132.

[191] Ibragimov P. and Sharakhmedov S. (2001) The best constant in the Rosenthal inequality for nonnegative random variables. — Statist. Probab. Lett., v. 55, 367–376.

[192] Irwin S.H. and Park C.-H. (2007) What do we know about the profitability of Technical Analysis? — J. Economic Surveys, v. 21, No 4, 786–826.

[193] Ivanov V.A. and Novikov A.E. (1977) On the distribution of the time up to the first occurrence of a given number of different l-tuple series. — Theory Probab. Appl., v. 22, No 3, 533–542.

[194] Johnson N. L. and Kotz S. (1969) Discrete distributions. Boston: Houghton Mifflin.

[195] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J. and Denuit M. *Modern actuarial risk theory.* — Boston: Kluwer.

[196] Kallenberg O. (1976) *Random measures.* New York: Academic Press.

[197] Kantorovich L.V. (1942) On the translocation of masses. — Doklady Acad. Sci. USSR, v. 37, 199–201.

[198] Kantorovich L.V. and Akilov G.P. (1977) *Functional Amalysis.* — N.Y.: Pergamon Press.

[199] Karlin S. and Ost F. (1987) Counts of long aligned word matches among random letter sequences. — Adv. Appl. Probab., v. 19, No 2, 293–351.

[200] Karlin S. and Ost F. (1988) Maximal length of common words among random letter sequences. — Ann. Probab., v. 16, No 3, 535–563.

[201] Khamdamov I.M. and Nagaev A.V. (2002) On the role of extreme summands in the sum of random variables. — Theory Probab. Appl., v. 47, No 3, 533–541.

[202] Khintchin A.Y. (1933) *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* — Berlin: Springer.

[203] Kholevo A.S. (1973) A generalization of the RaoЏCramér inequality. — Theory Probab. Appl., v. 18, No 2, 359–362. Poisson and mixed Poisson random sums. — Scandinavian Actuar. J., 1–25.

[204] Kozlov A.M. (2001) On the Erdös–Rényi partial sums: large deviations, conditional behavior. — Theory Probab. Appl., v. 46, No 4, 636–651.

[205] Kolmogorov A.N. and Fomin S.V. (1981) *Elements of the theory of functions and functional analysis.* — Moscow: Nauka; Dover, 1999. ISBN-10: 0486406830.

[206] Kontoyiannis I., Harremoes P. and Johnson O.T. (2005) Entropy and the Law of Small Numbers. — IEEE Trans. Inform. Theory, v. 51, No 2, 466–472.

[207] Kotz S. and Nadarajah S. (2000) Extreme value distributions. Theory and applications. — London: Imperial College Press.

[208] Kulkarni V.G. (1995) Modeling and analysis of stochastic systems. — Chapman & Hall, London. ISBN: 0-412-04991-0

[209] Kusolitsch N. (1982) Longest runs in blocks of random sequences. — Studia Sci. Math. Hungar., v. 17, No 4, 425–428.

[210] Leadbetter M.R. (1974) On extreme values in stationary sequences. — Z. Wahrsch. Ver. Geb., v. 28, 289–303.

[211] Leadbetter M.R. (1983) Extremes and local dependence in stationary sequences. — Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, v. 65, 291–306.

[212] Leadbetter M.R., Lindgren G. and Rootzen H. (1983) Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes. — New York: Springer Verlag.

[213] Leadbetter M.R. and Rootzen H. (1988) Extremal theory for stochastic processes. — Ann. Probab., v. 16, No 2, 431–478.

[214] Lindeberg Y.W. (1922) Eine neue herleitung des exponentialgesetzes in der wahrscheinlichkeitsrechnung. — Math. Z., v. 15, 221–225.

[215] LeCam L. (1965) On the distribution of sums of independent random variables. — In: Proc. Intern. Res. Sem. Statist. Lab. Univ. California, 179–202. New York: Springer-Verlag.

[216] Lee P.M. (1968) Some aspects of infinitely divisible point processes. — Studia Sci. Math. Hungarica, v. 3, 219–224.

[217] Liu R.C. and Brown L.D. (1993) Nonexistence of informative unbiased estimators in singular problems. — Ann. Statist., v. 21, No 1, 1–13.

[218] Lo A.W., Mamaysky H. and Wang J. (2000) Foundations of Technical Analysis: computational algorithms, statistical Inference and empirical implementation. — J. Finance, v. 55, No 4, 1705–1765.

[219] Lorden G. (1970) On excess over the boundary. — Ann. Math. Statist., v. 41, No 2, 520–527.

[220] Loynes R.M. (1965) Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. — Ann. Math. Statist., v. 36, 993–999.

[221] Luenberger D.G. (1998) *Investment Science.* — Oxford: Oxford University Press.

[222] Liapunov A.M. (1901) Nouvelle forme du théorème sur la limite des probabilités. — Mem. Acad. Imp. Sci. St. Peterburg, v. 12, 1–24.

