

Санкт-Петербургское Отделение Математического Института  
имени В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

ПЕСТОВ Андрей Леонидович

**ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДАННЫХ ОБРАТНОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ  
ДВУХСКОРОСТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ  
СИСТЕМЫ**

01.01.03 – математическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.,

Белишев М. И.

Санкт-Петербург – 2015

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Начально-краевая задача</b> . . . . .	15
1.1. Постановка . . . . .	15
1.2. Разрешимость . . . . .	16
1.3. Фундаментальное решение . . . . .	29
1.4. Оператор реакции . . . . .	40
1.5. Медленные волны . . . . .	42
<b>Глава 2. Динамическая система</b> . . . . .	49
2.1. Атрибуты . . . . .	49
2.2. Управляемость . . . . .	57
2.3. Амплитудная формула . . . . .	64
<b>Глава 3. Характеризация оператора <math>R^{2T}</math></b> . . . . .	87
3.1. Основной результат . . . . .	87
3.2. Система $\mathfrak{s}_l^{T'}$ . . . . .	88
3.3. Система $\mathfrak{s}^T$ . . . . .	110
3.4. Представления для $A$ и $B$ . . . . .	112
3.5. Система с нулевой функцией отклика . . . . .	126
<b>Литература</b> . . . . .	133

## Введение

В работе изучается обратная задача для одномерной двухскоростной динамической системы, и дается характеристическое описание ее данных. Особенность двухскоростных систем состоит в том, что в них имеются волны двух типов, распространяющиеся с различными скоростями и взаимодействующие между собой. Это взаимодействие приводит к интересным физическим эффектам и, в то же время, осложняет исследование системы.

Многоскоростные системы встречаются в важных приложениях: геофизике, акустике, механике, теории упругости. Примерами из последней области служат балка Тимошенко (см. [16], [23]), стержень с остаточными напряжениями (см. [27], [28]), слоистые анизотропные среды (см. [22], [33]), композитная балка (см. [29], [30]). В качестве примера из электротехники упомянем систему взаимодействующих кабельных линий. В оптике двухскоростной системой является двулучепреломляющее оптическое волокно (см. [32]). Соответствующие обратные задачи состоят в определении параметров таких систем по той или иной информации о решении, извлекаемой из внешних наблюдений (например, по измерениям на конце балки или оптического волокна).

В работе используется метод граничного управления (boundary control method или ВС-метод). Он основан на связях обратных задач с теорией управления. ВС-метод был предложен М. И. Белишевым в 1986 году для решения многомерной обратной задачи о восстановлении плотности (см. [3]). Это подход комплексного характера, использующий результаты теории управления и теории систем, асимптотические методы для уравнений в частных производных (геометрическую оптику), функциональный анализ и др.

**Цель и результаты работы.** Рассматривается начально-краевая задача

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

( $0 < T < \infty$ ). Ее решение  $u = u^f(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^f(x, t) \\ u_2^f(x, t) \end{pmatrix}$  описывает *волну*, инициированную *граничным управлением*  $f$  и распространяющуюся вдоль полуоси  $x \geq 0$ . Здесь  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  суть гладкие вещественные  $2 \times 2$  матрицы-функции от  $x \geq 0$ ;  $\rho = \text{diag} \{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\gamma = \text{diag} \{\gamma_1, \gamma_2\}$  — матрицы с положительными элементами. Матрицы  $A$  и  $B$  удовлетворяют соотношениям  $A^{\text{tr}} = -A$ ,  $\frac{dA}{dx} = B - B^{\text{tr}}$ , ( $\text{tr}$  — транспонирование). Кроме того выполнены условия  $0 < \sqrt{\frac{\gamma_2}{\rho_2}} < \sqrt{\frac{\gamma_1}{\rho_1}}$ .

Обратная задача состоит в восстановлении параметров (матричных коэффициентов)  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  системы по ее оператору реакции

$$R^{2T} : f \mapsto \gamma(0)u_x^f|_{x=0},$$

который описывает реакцию системы на действие граничных управлений.

Главная цель работы — дать характеристическое описание оператора  $R^{2T}$ , т. е. привести необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи.

В рассматриваемой обратной задаче неизвестные матричные коэффициенты  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  описываются *восемью* независимыми скалярными функциями, в то время как оператор  $R^{2T}$  задается набором, содержащим *три* функции и шесть чисел. В этой ситуации ожидать однозначного определения всех коэффициентов не приходится, и встает вопрос о ее разрешимости: при каких условиях на  $R^{2T}$  существует хотя бы одна система с таким оператором реакции?

Ответ дает Теорема 4 (см. раздел 3.1), которая устанавливает необходимые и достаточные условия на оператор  $R^{2T}$ , гарантирующие существование системы с таким оператором реакции. Доказательство Теоремы 4 следует схе-

ме работы [7]. Однако оно проводится в более сложной ситуации: при наличии большего числа свободных параметров, задающих динамическую систему<sup>1</sup>. Доказательство достаточности конструктивно: предложена процедура, восстанавливающая систему по оператору реакции  $R^{2T}$ . В процедуре предусмотрен выбор свободных параметров, за счет чего восстанавливаются *все* системы этого вида, обладающие заданным оператором реакции. Основная проблема (и трудность) состояла в их непротиворечивом выборе. Процедура использует красивый физический эффект — существование медленных волн. Эти волны суть смеси быстрой и медленной мод, распространяющиеся (несмотря на взаимодействие мод) со скоростью медленной моды. Главный фрагмент процедуры — т. н. *амплитудная формула*, основной инструмент решения обратных задач методом граничного управления (см. [7], [24]).

**Известные результаты.** Задачи подобного типа изучались ранее. В качестве примеров классических одномерных задач упомянем следующие:

- восстановление плотности неоднородной струны;
- восстановление коэффициента  $q = q(x)$  в уравнении струны  $u_{tt} - u_{xx} + qu = 0$ .

Впервые различные вариации этих задач были решены в 60–70 гг. А. С. Благовещеским (см. [13], [26]). В качестве главного инструмента решения обратной задачи использовались аналоги уравнений Крейна и Гельфанда–Левитана, которые выводились в рамках чисто динамических рассуждений, без привлечения преобразования Фурье по времени и спектральной техники. Позже эти задачи были решены и ВС-методом (см. [4], [1]), первоначально предложенным для решения *многомерных* обратных задач.

В работе [25] изучалась обратная задача для одномерной двухскоростной динамической системы, в которой распространение волн описывается гипербо-

---

<sup>1</sup> В частности, в отличие от [7] скорости мод не предполагаются постоянными.

лической системой уравнений

$$\rho u_{tt} - u_{xx} + Au_x + Bu =: \mathcal{L}u = 0$$

с  $2 \times 2$  матричными коэффициентами, постоянной положительной матрицей  $\rho$  и самосопряженным оператором  $\mathcal{L}$ . Оператор реакции системы имеет вид

$$R^{2T} = -\rho^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} + \int_0^t r(t-s)(\cdot)(s) ds$$

с симметрической матрицей-функцией  $r$ .

Данная матрица, в силу самосопряженности оператора  $\mathcal{L}$ , задается тремя функциями  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{22}$ , в то время как искомые матрицы  $A$  и  $B$  описываются четырьмя функциями. Правило подсчета параметров требует добавления в данные задачи еще одного параметра. В [25] было установлено существование волн, распространяющихся с медленной скоростью. Оказалось, что такие волны генерируются управлениями  $f$ , первая компонента которых выражается через свертку второй компоненты с некоторой функцией  $l$ :  $f(t) = \begin{pmatrix} (l * f_2)(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ . Поэтому в набор данных помимо матрицы  $r$  была включена функция  $l$ . Такая постановка согласуется с правилом подсчета параметров, и было показано, что  $A$  и  $B$  могут быть найдены по  $r$  и  $l$ .

Далее, в [7], также в случае самосопряженного  $\mathcal{L}$ , было показано, что необходимым и достаточным условием разрешимости обратной задачи является положительная определенность *связывающего оператора*

$$C^T := \rho^{\frac{1}{2}} \mathbb{I} + \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta \right] (\cdot)(s) ds$$

при любом  $T > 0$ . При этом функция  $l$  может быть выбрана произвольно (с некоторыми условиями согласования при  $t = 0$ ).

Отметим, что положительная определенность оператора  $C^T$  и его аналогов типична для условий разрешимости динамических обратных задач (см. [13], [18], [19], [21]).

В связи с тем, что функция  $l$  экспериментально не измерима, в работе [8] для системы с  $A = 0$  задача восстановления коэффициента  $B$  только по матрице  $r$  решена «в малом».

Используя этот результат, А. Morassi, G. Nakamura и М. Sini в работе [29] решили ту же задачу «в большом».

Помимо этого, работа [29] решает прикладную задачу для композитной балки, состоящей из двух однородных балок: бетонной и стальной.

В 2009 году Rakesh и P. Sacks в [31] рассмотрели ту же модельную систему (как и в [7], [8], [25]), но без требования самосопряженности оператора  $\mathcal{L}$ . В этой работе доказана *устойчивость* решения обратной задачи для такой системы. В ходе доказательства устанавливались два вспомогательных результата: корректность прямой задачи и существование медленных волн (т. е. существование функции  $l$ ). Способ доказательства второго результата, как видится авторам, проще ВС-метода, хотя и использует идеи работы [25]. Доказательство первого результата аналогично приводимому в первой главе настоящей диссертации и опубликованному в статье [11]. Однако в диссертации и статье [11] доказательство проводится в более общем и сложном случае: коэффициенты в главной части уравнения, а следовательно, и скорости распространения двух мод являются переменными.

Система с переменными скоростями рассматривалась М. И. Белишевым и А. В. Зуровым в работе [10]. В ней исследовались эффекты, связанные с совпадением скоростей для системы  $\rho u_{tt} - u_{xx} + qu = 0$ , где оба (матричных) коэффициента предполагаются переменными. Показано, что совпадение скоростей в отдельных «резонансных» точках приводит к переходу сингулярностей волновых мод из одного канала в другой.

В работах А. С. Благовещенского [15] и В. Г. Романова [22] изучалась обратная задача для слоисто-неоднородных сред модели Ламе, которая также является двухскоростной системой.

## Содержание диссертации по главам.

*Глава 1. Начально-краевая задача.* В первой главе рассматривается начально-краевая задача

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

в которой  $\rho, \gamma, A, B$  суть вещественные  $2 \times 2$  матрицы-функции от  $x \geq 0$ ;  $T < \infty$  — финальный момент;  $\rho = \text{diag} \{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\gamma = \text{diag} \{\gamma_1, \gamma_2\}$  — матрицы с положительными элементами;  $f = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$  — *граничное управление*.

Решение  $u = u^f(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^f(x, t) \\ u_2^f(x, t) \end{pmatrix}$  описывает *волну*, инициированную управлением  $f$  и распространяющуюся вдоль полуоси  $x \geq 0$ .

Функции  $c_i := \sqrt{\frac{\gamma_i(x)}{\rho_i(x)}}$  называются *скоростями*, на которые накладываются условия:

$$0 < c_2(x) < c_1(x), \quad x \geq 0.$$

Расходимость интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{c_1(x)} = \infty$$

обеспечивает корректность задачи при любом  $T > 0$ .

Соотношения

$$A^{\text{tr}}(x) = -A(x), \quad \frac{dA}{dx}(x) = B(x) - B^{\text{tr}}(x), \quad x \geq 0$$

(tr — транспонирование) обеспечивают самосопряженность оператора

$$y \mapsto (\gamma y_x)_x - Ay_x - By$$

по Лагранжу, то есть его симметричность в  $L_2((0, \infty); \mathbb{R}^2)$  на функциях с компактным носителем.



## Функции

$$\tau_i(x) := \int_0^x \sqrt{\frac{\rho_i(s)}{\gamma_i(s)}} ds = \int_0^x \frac{ds}{c_i(s)}, \quad x \geq 0, \quad i = 1, 2,$$

называются *эйконалами*. Это монотонные, строго возрастающие неотрицательные функции. С физической точки зрения  $\tau_i(x_0)$  — это время, за которое волна, инициированная на конце  $x = 0$  и распространяющаяся вдоль полуоси  $x \geq 0$  со скоростью  $c_i$ , заполняет отрезок  $[0, x_0]$ . Эйконаллы определяют *характеристики* системы — кривые  $\{(x, t) | t \pm \tau_i(x) = \text{const}\}$ . Характеристики  $t = \tau_1(x)$  и  $t = \tau_2(x)$  мы называем быстрой и медленной соответственно. Функции  $x_i(\tau)$ , *обратные к эйконалам*, можно представить в виде

$$x_i(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{\frac{\gamma_i(x_i(s))}{\rho_i(x_i(s))}} ds = \int_0^\tau c_i(x_i(s)) ds, \quad \tau \geq 0;$$

они также суть строго возрастающие, и  $x_1(\tau) > x_2(\tau)$  при  $\tau > 0$ .

В разделе 1.2 рассматривается прямая задача. Для управлений класса  $L_2((0, T); \mathbb{R}^2)$  определяется обобщенное  $L_2$ -решение задачи и дается точное описание пространств, в которых она оказывается корректной. Метод исследования вполне традиционный: задача сводится к системе интегральных уравнений вольтерровского типа, затем устанавливается разрешимость последней в подходящем пространстве вектор-функций.

Последующие разделы главы подготавливают исследование динамической обратной задачи.

В разделе 1.3 вводится фундаментальное решение исходной системы как решение матричной начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} \rho U_{tt} - (\gamma U_x)_x + AU_x + BU &= 0, & x > 0, \quad 0 < t < T, \\ U|_{t=0} = U_t|_{t=0} &= 0, & x \geq 0, \\ U|_{x=0} &= \delta(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Представление фундаментального решения дается в подразделе 1.3.3 в виде суммы анзаца и невязки, определенных при помощи стандартной схемы лучевого метода (см., например, [2]). В том же подразделе детально исследуются главные особенности фундаментального решения и выводятся соотношения, связывающие матрицы  $A$  и  $B$  с (матричными) амплитудами членов первого и второго порядков в разложении лучевого анзаца.

В разделе 1.4 вводится оператор реакции

$$(R^T f)(t) := \gamma(0) u_x^f(0, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

который в дальнейшем играет роль данных обратной задачи.

Изучение прямой задачи завершает раздел 1.5, где описывается физический эффект, свойственный двухскоростным системам и состоящем в следующем. При определенной связи между компонентами управления  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  волна (смесь мод) распространяется со скоростью медленной моды  $c_2$ . Возможно, впервые этот эффект был обнаружен в [25]; там же и в более поздних работах [7], [9] он был использован для решения обратных задач. Эти работы относились к системам с постоянными скоростями; здесь рассматривается более общий случай переменных разделенных  $c_1$  и  $c_2$ .

Результаты полученные в первой главе опубликованы в статье ([11]).

*Глава 2. Динамическая система.* В этой главе изучаемая начально-краевая задача рассматривается как динамическая система  $\mathfrak{s}^T$ . Она наделяется стандартными атрибутами теории управления.

В разделе 2.1 вводятся связанные с системой пространства и операторы. Гильбертово пространство управлений  $\mathcal{F}^T := L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  называется *внешним пространством* системы  $\mathfrak{s}^T$ . Пространство  $\mathcal{H}^{x_1(T)} := L_{2, \rho}([0, x_1(T)]; \mathbb{R}^2)$  называется *внутренним*.

Соответствие «вход  $\mapsto$  состояние» реализуется *оператором управления*  $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}^{x_1(T)}$ ,  $W^T f := u^f(\cdot, T)$ . Помимо оператора *реакции*  $R^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ , описывающего соответствие «вход  $\mapsto$  выход» в системе  $\mathfrak{s}^T$ , определяется так на-

зывается *расширенный* оператор реакции  $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ ,

$$(R^{2T} f)(t) := \gamma(0)u_x^f(0, t), \quad 0 \leq t \leq 2T,$$

который определяется матричными коэффициентами  $\rho, \gamma, A, B|_{0 \leq x \leq x_1(T)}$  и имеет представление

$$(R^{2T} f)(t) = -\nu f'(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2T,$$

с постоянными матрицами  $\nu, \omega$  и гладкой симметрической матрицей-функцией  $r(t), 0 \leq t \leq 2T$ .

Оператор  $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T, C^T := (W^T)^* W^T$  называется *связывающим*. Определяющее его соотношение

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} = (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}^{x_1(T)}}$$

связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Оператор  $C^T$  ограничен (по ограниченности  $W^T$ ), самосопряжен и неотрицателен.

Ключевым для ВС-метода фактом является простая и явная связь оператора  $C^T$  с расширенным оператором реакции (см. [5], [7], [24]). Эта связь приводит к представлению

$$C^T f(t) := \nu f(t) + \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

В разделе 2.2 обсуждается свойство *управляемости* системы (4)–(6). Множества (подпространства) вида

$$\mathcal{U}^\xi := \{u^f(\cdot, \xi) \mid f \in \mathcal{F}^T\} \subset \mathcal{H}^{x_1(\xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq T,$$

называются *достижимыми* (в момент  $t = \xi$ ). С ростом  $\xi$  множества  $\mathcal{U}^\xi$  расширяются. Их структура и свойства составляют предмет теории граничного управления. Достижимые множества образованы всеми состояниями системы

(здесь — волнами), которые можно создать, оперируя данным классом управлений. В ситуации, когда эти состояния исчерпывают содержащее их пространство, говорят об управляемости системы.

Особенностью двухскоростной системы является отсутствие управляемости: подпространство  $\mathcal{U}^T$  имеет нетривиальное ортогональное дополнение в  $\mathcal{H}^{x_1(T)}$  при любом  $T > 0$ .

Оказывается, что если компоненты управления  $f$  удовлетворяют соотношению

$$f_1(t) = \int_0^t l(t-s) f_2(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)),$$

с некоторой гладкой функцией  $l = l(t)$ , то волна  $u^f$ , инициированная таким управлением, распространяется с медленной скоростью. Подпространство таких управлений мы обозначаем  $\mathcal{F}_l^T$ , а волны, инициированные такими управлениями, называем *медленными волнами*.

В системе  $\mathfrak{s}^T$  медленным волнам отвечает подсистема  $\mathfrak{s}_l^T$ , описываемая начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu &= 0, & 0 < x < x_2(T), \quad 0 < t < T, \\ u|_{t < \tau_2(x)} &= 0, \\ u|_{x=0} &= f, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

которая *корректна* при  $f \in \mathcal{F}_l^T$ . Важной отличительной чертой подсистемы  $\mathfrak{s}_l^T$  от самой системы является ее *управляемость*:

$$\mathcal{U}^T := \{u^f(\cdot, T) \mid f \in \mathcal{F}_l^T\} = \mathcal{H}^{x_2(T)}.$$

В разделе 2.3 выводится представление волн, так называемая *амплитудная формула* — один из основных инструментов решения обратных задач методом граничного управления (см. [5], [7], [24]). Вывод использует особенности распространения разрывов в системе  $\mathfrak{s}^T$ , а само представление по существу является формулой геометрической оптики.

*Глава 3. Характеризация оператора  $R^{2T}$ .* В обратных задачах оператор реакции динамической системы играет роль данных, по которым требуется восстановить ее параметры. В рассматриваемой задаче оператор  $R^{2T}$  определяется коэффициентами  $\rho, \gamma, A, B$ , которые содержат *восемь* независимых скалярных функций  $\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, A_{12}, B_{11}, B_{12}, B_{22}$ , в то время как оператор  $R^{2T}$  задается набором из двух постоянных матриц  $\nu, \omega$ , содержащих шесть *чисел*, и матричной функцией отклика  $r$ , содержащей *три* функции:  $r_{11}, r_{12}, r_{22}$ . В этой ситуации ожидать единственности решения обратной задачи, т. е. однозначного определения всех коэффициентов, не приходится, и встает вопрос о ее разрешимости: при каких условиях на  $\nu, \omega, r$  существует хотя бы одна система с такими данными? Характеристическое описание данных доставляет необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Как будет показано, применительно к системе  $\mathfrak{s}^T$  эти условия состоят в следующем.

**Теорема.** Оператор  $\mathcal{R}^{2T} : L_2([0, 2T]; \mathbb{R}^2) \rightarrow L_2([0, 2T]; \mathbb{R}^2)$ , вида

$$(\mathcal{R}^{2T} f)(t) = -\nu f_t(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2T,$$

с постоянными матрицами  $\nu = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2\}$ ,  $\omega$  и гладкой матрицей-функцией  $r|_{0 \leq t \leq 2T}$  является расширенным оператором реакции некоторой системы  $\mathfrak{s}^T$ , если и только если выполнены условия:

1.  $\nu_1, \nu_2 > 0$ ,  $\omega_{12} = -\alpha\omega_{21}$  с каким-либо  $\alpha > 1$ ;
2.  $[r(t)]^{\text{tr}} = r(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2T$ ;
3. оператор  $\mathcal{C}^T$ , действующий в  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  по правилу

$$(\mathcal{C}^T f)(t) := \nu f(t) + \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

является положительным изоморфизмом.

Доказательство достаточности конструктивно: предложена процедура, восстанавливающая систему по  $\nu$ ,  $\omega$ ,  $r$ . В процедуре предусмотрен выбор свободных параметров, а именно функций  $c_1, c_2, \rho_1, \rho_2 \in C^\infty[0, h]$ , а также функции  $l$  и продолжение функции отклика  $r|_{0 \leq t \leq 2T}$  на больший интервал. Параметры выбираются согласованно, удовлетворяя определенным условиям. В последующих разделах определяются матрицы  $A$  и  $B$  и доказывается, что построенная система обладает оператором реакции  $R^{2T}$ , совпадающим с  $\mathcal{R}^{2T}$ .

Данный результат опубликован в работе [12].

В разделе 3.4 дается пошаговая процедура определения матриц  $A$  и  $B$ , пригодная для численной реализации. Кроме того, предлагается второй способ определения  $A$  и  $B$  по формулам полученным в работе [20].

В разделе 3.5 строится динамическая система вида (4)–(6) с *ненулевыми* матрицами  $A$  и  $B$ , обладающая оператором реакции вида

$$(R^{2T} f)(t) = -\frac{d}{dt}f(t), \quad 0 \leq t \leq 2T. \quad (7)$$

Заметим, что таким же оператором реакции обладает система вида (4)–(6) с  $A = B = 0$  при соответствующем выборе констант:  $\rho_i(0)$ ,  $\rho'_i(0)$ ,  $\gamma_i(0)$ ,  $\gamma'_i(0)$ ,  $i = 1, 2$ . В ней распространяются две не взаимодействующие между собой волны, эволюция которых описывается двумя независимыми уравнениями:

$$\rho_i(u_i)_{tt} - (\gamma_i(u_i)_x)_x = 0, \quad i = 1, 2.$$

Для внешнего наблюдателя системы с одним и тем же  $R^{2T}$  неразличимы. Наш пример показывает, что установить сам факт взаимодействия разных волновых мод по оператору реакции возможно не всегда.

Автор признателен М. И. Белишеву за руководство работой и помощь в подготовке диссертации.

## Глава 1

## Начально-краевая задача

## 1.1. Постановка

Рассматривается задача

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

описывает *волну*, инициированную *граничное управление*  $f = f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$  и распространяющуюся вдоль полуоси  $x \geq 0$ .  $\rho, \gamma, A, B$  суть гладкие вещественные  $2 \times 2$  матрицы-функции от  $x \geq 0$ ;  $T < \infty$  — финальный момент;  $\rho = \text{diag} \{\rho_1, \rho_2\}$ ,  $\gamma = \text{diag} \{\gamma_1, \gamma_2\}$  — матрицы с положительными элементами; — *граничное управление*. Решение  $u = u^f(x, t) = \begin{pmatrix} u_1^f(x, t) \\ u_2^f(x, t) \end{pmatrix}$  описывает *волну*, инициированную управлением  $f$  и распространяющуюся вдоль полуоси  $x \geq 0$ . Функции  $c_i := \sqrt{\frac{\gamma_i(x)}{\rho_i(x)}}$ ,  $i = 1, 2$ , называются *скоростями*.

Всюду в работе предполагаются выполненными условия

$$0 < c_2(x) < c_1(x), \quad x \geq 0; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{c_1(x)} = \infty \quad (1.4)$$

и соотношения

$$A^{\text{tr}}(x) = -A(x), \quad \frac{dA}{dx}(x) = B(x) - B^{\text{tr}}(x), \quad x \geq 0 \quad (1.5)$$

(tr — транспонирование), равносильные равенствам

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -a(x) \\ a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{21}(x) - B_{12}(x) = a'(x), \quad x \geq 0.$$

Расходимость интеграла в (1.4) обеспечивает корректность задачи (1.1)–(1.3) при любом  $T > 0$ . В силу (1.5) оператор  $y \mapsto (\gamma y_x)_x - Ay_x - By$  самосопряжен по Лагранжу, т. е. симметричен в  $L_2((0, \infty); \mathbb{R}^2)$  на функциях с компактным носителем.

Функции

$$\tau_i(x) := \int_0^x \sqrt{\frac{\rho_i(s)}{\gamma_i(s)}} ds = \int_0^x \frac{ds}{c_i(s)}, \quad x \geq 0,$$

называются *эйконалами*. Это монотонные, строго возрастающие положительные функции. С физической точки зрения  $\tau_i(x_0)$  — это время, за которое волна, инициированная на конце  $x = 0$  и распространяющаяся вдоль полуоси  $x \geq 0$  со скоростью  $c_i$ , заполняет отрезок  $[0, x_0]$ . Согласно (1.4) имеем:  $\tau_2(x) > \tau_1(x)$ ,  $x > 0$ ;  $\tau_i(\infty) = \infty$ . Эйконалы определяют *характеристики* системы (1.1) — кривые  $\{(x, t) \mid t \pm \tau_i(x) = \text{const}\}$ . Характеристики  $t = \tau_1(x)$  и  $t = \tau_2(x)$  мы называем быстрой и медленной соответственно (см. рис. 1.1). Функции  $x_i(\tau)$ , *обратные к эйконалам*, можно представить в виде

$$x_i(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{\frac{\gamma_i(x_i(s))}{\rho_i(x_i(s))}} ds = \int_0^\tau c_i(x_i(s)) ds, \quad \tau \geq 0;$$

они также возрастают, и выполнено  $x_1(\tau) > x_2(\tau)$  при  $\tau > 0$ .