[223] Maller R.A. (1981) A теорема on products of random variables, with applications to regression. — Austral. J. Statist., v. 23, 177–185.

[224] Mandelbrot B.B. (1963) New methods in statistical economics. — J. Political Economy, v. 71, 421–440.

[225] Mansson M. (2000) On compound Poisson approximation for sequence matching. — Combin. Probab. Comput., v. 9, No 6, 529–548.

[226] Markovich N. (2005) On-line estimation of the tail index for heavy-tailed distributions with application to www-trafic. In: Proc. 1st Conf. Next Generation Internet Design Engin., 388–395.

[227] Markovich N. (2007) *Nonparametric analysis of univariate heavy-tailed data.* Chichester: Wiley.

[228] Markowitz H.M. (1952) Portfolio selection. J. Finance, v. 7, No 2, 77–91.

[229] Mason D.M. (1982) Laws of large numbers for sums of extreme values. — Ann. Probab., v. 10, 754–764.

[230] Matthes K., Kerstan J. and Mecke J. (1978) *Infinitely divisible point processes.* — New York: Wiley.

[231] Matthys G. and Beirlant J. (2001) Extreme quantile estimation for heavy-tailed distributions. — Universitair Centrum voor Statistiek, Katholieke Universiteit Leuven: preprint.

[232] McNeil A.J. (1998) On extremes and crashes. — Risk, v. 11, 99–104.

[233] Michel R. (1987) An improved error bound for the compound Poisson approximation of a nearly homogeneous portfolio. — ASTIN Bulletin, v. 17, 165–169.

[234] Mihailov V.G. (1994) Estimates of the accuracy of compound Poisson approximation by the Chen-Stein method. — Obozr. Prikl. Prom. Mat., v. 3, 530 -Ц 548.

[235] Mihailov V.G. (2001) Estimate of the accuracy of compound Poisson approximation for the distribution of the number of matching patterns. — Theory Probab. Appl., v. 46, No 4, 667–675.

[236] Mihailov V.G. (2002) Poisson–type limit theorems for the number of incomplete matches of s–patterns. — Theory Probab. Appl., v. 47, No 2, 343–351.

[237] Михайлов В.Г. (2008) Предельная теорема пуассоновского типа для числа пар почти полностью совпавших цепочек. — Теория вероятностей и ее применения, т. 53, є 1, с. 59Ц71.

[238] Mikosch T. and Stărică C. (2000) Limit theory for the sample autocorrelations and extremes of a GARCH(1,1) process. — Ann. Statist., v. 28, No 5, 1427–1451.

[239] Mikosch T. (2003) Modeling dependence and tails of financial time series. — In: (B.Finkenstaedt and H.Rootzen, eds.) Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment. Chapman & Hall, 185–286.

[240] Mikosch T. and Samorodnitsky G. (2000) The supremum of a negative drift random walk with dependent heavy-tailed steps. — Ann. Probab., v. 28, No 4, 1814–1851.

[241] Mitrinovich D.S. (1970) *Analytic inequalities*. — Berlin: Springer.

[242] de Moivre A. (1738) The doctrine of chances. — H.Woodfall: London.

[243] Mori T. (1976) Limit laws for maxima and second maxima from strong–mixing processes. — Ann. Probab., v. 4, No 1, 122–126.

[244] Mori T. (1977) Limit distributions of two–dimensional point processes generated by strong–mixing sequences. — Yokohama Math. J., v. 25, 155–168.

[245] Mori T.F. (1990) More on the waiting time till each of some given patterns occurs as a run. — Can. J. Math., v. XLII, No 5, 915–932.

[246] Nadaraya E.A. (1964) On estimation regression. — Theory Probab. Appl., v. 9, No 1, 141–142.

[247] Nagaev A.V. (1969) Integral limit theorems for large deviations when Cramér's condition is not fulfilled. — Theory Probab. Appl., v. 14, 51–64 and 193–208.

[248] Nagaev S.V. and Pinelis I.F. (1977) Some inequalities for distributions of sums of random variables. — Theory Probab. Appl., v. 22, No 2, 254–263.

[249] Nagaev S.V. (2002) On the Berry–Esseen bound for the self–normalized sum. — Siberian Math. J., v. 12, No 3, 79–125.

[250] Nagaev S.V. (2005) On large deviations of a self–normalized sum. — Theory Probab. Appl., v. 49, No 4, 704–713.

[251] Nandagopalan S. (1994) On the multivariate extremal index. — J. Res. Nat. Inst. Stand. Technol., v. 99, 543–550.

[252] Newell G.F. (1964) Asymptotic extremes for m–dependent random variables. — Ann. Math. Statist., v. 35, 1322–1325.

[253] Nikulin V. and Paditz L. (1998) A note on non-uniform CLT-bounds . — Abstr. Commun. 7-th Vilnius Conf. Probab. Theory Math. Statistics. Vilnius: TEV, 358–359.

[254] Novak S.Y. (1988) Time intervals of constant sojourn of a homogeneous Markov chain in a fixed subset of states. — Siberian Math. J., v. 29, No 1, 100–109.

[255] Novak S.Y. (1989) Asymptotic expansions in the problem of the longest head–run for a Markov chain with two states. — Trudy Inst. Math. (Novosibirsk), 1989, v. 13, 136–147 (in Russian).

[256] Novak S.Y. and Utev S.A. (1990) On the asymptotic distribution of the ratio of sums of random variables. — Siberian Math. J., v. 31, 781–788.

[257] Novak S.Y. (1991) Rate of convergence in the limit theorem for the length of the longest head run. — Siberian Math. J., v. 32, No 3, 444–448.

[258] Novak S.Y. (1991) On the distribution of the maximum of a random number of random variables. — Theory Probab. Appl., v. 36, No 4, 714–721.

[259] Novak S.Y. (1992) Longest runs in a sequence of m–dependent random variables. — Probab. Theory Rel. Fields, v. 91, 269–281.

[260] Novak S.Y. (1992) Inference about the Pareto–type distribution. — In: Trans. 11-th Prague Conf. Inform. Theory Statist. Decis. Func. Random Processes. Prague: Academia, v. B, 251–258.

[261] Novak S.Y. (1993) On the asymptotic distribution of the number of random variables exceeding a given level. — Siberian Adv. Math., v. 3, No 4, 108–122.

[262] Novak S.Y. (1994) Asymptotic expansions for the maximum of random number of random variables. — Stochastic Process. Appl., v. 51, No 2, 297–305.

[263] Novak S.Y. (1994) Poisson approximation for the number of long "repetitions"in random sequences. — Theory Probab. Appl., v. 39, No 4, 593–603.

[264] Novak S.Y. (1995) Long match patterns in random sequences. — Siberian Adv. Math., v. 5, No 3, 128–140.

[265] Novak S.Y. (1996) On the distribution of the ratio of sums of random variables. — Theory Probab. Appl., v. 41, No 3, 479–503.

[266] Novak S.Y. (1996) On extreme values in stationary sequences. — Siberian Adv. Math., v. 6, No 3, 68–80.

[267] Novak S.Y. (1997) On the Erdös–Rényi maximum of partial sums. — Theory Probab. Appl., v. 42, No 3, 254–270.

[268] Novak S.Y. (1997) Statistical estimation of the maximal eigenvalue of a matrix. — Russian Math. (Izvestia Vys. Ucheb. Zaved.), v. 41, No 5, 46–49.

[269] Novak S.Y. (1998) On the limiting distribution of extremes. — Siberian Adv. Math., v. 8, No 2, 70–95.

[270] Novak S.Y. and Weissman I. (1998) On the joint distribution of the first and the second maxima. — Commun. Statist. Stochastic Models, v. 14, No 1, 311–318.

[271] Novak S.Y. (1999) On the mode of an unknown probability distribution. — Theory Probab. Appl., v. 44, No 1, 119–123.

[272] Novak S.Y. (1999) Generalised kernel плотность estimator. — Theory Probab. Appl., v. 44, No 3, 634–645.

[273] Novak S.Y. (2000) On self–normalized sums. — Math. Methods Statist., v. 9, No 4, 415–436; (2002) v. 11, No 2, 256–258.

[274] Novak S.Y. (2002) Multilevel clustering of extremes. — Stochastic Process. Appl., v. 97, No 1, 59–75.

[275] Novak S.Y. (2002) Inference on heavy tails from dependent data. — Siberian Adv. Math., v. 12, No 2, 73–96. (Preprint: Eurandom research report No 99–043, Technical University of Eindhoven, 1999).

[276] Novak S.Y. (2003) On the accuracy of multivariate compound Poisson approximation. — Statist. Probab. Lett., v. 62, No 1, 35–43.

[277] Novak S.Y. (2004) On Student's statistics and self-normalised sums. — Theory Probab. Appl., v. 49, No 2, 365–373.

[278] Novak S.Y. (2006) A new characterization of the normal law. — Statist. Probab. Letters, v. 77, No 1, 95–98.

[279] Novak S.Y. (2007) Measures of financial risks and market crashes. — Theory Stochast. Processes, v. 13, No 1, 182–193.

[280] Novak S.Y. (2009) Advances in Extreme Value Theory with Applications to Finance. — In: "New Business and Finance Research Developments 199–251, Nova Science, New York. ISBN: 978-1-60456-074-9.

[281] Novak S.Y. (2010) Lower bounds to the accuracy of sample maximum estimation. — Theory Stochast. Processes, v. 15(31), No 2, 156–161.

[282] Novak S.Y. (2010) Impossibility of consistent estimation of the distribution function of a sample maximum. — Statistics, v. 44, No 1, 25–30.

[283] Novak S.Y. (2011) Lower bounds to the accuracy of tail index estimation. — Theory Probab. Appl., accepted.

[284] Novak S.Y. (2011) On lower bounds to the accuracy of non-parametric estimation. — Bernoulli, accepted.