## 1.2. Разрешимость

В этом разделе решается прямая задача для системы (1.1)–(1.3) с матричными коэффициентами, удовлетворяющими следующим условиям гладкости<sup>1</sup>:

$$\rho, \gamma \in C_{\text{loc}}^4([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad A \in C_{\text{loc}}^3([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad B \in C_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathbb{M}^2). \quad (1.6)$$

Для управлений класса  $L_2((0, T); \mathbb{R}^2)$  определяется обобщенное  $L_2$ -решение задачи (1.1)–(1.3) и дается описание пространств, в которых задача оказывается

<sup>1</sup> Здесь и ниже в работе  $\mathbb{M}^2$  — множество  $2 \times 2$  матриц, снабженное евклидовой нормой.



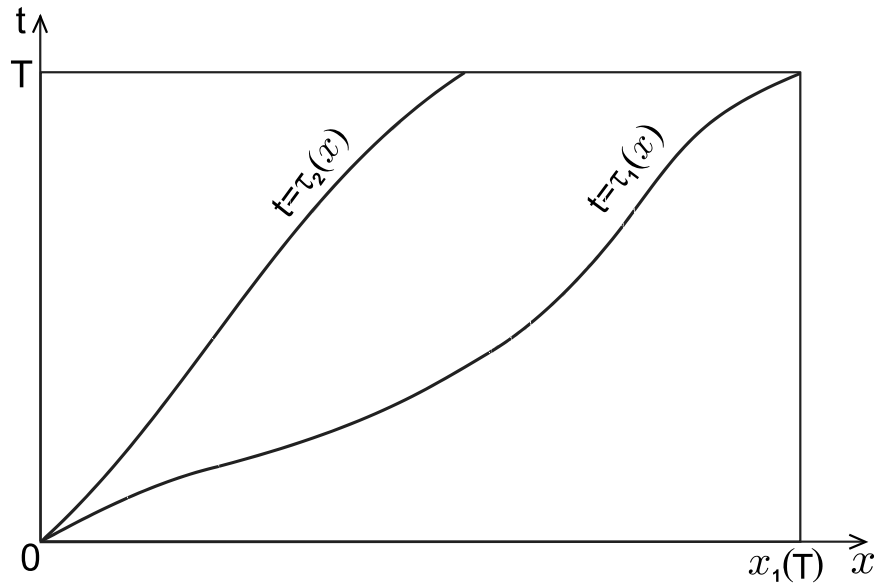


Рис. 1.1. Характеристики

корректной. Метод исследования вполне традиционный: задача сводится к системе интегральных уравнений вольтеровского типа, затем устанавливается разрешимость последней в подходящем пространстве вектор-функций<sup>2</sup>. Вводится фундаментальное решение задачи и исследуются его главные особенности.

Для дальнейшего удобно принять

**Соглашение 1.** (a) *Все функции, зависящие от времени, предполагаются продолженными нулем при  $t < 0$ .*

(b) *Пусть  $\Pi \subset \mathbb{R}^2$  есть прямоугольник или полуплоскость со сторонами, параллельными координатным осям. Функцию  $\varphi$  мы называем гладкой в  $\Pi$  вне кривых  $S_1, \dots, S_p \subset \Pi$ , если она является гладкой в каждой из компонент связности множества  $\Pi \setminus \bigcup_{i=1}^p S_i$  и продолжается до гладкой функции в окрестности этой компоненты.*

---

<sup>2</sup> Заметим, что такой подход делает ненужным применение спектральной техники (преобразования Фурье по  $t$ ), не вполне адекватной гиперболическим задачам на конечном интервале времени.

(с) Для скалярных, векторных и матричных функций будем обозначать

$$y\langle s \rangle := y(s+0) - y(s-0), \quad (1.7)$$

$$z(x, \langle t \rangle) := z(x, t+0) - z(x, t-0), \quad (1.8)$$

$$z(\langle x \rangle, t) := z(x+0, t) - z(x-0, t). \quad (1.9)$$

### 1.2.1. Скалярное интегральное уравнение

Рассмотрим вспомогательную задачу для скалярного волнового уравнения

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} - u_{xx} &= h, & x > 0, \quad 0 < t < T, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} &= 0, & x \geq 0, \\ u|_{x=0} &= f, & 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

где  $\rho = \rho(x) > 0$  есть функция класса  $C_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathbb{M}^2)$ ,  $f = f(t)$  — граничное управление. Эйконал

$$\tau(x) := \int_0^x \sqrt{\rho(s)} ds$$

определяет семейство характеристик  $t \pm \tau(x) = \text{const}$ ; через

$$x(\tau) := \int_0^\tau \frac{d\xi}{\sqrt{\rho(x(\xi))}}$$

обозначим функцию, обратную к эйконалу. Такая задача стандартным образом (с помощью замены переменных  $x \rightarrow \tau$ , формулы Даламбера и обратной замены  $\tau \rightarrow x$ )<sup>3</sup> сводится к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left( \frac{\rho(0)}{\rho(x)} \right)^{\frac{1}{4}} f(t - \tau(x)) \\ &+ \frac{1}{2\rho^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{K(x,t)} \left[ \frac{h(\xi, \eta)}{\rho^{\frac{1}{4}}(\xi)} + u(\xi, \eta) \frac{d^2}{d\xi^2} \left( \frac{1}{\rho^{\frac{1}{4}}(\xi)} \right) \right] d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.10)$$

---

<sup>3</sup> Детали см., например, в [17].

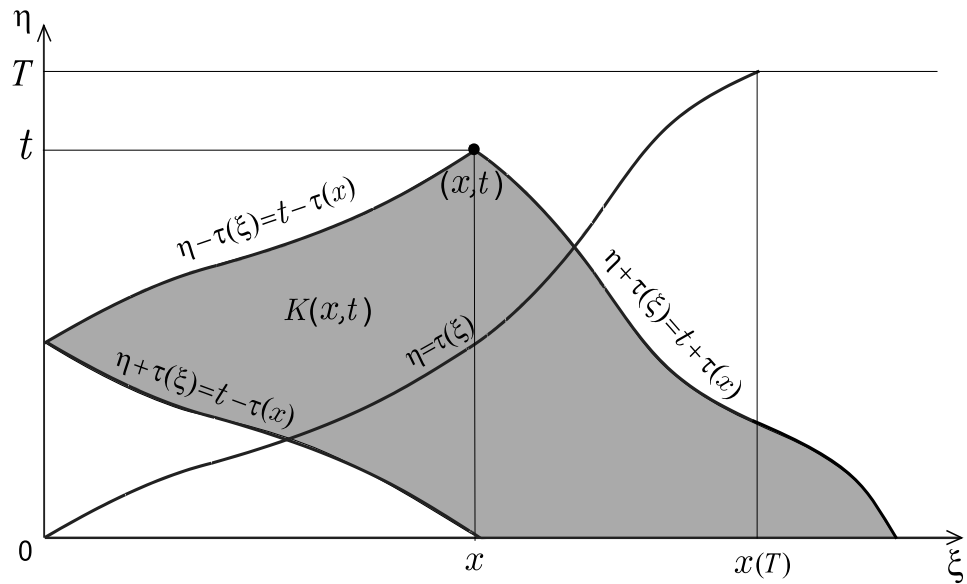


Рис. 1.2. Область интегрирования

в полуполосе  $\{(x, t) | x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ ; область интегрирования есть «трапеция»  $K(x, t)$ , ограниченная характеристиками

$$\eta + \tau(\xi) = t + \tau(x), \quad \eta - \tau(\xi) = t - \tau(x), \quad \eta + \tau(\xi) = t - \tau(x)$$

(на рис. 1.2). В записи уравнения (1.10) используется пункт (а) Соглашения 1. Соответственно, слагаемое  $f(t - \tau(x))$  в правой части понимается как функция от  $(x, t)$ , аннулирующаяся при  $t < \tau(x)$ .

Отметим существенную особенность уравнения (1.10): если его правая часть  $h$  аннулируется при  $t < \tau(x)$ , то и решение обладает тем же свойством. Это следует из того, что определяющий уравнение интегральный оператор не нарушает указанного свойства функций. В этом случае при исследовании уравнения можно вместо рассмотрений в полосе ограничиться прямоугольником  $\{(x, t) | 0 \leq x \leq x(T), 0 \leq t \leq T\}$ , а интегрирование проводить по части области  $K(x, t)$ , расположенной выше характеристики  $t = \tau(x)$ .

### 1.2.2. Векторное интегральное уравнение

Сведем задачу (1.1)–(1.3) к интегральному уравнению. Для  $i = 1, 2$  примем обозначение

$$\bar{i} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = 2, \\ 2, & \text{если } i = 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

С учетом определения  $a := -A_{12} = A_{21}$  система уравнений (1.1) в покомпонентной записи имеет вид:

$$\rho_i(u_i)_{tt} - \gamma_i(u_i)_{xx} - (\gamma_i)_x(u_i)_x + (-1)^i a(u_{\bar{i}})_x + \sum_{j=1,2} B_{ij}u_j = 0. \quad (1.12)$$

Для дальнейшего удобно удалить слагаемые  $(\gamma_i)_x(u_i)_x$ . Вводя новые неизвестные функции  $v^i$  соотношениями

$$u_i(x, t) = \left( \frac{\gamma_i(0)}{\gamma_i(x)} \right)^{\frac{1}{2}} v_i(x, t), \quad (1.13)$$

после подстановки в (1.12) получаем систему для  $v_i$ :

$$\tilde{\rho}_i(v_i)_{tt} - \tilde{\gamma}_i(v_i)_{xx} + \tilde{a}_i(v_{\bar{i}})_x + \sum_{j=1,2} \tilde{B}_{ij}v_j = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_i &:= \left( \frac{\gamma_i(0)}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{2}} \rho_i, & \tilde{\gamma}_i &:= (\gamma_i(0))^{\frac{1}{2}} (\gamma_i)^{\frac{1}{2}}, & \tilde{a}_i &:= (-1)^i \left( \frac{\gamma_{\bar{i}}(0)}{\gamma_{\bar{i}}} \right)^{\frac{1}{2}} a, \\ \tilde{B}_{ii} &:= \left( \frac{\gamma_i(0)}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{2}} B_{ii} - \frac{1}{4} (\gamma_i(0))^{\frac{1}{2}} \gamma_i^{-\frac{3}{2}} (\gamma_i')^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_i(0)}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{2}} \gamma_i'', \\ \tilde{B}_{\bar{i}\bar{i}} &:= \left( \frac{\gamma_{\bar{i}}(0)}{\gamma_{\bar{i}}} \right)^{\frac{1}{2}} B_{\bar{i}\bar{i}} - (-1)^i \frac{1}{2} (\gamma_{\bar{i}}(0))^{\frac{1}{2}} \gamma_{\bar{i}}^{-\frac{3}{2}} \gamma_{\bar{i}}' a. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Окончательно, начально-краевая задача для  $v_i$  принимает вид системы

$$\begin{aligned} r_i(v_i)_{tt} - (v_i)_{xx} &= h_i, & x > 0, & \quad 0 < t < T, \\ v_i|_{t=0} = (v_i)_t|_{t=0} &= 0, & x \geq 0, & \\ v_i|_{x=0} &= f, & 0 \leq t \leq T, & \end{aligned}$$

в которой

$$r_i := \frac{\rho_i}{\gamma_i} = c_i^{-2}, \quad h_i := -\frac{\tilde{a}_i}{\tilde{\gamma}_i}(v_{\bar{i}})_x - \frac{1}{\tilde{\gamma}_i} \sum_{j=1,2} \tilde{B}_{ij} v_j.$$

Применяя формулу (1.10) для каждой из компонент  $v_i$ ,  $i = 1, 2$ , получаем систему интегральных уравнений в полуполосе  $\{(x, t) | x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ :

$$v_i(x, t) = \left( \frac{r_i(0)}{r_i(x)} \right)^{\frac{1}{4}} f_i(t - \tau_i(x)) - \frac{1}{2r_i^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{K^i(x,t)} \left[ \tilde{N}_{\bar{i}}(v_{\bar{i}})_\xi + \sum_{j=1,2} \tilde{M}_{ij} v_j \right] d\xi d\eta,$$

где

$$\tilde{N}_{\bar{i}} := \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{\gamma}_i r_i^{\frac{1}{4}}}, \quad \tilde{M}_{ii} := \frac{\tilde{B}_{ii}}{\tilde{\gamma}_i r_i^{\frac{1}{4}}} - \left( \frac{1}{r_i^{\frac{1}{4}}} \right)_{\xi\xi}, \quad \tilde{M}_{i\bar{i}} := \frac{\tilde{B}_{i\bar{i}}}{\tilde{\gamma}_i r_i^{\frac{1}{4}}}, \quad (1.15)$$

а области интегрирования  $K^i(x, t)$  определяются неравенствами

$$\eta + \tau_i(\xi) \leq t + \tau_i(x), \quad \eta - \tau_i(\xi) \leq t - \tau_i(x) \leq \eta + \tau_i(\xi)$$

и по форме аналогичны «трапеции» на рис. 1.2. Далее, интегрируя по частям в слагаемых, содержащих  $(v_{\bar{i}})_\xi$ , имеем:

$$\int_{K^i(x,t)} \tilde{N}_{\bar{i}}(v_{\bar{i}})_\xi d\xi d\eta = \int_{\partial K^i(x,t)} \tilde{N}_{\bar{i}} v_{\bar{i}} d\eta - \int_{K^i(x,t)} \left( \tilde{N}_{\bar{i}} \right)_\xi v_{\bar{i}} d\xi d\eta,$$

где контур  $\partial K^i(x, t)$  обходится в положительном направлении. В результате, приходим к системе

$$v_i(x, t) = \left( \frac{r_i(0)}{r_i(x)} \right)^{\frac{1}{4}} f_i(t - \tau_i(x)) - \frac{1}{2r_i^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{\partial K^i(x,t)} \tilde{N}_{\bar{i}} v_{\bar{i}} d\eta - \frac{1}{2r_i^{\frac{1}{4}}(x)} \int_{K^i(x,t)} \left[ - \left( \tilde{N}_{\bar{i}} \right)_\xi v_{\bar{i}} + \sum_{j=1,2} \tilde{M}_{ij} v_j \right] d\xi d\eta. \quad (1.16)$$

Подставляя в (1.16) значения коэффициентов  $\tilde{M}_{ij}$ ,  $\tilde{N}_{\bar{i}}$  (см. (1.15), (1.14)) и возвращаясь к компонентам вектор-функции  $u$ , получаем для последней интегральное уравнение

$$u(x, t) - (\Psi u)(x, t) = \tilde{f}(x, t), \quad x \geq 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.17)$$

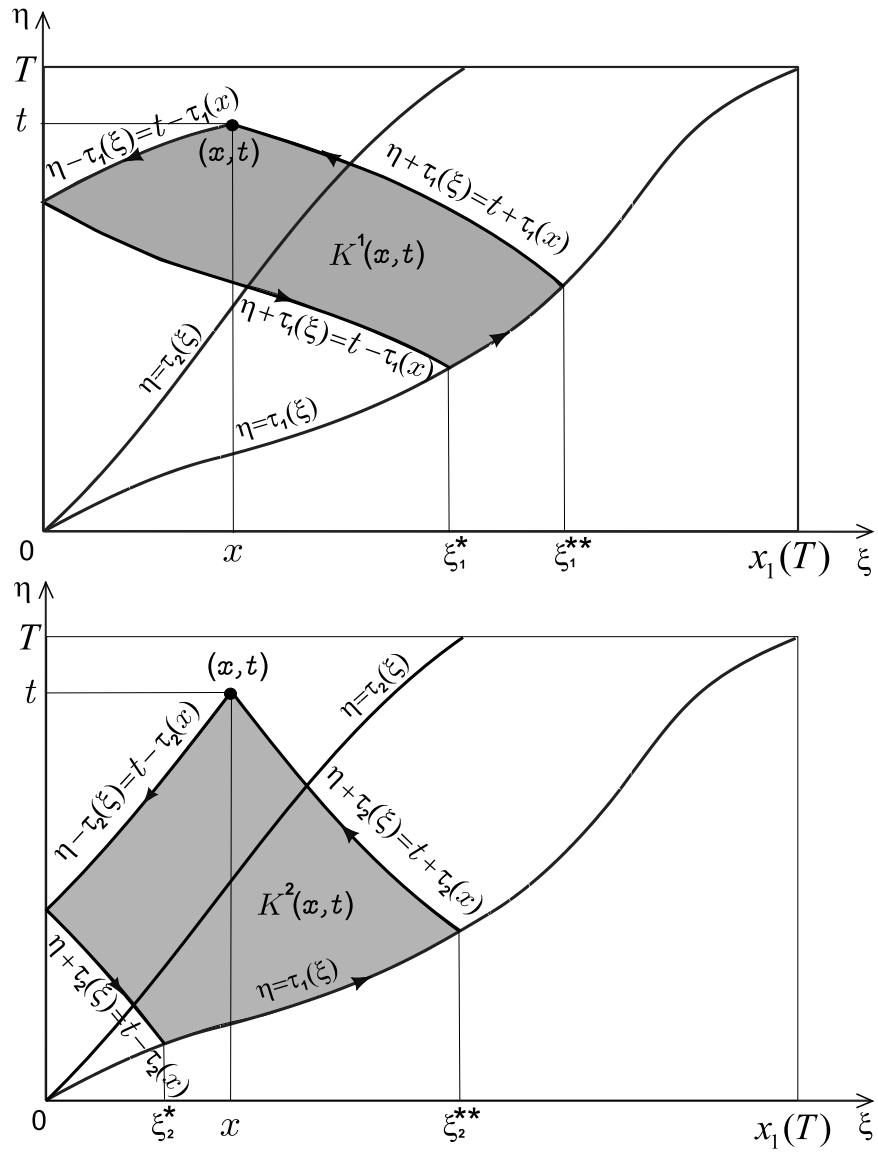


Рис. 1.3. Области интегрирования

с правой частью

$$\tilde{f}(x, t) := \mu(x) \begin{pmatrix} f_1(t - \tau_1(x)) \\ f_2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

где

$$\mu(x) := \begin{pmatrix} \mu_1(x) & 0 \\ 0 & \mu_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mu_i(x) := \left( \frac{\rho_i(0)\gamma_i(0)}{\rho_i(x)\gamma_i(x)} \right)^{\frac{1}{4}}$$

и интегральным оператором  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \Psi u &:= \begin{pmatrix} (\Psi u)_1 \\ (\Psi u)_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi := \partial M + M, \\ (\partial M u)_i(x, t) &:= \varphi_i(x) \int_{\partial K^i(x, t)} N_{\bar{i}} u_{\bar{i}} d\eta, \\ (M u)_i(x, t) &:= \varphi_i(x) \int_{K^i(x, t)} \left[ \sum_{j=1,2} M_{ij} u_j \right] d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_i &:= \frac{1}{2\gamma_i^{\frac{1}{4}}\rho_i^{\frac{1}{4}}}, \quad N_{\bar{i}} := (-1)^{i+1} \frac{a}{\gamma_i^{\frac{1}{4}}\rho_i^{\frac{1}{4}}}, \\ M_{ii} &:= \frac{\frac{(\gamma_i')^2}{4\gamma_i} - B_{ii} - \frac{\gamma_i''}{2}}{\rho_i^{\frac{1}{4}}\gamma_i^{\frac{1}{4}}} + \left( \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{4}} \right)_{\xi\xi} \gamma_i^{\frac{1}{2}}, \\ M_{i\bar{i}} &:= \frac{(-1)^i \frac{\gamma_i'}{2\gamma_i} a - B_{i\bar{i}}}{\gamma_i^{\frac{1}{4}}\rho_i^{\frac{1}{4}}} + (-1)^i \left( \frac{\gamma_i^{-\frac{1}{2}} a}{\gamma_i^{\frac{1}{4}}\rho_i^{\frac{1}{4}}} \right)_{\xi} \gamma_i^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Итерируя уравнение (1.17), имеем:

$$(u - \tilde{f}) - \Psi(u - \tilde{f}) = \Psi \tilde{f}.$$

Для функции  $w := u - \tilde{f}$  получаем уравнение

$$w - \Psi w = \Psi \tilde{f}, \quad (1.19)$$

которое тоже используется в работе.

### 1.2.3. Оператор $\Psi$

Разрешимость уравнений (1.17) и (1.19) определяется свойствами оператора  $\Psi$ . Оба они суть уравнения в полуполосе  $\{(x, t) \mid x \geq 0, 0 \leq t \leq T\}$ , но следующее наблюдение<sup>4</sup> позволяет свести их к уравнениям в прямоугольнике  $\{(x, t) \mid 0 \leq x \leq x_1(T), 0 \leq t \leq T\}$ : правая часть  $\tilde{f}$  аннулируется ниже быстрой характеристики  $t = \tau_1(x)$ <sup>5</sup>, а оператор не нарушает этого свойства вектор-функций. Иными словами, включение  $\text{supp } y \subset \Pi^T$ , где

$$\Pi^T := \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq x_1(T), \tau_1(x) \leq t \leq T\},$$

влечет  $\text{supp } \Psi y \subset \Pi^T$ , что легко усматривается из определений операторов  $M$  и  $\partial M$ , составляющих  $\Psi$ . При этом интегрирование в (1.16) фактически сведется к интегрированию по частям областей  $K^i$ , попадающим в  $\Pi^T$  (на рис. 1.3 затенены). Для этих частей мы сохраняем обозначения  $K^i$ , что не ведет к недоумениям.

Введем пространство управлений  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  с нормой

$$\|f\|_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)} = \left[ \int_0^T \left[ (f_1(x))^2 + (f_2(x))^2 \right] dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

и пространство вектор-функций  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ , заданных и непрерывных в прямоугольнике  $\{(x, t) \mid 0 \leq x \leq x_1(T), 0 \leq t \leq T\}$  и аннулирующихся при  $t \leq \tau_1(x)$ , с нормой

$$\|y\|_{C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)} = \max_{i=1,2} \|y_i\|_{C(\Pi^T)} = \max_{i=1,2} \max_{(x,t) \in \Pi^T} |y_i(x, t)|.$$

**Теорема 1.** *Отображение  $f \mapsto \Psi \tilde{f}$  непрерывно из  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

*Доказательство.* Доказательство состоит из двух лемм, в которых устанавливается непрерывность операторов  $M$  и  $\partial M$ , составляющих  $\Psi$ .

**Лемма 1.** *Отображение  $f \mapsto \partial M \tilde{f}$  непрерывно из  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

<sup>4</sup> Оно вполне аналогично тому, что отмечалось в конце подраздела 1.2.1 в скалярном случае.

<sup>5</sup> Напомним Соглашение 1 (а).



*Доказательство.* Непрерывность компонент образа

$$\left(\partial M\tilde{f}\right)_i(x, t) = \varphi_i(x) \int_{\partial K^i(x, t)} N_{\tilde{i}} \tilde{f}_{\tilde{i}} d\eta$$

в  $\Pi^T$  видна из того, что все участки контура интегрирования  $\partial K^i$  (которые суть характеристики  $t \pm \tau_i(x) = \text{const}$ ) трансверсальны линиям уровня подынтегральной функции  $\tilde{f}_{\tilde{i}}$  (характеристикам  $t - \tau_{\tilde{i}}(x) = \text{const}$ )<sup>6</sup>. К примеру, рассмотрим интеграл по верхнему левому участку контура  $\partial K^1(x, t)$  (характеристике  $\eta - \tau_1(\xi) = t - \tau_1(x)$  на рис. 1.3), входящий в выражение для  $\left(\partial M\tilde{f}\right)_1(x, t)$ . Параметризуя этот участок переменной  $s = \eta - \tau_2(x_1(\eta - t + \tau_1(x)))$ <sup>7</sup> и проводя подходящие замены, можно записать интеграл в виде

$$\int_{t-\tau_2(x)}^{t-\tau_1(x)} \zeta(s, t, x) f_2(s) ds \quad (1.20)$$

с непрерывной функцией  $\zeta$ , определяемой коэффициентами уравнения (1.1) и их производными. Из такого представления, с учетом суммируемости  $f_2$ , непрерывность интеграла по  $x$  и  $t$  следует с очевидностью. Вполне аналогично рассматриваются интегралы по остальным участкам  $\partial K^1(x, t)$ , затем так же устанавливается непрерывность компоненты  $\left(\partial M\tilde{f}\right)_2$ , выражающейся через интеграл по  $\partial K^2(x, t)$  (см. рис. 1.3).

Как нетрудно видеть, та же трансверсальность приводит к непрерывности компонент  $\left(\partial M\tilde{f}\right)_i(x, t)$  при переходе точки  $(x, t)$  через быструю характеристику  $t = \tau_1(x)$ . В результате, компоненты оказываются непрерывными во всем прямоугольнике  $\{(x, t) \mid 0 \leq x \leq x_1(T), 0 \leq t \leq T\}$ .

Применяя неравенство Коши–Буняковского к интегралам вида (1.20),

<sup>6</sup> Замена (1.13), удаляющая производные  $(u_i)_x$  из (1.12), производилась с целью обеспечить такую трансверсальность.

<sup>7</sup> Это соотношение между  $s$  и  $\eta$  возникает, если исключить  $\xi$  из уравнений характеристик  $\eta - \tau_1(\xi) = t - \tau_1(x)$  и  $\eta - \tau_2(\xi) = s$ .