[285] Novak S.Y. and Beirlant J. (2006) The magnitude of a market crash can be predicted. — J. Banking & Finance, v. 30, 453–462. (Preprint: The magnitude of a market crash can be predicted. — Brunel University of West London, Technical Report TR16/02, 2002)

[286] Novak S.Y., Dalla V. and Giraitis L. (2007) Evaluating currency risk in emerging markets. — Acta Appl. Math., v. 97, 163–175.

[287] Novak S.Y. and Xia A. (2011) On exceedances of high levels. — Stochastic Process. Appl., v. 121, No 12.

[288] O'Brien G.L. (1974) Limit theorems for the maximum term of a stationary process. — Ann. Probab., v. 2, No 3, 540–545.

[289] O'Brien G.L. (1974) The maximum term of uniformly mixing stationary processes. — Z. Wahrsch. Ver. Geb., v. 30, 57–63.

[290] O'Brien G.L. (1980) A limit теорема for sample maxima and heavy branches in Galton-Watson trees. — J. Appl. Probab., v. 17, No 2, 539–545.

[291] O'Brien G.L. (1986) Extreme values for stationary for stationary processes. — In: *Dependence in Probability and Statistics* (E.Eberlein and M.S.Taqqu, eds.), 165–192. Boston: Birkhäuser.

[292] O'Brien G.L. (1987) Extreme values for stationary and Markov sequences. — Ann. Probab., v. 15, No 1, 281–291.

[293] Ortega J. and Wschebor M. (1984) On the increments of a Wiener process. — Z. Wahr. verw. Geb., v. 65, 329–339.

[294] Osipov L.V. (1971) Asymptotic expansions for the distributions of sums of independent random variables. — Theory Probab. Appl., v. 16, 328–338.

[295] Osipov L.V. (1972) Asymptotic expansions of the distribution function of a sum of random variables with non uniform estimates for the remainder term. Vestnik Leningrad. Univ. No 1, 51–59. (Russian)

[296] Osler C. and Chang K. (1995) Head and shoulders: not just a flaky pattern. — Staff Report No 4, Federal Reserve Bank of New York.

[297] Paditz L. (1989) On the analytical structure of the constant in the nonuniform version of the Esseen inequality. — Statistics, v. 20, No 3, 453–464.

[298] Paley R.E. and A.Zygmund (1932) A note on analytic functions in the unit circle. — Proc. Camb. Phil. Soc., v. 28, 266–272.

[299] Paulauskas V. (2003) A new estimator for a tail index. — Acta Appl. Math., v. 79, No 1-2, 55–67.

[300] Peligrad M. (1982) Invariance principle for mixing sequences. — Ann. Probab., v. 10, No 4, 968–981.

[301] Palmowski Z. and Zwart B. (2007) Tail asymptotics of the supremum of a regenerative process. — J. Appl. Probab., v. 44, No 2, 349–365.

[302] Peng L. (1998) Asymptotically unbiased estimators for the extreme-value index. — Statist. Probab. Lett., v. 38, No 2, 107–115.

[303] Peng Z. and Nadarajah S. (2002) On the joint limiting distribution of sums and maxima of stationary normal sequences. — Theory Probab. Appl., v. 47, No 4, 706–708.

[304] Petrov V.V. (1975) *Sums of independent random variables.* Berlin: Springer.

[305] Petrov V.V. (1995) *Limit theorems of probability theory.* Oxford: Clarendon Press.

[306] Pfanzagl J. (2000) On local uniformity for estimators and confidence limits. — J. Statist. Plann. Inference, v. 84, 27–53.

[307] Pfanzagl J. (2001) A nonparametric asymptotic version of the Cramér-Rao bound. — State of the art in probability and statistics (Leiden, 1999), 499–517, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., v. 36, Inst. Math. Statist., Beachwood, OH.

[308] Pflug G.C. (2000) Some remarks on the Value-at-Risk and the conditional Value-at-Risk. — In: Probabilistic constrained optimization: Methodology and Applications, (S.Uryasev, ed.), 272–281. Kluwer: Netherlands.

[309] Pickands J. (1971) The two-dimensional Poisson process and extremal processes. — J. Appl. Probab., v. 8, 745–756.

[310] Pinelis I.F. and Molzon R. (2011) Berry-Esseen bounds for general nonlinear statistics, with applications to Pearson's and non-central Student's and Hotelling's. — Bernoulli (submitted).

[311] Pittenger A.O. (1994) Length of the longest non-decreasing subsequence on two symbols. — Runs and patterns in probability: selected papers, 83–89, Math. Appl., v. 283. Dordrecht: Kluwer.

[312] Питербарг В.И. (1991) О больших скачках случайного блуждания. — Теория Вероятн. Примен., т. 36, є 1, 54Ц64.

[313] Pitman E.J.G. (1979) *Some basic theory for statistical inference.* — London: Chapman and Hall.

[314] Poser S.W. (2003). *Applying Elliott wave theory profitably.* — New York: Wiley. ISBN 0471420077.

[315] Prawitz H. (1972) Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain. — Scand. Aktuartids., 138–154.

[316] Prokhorov Y.V. (1953) Asymptotic behavior of the binomial distribution. — Uspehi Matem. Nauk, v. 8, No 3(55), 135–142.

[317] Prechter R.R. and Parker W.D. (2007). The financial/economic dichotomy in social behavioral dynamics: the socionomic perspective. — J. Behavioral Finance, v. 8, No 2, 84–108.

[318] Raab M. (1997) *On the number of exceedances in Gaussian and related sequences.* — PhD thesis. Stockholm: Royal Institute of Technology.

[319] Rachev S.T. (1984) The Monge–Kantorovich problem on mass transfer and its stochastic applications. — Theory Probab. Appl., v. 29, No 4, 625–653.

[320] Reinert G. (2005) Three general approaches to Stein's method. — In: An introduction to Stein's method, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., v. 4, 183–221. Singapore Univ. Press, Singapore.

[321] Reinert G. and Schbath S. (1998) Compound Poisson and Poisson process approximations for occurrences of multiple words. — J. Comput. Biol., v. 5, 223–253.

[322] Reiss R.–D. (1989) *Approximate distributions of order statistics with applications to nonparametric statistics.* Berlin: Springer.

[323] Rényi A. (1967) Remarks on the Poisson process. — Studia Sci. Math. Hungar., v. 5, 119-Ц123.

[324] Rényi A. (1970) *Probability Theory.* Amsterdam: North–Holland.

[325] Resnick S.I. (1975) Weak convergence to extremal processes. — Ann. Probab., v. 3, 951–960.

[326] Resnick S.I. (1987) Extreme values, regular variation, and point processes. — Springer-Verlag, New York.

[327] Resnick S.I. (1997) Heavy tail modeling and teletraffic data. — Ann. Statist., v. 25, No 5, 1805–1869.

[328] Resnick S.I. (1997) Discussion of the Danish data on large fire insurance losses. — Astin Bulletin, v. 27, No 1, 139–151.

[329] Resnick S., Samorodnitsky G. and Xue F. (1998) How misleading can sample ACF's of stable MA's be? — Preprint. www.orie.cornell.edu/gennady/techreports

[330] Resnick S. and Starica C. (1997) Smoothing the Hill estimator. — Adv. Appl. Probab., v. 29, No 1, 271–293.

[331] Resnick S. and Stărică C. (1998) Tail index estimation for dependent data. — Ann. Appl. Probab., v. 8, No 4, 1156–1183.

[332] Révész P. (1982) On the increments of Wiener and related processes. — Ann. Probab., v. 10, 613–622.

[333] Révész P. (1990) *Random walk in random and non–random environments.* Singapore: World Scientific.

[334] Rio E. (1996) Sur le thèoréme de Berry-Esseen pour les suites faiblement dependantes. — Probab. Theory Related Fields, v. 104, No 2, 255–282.

[335] Riordan J. (1968) *Combinatorial identities.* — New York: Wiley.

[336] Rice J. and Rosenblatt M. (1976) Estimation of the log-survivor function and hazard estimation. — Sankhyā Ser. A, v. 38, No 1, 60–78.

[337] Robert C.Y. (2005) Asymptotic probabilities of an exceedance over renewal threshold with an application to risk theory. — J. Appl. Probab., v. 42, No 1, 153–162.

[338] Robin S. and Daudin J.-J. (1999) Exact distribution of word occurrences in a random sequence of letters. — J. Appl. Probab., v. 36, 179–193.

[339] Rockafellar R.T. and Uryasev S. (1999) Optimization of conditional Value-at-Risk. — http://www.ise.ufl.edu/uryasev

[340] Roos M. (1994) Stein's method for compound Poisson approximation: the local approach. — Ann. Appl. Probab., v. 4, No 4, 1177–1187.

[341] Roos B. (1998) Metric multivariate Poisson approximation of the generalized multinomial distribution. — Theory Probab. Appl., v. 43, 306–315.

[342] Roos B. (1999) On the rate of multivariate Poisson convergence. — J. Multivar. Anal., v. 69, 120–134.

[343] Roos B. (1999) Asymptotic and sharp bounds in the Poisson approximation to the Poisson-binomial distribution. — Bernoulli, v. 5, No 6, 1021–1034.

[344] Roos B. (2001) Sharp constants in the Poisson approximation. — Statist. Probab. Letters, v. 52, 155–168.

[345] Rosenblatt M. (1956) A central limit теорема and a strong mixing condition. — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 42, 43–47.

[346] Rootzén H. (1988) Maxima and exceedances of stationary Markov processes. — Adv. Appl. Probab., v. 20, 371–390.

[347] Rozovsky L.V. (1998) On the Cramér series coefficients. — Theory Probab. Appl., v. 43, No 1, 152–157.

[348] Robertson H.P. (1929) The uncertainty principle. — Physical Review, v. 34, 163–164.