нетрудно прийти к оценке

$$\left\| \partial M \tilde{f} \right\|_{C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)} \leq C(T) \|f\|_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)},$$

в которой  $C(T)$  — постоянная, определяемая временем  $T$ , элементами матриц  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  и их производными.  $\square$

**Лемма 2.** *Отображение  $f \mapsto M \tilde{f}$  непрерывно из  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

*Доказательство.* Напомним, что

$$\left( M \tilde{f} \right)_i(x, t) = \varphi_i(x) \int_{K^i(x, t)} \sum_{j=1, 2} M_{ij}(\xi) \mu_j(\xi) f_j(\eta - \tau_j(\xi)) d\xi d\eta,$$

где

$$\varphi_i, \mu_i \in C_{\text{loc}}^4([0, \infty)), \quad M_{ij} \in C_{\text{loc}}^2([0, \infty)), \quad i, j = 1, 2.$$

Пусть  $\xi_i^{**}(x, t)$  есть  $\xi$ -координата точки пересечения быстрой характеристики  $t = \tau_1(x)$  и характеристики  $\eta + \tau_i(\xi) = t + \tau_i(x)$ ; функции  $a_i(\xi, x, t)$  и  $b_i(\xi, x, t)$  суть  $\eta$ -координаты нижнего и верхнего концов вертикального сечения области  $K^i(x, t)$  в точке  $\xi$  соответственно. Тогда

$$\left( M \tilde{f} \right)_i(x, t) = \varphi_i(x) \int_0^{\xi_i^{**}(x, t)} d\xi \sum_{j=1, 2} \left( M_{ij}(\xi) \mu_j(\xi) \int_{a_i(\xi, x, t) - \tau_j(\xi)}^{b_i(\xi, x, t) - \tau_j(\xi)} f_j(s) ds \right).$$

Поскольку функции  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $\tau_i$  непрерывны по всем своим переменным, интегралы вида  $\int_{a_i(\xi, x, t) - \tau_j(\xi)}^{b_i(\xi, x, t) - \tau_j(\xi)} f_i(s) ds$ ,  $i, j = 1, 2$ , непрерывно зависят от  $\xi$ ,  $x$ ,  $t$ . Откуда легко следуют включение  $\left( M \tilde{f} \right)_i \in C(\Pi^T)$  и оценка

$$\left\| M \tilde{f} \right\|_{C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)} \leq \tilde{C}(T) \|f\|_{L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)}$$

с постоянной  $\tilde{C}(T)$ , определяемой временем  $T$ , элементами матриц  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  и их производными.  $\square$

Объединяя результаты лемм, приходим к утверждению Теоремы 1.  $\square$

Как следствие теоремы, для правой части уравнения (1.19) имеем включение  $\Psi \tilde{f} \in C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .

### 1.2.4. Разрешимость в $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$

Здесь мы установим, что итерированное уравнение (1.19) корректно разрешимо в пространстве  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .

Введем семейство подобластей

$$\Pi^\eta := \{(x, t) \mid 0 \leq t \leq \eta, 0 \leq x \leq x_1(t)\}, \quad 0 \leq \eta \leq T,$$

и снабдим пространство  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  семейством полунорм:

$$\|y\|_\eta = \max_{i=1,2} \sup_{(x,t) \in \Pi^\eta} |y_i(x, t)|, \quad 0 < \eta \leq T.$$

Заметим, что  $\|\cdot\|_T$  совпадает с нормой в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .

**Лемма 3.** *Оператор  $\mathbb{I} - \partial M$  ограниченно обратим в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ .*

*Доказательство.* То, что оператор  $\partial M$  определен на всем  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  и непрерывен, легко усматривается из его определения.

Покажем, что справедлива оценка

$$\|\partial M y\|_t \leq C \int_0^t \|y\|_\eta \, d\eta \tag{1.21}$$

с постоянной  $C$ , не зависящей от  $t$ . Из очевидного неравенства

$$|y_i(\xi, \eta)| \leq \max_{i=1,2} \sup_{(x,t) \in \Pi^\eta} |y_i(x, t)| = \|y\|_\eta, \quad i = 1, 2,$$

имеем:

$$|(\partial M y)_i(0)| \leq \lambda \int_{\partial K^i(0)} |y_{\bar{i}}(\xi, \eta)| \, d\eta \leq C \int_0^s \|y\|_\eta \, d\eta,$$

где

$$\lambda := \max_{i=1,2} \max_{x \in [0, x_1(T)]} |\varphi_i(x) N_{\bar{i}}(x) \mu_{\bar{i}}(x)|,$$

откуда легко следует (1.21).

Далее, итерируя оценку (1.21), имеем:

$$\|(\partial M)^n y\|_T \leq C^n \int_0^T d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \dots \int_0^{\eta_{n-1}} d\eta_n \|y\|_T \leq \frac{C^n T^n}{n!} \|y\|_T,$$

и следовательно,

$$\|(\partial M)^n\| \leq \frac{C^n T^n}{n!}.$$

Откуда следуют существование оператора  $(\mathbb{I} - \partial M)^{-1}$  и его представление

$$(\mathbb{I} - \partial M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\partial M)^n$$

в виде ряда Неймана, сходящегося по операторной норме<sup>8</sup>. □

Вполне аналогично устанавливается следующий результат, доказательство которого мы опускаем.

**Лемма 4.** *Оператор  $M$  действует непрерывно в пространстве  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  и справедлива оценка:*

$$\|My\|_t \leq C \int_0^t \|y\|_\eta d\eta.$$

Комбинируя результаты лемм, нетрудно прийти к оценке

$$\|(\mathbb{I} - \partial M)^{-1} My\|_t \leq C \int_0^t \|y\|_\eta d\eta,$$

из которой следует ограниченная обратимость оператора  $\mathbb{I} - (\mathbb{I} - \partial M)^{-1} M$ . Из последней вытекает

**Теорема 2.** *Уравнение  $w - \Psi w = h$  однозначно разрешимо в  $C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$  при любой правой части.*

*Доказательство.* Утверждение становится очевидным, если записать уравнение в эквивалентной форме  $\left[ \mathbb{I} - (\mathbb{I} - \partial M)^{-1} M \right] w = (\mathbb{I} - \partial M)^{-1} h$ . □

---

<sup>8</sup> Прием получения вольтерровских оценок с использованием монотонного семейства полунорм заимствован из книги Л. П. Нижника [19].

### 1.2.5. Обобщенное решение

Возвращаясь к исходному интегральному уравнению (1.17) и итерированному уравнению (1.19), примем

**Определение 1.** *Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) с граничным управлением  $f \in L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  мы называем функцию  $u^f := \tilde{f} + w$ , где  $w$  есть решение уравнения (1.19).*

В компонентах это решение имеет вид

$$(u^f(x, t))_i = \mu_i(x) f_i(t - \tau_i(x)) + w_i(x, t), \quad i = 1, 2.$$

Существование и единственность обобщенного решения установлены в предыдущих рассуждениях. При разрывном управлении  $f$ , в силу  $w \in C(\Pi^T; \mathbb{R}^2)$ , решение  $u^f$  и функция  $\tilde{f}$  имеют одни и те же разрывы, локализованные на соответствующих характеристиках.

Ниже в работе мы называем  $u^f$  решением задачи (1.1)–(1.3), опуская термин «обобщенное».

## 1.3. Фундаментальное решение

### 1.3.1. Лучевой метод (анзац)

Рассмотрим матричную начально-краевую задачу

$$\rho U_{tt} - (\gamma U_x)_x + AU_x + BU = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.22)$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (1.23)$$

$$U|_{x=0} = \delta(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.24)$$

в которой  $\delta$  — дельта-функция Дирака. Решение  $U$  называется (матричным) *фундаментальным решением* исходной системы (1.1)–(1.3); наша цель — дать

его корректное определение. Это будет сделано в 1.3.3 после формальных рассмотрений, которые мы проведем по стандартной схеме лучевого метода (см., например, [2]).

Обозначим

$$\theta(t) := \int_{-\infty}^t \delta(s) ds = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(t)], \quad \varepsilon(t) := \int_{-\infty}^t \theta(s) ds = t\theta(t)$$

и будем искать решение в виде разложения по гладкости «анзац + невязка»:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \mathcal{A}(x, t) + \tilde{U}(x, t) \\ &= \alpha^1(x)\delta(t - \tau_1(x)) + \beta^1(x)\theta(t - \tau_1(x))\varkappa^1(x)\varepsilon(t - \tau_1(x)) \\ &\quad + \alpha^2(x)\delta(t - \tau_2(x)) + \beta^2(x)\theta(t - \tau_2(x)) + \varkappa^2(x)\varepsilon(t - \tau_2(x)) \\ &\quad + \tilde{U}(x, t), \end{aligned} \tag{1.25}$$

где  $\alpha^i, \beta^i, \varkappa^i, i = 1, 2$  суть матрицы-функции, подлежащие определению.

Обозначим

$$\delta(t - \tau_i(x)) =: \delta_i, \quad \theta(t - \tau_i(x)) =: \theta_i, \quad \varepsilon(t - \tau_i(x)) =: \varepsilon_i, \quad i = 1, 2.$$

Подставляя разложение (1.25) в уравнение (1.22), получаем<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} 0 &= I_1\alpha^1\delta_1'' + [I_1\beta^1 + D_1\alpha^1] \delta_1' + [I_1\varkappa^1 + D_1\beta^1 + \tilde{L}\alpha^1] \delta_1 \\ &\quad + [D_1\varkappa^1 + \tilde{L}\beta^1] \theta_1 + [\tilde{L}\varkappa^1] \varepsilon_1 \\ &\quad + I_2\alpha^2\delta_2'' + [I_2\beta^2 + D_2\alpha^2] \delta_2' + [I_2\varkappa^2 + D_2\beta^2 + \tilde{L}\alpha^2] \delta_2 \\ &\quad + [D_2\varkappa^2 + \tilde{L}\beta^2] \theta_2 + [\tilde{L}\varkappa^2] \varepsilon_2 + \rho\tilde{U}_{tt} + \tilde{L}\tilde{U}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

где

$$\begin{aligned} I_i &:= \left[ \rho - (\tau_i')^2 \gamma \right], \quad D_i := 2\tau_i' \gamma \frac{d}{dx} + \tau_i'' \gamma + \tau_i' \gamma' - \tau_i' A, \\ \tilde{L} &:= -\frac{d}{dx} \left( \gamma \frac{d}{dx} \right) + A \frac{d}{dx} + B. \end{aligned}$$

<sup>9</sup> Ниже штрихом обозначены производные функций одной переменной по этой переменной.

Из начально-краевых условий следуют равенства

$$\alpha^1(0) + \alpha^2(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta^1(0) + \beta^2(0) = 0, \quad \varkappa^1(0) + \varkappa^2(0) = 0. \quad (1.27)$$

Приравнивая нулю коэффициенты при  $\delta_i''$ ,  $\delta_i'$ ,  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$ , получим обыкновенные дифференциальные уравнения (уравнения переноса) для элементов матриц  $\alpha^i$ ,  $\beta^i$ ,  $\varkappa^i$ . Решая их с учетом условия  $-A_{12} = A_{21} = a$  и начальных условий (1.27) для элементов матриц  $\alpha^i$ ,  $\beta^i$ ,  $\varkappa^i$ ,  $i = 1, 2$ , после весьма громоздких вычислений найдем:

$$\alpha^1(x) = \begin{bmatrix} \mu_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha^2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu_2(x) \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

$$\beta^1(x) = \mu_1(x) \begin{bmatrix} \int_0^x \frac{y_1(s)}{\mu_1(s)} ds & -\beta_{12}^2(0) \\ \frac{\sqrt{\rho_1 \gamma_1}}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}(x) a(x) & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

$$\beta^2(x) = \mu_2(x) \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{\rho_2 \gamma_2}}{\rho_1 \gamma_2 - \rho_2 \gamma_1}(x) a(x) \\ -\beta_{21}^1(0) & \int_0^x \frac{y_2(s)}{\mu_2(s)} ds \end{bmatrix}, \quad (1.30)$$

где

$$y_i := \frac{(-1)^i \tau_i' \beta_{ii}^i a + (\gamma_i \mu_i')' - B_{ii} \mu_i}{2\tau_i' \gamma_i}. \quad (1.31)$$

Также определяются элементы нижней строки матрицы  $\varkappa^1$ :

$$\varkappa_{21}^1 = -\frac{2\tau_1' \gamma_2 (\beta_{21}^1)' - \tau_1' \beta_{11}^1 a + (\tau_1' \gamma_2)' \beta_{21}^1 + \mu_1' a + B_{21} \mu_1}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2} \gamma_1, \quad (1.32)$$

$$\varkappa_{22}^1 = -\left( \frac{\rho_1^{\frac{1}{4}} \gamma_1^{\frac{1}{4}} \rho_2^{\frac{1}{2}} \gamma_2^{\frac{1}{2}} a}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}(0) \right) \frac{\rho_1^{\frac{1}{4}} \gamma_1^{\frac{1}{4}} a}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2};$$

и элементы верхней строки матрицы  $\varkappa^2$ :

$$\varkappa_{11}^2 = -\left( \frac{\rho_2^{\frac{1}{4}} \gamma_2^{\frac{1}{4}} \rho_1^{\frac{1}{2}} \gamma_1^{\frac{1}{2}} a}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}(0) \right) \frac{\rho_2^{\frac{1}{4}} \gamma_2^{\frac{1}{4}} a}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2},$$

$$\varkappa_{12}^2 = \frac{2\tau_2' \gamma_1 (\beta_{12}^2)' + \tau_2' \beta_{22}^2 a + (\tau_2' \gamma_1)' \beta_{12}^2 - \mu_2' a + B_{12} \mu_2}{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2} \gamma_2. \quad (1.33)$$

Для определения остальных элементов матриц  $\varkappa^i$  используется следующий прием. Добавляя в анзац разложения (1.25) очередные члены с  $\int_{-\infty}^t \varepsilon_i(s) ds$  и решая дополнительные уравнения переноса, найдем:

$$\varkappa_{ij}^i(x) = \mu_i(x) \left( \int_0^x \frac{d_{ij}(s)}{\mu_i(s)} ds - \varkappa_{ij}^i(0) \right), \quad i = 1, 2,$$

где

$$d_{ii} := \frac{\tau_i' A_{i\bar{i}} \varkappa_{i\bar{i}}^i + (\gamma_i(\beta_{ii}^i))' - A_{i\bar{i}} (\beta_{i\bar{i}}^i)' - B_{ii} \beta_{ii}^i - B_{i\bar{i}} \beta_{i\bar{i}}^i}{2\tau_i' \gamma_i},$$

$$d_{i\bar{i}} := \frac{\tau_i' A_{i\bar{i}} \varkappa_{i\bar{i}}^i + (\gamma_i(\beta_{i\bar{i}}^i))' - B_{ii} \beta_{i\bar{i}}^i}{2\tau_i' \gamma_i}, \quad i = 1, 2.$$

Тем самым, анзац  $\mathcal{A}$  полностью определен. Из принятых нами предположений о гладкости (1.6) легко видеть

$$\alpha^i \in C_{\text{loc}}^4([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad \beta^i \in C_{\text{loc}}^3([0, \infty); \mathbb{M}^2), \quad \varkappa^i \in C_{\text{loc}}^2([0, \infty); \mathbb{M}^2).$$

Из рассмотренных уравнений переноса легко следуют два представления для элемента  $a$  матрицы  $A$  и представления для элементов матрицы  $B$ :

$$a = \frac{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}{(\rho_1(0) \gamma_1(0) \rho_1 \gamma_1)^{\frac{1}{4}}} \beta_{21}^1, \quad (1.34)$$

$$a = \frac{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}{(\rho_2(0) \gamma_2(0) \rho_2 \gamma_2)^{\frac{1}{4}}} \beta_{12}^2, \quad (1.35)$$

$$B_{11} = \frac{-\tau_1' \beta_{21}^1 a + (\gamma_1 \mu_1')' - 2\sqrt{\rho_1 \gamma_1} \left( \frac{1}{4} \frac{(\rho_1 \gamma_1)'}{\rho_1 \gamma_1} + (\beta_{11}^1)' \right)}{\mu_1}, \quad (1.36)$$

$$B_{22} = \frac{\tau_2' \beta_{12}^2 a + (\gamma_2 \mu_2')' - 2\sqrt{\rho_2 \gamma_2} \left( \frac{1}{4} \frac{(\rho_2 \gamma_2)'}{\rho_2 \gamma_2} + (\beta_{22}^2)' \right)}{\mu_2}, \quad (1.37)$$

$$B_{12} = \frac{\left( \frac{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}{\gamma_2} \right) \varkappa_{12}^2 - 2\tau_2' \gamma_1 (\beta_{12}^2)' - \tau_2' \beta_{22}^2 a - (\tau_2' \gamma_1)' \beta_{12}^2 + \mu_2' a}{\mu_2}, \quad (1.38)$$

$$B_{21} = \frac{-\left( \frac{\rho_2 \gamma_1 - \rho_1 \gamma_2}{\gamma_1} \right) \varkappa_{21}^1 - 2\tau_1' \gamma_2 (\beta_{21}^1)' + \tau_1' \beta_{11}^1 a - (\tau_1' \gamma_2)' \beta_{21}^1 - \mu_1' a}{\mu_1}. \quad (1.39)$$



### 1.3.2. Лучевой метод (невязка)

Определив анзац, вернемся к соотношению (1.26) и впишем в него коэффициенты

$$P = - \left( D_1 \varkappa^1 + \tilde{L} \beta^1 \right), \quad Q = - \left( D_2 \varkappa^2 + \tilde{L} \beta^2 \right)$$

при  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно, причем, как показывают вычисления, их структура оказывается следующей:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.40)$$

Теперь в равенстве (1.26) аннулируются все члены меньшей гладкости, нежели слагаемые, содержащие  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Это равенство можно рассматривать как уравнение относительно невязки

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{11}(x, t) & \tilde{U}_{12}(x, t) \\ \tilde{U}_{21}(x, t) & \tilde{U}_{22}(x, t) \end{pmatrix},$$

для которой, с учетом условий (1.23), (1.24), получаем задачу

$$\rho \tilde{U}_{tt} - \left( \gamma \tilde{U}_x \right)_x + A \tilde{U}_x + B \tilde{U} = H, \quad x > 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.41)$$

$$\tilde{U}|_{t=0} = \tilde{U}_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (1.42)$$

$$\tilde{U}|_{x=0} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.43)$$

где

$$H := P \theta_1 + Q \theta_2 - \left[ \tilde{L} \varkappa^1 \right] \varepsilon_1 - \left[ \tilde{L} \varkappa^2 \right] \varepsilon_2$$

есть матрица-функция от  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ , непрерывная вне характеристик  $t = \tau_i(x)$  и аннулирующаяся при  $t < \tau_1(x)$ . При этом на самих характеристиках непрерывность, вообще говоря, нарушается, и элементы  $H$  могут иметь скачки.

Теми же приемами, с помощью которых система (1.1)–(1.3) сводилась к уравнению (1.17), задача (1.41)–(1.43) сводится к матричному интегральному

уравнению для невязки. Опуская подробности, приведем его окончательный вид:

$$\tilde{U} - \Psi \tilde{U} = S, \quad (1.44)$$

где  $S$  — матрица-функция с элементами

$$S_{ij}(x, t) = \varphi_i(x) \int_{K^i(x, t)} G_{ij}(\xi) \theta(\eta - \tau_i(\xi)) d\xi d\eta$$

и

$$G = \begin{pmatrix} \varphi_1 \left( Q_{11} - \left( \tilde{L} \chi^2 \right)_{11} \right) & \varphi_1 \left( Q_{12} - \left( \tilde{L} \chi^2 \right)_{12} \right) \\ \varphi_2 \left( P_{21} - \left( \tilde{L} \chi^1 \right)_{21} \right) & \varphi_2 \left( P_{22} - \left( \tilde{L} \chi^1 \right)_{22} \right) \end{pmatrix} \in C_{\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{M}^2).$$

Разрешимость уравнения (1.44) устанавливается теми же средствами, которые использовались при исследовании уравнения (1.17). Изменения сводятся к тому, что теперь уравнение рассматривается в пространстве  $C^1(\Pi^T; \mathbb{M}^2)$ , в котором вводится соответствующее семейство полунорм. Опуская весьма громоздкое доказательство, отметим существенный факт, на который оно опирается. Правая часть  $S$  в (1.44) оказывается непрерывно дифференцируемой при  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ , причем такая гладкость обеспечивается специальной структурой матриц  $P$  и  $Q$ , а именно, наличием в них нулевых строк (см. (1.40)).

На том же пути исследуется гладкость решения  $\tilde{U}$  *вне характеристик*. С этой целью оно разбивается в сумму

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= \tilde{U}^{(1)} + \tilde{U}^{(2)} := \\ &\theta(t - \tau_2(x)) \tilde{U} + [\theta(t - \tau_1(x)) - \theta(t - \tau_2(x))] \tilde{U}, \end{aligned}$$

затем рассматривается пространство пар вида  $\{\tilde{U}^{(1)}, \tilde{U}^{(2)}\}$  с адекватной  $C^2$ -нормой и семейством полунорм. Легко проверяется, что пара  $\{S^{(1)}, S^{(2)}\}$ , соответствующая правой части уравнения (1.44), является элементом этого пространства; в нем же устанавливается разрешимость. Приведем итоговый результат: справедлива

**Лемма 5.** Уравнение (1.44) имеет единственное решение  $\tilde{U}$ , непрерывно дифференцируемое при  $(x, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$  и аннулирующееся при  $t \leq \tau_1(x)$ ; при этом выполнено  $\tilde{U}|_{x=0} = 0$ , и решение  $\tilde{U}$  дважды непрерывно дифференцируемо вне характеристик.

Условимся под решением задачи (1.41)–(1.43) для невязки понимать решение  $\tilde{U}$  интегрального уравнения (1.44).

### 1.3.3. Решение $U$ и его свойства

Приведенные выше рассуждения мотивируют и делают корректным

**Определение 2.** Фундаментальным решением задачи (1.1)–(1.3) называется обобщенная матрица-функция  $U(x, t)$ , определяемая правой частью (1.25), в которой коэффициенты анзаца  $\mathcal{A}$  определены лучевым методом, а  $\tilde{U}$  есть решение задачи (1.41)–(1.43) (уравнения (1.44)).

В силу  $C^1$ -гладкости невязки, решение  $U$  и анзац  $\mathcal{A}$  имеют одинаковые сингулярности, разрывы и разрывы первых производных. На рис. 1.4 показаны типичные профили элементов фундаментального решения; отметим некоторые особенности их формы.

- Столбец  $\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}$  описывает волну, отвечающую управлению  $\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix}$ . Оно возбуждает быструю моду, распространяющуюся со скоростью  $c_1$  в первом канале<sup>10</sup>. При этом из-за взаимодействия мод во втором канале появляется индуцированное возмущение (т. н. «предвестник»: см. затененную часть профиля  $U_{21}$ ), которое распространяется с быстрой скоростью  $c_1$ .
- Столбец  $\begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{pmatrix}$  отвечает управлению  $\begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$ , возбуждающему медленную моду во втором канале. Одновременно, вследствие взаимодействия, воз-

---

<sup>10</sup> Первым и вторым каналом мы называем, соответственно, вектор-функции  $\begin{pmatrix} y(x) \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ y(x) \end{pmatrix}$ .

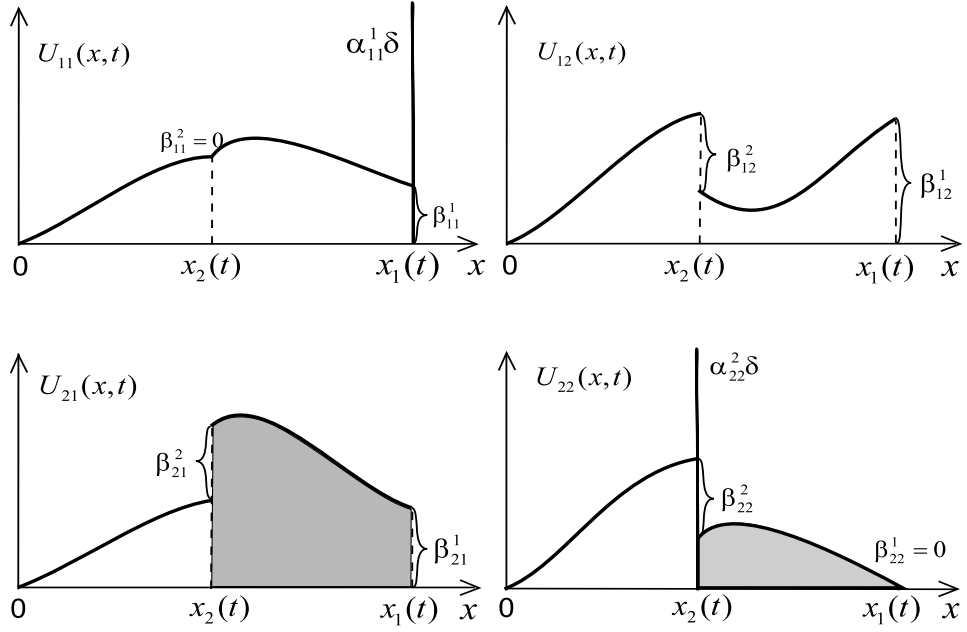


Рис. 1.4. Структура фундаментального решения при произвольном  $t \in (0, T)$

буждается первый канал. Возникшее в нем возмущение обгоняет медленную моду и, в свою очередь, приводит к появлению предвестника во втором канале (см. затененную часть профиля  $U_{22}$ ).

Таким образом, в общей ситуации вся волна оказывается смесью быстрой и медленной мод, распространяющейся с быстрой скоростью  $c_1$ .

В дополнение приведем фундаментальное решение в частном случае, когда матрица  $\rho$  постоянна, а  $\gamma$  есть единичная матрица. При этом вид эйконалов упрощается:  $\tau_i = \frac{x}{c_i}$ , где  $c_i = \text{const}$ , и мы имеем представление

$$\begin{aligned}
 U(x, t) = & \begin{pmatrix} \delta\left(t - \frac{x}{c_1}\right) & 0 \\ 0 & \delta\left(t - \frac{x}{c_2}\right) \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{\rho_1}} \int_0^x \left(\frac{\rho_1}{\rho_2 - \rho_1} a^2(s) + B_{11}(s)\right) ds & -\frac{\sqrt{\rho_2}}{\rho_2 - \rho_1} a(0) \\ \frac{\sqrt{\rho_1}}{\rho_2 - \rho_1} a(x) & 0 \end{pmatrix} \theta\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \\
 & + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\rho_2}}{\rho_2 - \rho_1} a(x) \\ -\frac{\sqrt{\rho_1}}{\rho_2 - \rho_1} a(0) & \frac{1}{2\sqrt{\rho_2}} \int_0^x \left(\frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} a^2(s) - B_{22}(s)\right) ds \end{pmatrix} \theta\left(t - \frac{x}{c_2}\right) + \dots,
 \end{aligned}$$

в котором опущены более гладкие члены.