[349] Salihov N.P. (1996) An estimate for the concentration function by the Esseen method. — Theory Probab. Appl., v. 41, No 3, 504–518.

[350] Sahanenko A.I. (1992) Berry-Esseen type estimates for large deviation probabilities. — Siberian Math. J., v. 32, 647–656.

[351] Samarova S.S. (1981) On the length of the longest head–run for the Markov chain with two states. — Theory Probab. Appl., v. 26, No 3, 499–509.

[352] Sazonov V.V. (1974) Estimating moments of sums of random variables. — Theory Probab. Appl., v. 19, No 2, 383–386.

[353] Schbath S. (1995) Compound Poisson approximation of word counts in DNA sequences. — ESAIM Probab. Statist., v. 1, 1–16.

[354] Schbath S. (1997) An efficient statistic to detect over- and under-represented words in DNA sequences. — J. Comp. Biol., v. 4, 61–82.

[355] Schbath S. (2000) An overview on the distribution of word counts in Markov chains. — J. Comput. Biology, v.7, 193–201.

[356] Segers J. (2001) Extremes of a random sample: limit theorems and statistical applications. — PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven.

[357] Seneta E. (1976) *Regularly Varying Functions.* — Lecture Notes Math., v. 508. Berlin: Springer.

[358] Serfling R.J. (1975) A general Poisson approximation theorem. — Ann. Probab., v. 3, No 4, 726–731.

[359] Serfling R.J. (1978) Some elementary results on Poisson approximation in a sequence of Bernoulli trials. — SIAM Review, v. 20, No 3, 567–579.

[360] Serfling R.J. (1980) *Approximation theorems of mathematical statistics.* Chichester: Wiley.

[361] Sethuraman J. and Singpurwalla N.D. (1981) Large sample estimates and uniform confidence bounds for the failure-rate function based on a naive estimator. — Ann. Statist., v. 9, No 3, 628–632.

[362] Sevastyanov B.A. (1972) Limit Poisson law in a scheme of dependent random variables. — Theory Probab. Appl., v. 17, No 4, 733–737.

[363] Shao Qi-Man (2005) An explicit Berry-Esseen bound for Student's t-statistic via Stein's method. — In: Stein's method and applications, Lect. Notes Ser. Inst. Math. Sci. Natl. Univ. Singap., 143–155. Singapore Univ. Press, Singapore.

[364] Sharakhmetov Sh. (1986) Moment inequality for sums of weakly dependent random variables and its application. — In: *Abstracts 20th Sch. Probab. Theory Math. Statist.*, p. 60. Tbilisi: Tbilisi University Press.

[365] Sharakhmetov Sh. (1995) The Berry-Esseen inequality for Student's statistic. — Uzbek. Mat. Zh., v. 2, 101–112. (Russian)

[366] Sharakhmetov Sh. (1996) The strong law of large numbers for dependent random variables. — Theory Probab. Math. Statist., v. 53, 183–189.

[367] Shepp L. (1964) Normal functions of normal random variables. — SIAM Rev., v. 6, 459–460.

[368] Shergin V.V. (1990) The central limit теорема for finitely dependent random variables. — In: *Probab. Theory Math. Statistics. Proceed. 5th Intern. Vilnius Conf.*, v. 2, 424–431. Vilnius: Mokslas.

[369] Шевцова И.Г. (2013) Об абсолютных константах в неравенстве Берри-Эссеена. — Информ. Примен., т. 7, No 1, 124–125.

[370] Shiganov I.S. (1982) On a sharper constant in a remainder term of CLT. *In: Stability Problems of Stochastic Models.* Moscow: VNIISI, 109–115. (Russian)

[371] Shorgin S.Y. (1977) Approximation of a generalized binomial distribution. — Theory Probab. Appl., v. 22, No 4, 846–850.

[372] Singpurwalla N.D. and Wong M.-Y. (1983) Kernel estimators of the failure–rate function and плотность estimation: an analogy. — J. Amer. Statist. Assoc., v. 78, No 382, 478–481.

[373] Skorohod A.V. (1956) Limit theorems for stochastic processes. — Theory Probab. Appl., v. 1, 261–290.

[374] Slavova V.V. (1985) On the Berry–Esseen bound for Student's statistic. — Lecture Notes Math., v. 1155, 335–390.

[375] Smith R.L. (1987) Estimating tails of probability distributions. — Ann. Statist., v. 15, No 3, 1174–1207.

[376] Smith R.L. (1988) Extreme value theory for dependent sequences via the Stein–Chen method of Poisson approximation. — Stoch. Proc. Appl., v. 30, No 2, 317–327.

[377] Smith R.L. (1988) A counterexample concerning the extremal index. — Adv. Appl. Probab., v. 20, 681–683.

[378] Smith R.L. and Weissman I. (1994) Estimating the extremal index. — J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, v. 56, No 3, 515–528.

[379] Stam A.J. (1959) Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon. — Inform. Control, v. 2, 101–112.

[380] Stărică C. (1999) On the tail impirical process of solutions of stochastic difference equations. — Chalmers University: Preprint. http://www.math.chalmers.se/ starica/resume/publi1.html

[381] Stein C. (1986) *Approximate computation of expectations.* — Hayward, California: Institute of Mathematical Statistics.

[382] Stein C., Diaconis P., Holmes S. and Reinert G. (2004) Use of exchangeable pairs in the analysis of simulations. — In: Stein's method: expository lectures and applications. IMS Lect. Notes Monogr. Ser., v. 46, 1–26, Inst. Math. Statist., Beachwood, OH.

[383] Steinebach J. (1998) On a conjecture of Révész and its analogue for renewal processes. — In: Asymp. Methods Probab. Statist. (B.Szyszkowicz, ed.), 311–322.

[384] Gossett W.S. (Student) (1908) The probable error of a mean. — Biometrika, v. 6, 1–25.

[385] Sunklodas J. (1991) Approximation of distributions of sums of weakly dependent random variables by the normal distribution. — In: *Itogi Nauki i Tekhniki*, v. 6, 140–199. Moscow: Vsesoyuz. Inst. Nauchn. Tekhn. Inform..

[386] Takahata H. (1981) L_∞-bound for asymptotic normality of weakly dependent summands using Stein's method. — Ann. Probab., v. 9, No 4, 676–683.

[387] Tan W. and Chang W. (1972) Some comparisons of the method of moments and the method of maximum likelihood in estimating parameters of a mixture of two normal densities. — J. Amer. Statist. Assoc., v. 67, No 339, 702–708.

[388] Teerapabolarn K. (2007) A bound on the Poisson-Binomial relative error. — Statist. Method., v. 4, 407–415.

[389] Terrel G.R. and Scott D.W. (1980) On improving convergence rates for nonnegative kernel density estimators. — Ann. Statist., v. 8, No 5, 1160–1163.

[390] Tikhomirov A.N. (1980) On the rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent variables. — Theory Probab. Appl., v. 25, 790–809.

[391] Tikhomirov A.N. (1995) *Rate of convergence in limit theorems теоремы for weakly dependent variables.* — Doctor Sci. Thesis. Syktyvkar: Syktyvkar State University.

[392] Tikhomirov A.N. (1996) Rate of convergence in limit theorems теоремы for weakly dependent variables. — Vest. Syktyvkar. Univer., ser. 1, No 2, 91–110. (Russian)

[393] Timashev A.N. (1998) On asymptotic expansions in the domain of large deviations for binomial and Poisson distributions. — Theory Probab. Appl., v. 43, No 1, 89–98.

[394] Tsaregradskii I.P. (1958) On uniform approximation of the binomial distribution with infinitely divisible laws. — Theory Probab. Appl., v. 3, No 4, 470–474.

[395] Ulyanov V.V. (1978) Some improvements of estimates for the rate of convergence in the central limit theorem. — Theory Probab. Appl., v. 23, No 3, 684–688; v. 24, No 1, 236.

[396] Utev S.A. (1989) Sums of φ-mixing random variables. — Trudy Inst. Mat. (Novosibirsk), v. 13, 78–100 (in Russian). Transl: Siberian Adv. Math., 1991, v. 1, No 3, 124–155.

[397] Utev S.A. (1990) On the central limit теорема for φ-mixing triangle arrays of random variables. — Theory Probab. Appl., v. 35, No 1, 131-139.

[398] Utev S. A. (1990) Central limit теорема for dependent random variables. — In: *Probab. Theory Math. Statistics. Proceed. 5th Intern. Vilnius Conf.*, v. 2, 519–528. Vilnius: Mokslas.

[399] Veretennikov A. (2007) On asymptotic information integral inequalities. — Th. Stichast. Processes, v. 13, No 1, 294–307.

[400] Volkonskiy V.A. and Rozanov Yu. A. (1959) Some limit theorems for random functions I. — Theory Probab. Appl., v. 4, No 2, 178–197.

[401] Wang Q. (2002) Non-uniform Berry-Esseen bound for U-statistics. — Statist. Sinica, v. 12, No 4, 1157–1169.

[402] Wang Q. and Jing B.-Y. (1999) An exponential nonuniform Berry–Esseen bound for self–normalized sums. — Ann. Probab., v. 27, No 4, 2068–2088.

[403] Watson G.S. (1954) Extreme values in samples from m-dependent stationary stochastic processes. — Ann. Math. Statist., v. 25, 798–800.

[404] Watson G.S. (1964) Smooth regression analysis. — Sankhyā, Ser. A, v. 26, 359–372.

[405] Watson G.S. and Leadbetter M.R. (1964) Hazard analysis I. — Biometrika, v. 51, 175–184.

[406] Weyl H. (1931) *The theory of groups and quantum mechanics.* — New York: Dover Publications.

[407] Weissman I. (1978) Estimation of parameters and large quantiles based on k largest observations. — J. Amer. Statist. Assoc., v. 73, 812–815.