### 1.3.4. Представление Дюамеля для $u^f$

Связь между фундаментальным решением и решением системы (1.1)–(1.3) дается известной формулой Дюамеля

$$u^f(x, t) = [U(x, \cdot) * f](t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (1.45)$$

являющейся следствием линейности системы и независимости коэффициентов уравнения (1.1) от времени. Существование свертки и равенство в (1.45) устанавливаются стандартными методами. Удерживая в анзаце фундаментального решения только сингулярные члены, из (1.45), с учетом структуры матриц  $\alpha^i$ ,  $i = 1, 2$ , получаем представление

$$\begin{aligned} u^f(x, t) &= [(\alpha^1 \delta_1 + \alpha^2 \delta_2 + W) * f](t) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}^1(x) f_1(t - \tau_1(x)) \\ \alpha_{22}^2(x) f_2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_0^t W(x, t - s) f(s) ds \\ &= \mu(x) \begin{pmatrix} f_1(t - \tau_1(x)) \\ f_2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_0^{t - \tau_1(x)} W(x, t - s) f(s) ds \end{aligned} \quad (1.46)$$

с кусочно-непрерывной матрицей-функцией

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \beta^1(x) \theta(t - \tau_1(x)) + \varkappa^1(x) \varepsilon(t - \tau_1(x)) \\ &\quad + \beta^2(x) \theta(t - \tau_2(x)) + \varkappa^2(x) \varepsilon(t - \tau_2(x)) + \tilde{U}(x, t), \end{aligned} \quad (1.47)$$

которая аннулируется при  $t < \tau_1(x)$ , может иметь разрывы только на характеристиках  $t = \tau_i(x)$  и дважды непрерывно дифференцируема вне характеристик. Используя эти свойства, можно показать: если управление  $f \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  удовлетворяет условиям согласования  $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ , то функция  $u^f$ , определяемая равенством (1.45), оказывается *классическим решением* задачи (1.1)–(1.3).

Введем линеал

$$\mathcal{M}^T := \{f \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^2) \mid \text{supp } f \subset (0, T]\} \quad (1.48)$$

гладких управлений, аннулирующихся вблизи  $t = 0$ , и сформулируем

**Предложение 1.** *Для управлений  $f \in \mathcal{M}^T$  задача (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое гладкое решение  $u^f(x, t)$ . Для него справедливо представление*

$$u^f(x, t) = \mu(x) \begin{pmatrix} f_1(t - \tau_1(x)) \\ f_2(t - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_0^{t - \tau_1(x)} W(x, t - s) f(s) ds \quad (1.49)$$

с матричным ядром  $W(x, t)$ , дважды непрерывно дифференцируемым в  $[0, \infty) \times [0, T]$  вне характеристик  $t = \tau_i(x)$  уравнения (1.1), и таким, что  $W|_{t < \tau_1(x)} = 0$ ,  $W|_{x=0} = 0$ .

Для управлений  $f \in L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  (обобщенное) решение задачи определяется как правая часть представления (1.49). Следствием такого определения является соотношение

$$u^f|_{t < \tau_1(x)} = 0 \quad (1.50)$$

и локальный характер зависимости решения от коэффициентов: значения  $u^f$  при  $0 \leq t \leq T$  определяются значениями  $\rho, \gamma, A, B$  при  $0 \leq x \leq x_1(T)$  (не зависят от поведения коэффициентов при  $x > x_1(T)$ ). Эта локальность (причинность) является следствием гиперболичности уравнения (1.1) и отвечает конечности скорости распространения волн.

Из независимости коэффициентов уравнения (1.1) от времени следует известное соотношение

$$u^f(\cdot, s) = u^{\mathcal{T}_{T-s}^T f}(\cdot, T), \quad 0 \leq s \leq T, \quad (1.51)$$

где  $\mathcal{T}_{T-s}^T$  — действующий в  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  оператор задержки:

$$(\mathcal{T}_{T-s}^T f)(t) := f(t - (T - s)) \quad (1.52)$$

(запись использует Соглашение 1 (а)). Следующее Предложение 2 дает интегральное представление решения  $u^f$  в финальный момент времени  $t = T$  через

матричную функцию

$$w^T(x, t) := W(x, T - t), \quad (1.53)$$

которая, в силу определения (1.53) и формулы (1.47), может иметь скачки на кривых  $t = T - \tau_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , вместе со своими частными производными. Эти скачки как функции переменной  $x$  оказываются связанными с матрицами  $\beta^i(x)$ ,  $\varkappa^i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , простыми соотношениями. В Предложении 2 используются обозначения для скачков, введенные в (1.8), (1.9).

**Предложение 2.** *Для решения  $u^f$  в момент времени  $t = T$  справедливо представление*

$$u^f(x, T) = \mu(x) \begin{pmatrix} f_1(T - \tau_1(x)) \\ f_2(T - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_0^{T - \tau_1(x)} w^T(x, t) f(t) dt \quad (1.54)$$

с матрицей-функцией

$$w^T(x, t) = \beta^1(x)\theta(T - \tau_1(x) - t) + \varkappa^1(x)\varepsilon(T - \tau_1(x) - t) \quad (1.55) \\ + \beta^2(x)\theta(T - \tau_2(x) - t) + \varkappa^2(x)\varepsilon(T - \tau_2(x) - t) + \tilde{U}(x, T - t),$$

определенной на прямоугольнике  $[0, x_1(T)] \times [0, T]$  и дважды непрерывно-дифференцируемой вне характеристик  $t = T - \tau_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , аннулирующей при  $t > T - \tau_1(x)$  и при  $x = 0$ . Более того, на характеристиках  $t = T - \tau_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , матрица-функция  $w^T$  имеет возможные скачки:

$$w^T(x, \langle T - \tau_i(x) \rangle) = -\beta^i(x), \quad 0 < x < x_i(T), \quad (1.56)$$

являющиеся дважды непрерывно-дифференцируемыми функциями переменной  $x$ , и скачки производной по  $t$ :

$$[w_t^T(x, t)]_{t=T - \tau_i(x) - 0}^{t=T - \tau_i(x) + 0} = \varkappa^i(x), \quad 0 < x < x_i(T), \quad (1.57)$$

являющиеся непрерывно-дифференцируемыми матричными функциями переменной  $x$ . Кроме того,

$$w^T(x_1(T) - 0, 0) = \beta^1(x_1(T) - 0). \quad (1.58)$$

*Доказательство.* Представление (1.54) и формула (1.55) следует из (1.46), (1.47) и определения функции  $w^T$  (1.53). Свойства  $w^T$  и равенство (1.56) следуют из соотношения (1.55) и свойств матриц  $\beta^i, \varkappa^i, i = 1, 2$ . Формула (1.57) выводится дифференцированием (1.55) по  $t$  и подсчетом скачка производной  $w_t^T(x, t)$  на характеристиках  $t = T - \tau_i(x), i = 1, 2$ . Соотношение (1.58) следует из (1.55) при  $t = 0$ .  $\square$

Формулы (1.56), (1.57) и (1.34)–(1.39) определяют связь разрывов матриц  $w^T, w_t^T$  на кривых  $t = T - \tau_i(x)$  (как функций переменной  $x$ ) с матрицами  $\rho, \gamma, A$  и  $B$ . Запишем представление (1.34) с учетом (1.56):

$$a(x) = -\frac{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2}{(\rho_1(0)\gamma_1(0)\rho_1\gamma_1)^{\frac{1}{4}}}(x)w_{12}^T(x, \langle T - \tau_2(x) \rangle) \quad (1.59)$$

$$= -\frac{\rho_2\gamma_1 - \rho_1\gamma_2}{(\rho_2(0)\gamma_2(0)\rho_2\gamma_2)^{\frac{1}{4}}}(x)w_{21}^T(x, \langle T - \tau_1(x) \rangle). \quad (1.60)$$

## 1.4. Оператор реакции

Системе (1.1)–(1.3) сопоставляется *оператор реакции*  $R^T$ , определенный на линейале  $\mathcal{M}^T$  и действующий в пространстве управлений  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  по правилу:

$$(R^T f)(t) := \gamma(0)u_x^f(0, t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Поскольку в действии оператора реакции участвует дифференцирование, он оказывается неограниченным. Выведем полезное представление оператора реакции.

**Предложение 3.** *Справедливо представление*

$$(R^T f)(t) = -\nu f'(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.61)$$



с постоянными матрицами

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \nu_i := c_i(0)\rho_i(0),$$

$$\omega := \begin{pmatrix} -\frac{c_1(0)}{2} (c_1\rho_1)_x \big|_{x=0} & -\frac{c_1(0)}{c_1(0)+c_2(0)} a(0) \\ \frac{c_2(0)}{c_1(0)+c_2(0)} a(0) & -\frac{c_2(0)}{2} (c_2\rho_2)_x \big|_{x=0} \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

( $a(x) = A_{21}(x)$ ) и симметричной непрерывно дифференцируемой матрицей-функцией

$$r(t) := \gamma(0)W_x(0, t) = \gamma(0)w_x^T(0, T - t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

При этом выполняются соотношения

$$\nu_1, \nu_2 > 0, \quad \omega_{12} = -\frac{c_1(0)}{c_2(0)}\omega_{21}, \quad \omega_{21} - \omega_{12} = a(0). \quad (1.63)$$

Представление выводится из определения оператора реакции и формулы Дюамеля (1.45):

$$R^T f = \gamma(0) U_x(0, \cdot) * f. \quad (1.64)$$

Производная  $U_x(0, \cdot)$  находится дифференцированием разложения (1.25): как можно проверить, справедливо представление

$$U_x(0, t) = -\tilde{\nu} \delta'(t) + \tilde{\omega} \delta(t) + \tilde{r}(t), \quad t \geq 0,$$

в котором

$$\tilde{\nu} := \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\rho_1(0)}{\gamma_1(0)}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\rho_2(0)}{\gamma_2(0)}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\omega} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \left( \frac{\rho'_1}{\rho_1} + \frac{\gamma'_1}{\gamma_1} \right) (0) & -\frac{c_1}{c_1+c_2} \frac{a}{\gamma_1} (0) \\ \frac{c_2}{c_1+c_2} \frac{a}{\gamma_2} (0) & -\frac{1}{4} \left( \frac{\rho'_2}{\rho_2} + \frac{\gamma'_2}{\gamma_2} \right) (0) \end{pmatrix},$$

а  $\tilde{r}(t)$  — матрица-функция, непрерывно дифференцируемая при  $t \geq 0$ . Подставляя его в (1.64), для оператора реакции получаем нужное представление. Симметричность матричной функции отклика  $r(t)$  при каждом  $t \geq 0$  выводится из условий самосопряженности (1.5).

Отметим, что в работе [7], в которой рассматривался случай системы с постоянными  $\rho$  и  $\gamma$ , в представлении, аналогичном (1.61), по ошибке упущен член  $\omega f(t)$ . Приведем правильное выражение:

$$\begin{aligned} (R^T f)(t) = & \\ & - \begin{pmatrix} \sqrt{\rho_1(0)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\rho_2(0)} \end{pmatrix} f'(t) + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{c_1}{c_1+c_2}a(0) \\ \frac{c_2}{c_1+c_2}a(0) & 0 \end{pmatrix} f(t) \\ & + \int_0^t r(t-s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Как легко видеть из (1.61), оператор  $R^T$  расширяется с гладкого линейала  $\mathcal{M}^T$  на управления  $f \in H^1([0, T]; \mathbb{R}^2)$ , с условием  $f(0) = 0$ .

В динамических обратных задачах оператор реакции играет роль данных, по которым восстанавливаются параметры системы (см. [8], [25]).

## 1.5. Медленные волны

Как отмечалось выше, любая волна в двухскоростной системе является смесью быстрой и медленной мод. В общей ситуации взаимодействие мод порождает предвестники в медленном канале, в результате чего волна<sup>11</sup> распространяется со скоростью быстрой моды  $c_1$ . Здесь мы описываем красивый физический эффект, свойственный двухскоростным системам: оказывается, при определенной связи между компонентами управления предвестник исчезает, и волна (смесь мод!) распространяется со скоростью медленной моды  $c_2$ . Возможно, впервые этот эффект был обнаружен в [25]; там же и в более поздних работах [7]–[9] он был использован для решения обратных задач. Эти работы относились к системам с постоянными скоростями; здесь рассматривается более общий случай переменных разделенных  $c_1$  и  $c_2$ .

---

<sup>11</sup> Точнее говоря, ее передний фронт, т. е. точка на оси  $x$ , отделяющая возмущенную зону от зоны покоя

Рассмотрим задачу

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1.65)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (1.66)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad t \geq 0, \quad (1.67)$$

с управлениями  $f \in L_2^{\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{R}^2)$ . Ее решения, удовлетворяющие условию

$$u^f(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau_2(x), \quad (1.68)$$

называются *медленными волнами* (см. рис. 1.5).

**Теорема 3.** *Существует единственная функция  $l \in C_{\text{loc}}^2[0, \infty)$  такая, что условие (1.68) выполнено в том и только в том случае, если компоненты управления  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  связаны соотношением*

$$f_1(t) = \int_0^t l(t-s) f_2(s) ds, \quad t \geq 0. \quad (1.69)$$

*Доказательство. 1.* Согласно (1.54), соотношение (1.68) при  $t = T > 0$  имеет вид:

$$\begin{aligned} & \mu_1(x) f_1(T - \tau_1(x)) + \int_0^{T-\tau_1(x)} w_{11}^T(0) f_1(s) ds \\ & + \int_0^{T-\tau_1(x)} w_{12}^T(0) f_2(s) ds = 0, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Заменим переменные: пусть  $t = T - \tau_1(x)$ , тогда  $x = x_1(T - t)$ , и при  $x_2(T) \leq x \leq x_1(T)$  для  $t$  имеем:  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$ . В новых переменных уравнение

(1.70) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \mu_1(x_1(T-t))f_1(t) + \int_0^t w_{11}^T(x_1(T-t), s)f_1(s)ds \\ &= - \int_0^t w_{12}^T(x_1(T-t), s)f_2(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)). \end{aligned} \quad (1.71)$$

Поделив на  $\mu_1 = \left(\frac{\gamma_1(0)\rho_1(0)}{\gamma_1\rho_1}\right)^{\frac{1}{4}} \neq 0$ , получаем:

$$f_1(t) + \int_0^t V_1^T(t, s)f_1(s)ds = \int_0^t V_2^T(t, s)f_2(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)), \quad (1.72)$$

где

$$V_i^T(t, s) := \frac{w_{1i}^T(x_1(T-t), s)}{\mu_1(x_1(T-t))}.$$

Выясним, в какой области меняются аргументы ядер  $V_1^T, V_2^T$ . Из ограничений  $0 < t < T - \tau_1(x_2(T))$  и  $0 < s < t$  легко следует, что точка  $(x_1(T-t), s)$  лежит в области между характеристиками. Поэтому гладкость ядер определяется гладкостью компонент  $w_{11}^T, w_{12}^T$  между характеристиками  $t = T - \tau_i(x), i = 1, 2$ . Последние, как отмечалось выше, суть дважды непрерывно дифференцируемые функции. Следовательно,  $V_1^T, V_2^T$  дважды непрерывно дифференцируемы в области изменения своих переменных.

**2.** Уравнение (1.72) есть уравнение Вольтерра второго рода относительно  $f^1$ . С учетом вида правой части, из общей теории таких уравнений легко следует, что его решение имеет вид:

$$f_1(t) = \int_0^t L^T(t, \eta)f_2(\eta)d\eta, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)), \quad (1.73)$$

где  $L^T$  — ядро, дважды непрерывно дифференцируемое по своим переменным и зависящее от  $T$  как от параметра. Заметим, что соотношение (1.73) эквивалентно (векторному) равенству (1.68). Действительно, (1.73) равносильно условию

$$(u^f(x, T))_1 = 0, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T),$$

но из известной связи между компонентами волны

$$(u^f(x, T))_2 = \int_x^{x_1(T)} N^T(x, s) (u^f(s, T))_1 ds, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T),$$

(см., например, [6]) следует:

$$(u^f(x, T))_2 = 0, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T),$$

что и ведет к (1.68).

**3.** Уточним свойства ядра  $L^T$  из (1.73): покажем, что оно не зависит от  $T$ .

Действительно, для  $T_1 < T$ , при произвольном  $f^2$ , управления

$$\begin{pmatrix} \int_0^t L^{T_1}(t, \eta) f_2(\eta) d\eta \\ f_2(t) \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \int_0^t L^T(t, \eta) f_2(\eta) d\eta \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

порождают медленные волны, удовлетворяющие условию  $u^f(x, t) = 0$  для  $(x, t)$  таких, что  $0 \leq x_2(t) \leq x$ ,  $t \leq T_1$ . Следовательно, разность

$$\begin{pmatrix} \int_0^t [L^{T_1}(t, \eta) - L^T(t, \eta)] f_2(\eta) d\eta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

также есть управление, порождающее медленную волну. В силу связи (1.73) между компонентами таких управлений, первая компонента в (1.74) аннулируется для любой  $f_2$ . Отсюда  $L^{T_1}(t, \eta) - L^T(t, \eta) = 0$  для  $t < T_1$ . По произвольности  $T$  и  $T_1$  заключаем:  $L^T(t, \eta) = L(t, \eta)$ .

Покажем, что ядро  $L$  зависит от разности аргументов:

$$L(t, \eta) = L(t - \eta, 0) =: l(t - \eta). \quad (1.75)$$

Действительно, в силу независимости коэффициентов уравнения (1.65) от времени, класс управлений, порождающих медленные волны, инвариантен относительно сдвигов  $t \mapsto t - \xi$ . Следовательно,

$$f_1(t - \xi) = \int_0^t L(t, \eta) f_2(\eta - \xi) d\eta = \int_0^{t-\xi} L(t, \eta + \xi) f_2(\eta) d\eta. \quad (1.76)$$

С другой стороны, из (1.73) вытекает равенство

$$f_1(t - \xi) = \int_0^{t-\xi} L(t - \xi, \eta) f_2(\eta) d\eta. \quad (1.77)$$

Сопоставляя (1.76) и (1.77), получим

$$L(t, \eta + \xi) = L(t - \xi, \eta).$$

Положив  $\eta = 0$ , приходим к (1.75), откуда и следует связь (1.69).

Единственность функции  $l$  следует из единственности решения уравнения Вольтерра (1.72).  $\square$

Можно получить уравнение, непосредственно определяющее функцию  $l$ . Взяв в (1.69) в качестве второй компоненты управления  $f_2 = \delta(t)$ , имеем:  $f_1 = l * \delta = l$ . В силу этого, полагая в (1.71)  $f_2 = \delta$ , приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \mu_1(x_1(T - t)) l(t) + \int_0^t w_{11}^T(x_1(T - t), s) l(s) ds \\ = -w_{12}^T(x_1(T - t), 0), \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Полезно отметить, что в задаче с конечным финальным моментом  $t = T$  для выполнения условия  $u^f|_{t < \tau_2(x)} = 0$  необходимо и достаточно, чтобы связь (1.69) имела место при временах  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$  (см. рис. 1.5). Отсюда видно, что зависимость функции  $l$  от коэффициентов уравнения балки является *локальной*: значения  $l$  при  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$  определяются значениями  $\rho, \gamma, A, B$  при  $0 \leq x \leq x_2(T)$  (не зависят от поведения коэффициентов при  $x > x_2(T)$ ). В более общем случае, если управление действует с момента  $t = T - \xi$ , соотношение (1.69) должно быть выполнено при  $T - \xi \leq t \leq T - \tau_1(x_2(\xi))$  (см. рис. 1.5).

В заключение отметим, что значение  $l(0)$  можно выразить через параметры системы. Устремляя  $t \rightarrow +0$  в (1.78), найдем:

$$l(0) = -\frac{w_{12}^T(x_1(T) - 0, 0)}{\mu_1(x_1(T))} \stackrel{(1.58)}{=} -\frac{\beta_{12}^1(x_1(T))}{\mu_1(x_1(T))}. \quad (1.79)$$

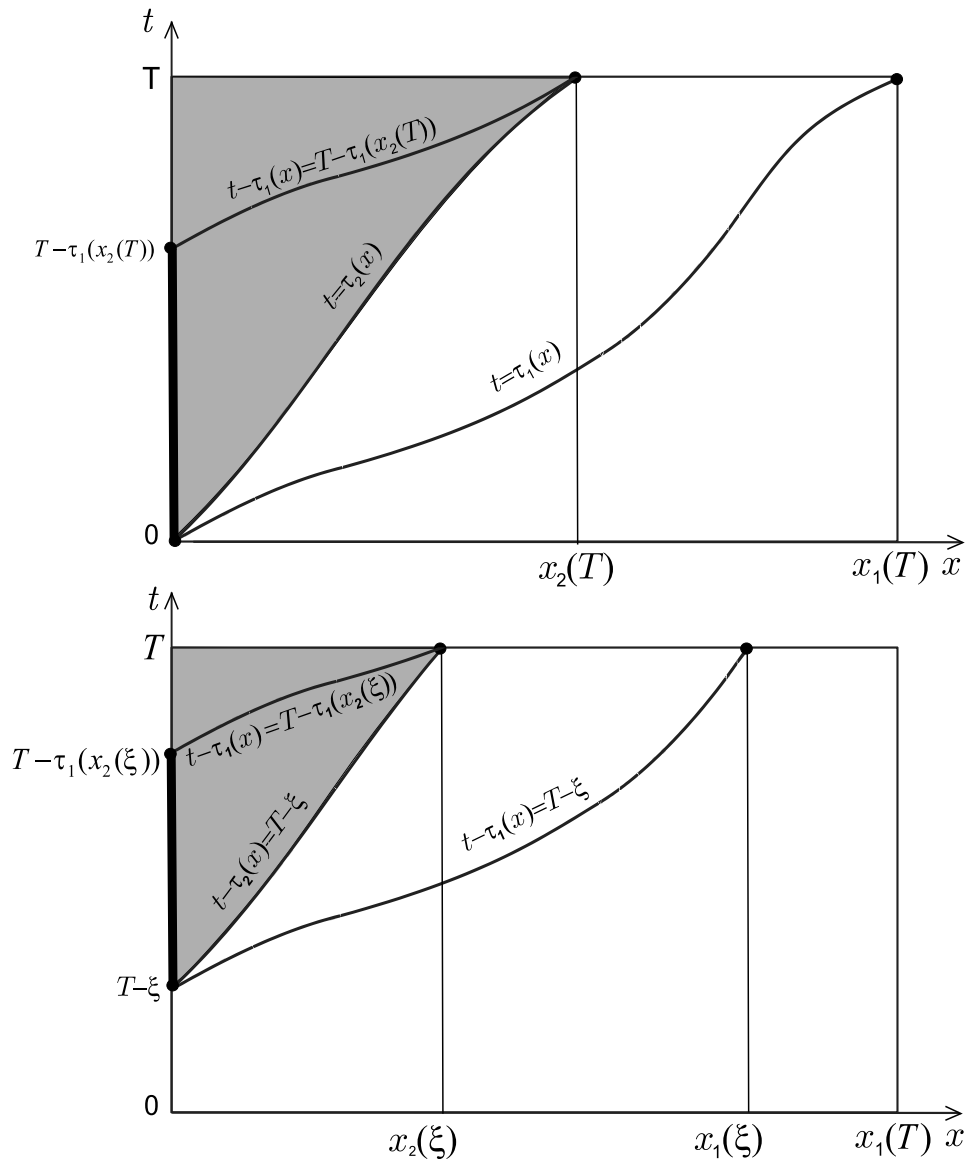


Рис. 1.5. Медленные волны

Подставляя в (1.79) значения  $\beta_{12}^1(x_1(T))$  и  $\mu_1(x_1(T))$ , получаем:

$$l(0) = \frac{a(0)\sqrt{\rho_2(0)\gamma_2(0)}}{\rho_2(0)\gamma_1(0) - \rho_1(0)\gamma_2(0)} \stackrel{(1.62)}{=} \frac{\alpha\omega_{21}}{(\alpha - 1)\nu_1}, \quad (1.80)$$

где

$$\alpha := \frac{c_1(0)}{c_2(0)} > 1.$$

В частном случае, когда  $\gamma$  — единичная матрица, имеем:

$$l(0) = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\rho_2 - \rho_1}(0)a(0).$$



## Глава 2

## Динамическая система

Далее в работе будем считать матрицы  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$  и  $B$  гладкими. С учетом отмеченных свойств решения  $u^f$  (см. (1.50)), задачу (1.1)–(1.3) можно записать в виде

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < x_1(T), \quad 0 < t < T, \quad (2.1)$$

$$u|_{t < \tau_1(x)} = 0, \quad (2.2)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Такая запись оптимальна в том смысле, что она не содержит значений коэффициентов  $\{\rho, \gamma, A, B\}|_{x > x_1(T)}$ , от которых решение не зависит.

Далее задача (2.1)–(2.3) рассматривается как *динамическая система*. Она обозначается символом  $\mathfrak{s}^T$  и наделяется стандартными атрибутами теории управления.

## 2.1. Атрибуты

## 2.1.1. Пространства и подпространства

Гильбертово пространство управлений  $\mathcal{F}^T := L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} := \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$$

(« $\cdot$ » — стандартное произведение в  $\mathbb{R}^2$ ) называется *внешним пространством* системы  $\mathfrak{s}^T$ . Оно содержит расширяющуюся (с ростом параметра  $\xi$ ) цепочку подпространств

$$\mathcal{F}^{T, \xi} := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \text{supp } f \subset [T - \xi, T]\} = \mathcal{T}_{T-\xi}^T \mathcal{F}^T, \quad 0 \leq \xi \leq T,$$

образованных запаздывающими управлениями<sup>1</sup>. Запаздывание управления ведет к запаздыванию волны: из (1.49) легко следует соотношение

$$u^f|_{t < \tau_1(x) + T - \xi} = 0, \quad f \in \mathcal{F}^{T, \xi}, \quad (2.4)$$

уточняющее (1.50).

Пространство  $\mathcal{H}^{x_1(T)} := L_{2, \rho}([0, x_1(T)]; \mathbb{R}^2)$  со скалярным произведением

$$(y, v)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} := \int_0^{x_1(T)} [\rho(x) y(x)] \cdot v(x) dx$$

называется *внутренним*. Как видно из (1.50), при всех  $t \in [0, T]$  волны  $u^f(\cdot, t)$  суть его элементы. Внутреннее пространство содержит две цепочки подпространств

$$\mathcal{H}^{x_i(\xi)} := \left\{ y \in \mathcal{H}^{x_1(T)} \mid \text{supp } y \subset [0, x_i(\xi)] \right\}, \quad 0 \leq \xi \leq T, \quad i = 1, 2.$$

### 2.1.2. Оператор управления $W^T$

По терминологии теории управления волна  $u^f(\cdot, t)$  есть состояние системы  $\mathfrak{s}^T$  в момент времени  $t$ ,  $\{u^t(\cdot, t) \mid 0 \leq t \leq T\}$  — ее траектория. Соответствие «вход  $\mapsto$  состояние» реализуется *оператором управления*  $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}^{x_1(T)}$ ,

$$\begin{aligned} W^T f(x) &:= u^f(x, T) \\ &= \mu(x) \begin{pmatrix} f_1(T - \tau_1(x)) \\ f_2(T - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_0^{T - \tau_1(x)} w^T(x, t) f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq x_1(T). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь, в силу условия гладкости матричных коэффициентов  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$  и  $B$  (в отличие от Предложения 2), матричное ядро  $w^T(x, t)$  является *гладким* в прямоугольнике  $[0, x_1(T)] \times [0, T]$  вне характеристик  $t = T - \tau_i(x)$  и таким, что  $w^T|_{t > T - \tau_1(x)} = 0$ ,  $w^T|_{x=0} = 0$ . Скачки матрицы  $w^T$  и ее производной  $w_t^T$  на характеристиках  $t = T - \tau_i(x)$ ,  $x \in (0, x_i(T))$ ,  $i = 1, 2$ , задаются формулами

<sup>1</sup>  $T - \xi$  есть запаздывание,  $\xi$  — время действия управлений

(1.56), (1.57) и являются гладкими матрицами-функциями переменной  $x$ , так как матрицы  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\beta^i$ ,  $\varkappa^i$  суть гладкие.

Из представления (2.5) очевидно, что оператор управления ограничен. Отметим соотношения

$$W^T \mathcal{T}_{T-\xi}^T f = u^f(\cdot, \xi), \quad W^T \mathcal{F}^{T, \xi} \subset \mathcal{H}^{x_1(\xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq T, \quad (2.6)$$

являющиеся формой записи (1.51) и (1.50) соответственно. На гладких управлениях, имеем:

$$u^{f_{tt}} = u_{tt}^f \stackrel{(1.1)}{=} Lu^f,$$

где

$$Ly := \rho^{-1}((\gamma y_x)_x - Ay_x - By).$$

Отсюда следует соотношение

$$LW^T = W^T \frac{d^2}{dt^2}, \quad (2.7)$$

являющееся формой записи уравнения (1.1).

### 2.1.3. Расширенный оператор реакции $R^{2T}$

Помимо оператора реакции  $R^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,  $\text{Dom } R^T = \mathcal{M}^T$ ,

$$(R^T f)(t) := \gamma(0)u_x^f(0, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

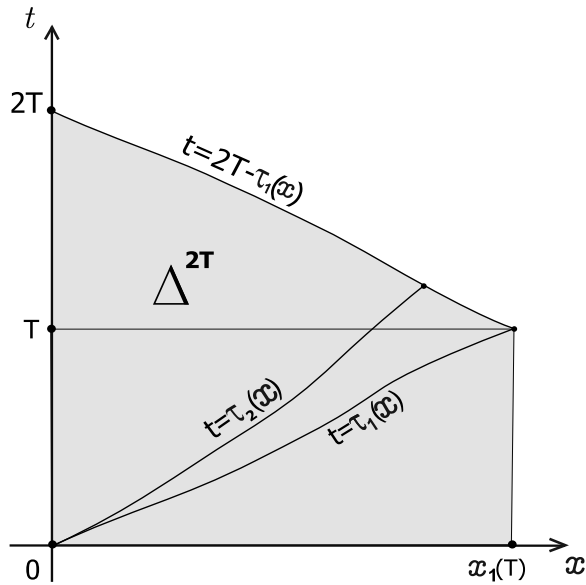
описывающего соответствие «вход  $\mapsto$  выход» в системе  $\mathfrak{S}^T$ , определяется так называемый *расширенный* оператор реакции, который вводится через начально-краевую задачу

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad (x, t) \in \Delta^{2T}, \quad (2.8)$$

$$u|_{t < \tau_1(x)} = 0, \quad (2.9)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq 2T, \quad (2.10)$$

где  $\Delta^{2T} = \{(x, t) \mid 0 < x < x_1(T), 0 < t < 2T - \tau_1(x)\}$  (см. рис. 2.1).

Рис. 2.1. Область  $\Delta^{2T}$ 

Корректность задачи устанавливается той же техникой — сведением к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. При управлениях  $f \in \mathcal{M}^{2T}$  (см. (1.48)) решение  $u = u^f(x, t)$  оказывается классическим и гладким. О задаче (2.8)–(2.10) можно говорить как о расширенной версии задачи (2.1)–(2.3), существующей в силу гиперболичности последней. Если управление  $f$  из (2.10) таково, что  $f|_{[0, T]}$  совпадает с  $f$  из (1.3), то решения этих задач совпадают при временах  $0 \leq t \leq T$ . Важно отметить, что решения обеих задач вполне определяются поведением коэффициентов  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  при  $0 \leq x \leq x_1(T)$  (не зависят от их поведения при  $x > x_1(T)$ ).

Задаче (2.8)–(2.10) сопоставим оператор  $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ ,  $\text{Dom } R^{2T} = \mathcal{M}^{2T}$ ,

$$(R^{2T} f)(t) := \gamma(0) u_x^f(0, t), \quad 0 \leq t \leq 2T,$$

который называется *расширенным* оператором реакции системы  $\mathbf{s}^T$ .

**Предложение 4.** Оператор  $R^{2T}$  определяется матричными коэффициентами  $\{\rho, \gamma, A, B\}|_{0 \leq x \leq x_1(T)}$  и имеет представление

$$(R^{2T} f)(t) = -\nu f'(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2T, \quad (2.11)$$

с матрицами  $\nu, \omega$  из (1.62) и гладкой симметрической матрицей-функцией  $r(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2T$ . При этом  $r|_{0 \leq t \leq T}$  совпадает с функцией  $r$  из (1.61).

Нетрудно видеть, что оператор  $R^{2T}$  совпадает с (нерасширенным) оператором реакции системы  $\mathfrak{s}^{2T}$  с финальным моментом  $t = 2T$ <sup>2</sup>. Поэтому представление (2.11) не требует отдельного вывода: оно просто воспроизводит (1.61) с другим финальным моментом. Совпадение этих операторов есть следствие гиперболичности (конечности областей влияния).

Отмеченный в Предложении 4 характер зависимости от коэффициентов делает расширенный оператор атрибутом двухскоростной динамической системы с финальным моментом  $t = T$ : как и остальные элементы системы  $\mathfrak{s}^T$  он определяется коэффициентами  $\{\rho, \gamma, A, B\}|_{0 \leq x \leq x_1(T)}$ .

Как видно из (2.11), задание оператора  $R^{2T}$  равносильно заданию постоянных матриц  $\nu, \omega$  и симметрической функции  $r|_{0 \leq t \leq 2T}$ .

#### 2.1.4. Связывающий оператор $C^T$

Оператор  $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,

$$C^T := (W^T)^* W^T,$$

называется *связывающим*. Определяющее его соотношение

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} = (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} \quad (2.12)$$

связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Оператор  $C^T$  ограничен (по ограниченности  $W^T$ ), самосопряжен и неотрицателен.

Ключевым фактом метода граничного управления в обратных задачах является простая и явная связь  $C^T$  с расширенным оператором реакции [5], [7],

---

<sup>2</sup> По этой причине мы не различаем их обозначениями.

[24]. Для ее описания введем вспомогательные операторы

$$S^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{2T}, \quad (S^T f)(t) := \begin{cases} f(t), & 0 \leq t \leq T, \\ -f(2T-t), & T < t \leq 2T, \end{cases}$$

$$J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}, \quad (J^{2T} f)(t) := \int_0^t f(\eta) d\eta,$$

$$P_-^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}, \quad (P_-^{2T} f)(t) := \frac{1}{2} [f(t) - f(2T-t)],$$

$$N^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^T, \quad (N^{2T} f)(t) := f|_{[0,T]},$$

и отметим легко проверяемое соотношение

$$(S^T)^* = 2N^{2T}P_-^{2T}. \quad (2.13)$$

**Лемма 6.** *Справедливы представления*

$$C^T = -\frac{1}{2} (S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T, \quad (2.14)$$

$$(C^T f)(t) = \nu f(t) + \int_0^T c^T(t,s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.15)$$

с ядром

$$c^T(t,s) := \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta,$$

гладким в  $[0, T]^2$  вне диагонали  $t = s$  и матрицей-функцией  $r|_{[0,2T]}$  из (2.11).

*Доказательство. 1.* Выберем управления  $f, g \in C_0^\infty((0, T); \mathbb{R}^2)$ <sup>3</sup>; обозначим  $f_- := S^T f \in C^\infty((0, 2T); \mathbb{R}^2)$ . Пусть  $u^g$  и  $u^{f_-}$  суть (классические) решения задач (1.1)–(1.3) и (2.8)–(2.10) с управлениями  $g$  и  $f_-$  соответственно. Напомним, что  $u^{f_-}$  определено в области  $\Delta^{2T}$ . По отделенности носителей  $f$  и  $g$  от  $t = 0$ , при  $s, t \leq T$  в силу (1.50) выполнено  $\text{supp } u^g(\cdot, t) \subset [0, x_1(t)) \subset [0, x_1(T))$  и  $\text{supp } u^{f_-}(\cdot, s) \subset [0, x_1(s)) \subset [0, x_1(T)]$ .

<sup>3</sup>  $C_0^\infty((0, T); \mathbb{R}^2)$  — пространство гладких функций с компактным носителем.

Обозначим  $\Theta^T := \{(s, t) \mid 0 < t < T, t < s < 2T - t\}$ ; фиксируем  $(s, t) \in \overline{\Theta^T}$ . Если  $0 \leq t \leq s \leq T$ , то решение  $u^{f^-}(\cdot, s)$  определено на сегменте  $0 \leq x \leq x_1(s)$ , содержащем  $\text{supp } u^g(\cdot, t)$ . Если же  $T < s \leq 2T - t$ , то решение  $u^{f^-}(\cdot, s)$  определено лишь при  $0 \leq x \leq x_1(2T - s)$  (не определено при  $x > x_1(2T - s)$ ), в то время как  $\text{supp } u^g(\cdot, t) \subset [0, x_1(t)] \subset [0, x_1(2T - s)] \subset [0, x_1(T)]$ . В обоих случаях носитель решения  $u^g(\cdot, t)$  содержится в сегменте, на котором решение  $u^{f^-}(\cdot, s)$  определено, причем  $u^g(\cdot, t)$  аннулируется вблизи правого конца этого сегмента.

В силу сказанного выше, произведение  $u^{f^-}(x, s) u^g(x, t)$ , продолженное нулем с сегмента определения первого сомножителя на  $0 \leq x \leq x_1(T)$ , корректно определено и оказывается гладкой функцией, аннулирующей вблизи  $x = x_1(T)$ . Вместе с произведением на  $\overline{\Theta^T}$  корректно определена *функция Благовещенского*

$$b(s, t) := (u^{f^-}(\cdot, s), u^g(\cdot, t))_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} = \int_0^{x_1(T)} [\rho(x) u^{f^-}(x, s)] \cdot u^g(x, t) dx.$$

2. Дифференцируя по  $s, t \in \Theta^T$  и интегрируя по частям с учетом расположения носителей решений и соотношений (1.5), имеем равенства:

$$\begin{aligned} & (\partial_t^2 - \partial_s^2) b(s, t) \\ &= \int_0^{x_1(T)} dx \{ u^{f^-}(x, s) \cdot [\rho(x) u_{tt}^g(x, t)] - [\rho(x) u_{ss}^{f^-}(x, s)] \cdot u^g(x, t) \} \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \int_0^{x_1(T)} u^{f^-}(x, s) \cdot ((\gamma u_x^g)_x - Au_x^g - Bu^g)(x, t) dx \\ &- \int_0^{x_1(T)} ((\gamma u_x^{f^-})_x - Au_x^{f^-} - Bu^{f^-})(x, s) \cdot u^g(x, t) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left( u^{f^-}(0, s) \cdot \gamma(0) u^g(0, t)_x + \gamma(0) u_x^{f^-}(0, s) \cdot u^g(0, t) \right) \\
&- A^{\text{tr}}(0) u^{f^-}(0, s) \cdot u^g(0, t) \\
&\stackrel{(1.5)}{=} f_-(s) \cdot [A(0)g(t) - (R^T g)(t)] + (R^{2T} f_-)(s) \cdot g(t) =: F(s, t). \quad (2.16)
\end{aligned}$$

В то же время из (1.3) следует

$$b(s, 0) = (u^{f^-}(\cdot, s), u^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} = 0, \quad b_t(s, 0) = (u^{f^-}(\cdot, s), u_t^g(\cdot, 0))_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} = 0.$$

В результате получаем систему

$$\begin{aligned}
b_{tt} - b_{ss} &= F, & (x, t) &\in \Theta^T, \\
b(s, 0) &= b_t(s, 0) = 0, & 0 &\leq s \leq 2T.
\end{aligned}$$

**3.** Интегрируя по Д'Аламберу, имеем

$$b(s, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\eta \int_{s-t+\eta}^{s+t-\eta} F(\xi, \eta) d\xi.$$

Полагая  $s = t = T$ , получаем

$$b(T, T) = \frac{1}{2} \int_0^T d\eta \int_{\eta}^{2T-\eta} F(\xi, \eta) d\xi.$$

Поскольку первое слагаемое в (2.16), содержащее  $f_-(s)$ , нечетно по  $s$  относительно  $s = T$ , интегрирование дает

$$\begin{aligned}
b(T, T) &= \int_0^T d\eta \int_{\eta}^{2T-\eta} (R^{2T} f_-)(\xi) \cdot g(\eta) d\xi \\
&= - \int_0^T g(\eta) \cdot [(J^{2T} R^{2T} f_-)(\eta) - (J^{2T} R^{2T} f_-)(2T - \eta)] d\eta \\
&= -\frac{1}{2} (g, N^{2T} 2P_-^{2T} J^{2T} R^{2T} S^T f)_{\mathcal{F}^T} \stackrel{(2.13)}{=} \left( -\frac{1}{2} (S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T f, g \right)_{\mathcal{F}^T} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

(перестановочность операторов  $J^{2T}$  и  $R^{2T}$  следует из сверточного характера действия последнего: см. (2.11)).



С другой стороны, в силу очевидного  $u^f(\cdot, T) = u^f(\cdot, T)$  имеем:

$$b(T, T) = (u^f(\cdot, T), u^f(\cdot, T))_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} \stackrel{(2.12)}{=} (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T}. \quad (2.18)$$

Сопоставляя (2.17) с (2.18) и учитывая плотность управлений  $g \in C_0^\infty((0, T); \mathbb{R}^2)$  в  $\mathcal{F}^T$ , получаем

$$C^T f = -\frac{1}{2} (S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T f, \quad f \in C^\infty((0, T); \mathbb{R}^2).$$

Это равенство расширяется по непрерывности на все  $f \in \mathcal{F}^T$  в силу ограниченности оператора  $R^{2T} J^{2T}$ , с очевидностью следующей из (2.11).

Таким образом, первое из соотношений (2.15) установлено. Подставляя в него вместо  $R^{2T}$  правую часть (2.11), после несложных преобразований получим второе соотношение.  $\square$

## 2.2. Управляемость

### 2.2.1. Достижимые множества

Множества (линеалы) вида

$$\mathcal{U}^\xi := \{u^f(\cdot, \xi) \mid f \in \mathcal{F}^T\} \stackrel{(2.6)}{=} W^T \mathcal{F}^{T, \xi} \stackrel{(2.6)}{\subset} \mathcal{H}^{x_1(\xi)}, \quad (0 \leq \xi \leq T)$$

называются *достижимыми* (в момент  $t = \xi$ ). С ростом  $\xi$  множества  $\mathcal{U}^\xi$  расширяются. Их структура и свойства составляют предмет теории граничного управления. Достижимые множества образованы всеми состояниями системы (здесь — волнами), которые можно создать, оперируя данным классом управлений. В ситуации, когда эти состояния исчерпывают содержащее их пространство, говорят об управляемости системы.

Особенностью двухскоростной системы является отсутствие управляемости: множество  $\mathcal{U}^T$  имеет нетривиальное ортогональное дополнение в  $\mathcal{H}^{x_1(T)}$  при любом  $T > 0$ . В качестве примера рассмотрим систему (1.1)–(1.3) с посто-

янными  $\rho_1 < \rho_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  и  $A = B = 0$ . В этом случае имеем

$$u^f(x, T) = \begin{pmatrix} f_1(T - \sqrt{\rho_1} x) \\ f_2(T - \sqrt{\rho_2} x) \end{pmatrix}$$

и, соответственно,

$$\mathcal{U}^T = \left\{ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mid y_1, y_2 \in L_2[0, c_1 T], \text{supp } y_2 \subset [0, c_2 T] \right\}$$

с очевидным  $\mathcal{H}^{x_1(T)} \ominus \mathcal{U}^T = L_2([0, c_1 T]; \mathbb{R}^2) \ominus \mathcal{U}^T \neq \{0\}$ .

Достижимые множества системы  $\mathbf{s}^T$  допускают следующее характеристическое описание.

**Предложение 5.** *Существует функция  $Z^T(x, s)$ , определенная и гладкая при  $x_2(T) \leq x \leq s \leq x_1(T)$ , такая что включение  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^T$  равносильно связи*

$$y_2(x) = \int_x^{x_1(T)} Z^T(x, s) y_1(s) ds, \quad x_2(T) \leq x \leq x_1(T), \quad (2.19)$$

*между компонентами.*

Поясним происхождение этой связи.

Отменим на время Соглашение 1 (а) и рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу

$$\rho v_{tt} - (\gamma v_x)_x + A v_x + B v = 0, \quad 0 < x < x_1(T), \quad -\infty < t < T, \quad (2.20)$$

$$v|_{x=x_1(T)} = v_x|_{x=x_1(T)} = 0, \quad -\infty < t \leq T, \quad (2.21)$$

$$v|_{t=T} = y, \quad 0 \leq x \leq x_1(T). \quad (2.22)$$

Она отличается от задачи (1.1)–(1.3) лишь заменой ролей переменных<sup>4</sup>, и доказательство ее корректности проводится теми же средствами — сведением к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. При любом

<sup>4</sup> В этой задаче естественно считать  $x$  временем, а  $t$  — координатой.

$y \in \mathcal{H}^{x_1(T)}$  задача имеет единственное (адекватно определенное обобщенное) решение  $v = v^y(x, t)$ , для которого справедливо представление (аналог (1.49))

$$v^y(x, t) = \lambda(x, t) \begin{pmatrix} y_1(x_1(\tau_1(x) + T - t)) \\ y_2(x_2(\tau_2(x) + T - t)) \end{pmatrix} + \int_{x_2(\tau_2(x) + T - t)}^{x_1(T)} q^T(x, t, s) y(s) ds \quad (2.23)$$

с матрицей  $\lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ :  $\lambda_i(x, t) := \left( \frac{\rho_i(x_i(\tau_i(x) + T - t)) \gamma_i(x_i(\tau_i(x) + T - t))}{\rho_i(x) \gamma_i(x)} \right)^{\frac{1}{4}}$ . При каждом  $s \in [0, x_1(T)]$  ядро  $q^T$  является гладким в  $[0, x_1(T)] \times (-\infty, T]$  вне характеристик  $t = \tau_i(x) + T - \tau_i(s)$ ; оно аннулируется при  $t < \tau_2(x) + T - \tau_2(s)$  и выполнено  $q^T(x, T, s) = 0$ . Отметим соотношение

$$v^y|_{x > x_2(t - (T - \xi))} = 0 \quad \text{при} \quad y \in \mathcal{H}^{x_2(\xi)}, \quad (0 \leq \xi \leq T), \quad (2.24)$$

легко следующее из вида правой части (2.23) и являющееся аналогом соотношения (2.4) в задаче (2.1)–(2.3).

Сопоставляя задачи (1.1)–(1.3) и (2.20)–(2.22), легко увидеть связь их решений: при  $y = u^f(\cdot, T)$  имеем

$$u^f(x, t) = v^y(x, t), \quad 0 \leq x \leq x_1(T), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.25)$$

и  $f = v^y(0, \cdot)$ . Отсюда следует, что включение  $y \in \mathcal{U}^T$  равносильно требованию  $v^y(0, \cdot) \in \mathcal{F}^T$ . Последнее же эквивалентно условию  $v^y(0, t)|_{t < 0} = 0$ . Полагая в (2.23)  $x = 0$  и накладывая это условие, мы видим, что компоненты  $y_1$  и  $y_2$  не являются независимыми. Дальнейший анализ приводит к соотношению (2.19). В более общем виде, с учетом (2.24), для множеств  $\mathcal{U}^\xi$  оно принимает следующую форму.

**Предложение 6.** *Существует функция  $Z^\xi(x, s)$ , определенная и гладкая при  $x_2(\xi) \leq x \leq s \leq x_1(\xi)$ , такая что включение  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}^\xi$  равносильно*

связи

$$y_2(x) = \int_x^{x_1(T)} Z^\xi(x, s) y_1(s) ds, \quad x_2(\xi) \leq x \leq x_1(\xi),$$

между компонентами.

С задачей (2.20)–(2.22) связан разрешающий ее оператор  $V^T : \mathcal{H}^{x_1(T)} \rightarrow \mathcal{F}_{\text{ext}}^T := L_2([T - \tau_2(x_1(T)), T]; \mathbb{R}^2) \supset \mathcal{F}^T$ ,

$$V^T y := v^y(0, \cdot).$$

Как видно из (2.23), он ограничен. Из отмеченной выше связи решений (2.25) следует соотношение

$$V^T W^T = \mathbb{I}_{\mathcal{F}^T} \quad (2.26)$$

( $\mathbb{I}_{\mathcal{F}^T}$  — единичный оператор в  $\mathcal{F}^T$ ). Значит, оператор управления имеет ограниченный левый обратный. Поскольку он фредгольмов (см. (2.5)), из последнего заключаем следующее<sup>5</sup>.

**Предложение 7.** *Оператор  $W^T$  действует из  $\mathcal{F}^T$  в  $\mathcal{H}^{x_1(T)}$  изоморфно на свой образ  $\text{Ran } W^T = \mathcal{U}^T$ , являющийся (замкнутым) подпространством. Оператор  $(W^T)^* : \mathcal{H}^{x_1(T)} \rightarrow \mathcal{F}^T$  аннулирует дефектное подпространство  $\mathcal{H}^{x_1(T)} \ominus \mathcal{U}^T$  и изоморфно отображает  $\mathcal{U}^T$  на  $\mathcal{F}^T$ . Связывающий оператор  $C^T$  есть положительный изоморфизм пространства  $\mathcal{F}^T$ .*

Второе утверждение есть следствие известного разложения

$$\mathcal{H}^{x_1(T)} = \text{Ran } W^T \oplus \text{Ker } (W^T)^*,$$

третье следует из первых двух:  $C^T$  оказывается композицией изоморфизмов  $W^T$  и  $(W^T)^*|_{\text{Ran } W^T}$ .

---

<sup>5</sup> Ниже изоморфизмами мы называем операторы, действующие сюръективно и имеющие ограниченный обратный.

### 2.2.2. Медленные волны

Для любого  $y \in \mathcal{H}^{x_2(T)}$  соотношение (2.19) выполнено тривиальным образом, так что включение  $\mathcal{H}^{x_2(T)} \subset \mathcal{U}^T$  имеет место. Опишем прообраз  $(W^T)^{-1}\mathcal{H}^{x_2(T)}$  при изоморфизме  $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{U}^T$ . Сформулируем Теорему 3 в следующем виде:

**Предложение 8.** *Существует единственная гладкая функция  $l = l(t)$ ,  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$ , такая что включение  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in (W^T)^{-1}\mathcal{H}^{x_2(T)}$  равносильно связи*

$$f_1(t) = \int_0^t l(t-s) f_2(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T)), \quad (2.27)$$

*между компонентами управления.*

Напомним соображения, приводящие к этой связи. Включение  $f \in (W^T)^{-1}\mathcal{H}^{x_2(T)}$  равносильно условию  $u^f(\cdot, T)|_{x > x_2(T)} = 0$ . Налагая его на правую часть (1.49), мы видим, что компоненты управления  $f_1$  и  $f_2$  не являются вполне независимыми. Дальнейший анализ зависимости и приводит к (2.27). Более того, в пункте 3 доказательства Теоремы 3 было показано, что функция  $l$  не зависит от  $T$ <sup>6</sup>. Ее значения в интервале  $0 \leq t \leq T - \tau_1(x_2(T))$ , используем при данном  $T$ , определяются значениями коэффициентов  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$  лишь при  $0 \leq x \leq x_2(T)$ .

Заменяя в предыдущих рассуждениях  $\mathcal{H}^{x_2(T)}$  на  $\mathcal{H}^{x_2(\xi)}$  и используя (1.51), нетрудно получить соотношение, обобщающее (2.27). Обозначим

$$\pi_1^T(\xi) := T - \xi, \quad \pi_2^T(\xi) := T - \tau_1(x_2(\xi)), \quad 0 \leq \xi \leq T.$$

Из соотношения скоростей (1.4) легко следует, что  $\pi_1^T(\xi) < \pi_2^T(\xi)$  при  $\xi > 0$ .

Введем семейство подпространств

$$\mathcal{F}_l^{T,\xi} := (W^T)^{-1}\mathcal{H}^{x_2(\xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq T, \quad (2.28)$$

<sup>6</sup> Можно сказать, что  $l|_{t \geq 0}$  есть атрибут задачи (1.1)–(1.3) с  $T = \infty$ .