[408] Weissman I. and Novak S.Y. (1998) On blocks and runs estimators of extremal index. — J. Statist. Planning Inference, v. 66, No 2, 281–288.

[409] Welsch R.E. (1972) Limit laws for extreme order statistics from strong-mixing processes. — Ann. Math. Statist., v. 43, No 2, 439–446.

[410] Williams B.M. and Gregory-Williams J. (2004) *Trading Chaos.* — New York: Wiley.

[411] Xia A. (1997) On using the first difference in the Stein-Chen method. — Ann. Appl. Probab., v. 7, No 4, 899–916.

[412] Xia A. (2005) Stein's method and Poisson process approximation. — In: *An introduction to Stein's method* (A.D.Barbour and L.H.Y.Chen, eds.) Singapore: World Scientific, 115–181.

[413] Xia A. and Zhang M. (2009) On approximation of Markov binomial distributions. — Bernoulli, v. 15, 1335–1350.

[414] Yannaros N. (1991) Poisson approximation for random sums of Bernoulli random variables. — Statist. Probab. Lett., v. 11, 161–165.

[415] Зайцев А.Ю. (1983) О точности аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин, отличных от нуля с малой вероятностью, с помощью сопровождающих законов. — Теория Вероятн. Примен., т. 28, є 4, 625–636.

[416] Зайцев А.Ю. (2003) Об аппроксимации выборки пуассоновским точечным процессом. — Записки научных семинаров ПОМИ, т. 298, 111–125.

[417] Zubkov A.M. and Mihailov V.G. (1979) On the repetitions of s–tuples in a sequence of independent trials. — Theory Probab. Appl., v. 24, No 2, 267–279.

[418] Zuparov T.M. (1991) On the rate of convergence in the central limit theorem for weakly dependent random variables. — Theory Probab. Appl., v. 36, No 4, 783–792.

Список сокращений

АДИ	асимптотический доверительный интервал
б.ч.	бесконечно часто
ВПС	метод построения оценок по верхним порядковым статистикам
ВВУ	метод построения оценок по элементам выборки, выходящим за высокий неслучайный уровень
VaR	мера риска "Value-at-Risk"
ДНСУ	длина наибольшей серии "успехов"
ДНОФ	длина наибольшего общего фрагмента
$\mathbb{D}$	дисперсия
$\mathbb{E}$	математическое ожидание
ЗБЧ	закон больших чисел
K_*, K^*	левая и правая грани распределения
МЧС	максимум частичных сумм
н.о.р.	независимые одинаково распределённые
ОВП	общее вероятностное пространство
ОМП	оценка максимального правдоподобия
ПАДИ	подасимптотический доверительный интервал
п.н.	почти наверное
ПСУХР	показатель скорости убывания хвоста распределения
СКО	средне-квадратичная ошибка
с.в.	случайная величина
с в. 1	с вероятностью 1
СНС	самонормированная сумма случайных величин
ТЭЗ	теория экстремальных значений
ф.р.	функция распределения
х.ф.	характеристическая функция
CVaR	мера риска "условная VaR"
ЦПТ	центральная предельная теорема

Обозначения

A^c	дополнение множества A
$a_n \lesssim b_n$	$a_n \le b_n(1+o(1))$
$a_n \gtrsim b_n$	$a_n \ge b_n(1+o(1))$
$\mathcal{B}(\cdot)$	Борелева σ–алгебра
$\mathbf{B}(p)$	распределение Бернулли
$\mathbf{B}(n,p)$	Биномиальное распределение
∂B	граница множества B
$\mathbf{\Gamma}(p)$	Геометрическое распределение
$\mathbf{E}(a)$	Экспонкециальное распределение
F_c	$1-F$
$\mathcal{L}(X)$	распределение случайной величины X
Λ	функция уклонений (6.17)
$\mathbf{K}(0;1)$	распределение Коши
$\mathbf{NB}(n,p)$	отрицательно биномиальное распределение
$\mathbb{N}$	множество натуральных чисел
$\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$	нормальное (Гауссовское) распределение
$\mathbf{\Pi}(\lambda)$	распределение Пуассона
$\mathbf{\Pi}(\lambda,\zeta)$	сложно-пуассоновское распределение
Φ	ф.р. стандартного нормального закона
T_k	распределение Стьюдента
$\mathbf{U}(0;1)$	равномерное распределение на интервале $(0;1)$
$\mathbf{Z}$	множество целых чисел
$\lceil x \rceil$	$\min\{k \in \mathbb{N} : k \ge x\}$
$\mathcal{R}(\bar{t})$	класс последовательностей (6.26)
$x^{(m)}$	$x(x-1)\ldots(x-m+1)$
$\Rightarrow$	слабая сходимость
$\emptyset$	пустое множество
сумма по $\emptyset$	0

Операция умножения считается первичной по отношению к операции деления. Неопределённость вида $0/0$ считается равной нулю, за исключением случая, когда числитель равен знаменателю (в этом случае полагаем $0/0 := 1$).

Оглавление