и обозначим  $\mathcal{F}_l^T := \mathcal{F}_l^{T,T}$ . Отметим вложение  $\mathcal{F}_l^{T,\xi} \subset \mathcal{F}^{T,\xi}$ , следующее из соотношений  $W^T \mathcal{F}_l^{T,\xi} = \mathcal{H}^{x_2(\xi)} \subset \mathcal{U}^\xi = W^T \mathcal{F}^{T,\xi}$ .

**Предложение 9.** Для управления  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^{T,\xi}$  включение  $f \in \mathcal{F}_l^{T,\xi}$  равносильно соотношению

$$f_1(t) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^t l(t-s) f_2(s) ds, \quad \pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi). \quad (2.29)$$

Отметим, что это соотношение не накладывает связи на компоненты управления при  $\pi_2^T(\xi) < t \leq T$ . Кроме того, используя тот факт, что функция

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi_1^T(\xi), \\ \begin{pmatrix} l(t - \pi_1^T(\xi)) \\ \delta(t - \pi_1^T(\xi)) \end{pmatrix}, & \pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi), \\ 0, & \pi_2^T(\xi) < t \leq T, \end{cases}$$

аппроксимируется управлениями из  $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ , а следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \mu_1(x) f_1(T - \tau_1(x)) + \int_0^{T-\tau_1(x)} w_{11}^T(x, s) f_1(s) ds \\ & + \int_0^{T-\tau_1(x)} w_{12}^T(x, s) f_2(s) ds = 0, \quad x_2(\xi) \leq x \leq x_1(\xi), \end{aligned}$$

можно вывести представление для  $l(0)$ , обобщающее (1.79):

$$l(0) = -\frac{\beta_{12}^1(x)}{\mu_1(x)}, \quad x \in (0, x_1(T)). \quad (2.30)$$

Решения  $u^f$ , инициированные управлениями из  $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ , мы называем *медленными волнами*. Мотивировка такова. Из (2.26) следует:

$$\mathcal{F}_l^{T,\xi} = V^T \mathcal{H}^{x_2(\xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq T.$$

Выберем  $f \in \mathcal{F}^{T,\xi}$  и обозначим  $y := u^f(\cdot, T) \in \mathcal{H}^{x_2(\xi)}$ . Для решения имеем:

$$u^f \Big|_{x > x_2(t-(T-\xi))} \stackrel{(2.25)}{=} v^y \Big|_{x > x_2(t-(T-\xi))} \stackrel{(2.24)}{=} 0.$$

Последнее означает, что носитель волны  $u^f(\cdot, t)$  при всех  $t \in [0, T]$  содержится в интервале  $[0, x_2(t-(T-\xi))]$ , расширяющемся с «медленной» скоростью  $c_2(x) = \frac{dx_2}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_2(x)}$ . При нарушении условия (2.29) это неверно.

### 2.2.3. Подсистема $\mathfrak{s}_l^T$

В системе  $\mathfrak{s}^T$  медленным волнам отвечает подсистема  $\mathfrak{s}_l^T$ , описываемая начально-краевой задачей

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < x_2(T), \quad 0 < t < T, \quad (2.31)$$

$$u|_{t < \tau_2(x)} = 0, \quad (2.32)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.33)$$

которая корректна при  $f \in \mathcal{F}_l^T$ . Атрибуты  $\mathfrak{s}_l^T$  таковы:

- внешнее и внутреннее пространства суть  $\mathcal{F}_l^T$  и  $\mathcal{H}^{x_2(T)}$ ;
- оператор управления есть  $W_l^T : \mathcal{F}_l^T \rightarrow \mathcal{H}^{x_2(T)}$ ,  $W_l^T := W^T e_l^T$ , где  $e_l^T : \mathcal{F}_l^T \rightarrow \mathcal{F}^T$  — оператор естественного вложения;
- оператор реакции  $R_l^T : \mathcal{F}_l^T \rightarrow \mathcal{F}^T$  есть часть оператора  $R^T$ , индуцированная в  $\mathcal{F}_l^T$ ;
- связывающий оператор  $C_l^T := (W_l^T)^* W_l^T : \mathcal{F}_l^T \rightarrow \mathcal{F}_l^T$  есть блок оператора  $C^T$  в подпространстве  $\mathcal{F}_l^T$ , т. е.  $C_l^T = (e_l^T)^* C^T e_l^T$ .

В силу (2.28) имеем  $W_l^T \mathcal{F}_l^T = \mathcal{H}^{x_2(T)}$ , т. е. в отличие от самой системы, подсистема  $\mathfrak{s}_l^T$  управляема<sup>7</sup>. Для оператора  $W_l^T$  справедливо такое же пред-

<sup>7</sup> Можно сказать, что переход к медленным волнам восстанавливает управляемость, но лишь на «медленном» сегменте  $[0, x_2(T)]$ , который они захватывают к финальному моменту.

ставление, как и для  $W^T$ :

$$W_l^T f(x) = \mu(x) \begin{pmatrix} f_1(T - \tau_1(x)) \\ f_2(T - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \int_0^{T - \tau_1(x)} w^T(x, t) f(t) dt, \quad x \geq 0,$$

с тем же ядром  $w^T$ .

## 2.3. Амплитудная формула

Выводимое в этом разделе представление волн — один из основных инструментов решения обратных задач методом граничного управления: см. [5], [7], [24]. Вывод использует особенности распространения разрывов в системе  $\mathfrak{s}^T$ , а само представление по существу является формулой геометрической оптики.

### 2.3.1. Проекторы $X_l^{T, \xi}$

Фиксируем  $\xi \in [0, T]$ . Разложим внешнее пространство системы  $\mathfrak{s}^T$  в ортогональную сумму

$$\mathcal{F}^T = \mathcal{F}_l^{T, \xi} \oplus (\mathcal{F}_l^{T, \xi})^\perp; \quad (2.34)$$

пусть  $X_l^{T, \xi}$  есть проектор на первое слагаемое. Введем также операторы вложения  $e_l^{T, \xi} : \mathcal{F}_l^{T, \xi} \rightarrow \mathcal{F}^T$ <sup>8</sup> и отметим известные соотношения

$$(e_l^{T, \xi})^* e_l^{T, \xi} = \mathbb{I}_{\mathcal{F}_l^{T, \xi}}, \quad e_l^{T, \xi} (e_l^{T, \xi})^* = X_l^{T, \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq T. \quad (2.35)$$

Для описания действия операторов  $X_l^{T, \xi}$  и  $e_l^{T, \xi}$  введем оператор<sup>9</sup>  $\Lambda^\xi : L_2[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)] \rightarrow L_2[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$ ,

$$(\Lambda^\xi g)(t) := \int_{\pi_1^T(\xi)}^t l(t-s)g(s) ds, \quad \pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi), \quad (2.36)$$

<sup>8</sup> Напомним, что вложение  $e_l^T = e_l^{T, T} : \mathcal{F}_l^T \rightarrow \mathcal{F}^T$  использовалось при описании подсистемы  $\mathfrak{s}_l^T$ .

<sup>9</sup> Более последовательным было бы обозначение  $\Lambda^{T, \xi}$ , но мы опускаем индекс  $T$ , упрощая обозначения.



сопряженный к которому  $(\Lambda^\xi)^* : L_2[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)] \rightarrow L_2[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  действует по правилу:

$$\left( (\Lambda^\xi)^* g \right) (t) = \int_t^{\pi_2^T(\xi)} l(s-t)g(s) ds, \quad \pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi). \quad (2.37)$$

В дальнейшем встречаются записи  $\Lambda^\xi g$  и  $(\Lambda^\xi)^* g$ , где  $g \in L_2[0, T]$ , которые следует понимать как  $\Lambda^\xi (g|_{[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]})$  и  $(\Lambda^\xi)^* (g|_{[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]})$  соответственно. Обозначим

$$\Sigma^T := \{(t, s, \xi) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi \in [0, T], \pi_1^T(\xi) \leq t, s \leq \pi_2^T(\xi)\}$$

и примем

**Соглашение 2.** Пусть  $\Pi = [t_1, t_2] \times [s_1, s_2] \times [\xi_1, \xi_2] \subset \mathbb{R}^3$ . Функцию  $\varphi$  мы называем гладкой в  $\Pi$  вне поверхностей  $S_1, \dots, S_p \subset \Pi$ , если она является гладкой в каждой из компонент связности множества  $\Pi \setminus \bigcup_{i=1}^p S_i$  и продолжается до гладкой функции в окрестности этой компоненты.

Для функций в  $\Sigma^T$  гладкость вне поверхностей понимается в том же смысле.

**Лемма 7.** При фиксированном  $\xi \in [0, T]$  для оператора  $(e_l^{T, \xi})^* : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}_l^{T, \xi}$  справедливо представление

$$(e_l^{T, \xi})^* f|_{0 \leq t < \pi_1^T(\xi)} = 0, \quad (2.38)$$

$$(e_l^{T, \xi})^* f|_{\pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi)} = \begin{pmatrix} \Lambda^\xi [\mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi]^{-1} [(\Lambda^\xi)^* f_1 + f_2] \\ [\mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi]^{-1} [(\Lambda^\xi)^* f_1 + f_2] \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

$$= \begin{pmatrix} (\Lambda^\xi f_2)(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} + \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} k^T(t, s, \xi) f(s) ds, \quad (2.40)$$

$$(e_l^{T, \xi})^* f|_{\pi_2^T(\xi) < t \leq T} = f(t), \quad (2.41)$$

с матричным  $2 \times 2$  ядром  $k^T$ , определенным в области  $\Sigma^T$ , элементы которого связаны соотношениями

$$k_{21}^T(t, s, \xi) = l(s - t) + \int_{\pi_1^T(\xi)}^s l(s - \eta) k_{22}^T(t, \eta, \xi) d\eta, \quad (2.42)$$

$$k_{11}^T(t, s, \xi) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^t l(t - \eta) k_{21}^T(\eta, s, \xi) d\eta, \quad (2.43)$$

$$k_{12}^T(t, s, \xi) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^t l(t - \eta) k_{22}^T(\eta, s, \xi) d\eta. \quad (2.44)$$

Элемент  $k_{22}^T$  является непрерывным на всей области определения  $\Sigma^T$  и гладким вне плоскости  $s = t$ .

*Доказательство.* Докажем сначала операторное представление (2.39). Для  $f \in \mathcal{F}_l^{T, \xi}$  и  $g \in \mathcal{F}^T$  имеем:

$$\begin{aligned} \left( e_l^{T, \xi} f, g \right)_{\mathcal{F}^T} &= \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} \left( (\Lambda^\xi f_2) g_1 + f_2 g_2 \right) (t) dt + \int_{\pi_2^T(\xi)}^T f(t) \cdot g(t) dt \\ &= \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} \left( f_2 \left( (\Lambda^\xi)^* g_1 \right) + f_2 g_2 \right) (t) dt + \int_{\pi_2^T(\xi)}^T f(t) \cdot g(t) dt. \end{aligned}$$

Пусть  $\tilde{g} := \left( e_l^{T, \xi} \right)^* g \in \mathcal{F}_l^{T, \xi}$ , тогда

$$\begin{aligned} \left( f, \left( e_l^{T, \xi} \right)^* g \right)_{\mathcal{F}^T} &= \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} \left( (\Lambda^\xi f_2) \tilde{g}_1 + f_2 \tilde{g}_2 \right) (t) dt + \int_{\pi_2^T(\xi)}^T f(t) \cdot \tilde{g}(t) dt \\ &= \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} \left( f_2 (\Lambda^\xi)^* \tilde{g}_1 + f_2 \tilde{g}_2 \right) (t) dt + \int_{\pi_2^T(\xi)}^T f(t) \cdot \tilde{g}(t) dt. \end{aligned}$$

Для  $f \in \mathcal{F}_l^{T, \xi}$ , аннулирующей при  $t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$ , имеем

$$\int_{\pi_2^T(\xi)}^T (f_1 g_1 + f_2 g_2) (t) dt = \int_{\pi_2^T(\xi)}^T (f_1 \tilde{g}_1 + f_2 \tilde{g}_2) (t) dt,$$

откуда

$$g_i(t) = \tilde{g}_i(t), \quad t \in (\pi_2^T(\xi), T], \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} f_2 \left( (\Lambda^\xi)^* g_1 + g_2 \right) (t) dt = \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} f_2 \left( (\Lambda^\xi)^* \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2 \right) (t) dt.$$

В силу произвольности  $f_2$  на интервале  $[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$ ,

$$(\Lambda^\xi)^* \tilde{g}_1(t) + \tilde{g}_2(t) = \left( (\Lambda^\xi)^* g_1 \right) (t) + g_2(t), \quad \pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi).$$

Так как  $\tilde{g} \in \mathcal{F}_l^{T, \xi}$ , компоненты связаны соотношением

$$\tilde{g}_1(t) = (\Lambda^\xi \tilde{g}_2) (t), \quad \pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi),$$

с учетом которого последнее равенство запишется в виде

$$\left[ \mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi \right] \tilde{g}_2(t) = \left( (\Lambda^\xi)^* g_1 + g_2 \right) (t).$$

Оператор  $\mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi$  является положительным изоморфизмом пространства  $L_2 [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  и, следовательно, имеет обратный. Применяя обратный оператор к левой и правой части последнего равенства, получим

$$\tilde{g}_2(t) = \left[ \mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi \right]^{-1} \left( (\Lambda^\xi)^* g_1 + g_2 \right) (t).$$

Отсюда следует представление (2.39).

Докажем теперь интегральное представление. Для произвольных  $\xi \in [0, T]$  и  $\varphi \in L_2 [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  имеем

$$\left( (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi \varphi \right) (t) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} L^T(t, s, \xi) \varphi(s) ds,$$

где скалярное ядро

$$L^T(t, s, \xi) := \int_{\max(t, s)}^{\pi_2^T(\xi)} l(\tau - t) l(\tau - s) d\tau$$

определено в области  $\Sigma^T$  и обладает следующими свойствами:

1. ядро  $L^T$  является симметричным по  $s$  и  $t$ :  $L^T(t, s, \xi) = L^T(s, t, \xi)$ ;
2. ядро  $L^T$  аннулируется при  $t = \pi_2^T(\xi)$  и  $s = \pi_1^T(\xi)$ ;
3. на всей области определения  $\Sigma^T$  ядро  $L^T$  является непрерывным и гладким вне плоскости  $s = t$ , на которой производные могут иметь скачки, обусловленные скачками функции  $l$  и скачками ее производных в нуле.

Для каждого  $\xi \in [0, T]$  оператор  $\mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi$  является положительным изоморфизмом пространства  $L_2 [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  и, следовательно, имеет обратный. Более того, оператор  $\mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi$  является оператором Фредгольма с симметричным непрерывным ядром. Следовательно, обратный к нему также является оператором Фредгольма и действует по правилу

$$\left[ \mathbb{I} + (\Lambda^\xi)^* \Lambda^\xi \right]^{-1} = \mathbb{I} + K^{T,\xi},$$

где  $K^{T,\xi}$  — интегральный оператор, действующий на произвольную функцию  $\varphi \in L_2 [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  по правилу<sup>10</sup>:

$$(K^{T,\xi}\varphi)(t) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} k_{22}^T(t, s, \xi)\varphi(s)ds,$$

где скалярное ядро  $k_{22}^T$  связано с ядром  $L^T$  соотношением

$$k_{22}^T(t, s, \xi) = -L^T(t, s, \xi) - \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} k_{22}^T(t, \eta, \xi)L^T(\eta, s, \xi)d\eta \quad (2.45)$$

и обладает теми же свойствами 1–3, что и ядро  $L^T$ . Первые два вытекают из первого и второго свойства оператора  $L$ , докажем третье. Заметим, что при достаточно малых  $\xi \in [0, \xi_*]$  гладкость по  $\xi$  следует из соотношения

$$k_{22}^T(t, s, \xi) = -L^T(t, s, \xi) + O(\xi).$$

---

<sup>10</sup> Нижние индексы «22» у ядра интегрального оператора говорят о том, что именно эта скалярная функция является элементом матричного ядра  $k^T$ . Через эту функцию будут выражаться остальные элементы ядра  $k^T$ .

При  $\xi \geq \xi_*$  имеет место неравенство  $\pi_2^T(\xi) - \pi_1^T(\xi) > 0$  и в уравнении (2.45) можно перейти к переменным  $\tilde{t}, \tilde{s} \in [0, T]$

$$\tilde{t} = \frac{t - \pi_1^T(\xi)}{\pi_2^T(\xi) - \pi_1^T(\xi)} T, \quad \tilde{s} = \frac{s - \pi_1^T(\xi)}{\pi_2^T(\xi) - \pi_1^T(\xi)} T, \quad t, s \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)].$$

Пусть

$$\tilde{k}_{22}^T(\tilde{t}, \tilde{s}, \xi) := k_{22}^T(t, s, \xi), \quad \tilde{L}^T(\tilde{t}, \tilde{s}, \xi) := L^T(t, s, \xi),$$

тогда (2.45) запишется в виде

$$\tilde{k}_{22}^T(\tilde{t}, \tilde{s}, \xi) = -\tilde{L}^T(\tilde{t}, \tilde{s}, \xi) - \int_0^T \tilde{k}_{22}^T(\tilde{t}, \eta, \xi) \tilde{L}^T(\eta, \tilde{s}, \xi) d\eta, \quad \tilde{t}, \tilde{s} \in [0, T].$$

Отсюда следует гладкость по  $\xi$  функции  $\tilde{k}_{22}^T$ , а следовательно, и  $k_{22}^T$ . Формулы (2.42)–(2.44) выводятся из представления (2.39).  $\square$

Введем обозначения. Пусть  $a$  — матрица  $2 \times 2$ , тогда столбцы матрицы  $a$  обозначаем:  $a^{\mathbf{I}}, a^{\mathbf{II}}$ , а строки матрицы  $a$  обозначаем:  $a_{\mathbf{I}}, a_{\mathbf{II}}$ .

Из равенств (2.42)–(2.44) легко выводится

**Следствие 1.** Элементы  $k_{11}^T, k_{12}^T, k_{22}^T$  являются непрерывными в области  $\Sigma^T$  и гладкими вне плоскости  $s = t$ . Элемент  $k_{21}^T$  может иметь скачок при  $s = t$ .  
Имеют место равенства

$$k_{ij}^T(\pi_i^T(\xi), s, \xi) = k_{ij}^T(t, \pi_j^T(\xi), \xi) = 0, \quad s, t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)], \quad i, j = 1, 2.$$

Кроме того, для любых фиксированных  $\xi \in [0, T]$  и  $s \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  строки матрицы  $k^T(t, s, \xi)$  связаны соотношением

$$k_{\mathbf{I}}^T(t, s, \xi) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} l(t - \eta) k_{\mathbf{II}}^T(\eta, s, \xi) d\eta, \quad t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]. \quad (2.46)$$

На рисунке 2.2 затенена область определения элементов матрицы  $k^T$ , знаки нуля вдоль прямых  $t = \pi_i^T(\xi)$  и  $s = \pi_i^T(\xi)$  означают, что функция аннулируется на этих прямых. Диагональ  $s = t$ , отмеченная пунктирной линией, означает

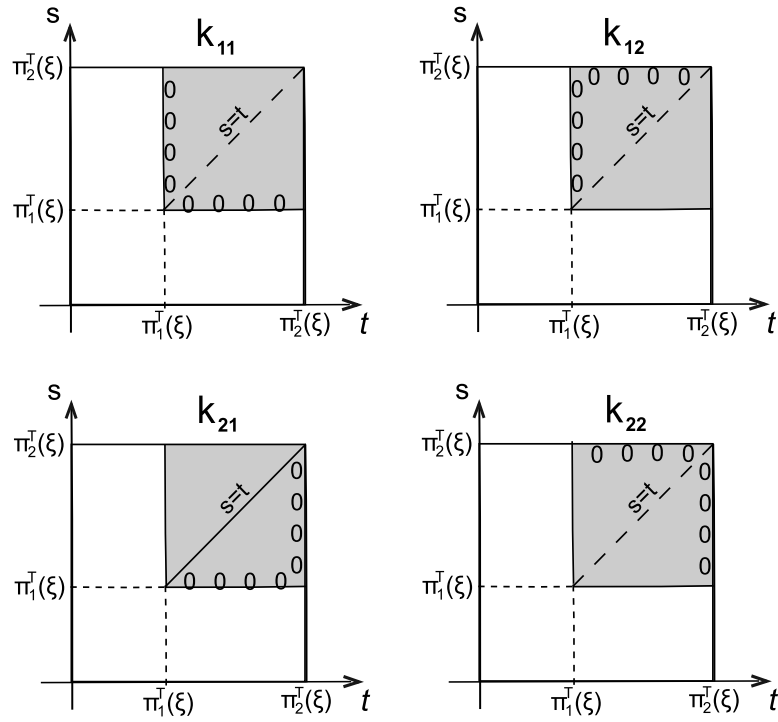


Рис. 2.2. Картина разрывов ядра  $k^T(t, s, \xi)$  при фиксированном  $\xi \in (0, T)$

возможный скачок производной, но не самой функции. Диагональ, отмеченная сплошной линией означает возможный скачок самой функции.

В силу соотношений (2.35), для оператора  $X_l^{T, \xi}$  справедливо представление, идентичное представлению (2.38)–(2.41) оператора  $(e_l^{T, \xi})^*$ . Форма второго слагаемого в разложении  $f = X_l^{T, \xi} f + f_{\perp}^{T, \xi}$ , отвечающем (2.34), такова:

$$\begin{aligned}
 f_{\perp}^{T, \xi} \Big|_{0 \leq t < \pi_1^T(\xi)} &= f(t), \\
 f_{\perp}^{T, \xi} \Big|_{\pi_1^T(\xi) \leq t < \pi_2^T(\xi)} &= \begin{pmatrix} [\mathbb{I} + \Lambda^{\xi} (\Lambda^{\xi})^*]^{-1} [f_1 - \Lambda^{\xi} f_2] \\ -(\Lambda^{\xi})^* [\mathbb{I} + \Lambda^{\xi} (\Lambda^{\xi})^*]^{-1} [f_1 - \Lambda^{\xi} f_2] \end{pmatrix}, \\
 f_{\perp}^{T, \xi} \Big|_{\pi_2^T(\xi) \leq t \leq T} &= 0.
 \end{aligned}$$

### 2.3.2. Оператор $C_l^{T, \xi}$

Напомним, оператор  $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$  действует по правилу

$$C^T = \nu \mathbb{I} + I^T, \quad \text{где} \quad (I^T f)(t) := \int_0^T c^T(t, s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.47)$$

В Предложении 7 было установлено, что оператор  $C^T$  — положительный изоморфизм, поэтому его блоки

$$C_l^{T,\xi} := (e_l^{T,\xi})^* C^T e_l^{T,\xi}$$

в подпространствах  $\mathcal{F}_l^{T,\xi} \subset \mathcal{F}_l^T$  суть изоморфизмы этих подпространств.

**Соглашение 3.** Функция  $k^T(t, s, \xi)$  при значениях аргументов  $(t, s, \xi) \notin \Sigma^T$  полагается равной нулю.

**Лемма 8.** Для оператора  $C_l^{T,\xi} : \mathcal{F}_l^{T,\xi} \rightarrow \mathcal{F}_l^{T,\xi}$  справедливо представление

$$\left( C_l^{T,\xi} f \right) (t) = f_\nu(t) + \int_{\pi_1^T(\xi)}^T c_l^T(t, s, \xi) f(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.48)$$

с

$$f_\nu(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi_1^T(\xi)), \\ \nu_2 f(t), & t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)], \\ \nu f(t), & t \in (\pi_2^T(\xi), T], \end{cases} \quad (2.49)$$

и кусочно-гладким в  $[0, T]^3$  ядром

$$c_l^T(t, s, \xi) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi_1^T(\xi)), \\ \widehat{c}_l^T(t, s, \xi), & t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)], \\ c^T(t, s), & t \in (\pi_2^T(\xi), T], \end{cases} \quad (2.50)$$

где

$$\widehat{c}_l^T(t, s, \xi) = \begin{bmatrix} \int_{\pi_1^T(\xi)}^t l(t-\eta) c_{\mathbf{II}}^T(\eta, s) d\eta \\ c_{\mathbf{II}}^T(t, s) \end{bmatrix} + \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} k^T(t, \eta, \xi) c^T(\eta, s) d\eta + k^T(t, s, \xi) \nu. \quad (2.51)$$

При каждом  $\xi \in [0, T]$  ядро  $c_l^T(t, s, \xi)$  имеет носитель в прямоугольнике  $[\pi_1^T(\xi), T] \times [0, T]$  (затенен на рис. 2.3), может иметь скачок на прямых  $t = \pi_i^T(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ , при  $t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  может иметь скачок на прямых

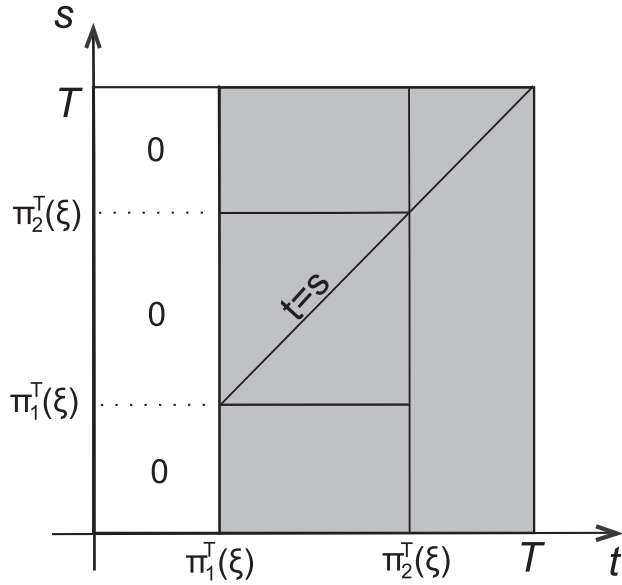


Рис. 2.3. Картина разрывов ядра  $c_l^T(t, s, \xi)$  при фиксированном  $\xi \in (0, T)$

$s = \pi_i^T(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ . На диагонали  $t = s$  ядро  $c_l^T(t, s, \xi)$  непрерывно, но возможны скачки производных.

При каждом  $s \in [0, T]$  столбцы матрицы  $c_l^T(t, s, \xi)$  принадлежат пространству  $\mathcal{F}_l^{T, \xi}$ , то есть справедливы соотношения

$$(c_l^T)_{\mathbf{I}}(t, s, \xi) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} l(t - \eta)(c_l^T)_{\mathbf{II}}(\eta, s, \xi) d\eta, \quad t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]. \quad (2.52)$$

Как функция трех переменных  $c_l^T$  является гладкой в  $[0, T]^3$  вне плоскостей  $t = \pi_1^T(\xi)$ ,  $s = \pi_1^T(\xi)$  и поверхностей  $t = \pi_2^T(\xi)$ ,  $s = \pi_2^T(\xi)$ , на которых функция  $c_l^T$  может иметь скачок. На плоскости  $t = s$  возможны скачки производных  $c_l^T$ .

*Доказательство.* Пусть  $\xi \in [0, T]$  и  $f \in \mathcal{F}_l^{T, \xi}$ . Оператор  $e_l^{T, \xi}$  вкладывает  $f$  в пространство  $\mathcal{F}^T$  без каких-либо преобразований. Далее к результату вложения  $\tilde{f} = e_l^{T, \xi} f \in \mathcal{F}^T$  применяется оператор  $C^T$ :

$$C^T \tilde{f} = \nu \tilde{f} + I^T \tilde{f},$$

где оператор  $I^T$  введен в (2.47). Применяя оператор  $(e_l^{T, \xi})^*$ , заметим, что слагаемое  $\nu \tilde{f}$  не является элементом пространства  $\mathcal{F}_l^{T, \xi}$ , поэтому действие оператора



$(e_l^{T,\xi})^*$  на первое слагаемое не тождественно:

$$\left( (e_l^{T,\xi})^* \nu \tilde{f} \right) (t) = f_\nu(t) + \int_{\pi_1^T(T)}^{\pi_2^T(T)} k^T(t, s, \xi) \nu \tilde{f}(s) ds, \quad (2.53)$$

где  $f_\nu$  определена в (2.49), а  $k^T(t, s, \xi)$  понимается с учетом Соглашения 3. Рассмотрим действие  $(e_l^{T,\xi})^*$  на второе слагаемое при  $t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$ ,

$$\begin{aligned} \left( (e_l^{T,\xi})^* I^T \tilde{f} \right) (t) &= \left( \int_{\pi_1^T(\xi)}^t l(t-\eta) (c_{\mathbf{II}}^T(\eta, \cdot); f)_{\mathcal{F}^T} d\eta \right. \\ &\quad \left. (c_{\mathbf{II}}^T(t, \cdot); f)_{\mathcal{F}^T} \right) \\ &+ \int_0^T \left( \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} k^T(t, \eta, \xi) c^T(\eta, s) d\eta \right) f(s) ds. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Суммируя (2.53) и (2.54) при  $t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$ , получаем

$$\begin{aligned} (C_l^{T,\xi} f) (t) &= \nu_2 f(t) + \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} k^T(t, s, \xi) f(s) ds \\ &+ \int_0^T \left( \int_{\pi_1^T(\xi)}^t l(t-\eta) c_{\mathbf{II}}^T(\eta, s) d\eta \right. \\ &\quad \left. c_{\mathbf{II}}^T(t, s) \right) f(s) ds \\ &+ \int_0^T \left( \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} k^T(t, \eta, \xi) c^T(\eta, s) d\eta \right) f(s) ds \\ &= \nu_2 f(t) + \int_0^T \widehat{c}_l^T(t, s, \xi) f(s) ds \end{aligned}$$

с матричным ядром  $\widehat{c}_l^T(t, s, \xi)$ , определенным в (2.51). Отсюда следует представление (2.48) с ядром  $c_l^T(t, s, \xi)$ , определенным в (2.50).

При любых  $\xi \in [0, T]$  и  $s \in [0, T]$  соотношение (2.52) следует из аналогичного соотношения (2.46), установленного в Следствии 1. Из этой связи между строками  $\widehat{c}_l^T(t, s, \xi)$  можно заключить, что для любых  $\xi \in [0, T]$  и  $s \in [0, T]$  столбцы матрицы  $c_l^T(\cdot, s, \xi)$  принадлежат пространству  $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ .

Характер гладкости функции  $c_l^T(t, s, \xi)$  следует из анализа формул (2.51) и (2.50).  $\square$

### 2.3.3. Проекторы $\mathcal{P}_l^{T, \xi}$

На «управляемой» части  $\mathcal{H}^{x_2(T)}$  внешнего пространства  $\mathcal{H}^{x_1(T)}$  определим семейство ортогональных проекторов  $P^{x_2(\xi)}$  на подпространства  $\mathcal{H}^{x_2(\xi)}$ . Их действие сводится к срезке: для  $y \in \mathcal{H}^{x_2(T)}$  имеем

$$\left(P^{x_2(\xi)}y\right)(x) = \begin{cases} y(x), & 0 \leq x < x_2(\xi), \\ 0, & x_2(\xi) \leq x \leq x_2(T), \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq T.$$

Напомним связь (2.28) подпространств  $\mathcal{H}^{x_2(\xi)}$  с подпространствами  $\mathcal{F}_l^{T, \xi}$ . Во внешнем пространстве  $\mathcal{F}^T$  введем семейство операторов

$$\mathcal{P}_l^{T, \xi} := (W^T)^{-1}P^{x_2(\xi)}W^T, \quad 0 \leq \xi \leq T. \quad (2.55)$$

Отметим соотношения, легко следующие из определения:

$$(\mathcal{P}_l^{T, \xi})^2 = \mathcal{P}_l^{T, \xi}, \quad C^T \mathcal{P}_l^{T, \xi} = (\mathcal{P}_l^{T, \xi})^* C^T, \quad \text{Ran } \mathcal{P}_l^{T, \xi} = \mathcal{F}_l^{T, \xi}. \quad (2.56)$$

Из них нетрудно заключить, что  $\mathcal{P}_l^{T, \xi}$  есть (косой) проектор в  $\mathcal{F}^T$  на  $\mathcal{F}_l^{T, \xi}$  параллельно подпространству  $(C^T)^{-1}[\mathcal{F}^T \ominus \mathcal{F}_l^{T, \xi}]$ . Соотношения (2.56) суть характеристические для такого проектора.

**Предложение 10.** *Для каждого  $\xi \in [0, T]$  справедливо операторное представление*

$$\mathcal{P}_l^{T, \xi} := e_l^{T, \xi} \left[ (e_l^{T, \xi})^* C^T e_l^{T, \xi} \right]^{-1} (e_l^{T, \xi})^* C^T \quad (2.57)$$

*и интегральное представление*

$$(\mathcal{P}_l^{T, \xi} f)(t) = f^{T, \xi}(t) + \int_0^{\pi_2^T(\xi)} p^T(t, s, \xi) f(s) ds, \quad (2.58)$$

где

$$f^{T,\xi}(t) := \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi_1^T(\xi), \\ \begin{pmatrix} \Lambda^\xi f_2(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, & \pi_1^T(\xi) \leq t \leq \pi_2^T(\xi), \\ f(t), & \pi_2^T(\xi) < t \leq T, \end{cases}$$

является элементом пространства  $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ , а матричное  $2 \times 2$  ядро  $p^T(t, s, \xi)$  определено в кубе  $[0, T]^3$ , имеет носитель в области

$$\Omega^T = \{(t, s, \xi) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi \in [0, T], (t, s) \in [\pi_1^T(\xi), T] \times [0, \pi_2^T(\xi)]\}$$

и является гладким в кубе  $[0, T]^3$  вне  $\partial\Omega^T$  и плоскости  $t = s$ . Для каждого  $\xi \in [0, T]$  и  $s \in [0, \pi_2^T(\xi)]$  столбцы матрицы  $p^T(\cdot, s, \xi)$  являются элементами пространства  $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ . Для каждого  $\xi \in [0, T]$  амплитуды скачков  $p_{ij}^T(\langle \pi_i^T(\xi) \rangle, s, \xi)$ ,  $i, j = 1, 2$ , суть кусочно-гладкие функции на отрезке  $[0, T]$  вне точек  $s = \pi_i^T(\xi)$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} p_{11}^T(\langle \pi_2^T(\xi) \rangle, \pi_1^T(\xi), \xi) &= p_{12}^T(\langle \pi_2^T(\xi) \rangle, \pi_2^T(\xi), \xi) \\ &= p_{22}^T(\langle \pi_1^T(\xi) \rangle, \pi_2^T(\xi), \xi) = 0. \end{aligned} \quad (2.59)$$

*Доказательство.* Фиксируем  $\xi \in [0, T]$ . Для произвольной  $f \in \mathcal{F}^T$  имеет место разложение:

$$f = e_l^{T,\xi} g^{T,\xi} + e_{l,\perp}^{T,\xi} g_{\perp}^{T,\xi}, \quad (2.60)$$

где

$$g^{T,\xi} \in \mathcal{F}_l^{T,\xi}, \quad g_{\perp}^{T,\xi} \in (C^T)^{-1} [\mathcal{F}^T \ominus \mathcal{F}_l^{T,\xi}],$$

а  $e_{l,\perp}^{T,\xi}$  — оператор вложения подпространства  $(C^T)^{-1} [\mathcal{F}^T \ominus \mathcal{F}_l^{T,\xi}]$  в пространство  $\mathcal{F}^T$ . По определению

$$\mathcal{P}_l^{T,\xi} f = e_l^{T,\xi} g^{T,\xi}. \quad (2.61)$$

Применяя к обеим частям (2.60) оператор  $C^T$ , а затем  $(e_l^{T,\xi})^*$ , получим:

$$C_l^{T,\xi} g^{T,\xi} = (e_l^{T,\xi})^* C^T f, \quad (2.62)$$

откуда следует представление (2.57), которое корректно, поскольку  $C^T$  и все его блоки  $(e_l^{T,\xi})^* C^T e_l^{T,\xi}$  суть изоморфизмы в соответствующих подпространствах  $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ . Интегральное представление (2.58) следует из (2.57). Для анализа гладкости ядра  $p^T$  будем использовать равенство (2.62). Пусть

$$f(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \delta(t - \lambda) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)],$$

тогда из (2.61) следует

$$g^\xi(t, \lambda) = \left( \mathcal{P}_l^{T,\xi} f(\cdot, \lambda) \right) (t) = (p^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi),$$

где  $(p^T)^{\mathbf{I}}$  — первый столбец матрицы  $p^T$ . Рассмотрим правую часть: при каждом  $\lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)]$

$$(C^T f(\cdot, \lambda)) (t) = \nu \begin{pmatrix} \delta(t - \lambda) \\ 0 \end{pmatrix} + (c^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda), \quad t \in [0, T].$$

Для каждого  $\xi \in [0, T]$  и  $\lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)]$

$$\left( (e_l^{T,\xi})^* C^T f(\cdot, \lambda) \right) (t) = \nu_1 (k^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi) + (c_l^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi), \quad t \in [0, T].$$

Здесь и далее функция  $(k^T)^{\mathbf{I}}$  понимается с учетом Соглашения 3. Обозначим

$$z^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi) := \nu_1 (k^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi) + (c_l^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi).$$

Легко видеть, что для каждого  $\xi \in [0, T]$  и  $\lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)]$  вектор-функция  $z^{\mathbf{I}}(\cdot, \lambda, \xi)$  является элементом пространства  $\mathcal{F}_l^{T,\xi}$ . Кроме того,  $z^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi)$  является кусочно-гладкой в кубе  $[0, T]^3$  вне плоскостей  $t = \lambda$ ,  $t = \pi_1^T(\xi)$ ,  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$  и поверхностей  $t = \pi_2^T(\xi)$ ,  $\lambda = \pi_2^T(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ . Картина разрывов для фиксированного  $\xi \in [0, T]$  обеих компонент  $z^{\mathbf{I}}$  изображена на рис. 2.4 слева: носитель функции затенен, сплошные линии означают возможный скачок самой функции, а пунктирная линия означает возможный скачок производных.

Опишем возможные скачки функций  $z_i^{\mathbf{I}}, i = 1, 2$  для фиксированного  $\xi \in (0, T]$ . В силу определения, очевидно, обе компоненты функции  $z^{\mathbf{I}}$  имеют

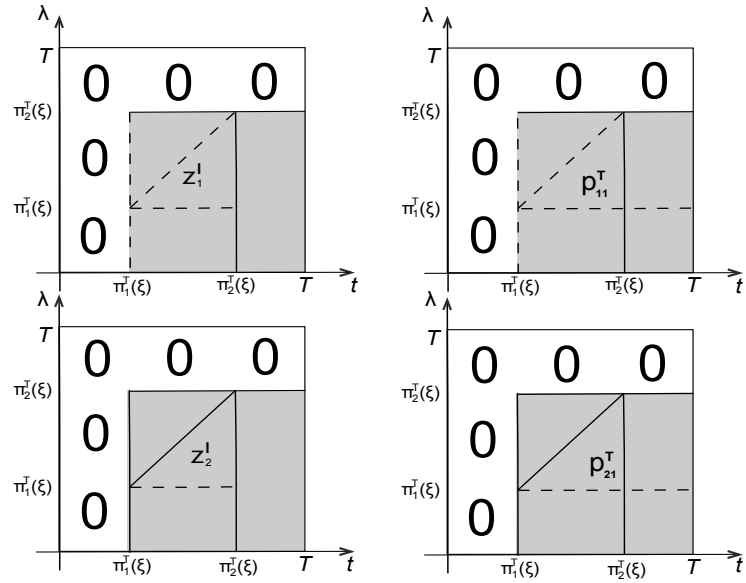


Рис. 2.4. Скачки правой части  $z^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi)$  и столбца  $(p^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi)$  при фиксированном  $\xi \in (0, T)$

возможные скачки на прямых  $t = \pi_i^T(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ . На прямой  $t = \pi_1^T(\xi)$  первая компонента оказывается непрерывной в силу перевязки компонент функций из пространства  $\mathcal{F}_l^{T, \xi}$ . При  $t \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$  первая компонента  $z_1^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi)$  непрерывна, а вторая компонента может иметь скачок на диагонали  $t = s$ . Это следует из того, что обе компоненты вектор-функции  $(k^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi)$  аннулируются при  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$ , но компонента  $k_{21}^T(t, \lambda, \xi)$  может иметь скачок на диагонали  $t = s$ , обусловленный скачком функции  $l$  в нуле (см. (2.42)). Возможные скачки производных  $z^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi)$  локализованы на прямых  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$  и  $t = \lambda$ .

Далее для каждого  $\xi \in [0, T]$  и  $\lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)]$  столбец  $(p^T)^{\mathbf{I}}(\cdot, \lambda, \xi)$  удовлетворяет уравнению

$$\left( C_l^{T, \xi} (p^T)^{\mathbf{I}}(\cdot, \lambda, \xi) \right) (t) = z^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi), \quad t \in [0, T]. \quad (2.63)$$

В силу инъективности оператора  $C_l^{T, \xi}$ , уравнение (2.63) однозначно разрешимо в  $\mathcal{F}_l^{T, \xi}$ , таким образом,  $(p^T)^{\mathbf{I}}(\cdot, \lambda, \xi) \in \mathcal{F}_l^{T, \xi}$ . Из уравнения (2.63) следует, что для каждого  $\xi \in [0, T]$  обе компоненты функции  $(p^T)^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi)$  являются кусочно-гладкими с возможными скачками на прямых  $t = \pi_i^T(\xi)$ ,  $i = 1, 2$  и возможными скачками производных у обеих компонент на прямой  $\lambda = \pi_2^T(\xi)$  (см. правые графики рис. 2.4). На диагонали  $t = \lambda$  первая компонента непрерывна, но возможен скачок ее производных, вторая же компонента сама может иметь разрыв

на диагонали. Поэтому скачки  $p_{11}^T(\langle \pi_2^T(\xi) \rangle, \lambda, \xi)$ ,  $p_{21}^T(\langle \pi_1^T(\xi) \rangle, \lambda, \xi)$  как функции переменной  $\lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)]$  являются кусочно-гладкими с возможными разрывами при  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$ , причем  $p_{11}^T(\langle \pi_2^T(\xi) \rangle, \lambda, \xi)$  непрерывна при  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$ .

Пусть теперь

$$f(t, \lambda) := \begin{pmatrix} 0 \\ \delta(t - \lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)],$$

тогда

$$g^T(t, \lambda, \xi) = (\mathcal{P}_l^{T, \xi} f(\cdot, \lambda))(t) = q^T(t, \lambda, \xi) + (p^T)^{\mathbf{II}}(\cdot, \lambda, \xi),$$

где

$$q^T(t, \lambda, \xi) := \begin{pmatrix} l(t - \lambda) \\ \delta(t - \lambda) \end{pmatrix} \chi_{[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]}(t, \lambda), \quad (t, \lambda) \in [0, T] \times [0, \pi_2^T(\xi)].$$

Применяя оператор  $C_l^{T, \xi}$  к  $q^T(\cdot, \lambda, \xi)$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{q}^T(t, \lambda, \xi) &:= \left( C_l^{T, \xi} q^T(\cdot, \lambda, \xi) \right) (t) \\ &= \nu_2 q^T(t, \lambda, \xi) + \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} c_l^T(t, s, \xi) q^T(s, \lambda, \xi) ds. \end{aligned}$$

Для каждого  $\xi \in [0, T]$  функция  $\tilde{q}^T(t, \lambda, \xi)$  является кусочно-гладкой:

- при  $(t, \lambda) \in [\pi_1^T(\xi), T] \times [0, \pi_1^T(\xi))$

$$\tilde{q}^T(t, \lambda, \xi) = 0;$$

- при  $(t, \lambda) \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)] \times [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$

$$\tilde{q}^T(t, \lambda, \xi) = \nu_2 q^T(t, \lambda, \xi) + \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} l(s - \lambda) (c_l^T)^{\mathbf{I}}(t, s, \xi) ds + (c_l^T)^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi);$$

- при  $(t, \lambda) \in (\pi_2^T(\xi), T] \times [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$

$$\tilde{q}^T(t, \lambda, \xi) = \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} l(s - \lambda) (c_l^T)^{\mathbf{I}}(t, s, \xi) ds + (c_l^T)^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi).$$

Теперь вычислим правую часть (2.62). Напомним,

$$\begin{aligned} C^T &= \nu \mathbb{I} + I^T, \quad (I^T f)(t) = \int_0^T c^T(t, s) f(s) ds, \\ (e_i^{T, \xi})^* C^T &= (e_i^{T, \xi})^* \nu + (e_i^{T, \xi})^* I^T, \\ \left( (e_i^{T, \xi})^* I^T f \right)(t) &= \int_0^T c_i^{T, \xi}(t, s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Заметим здесь, что нижний предел интеграла равен 0 и замены на  $\pi_1^T(\xi)$ , как в представлении (2.48), не допускает, так как в данном случае мы действуем на функцию из пространства  $\mathcal{F}^T$ , а не из  $\mathcal{F}_i^{T, \xi}$ :

$$\begin{aligned} \left( (e_i^{T, \xi})^* C^T f(\cdot, \lambda) \right)(t) &= (e_i^{T, \xi})^* \nu f(t, \lambda) + \int_0^T c_i^T(t, s, \xi) f(s, \lambda) ds \\ &= \left( \nu_2 q^T + \nu_2 (k^T)^{\mathbf{II}} + (c_i^T)^{\mathbf{II}} \right)(t, \lambda, \xi). \end{aligned}$$

Здесь первое и второе слагаемые имеют носитель в квадрате  $[\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]^2$ , третье слагаемое имеет носитель в прямоугольнике  $[\pi_1^T(\xi), T] \times [0, \pi_2^T(\xi)]$ .

Итого, при каждом  $\lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)]$  второй столбец  $(p^T)^{\mathbf{II}}(\cdot, \lambda, \xi)$  матрицы  $p^T(\cdot, \lambda, \xi)$  удовлетворяет уравнению

$$\left( C_i^{T, \xi} p^T(\cdot, \lambda, \xi) \right)(t) = z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi), \quad t \in [0, T], \quad (2.64)$$

с кусочно-гладкой правой частью, изображенной<sup>11</sup> на рис. 2.5 и определенной для каждого  $\xi \in [0, T]$  на прямоугольнике  $[0, T] \times [0, \pi_2^T(\xi)]$  следующим образом:

- при  $(t, \lambda) \in [0, \pi_1^T(\xi)] \times [0, \pi_2^T(\xi)]$

$$z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi) = 0;$$

- при  $(t, \lambda) \in [\pi_1^T(\xi), T] \times [0, \pi_2^T(\xi)]$

$$z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi) = (c_i^T)^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi);$$

---

<sup>11</sup> Носитель функции затенен, сплошные линии означают возможный скачок самой функции, а пунктирная линия означает возможный скачок производных.

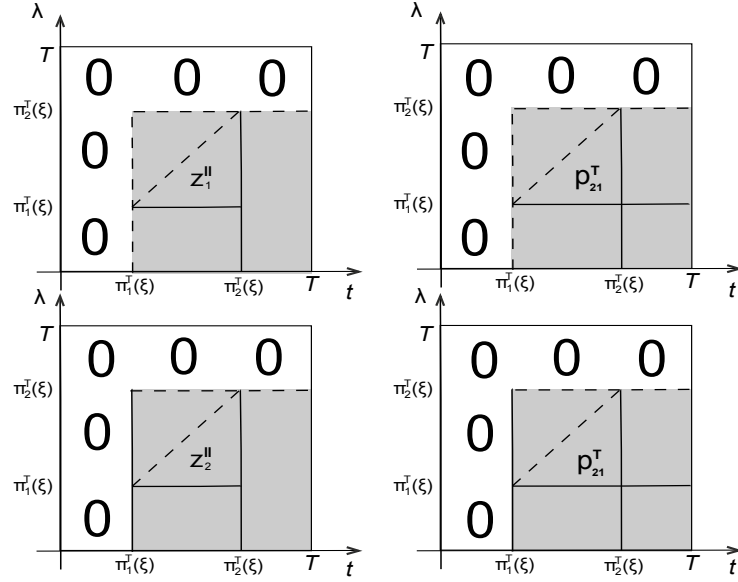


Рис. 2.5. Скачки правой части  $z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi)$  и столбца  $(p^T)^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi)$  при фиксированном  $\xi$

- при  $(t, \lambda) \in [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)] \times [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$

$$z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi) = \nu_2 (k^T)^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi) - \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} (c_i^T)^{\mathbf{I}}(t, s, \xi) l(s - \lambda) ds;$$

- при  $(t, \lambda) \in (\pi_2^T(\xi), T] \times [\pi_1^T(\xi), \pi_2^T(\xi)]$

$$z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi) = - \int_{\pi_1^T(\xi)}^{\pi_2^T(\xi)} (c_i^T)^{\mathbf{I}}(t, s, \xi) l(s - \lambda) ds.$$

Для каждого  $\xi \in [0, T]$  возможные скачки правой части локализованы на прямых  $t = \pi_i^T(\xi)$ ,  $i = 1, 2$  и  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$ . На диагонали  $t = \lambda$  возможны скачки производных. Из уравнения (2.64) следует, что столбец  $(p^T)^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi)$  также имеет возможные скачки (см. рис. 2.5) на прямых  $t = \pi_i^T(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$  и скачки производных на диагонали  $t = \lambda$ . Отсюда следует, что амплитуды скачков  $(p^T)^{\mathbf{II}}(\langle \pi_i^T(\xi) \rangle, \lambda, \xi)$  являются кусочно-гладкими функциями переменной  $\lambda \in [0, \pi_2^T(\xi)]$  с возможными скачками при  $\lambda = \pi_1^T(\xi)$ . Более того, из

$$z^{\mathbf{II}}(t, \pi_2^T(\xi), \xi) = 0, \quad t \in [0, T],$$

следует

$$(p^T)^{\mathbf{II}}(t, \pi_2^T(\xi), \xi) = 0, \quad t \in [0, T],$$



и в частности

$$p_{22}^T (\langle \pi_1^T(\xi) \rangle, \pi_2^T(\xi), \xi) = p_{12}^T (\langle \pi_2^T(\xi) \rangle, \pi_2^T(\xi), \xi) = 0.$$

□

Приведем соотношение, используемое ниже при характеристике данных. Из представлений (2.38)–(2.41) и (2.58) легко видеть, что при гладком управлении  $f$  скачки проекции  $\mathcal{P}_i^{T,\xi} f$  могут иметь место лишь при  $t = \pi_i^T(\xi)$ . Величина скачков находится из этих же представлений, и простой анализ приводит к следующему результату. В следующем предложении используется обозначение  $\bar{i}$ , введенное в (1.11).

**Предложение 11.** *При гладких  $f \in \mathcal{F}^T$  для компонент  $\mathcal{P}_i^{T,\xi} f$  выполнены соотношения*

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (\mathcal{P}_i^{T,\xi} f)_i \langle \pi_{\bar{i}}^T(\xi) \rangle = f_i(T), \quad i = 1, 2. \quad (2.65)$$

В частном случае, при постоянных  $\rho_i$  и  $\gamma_i$ , они установлены в [7].

**Замечание 1.** *При выводе представлений (2.38)–(2.41), (2.57), (2.58) и равенств (2.65) никак не используется тот факт, что функция  $l$  связана с медленными волнами: важен лишь конкретный вид (2.36) оператора  $\Lambda^\xi$ . Они справедливы для произвольной  $l \in C^\infty[0, \pi_2^T(T)]$ .*

Забегая вперед, отметим, что для любой такой функции можно подобрать систему  $\mathfrak{s}^T$ , в которой она будет определять медленные волны (подсистему  $\mathfrak{s}_i^T$ ).

**Пространство  $\Phi^T$**  Полезна и следующая точка зрения на проекторы  $\mathcal{P}_i^{T,\xi}$ . Во внешнем пространстве  $\mathcal{F}^T$  введем новое скалярное произведение (метрику)

$$\begin{aligned} (f, g)_{\Phi^T} &:= (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} \stackrel{(2.12)}{=} (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}^{x_1(T)}} \\ &= (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}^{x_1(T)}}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Образовавшееся пространство обозначим  $\Phi^T$ . Поскольку  $C^T$  есть изоморфизм (Предложение 7), новая метрика эквивалентна исходной, а  $\mathcal{F}^T$  и  $\Phi^T$  состоят из одних и тех же элементов. Это обстоятельство мы используем в обозначениях:  $\Phi_l^T$  есть  $\mathcal{F}_l^T$ , рассматриваемое как подпространство пространства  $\Phi^T$ . Аналогично понимаются и  $\Phi_l^{T,\xi} \equiv \mathcal{F}_l^{T,\xi}$ .

Отметим связь между операциями сопряжения: для ограниченного (в  $\mathcal{F}^T$  и, равносильно, в  $\Phi^T$ ) оператора  $A$  имеем равенство

$$C^T A^* = A^* C^T, \quad (2.67)$$

где  $(\cdot)^*$  есть сопряжение в  $\Phi^T$ .

Из (2.67) и (2.56) следуют соотношения

$$\left(\mathcal{P}_l^{T,\xi}\right)^2 = \mathcal{P}_l^{T,\xi}, \quad \left(\mathcal{P}_l^{T,\xi}\right)^* = \mathcal{P}_l^{T,\xi}, \quad \text{Ran } \mathcal{P}_l^{T,\xi} = \mathcal{F}_l^{T,\xi}.$$

Из них заключаем, что проектор  $\mathcal{P}_l^{T,\xi}$ , рассматриваемый как оператор в пространстве  $\Phi^T$ , есть *ортогональный* проектор в  $\Phi^T$  на подпространство  $\Phi_l^{T,\xi}$ .

Оператор управления  $W_l^T$  подсистемы  $\mathfrak{s}_l^T$ , рассматриваемый как оператор из  $\Phi_l^T$  на  $\mathcal{H}^{x_2(T)}$ , в силу (2.66), оказывается унитарным. Как видно из (2.55), он играет роль преобразования, диагонализующего семейство проекторов  $\{\mathcal{P}_l^{T,\xi}\}_{0 \leq \xi \leq T}$  в смысле спектральной теоремы.

#### 2.3.4. Представление волн.

Из представления (2.5) нетрудно видеть, что кусочно-гладким управлениям соответствуют кусочно-гладкие волны. Более того, характер гладкости ядра  $w^T(x, t)$  в (2.5) таков, что интегральное слагаемое непрерывно (по  $x$ ) при любом  $f \in \mathcal{F}^T$ . В силу последнего, оказывается верным и обратное: разрывы у волны могут появиться только при наличии разрывов управления. Величины (*амплитуды*) разрывов связаны соотношениями

$$(W^T f)_i \langle x_2(\xi) \rangle = -\mu_i(x_2(\xi)) f_i \langle \pi_i^T(\xi) \rangle, \quad 0 < \xi < T, \quad i = 1, 2, \quad (2.68)$$

(см. обозначения (1.7)) легко следующими из (2.5).

Фиксируем  $\xi \in (0, T)$  и выберем управление  $f$ , которому отвечает гладкое решение  $u^f$ . Из равенств

$$u^{\mathcal{P}_l^{T,\xi} f}(\cdot, T) = W^T \mathcal{P}_l^{T,\xi} f \stackrel{(2.55)}{=} P^{x_2(\xi)} W^T f = \begin{cases} u^f(\cdot, T), & 0 \leq x < x_2(\xi), \\ 0, & x \geq x_2(\xi), \end{cases}$$

видно, что волна  $u^{\mathcal{P}_l^{T,\xi} f}(\cdot, T)$  разрывна в точке  $x = x_2(\xi)$ , причем амплитуда разрыва есть

$$\left( u^{\mathcal{P}_l^{T,\xi} f}(\cdot, T) \right) \langle x_2(\xi) \rangle = -u^f(x_2(\xi), T). \quad (2.69)$$

Применяя к этой волне соотношения (2.68) (т. е. заменяя в них  $f$  на  $\mathcal{P}_l^{T,\xi} f$  и  $W^T f$  на  $W^T \mathcal{P}_l^{T,\xi} f = u^{\mathcal{P}_l^{T,\xi} f}(\cdot, T)$ ) с учетом (2.69), получаем:

$$\left( u^f(x_2(\xi), T) \right)_i = \mu_i(x_2(\xi)) \left( \mathcal{P}_l^{T,\xi} f \right)_i \langle \pi_i^T(\xi) \rangle, \quad 0 < \xi < T,$$

или

$$u^f(x_2(\xi), T) = \mu(x_2(\xi)) \begin{pmatrix} \left( \mathcal{P}_l^{T,\xi} f \right)_1 \langle \pi_2^T(\xi) \rangle \\ \left( \mathcal{P}_l^{T,\xi} f \right)_2 \langle \pi_1^T(\xi) \rangle \end{pmatrix}, \quad 0 < \xi < T.$$

Проводя здесь подстановку  $x = x_2(\xi) \in (0, x_2(T))$  с учетом  $\pi_2^T(\xi) = T - \tau_1(x_2(\xi))$  и  $\pi_1^T(\xi) = T - \xi = T - \tau_2(x_2(\xi))$ , приходим к представлению

$$u^f(x, T) = \mu(x) \begin{pmatrix} \left( \mathcal{P}_l^{T,\tau_2(x)} f \right)_1 \langle T - \tau_1(x) \rangle \\ \left( \mathcal{P}_l^{T,\tau_2(x)} f \right)_2 \langle T - \tau_2(x) \rangle \end{pmatrix}, \quad 0 < x < x_2(T). \quad (2.70)$$

Соотношение (2.70) называется *амплитудной формулой* (АФ): в нем волны выражаются через амплитуды разрывов, возникающих при действии проекторов  $\mathcal{P}_l^{T,\xi}$  на управления. Отметим особенность АФ, используемую при решении обратных задач [7], [24]. Столбец в ее правой части содержит только объекты внешнего пространства — управления и проекторы  $\mathcal{P}_l^{T,\xi}$ . Для построения проекторов достаточно располагать оператором  $C^T$  и функцией  $l$ . Вспоминая связь (2.15) и представление (2.11), легко видеть, что столбец в АФ определяется расширенным оператором реакции  $R^{2T}$  (матрицами  $\nu$ ,  $\omega$  и функцией отклика  $r|_{[0,2T]}$ ) и функцией  $l|_{[0,\pi_2^T(T)]}$ . В дальнейшем этот факт сыграет ключевую роль.

С учетом представления для проекторов  $\mathcal{P}_l^{T,\xi}$  (см. Предложение 10) формула (2.70) может быть записана покомпонентно в виде:

$$\begin{aligned}
u_1^f(x, T) &= \mu_1(x) \left( f_1(T - \tau_1(x)) - \int_{T-\tau_2(x)}^{T-\tau_1(x)} l(T - \tau_1(x) - s) f_2(s) ds \right) \\
&\quad + \mu_1(x) \int_0^{T-\tau_1(x)} p_{\mathbf{I}}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, s, \tau_2(x)) f(s) ds, \\
u_2^f(x, T) &= \mu_2(x) f_2(T - \tau_1(x)) \\
&\quad + \mu_2(x) \int_0^{T-\tau_1(x)} p_{\mathbf{II}}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, s, \tau_2(x)) f(s) ds.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений и представления (2.5) следует

$$w_{11}^T(x, t) = \mu_1(x) p_{11}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, t, \tau_2(x)), \quad (2.71)$$

$$w_{12}^T(x, t) = \mu_1(x) (p_{12}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, t, \tau_2(x)) - l_x(T - \tau_1(x) - t)), \quad (2.72)$$

$$w_{21}^T(x, t) = \mu_2(x) p_{21}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, t, \tau_2(x)), \quad (2.73)$$

$$w_{22}^T(x, t) = \mu_2(x) p_{22}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, t, \tau_2(x)), \quad (2.74)$$

где

$$l_x(t) := \begin{cases} l(t), & 0 \leq t \leq \tau_2(x) - \tau_1(x), \\ 0, & t > \tau_2(x) - \tau_1(x). \end{cases}$$

Соотношения (2.71)–(2.74) и (1.56) позволяют связать элементы матриц  $\beta^i$ ,  $i = 1, 2$ , со скачками элементов матрицы  $p^T$ . Для этого в формулах (2.71)–(2.74) нужно взять скачок по переменной  $t$  в точках  $t = T - \tau_i(x)$ .

Для фиксированного  $x \in (0, x_2(T))$  матрицы  $p^T(\langle T - \tau_i(x) \rangle, t, \tau_2(x))$ ,  $i = 1, 2$ , определены при  $t \in [0, T]$  и имеют скачки при  $t = T - \tau_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ . Величины этих скачков будем записывать в виде:

$$[p^T(\langle T - \tau_i(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_j(x)-0}^{s=T-\tau_j(x)+0}, \quad i, j = 1, 2. \quad (2.75)$$

Таким образом, в соответствии с нашим определением скачок в записи (2.75) берется сначала по первой координате, а затем по второй. Отметим, что порядок взятия скачка важен. С учетом сказанного справедливы следующие формулы при  $x \in (0, x_2(T))$ :

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^1(x) &= -\mu_1(x) [p_{11}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_1(x)-0}^{s=T-\tau_1(x)+0}, \\
\beta_{12}^1(x) &= -\mu_1(x) \left( [p_{12}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_1(x)-0}^{s=T-\tau_1(x)+0} + l(0) \right), \\
\beta_{21}^1(x) &= -\mu_2(x) [p_{21}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_1(x)-0}^{s=T-\tau_1(x)+0}, \\
\beta_{22}^1(x) &= -\mu_2(x) [p_{22}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_1(x)-0}^{s=T-\tau_1(x)+0}, \\
\beta_{11}^2(x) &= -\mu_1(x) [p_{11}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_2(x)-0}^{s=T-\tau_2(x)+0}, \\
\beta_{12}^2(x) &= -\mu_1(x) [p_{12}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_2(x)-0}^{s=T-\tau_2(x)+0} \\
&\quad - \mu_1(x)l(\tau_2(x) - \tau_1(x)), \\
\beta_{21}^2(x) &= -\mu_2(x) [p_{21}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_2(x)-0}^{s=T-\tau_2(x)+0}, \\
\beta_{22}^2(x) &= -\mu_2(x) [p_{22}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, s, \tau_2(x))]_{s=T-\tau_2(x)-0}^{s=T-\tau_2(x)+0}.
\end{aligned}$$

Заметим здесь, что равенства (2.59) при  $\xi = \tau_2(x)$  запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
p_{11}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, T - \tau_2(x), \tau_2(x)) &= 0, \\
p_{12}^T(\langle T - \tau_1(x) \rangle, T - \tau_1(x), \tau_2(x)) &= 0, \\
p_{22}^T(\langle T - \tau_2(x) \rangle, T - \tau_1(x), \tau_2(x)) &= 0,
\end{aligned}$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned}
\beta_{11}^2(x) &= 0, \\
\beta_{12}^1(x) &= -\mu_1(x)l(+0), \\
\beta_{22}^1(x) &= 0,
\end{aligned}$$

которые согласуются с формулами (1.29), (1.30), полученными лучевым методом для матриц  $\beta^i$  и соотношением (2.30) для значения функции  $l$  в нуле.

Дифференцируя соотношения (2.71)–(2.74) по переменной  $t$  с учетом

(1.57), находим представления для элементов матриц  $\varkappa^i$  через скачки производных элементов матрицы  $p^T$ . При  $x \in (0, x_2(T))$

$$\begin{aligned}
\varkappa_{11}^1(x) &= \mu_1(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{11}^T (\langle T - \tau_1(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_1(x)-0}^{t=T-\tau_1(x)+0}, \\
\varkappa_{12}^1(x) &= \mu_1(x) \left( \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{12}^T (\langle T - \tau_1(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_1(x)-0}^{t=T-\tau_1(x)+0} - l'(0) \right), \\
\varkappa_{21}^1(x) &= \mu_2(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{21}^T (\langle T - \tau_2(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_1(x)-0}^{t=T-\tau_1(x)+0}, \\
\varkappa_{22}^1(x) &= \mu_2(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{22}^T (\langle T - \tau_2(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_1(x)-0}^{t=T-\tau_1(x)+0}, \\
\varkappa_{11}^2(x) &= \mu_1(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{11}^T (\langle T - \tau_1(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_2(x)-0}^{t=T-\tau_2(x)+0}, \\
\varkappa_{12}^2(x) &= \mu_1(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{12}^T (\langle T - \tau_1(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_2(x)-0}^{t=T-\tau_2(x)+0} \\
&\quad + \mu_1(x) l'(\tau_2(x) - \tau_1(x)), \\
\varkappa_{21}^2(x) &= \mu_2(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{21}^T (\langle T - \tau_2(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_2(x)-0}^{t=T-\tau_2(x)+0}, \\
\varkappa_{22}^2(x) &= \mu_2(x) \left[ \frac{\partial}{\partial t} p_{22}^T (\langle T - \tau_2(x) \rangle, t, \tau_2(x)) \right]_{t=T-\tau_2(x)-0}^{t=T-\tau_2(x)+0}.
\end{aligned}$$

Таким образом, на медленном интервале  $(0, x_2(T))$  элементы матриц  $\beta^i, \varkappa^i$ ,  $i = 1, 2$ , выражаются через скачки элементов матрицы  $p^T$  и скачки их производных. Напомним, что для построения матрицы  $p^T$  необходимо располагать лишь оператором  $C^T$  и функцией  $l$ .

Для определения матриц  $\beta^i, \varkappa^i$  на интервале  $(0, x_2(T))$  также необходимо знать матрицы  $\tau$  и  $\mu$  на том же интервале. Напомним, что матрицы  $\tau$  и  $\mu$  определяются по  $\rho$  и  $\gamma$ . Заменяя в формулах (1.34)–(1.38) элементы матриц  $\beta^i, \varkappa^i$  на соответствующие скачки элементов матрицы  $p^T$  и скачки их производных, можно получить представление матриц  $A$  и  $B$  на интервале  $(0, x_2(T))$  через матрицы  $\rho, \gamma$ , скачки элементов матрицы  $p^T$  и скачки их производных. Результат подстановки не приводится в силу громоздкости окончательных формул.

## Глава 3

Характеризация оператора  $R^{2T}$ 

## 3.1. Основной результат

В обратных задачах оператор реакции динамической системы играет роль данных, по которым требуется восстановить ее параметры. Характеристическое описание данных доставляет необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи. Как будет показано, применительно к системе  $\mathfrak{s}^T$ <sup>1</sup> эти условия состоят в следующем.

**Теорема 4.** *Оператор  $\mathcal{R}^{2T} : L_2([0, 2T]; \mathbb{R}^2) \rightarrow L_2([0, 2T]; \mathbb{R}^2)$ ,  $\text{Dom } \mathcal{R}^{2T} = \mathcal{M}^{2T}$  вида*

$$(\mathcal{R}^{2T} f)(t) = -\nu f'(t) + \omega f(t) + \int_0^t r(t-s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2T, \quad (3.1)$$

с постоянными матрицами  $\nu = \text{diag}\{\nu_1, \nu_2\}$ ,  $\omega$  и гладкой матрицей-функцией  $r|_{0 \leq t \leq 2T}$  является расширенным оператором реакции некоторой системы  $\mathfrak{s}^T$ , если и только если выполнены условия:

1.  $\nu_1, \nu_2 > 0$ ,  $\omega_{12} = -\alpha\omega_{21}$  с каким-либо  $\alpha > 1$ ;
2.  $[r(t)]^{\text{tr}} = r(t)$ ,  $0 \leq t \leq 2T$ ;
3. оператор  $\mathcal{C}^T$ , действующий в  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  по правилу

$$(\mathcal{C}^T f)(t) := \nu f(t) + \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

является положительным изоморфизмом.

---

<sup>1</sup> Напомним, что система  $\mathfrak{s}^T$  определяется начально-краевой задачей (2.1)–(2.3) с гладкими коэффициентами, причем выполнены (1.4) и (1.5).

## Необходимость

Если существует система  $\mathfrak{s}^T$ , такая, что  $R^{2T} = \mathcal{R}^{2T}$ , то ее связывающий оператор есть  $C^T = \mathcal{C}^T$  и условия 1–3 выполнены: см. Предложение 4, Лемму 6 и Предложение 7.

## Достаточность (о доказательстве)

Проверка достаточности условий 1–3 конструктивна: по заданному  $\mathcal{R}^{2T}$  будет построена система  $\mathfrak{s}^T$ , оператор реакции которой совпадает с  $\mathcal{R}^{2T}$ . Построить систему (2.1)–(2.3) значит предъявить конкретные определяющие ее коэффициенты  $\rho$ ,  $\gamma$ ,  $A$ ,  $B$ . С учетом условия (1.5) эти коэффициенты задаются восемью параметрами (скалярными функциями)  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $a$ ,  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{22}$ . В то же время оператор  $R^{2T}$  определяется лишь тремя параметрами  $r_{11}$ ,  $r_{12}(=r_{21})$ ,  $r_{22}$  (плюс постоянные матрицы  $\nu$  и  $\omega$ ). В этой ситуации ожидать единственности системы  $\mathfrak{s}^T$  с заданным  $R^{2T}$  не приходится, и проблема состоит в том, чтобы описать *все* такие системы. Грубо говоря, построение системы сведется к «самосогласованному» выбору свободных пяти ( $5 = 8 - 3$ ) параметров и последующей проверке непротиворечивости и правильности выбора. Ориентиром при выборе служат свойства и соотношения между объектами системы  $\mathfrak{s}^T$ , установленные при ее изучении в Главе 2. Фактически же по данным (3.1) будет построена «медленная» система  $\mathfrak{s}_l^{T'}$  вида (2.31)–(2.33) с  $T' > T$ , а система  $\mathfrak{s}^T$  окажется подсистемой последней.

## 3.2. Система $\mathfrak{s}_l^{T'}$

### 3.2.1. Выбор параметров

Итак, в нашем распоряжении данные  $\nu$ ,  $\omega$ ,  $r|_{[0,2T]}$ , удовлетворяющие условиям 1–3 Теоремы 4.

**Шаг 1.** По  $\omega$  выберем какое-либо  $\alpha = \text{const} > 1$  так, чтобы выполнялось условие 1. На полуоси  $x \geq 0$  выберем произвольный промежуток  $[0, h]$ . Все дальнейшие рассуждения проводятся на этом промежутке.



**Шаг 2.** Выберем функции  $c_1, c_2 \in C^\infty[0, h]$  так, чтобы выполнялись соотношения  $0 < c_2(x) < c_1(x)$ ,  $0 \leq x \leq h$  (ср. с (1.4)) и равенства

$$\int_0^h \frac{ds}{c_1(s)} = T, \quad (3.3)$$

$$c_1(0) = \alpha c_2(0) \quad (3.4)$$

(ср. с (1.63)). Определим

$$\tau_i(x) := \int_0^x \frac{ds}{c_i(s)}, \quad T' := \tau_2(h);$$

пусть  $x_1(\tau)$ ,  $x_2(\tau)$  суть функции, обратные к  $\tau_1(x)$ ,  $\tau_2(x)$  и заданные на промежутках  $[0, T]$  и  $[0, T']$  соответственно. Отметим соотношения  $T' > T$ ,  $x_1(T) = x_2(T') = h$ , следующие из определений и условия (3.3).

**Шаг 3.** Выберем функции  $\rho_1, \rho_2 \in C^\infty[0, h]$ ,  $\rho_i > 0$  так, чтобы выполнялись равенства

$$\rho_i(0) = \frac{\nu_i}{c_i(0)}, \quad -\frac{c_i(0)}{2}(c_i \rho_i)_x \Big|_{x=0} = \omega_{ii}. \quad (3.5)$$

Эти равенства накладывают условия лишь на  $\rho_i(0)$  и  $\frac{d\rho_i}{dx}(0)$ , и такой выбор функций  $\rho_i$  очевидно возможен. Сами условия мотивированы соотношениями (1.62). Положим

$$\gamma_i(x) := \rho_i(x)c_i^2(x), \quad 0 \leq x \leq h.$$

**Шаг 4.** Введем функции

$$\pi_i^{T'}(\xi) := T' - \tau_i(x_2(\xi)), \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \xi \leq T'. \quad (3.6)$$

Выберем функцию  $l \in C^\infty[0, \pi_2^{T'}(T')]$  так, чтобы выполнялось равенство

$$l(0) = \frac{\alpha \omega_{21}}{(\alpha - 1)\nu_1} \quad (3.7)$$

(ср. с (1.80)).

К этому моменту динамической системе, которую мы строим, предписаны коэффициенты (матрицы)  $\rho$ ,  $\gamma$  и функция  $l$ , которая будет определять связь компонент медленных волн. Независимо от того, какими в дальнейшем окажутся оставшиеся коэффициенты  $A$  и  $B$ , оператор реакции системы заведомо будет иметь вид (2.11) с постоянными матрицами  $\nu$ ,  $\omega$ , *совпадающими* с одноименными матрицами из (3.1). Это совпадение обеспечено наложением условий (3.4)–(3.7).

**Шаг 5.** Здесь матрица-функция  $r$  из (3.1), заданная при  $0 \leq t \leq 2T$ , продолжается на больший промежуток  $0 \leq t \leq 2T'$ .

Скажем, что функция  $r|_{[0,2T']}$  является *эрмитово-положительным продолжением* функции  $r|_{[0,2T]}$ , если оператор

$$\left(\mathcal{C}^{T'} f\right)(t) := \nu f(t) + \int_0^{T'} \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T'-t-s} r(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T', \quad (3.8)$$

есть положительный изоморфизм в  $L_2([0, T']; \mathbb{R}^2)$  (как и  $\mathcal{C}^T$  в  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$ ). Приводимый ниже способ продолжения предложен в [7]; он использует вспомогательную *односкоростную* систему.

Односкоростной мы называем систему (1.1)–(1.3) с

$$\rho_i = \gamma_i = 1, \quad A = 0, \quad B^{\text{tr}} = B =: Q.$$

Все ее свойства определяются матрицей-функцией (*потенциалом*)  $Q|_{0 \leq x \leq T}$ . Для такой системы известна характеристика данных: гладкая симметрическая функция  $\tilde{r}|_{0 \leq t \leq 2T}$  является функцией отклика односкоростной системы в том и только в том случае, если оператор

$$f \mapsto f(t) + \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} \tilde{r}(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

является положительным изоморфизмом в  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$ . При этом потенциал  $Q|_{0 \leq x \leq T}$  однозначно восстанавливается по функции отклика с использованием

классических инструментов — уравнений типа Гельфанда–Левитана–Крейна: см. [5], [14].

Требуемое продолжение функции  $r$  строится следующим образом.

- Оператор  $\tilde{C}^T := \nu^{-\frac{1}{2}} \mathcal{C}^T \nu^{-\frac{1}{2}}$  имеет вид

$$(\tilde{C}^T f)(t) \stackrel{(3.2)}{=} f(t) + \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} \tilde{r}(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

(здесь  $\tilde{r} := \nu^{-\frac{1}{2}} r \nu^{-\frac{1}{2}}$ ) и, очевидно, является положительным изоморфизмом в  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$ . Следовательно,  $\tilde{r}|_{0 \leq x \leq 2T}$  есть функция отклика некоторой односкоростной системы, а  $\tilde{C}^T$  — ее связывающий оператор.

- Восстановим потенциал  $Q|_{0 \leq x \leq T}$  по  $\tilde{r}|_{0 \leq t \leq 2T}$ . Продолжим его с сохранением гладкости и симметричности на промежуток  $[0, T']$ . Продолжению  $Q|_{0 \leq x \leq T'}$  отвечает расширенная односкоростная система с функцией отклика  $\tilde{r}|_{0 \leq t \leq 2T'}$ , являющейся продолжением  $\tilde{r}|_{0 \leq t \leq 2T}$ , и связывающим оператором

$$(\tilde{C}^{T'} f)(t) = f(t) + \int_0^{T'} \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T'-t-s} \tilde{r}(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T'.$$

Последний, как и любой связывающий оператор, является положительным изоморфизмом в  $L_2([0, T']; \mathbb{R}^2)$ . Вместе с ним таковым же оказывается и оператор

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^{T'} f)(t) &:= (\nu^{\frac{1}{2}} \tilde{C}^{T'} \nu^{\frac{1}{2}} f)(t) \\ &= \nu f(t) + \int_0^{T'} \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T'-t-s} r(\eta) d\eta \right] f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T', \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $r(t) := \nu^{\frac{1}{2}} \tilde{r}(t) \nu^{\frac{1}{2}}$ ,  $0 \leq t \leq 2T'$ .

- Функция  $r|_{0 \leq t \leq 2T'}$  по построению оказывается продолжением функции  $r|_{0 \leq t \leq 2T}$ , удовлетворяющим условию эрмитовой положительности.

Легко понять, что указанным способом можно получить *все* гладкие эрмитово-положительные продолжения  $r$ .

Приведем операторное соотношение, связывающее  $\mathcal{C}^T$  и  $\mathcal{C}^{T'}$ . Эти операторы действуют в пространствах  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  и  $L_2([0, T']; \mathbb{R}^2)$  соответственно. Условимся рассматривать введенную в (1.52) операцию задержки как оператор из  $L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  в  $L_2([0, T']; \mathbb{R}^2)$ , действующий по правилу

$$(\mathcal{T}_{T'-T}^{T'} f)(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T' - T, \\ f(t - (T' - T)), & T' - T \leq t \leq T'. \end{cases} \quad (3.10)$$

Подпространство  $\text{Ran } \mathcal{T}_{T'-T}^{T'}$  состоит из управлений, аннулирующихся при  $0 \leq t < T' - T$ . Сопряженный  $(\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^* : L_2([0, T']; \mathbb{R}^2) \rightarrow L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$  действует по правилу

$$((\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^* f)(t) = f(t + (T' - T)), \quad 0 \leq t \leq T,$$

причем  $\text{Ran } (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^* = L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$ .

**Лемма 9.** *Справедливо соотношение*

$$\mathcal{C}^T = (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^* \mathcal{C}^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'}. \quad (3.11)$$

*Доказательство.* Пусть  $\widetilde{W}^T$  и  $\widetilde{W}^{T'}$  суть операторы управления односкоростных систем, которые использовались для продолжения  $r$ . Они действуют в пространствах  $L_2([0, x_1(T)]; \mathbb{R}^2)$  и  $L_2([0, x_1(T')]; \mathbb{R}^2)$  соответственно; условимся первое рассматривать как подпространство второго. При таком соглашении выполнено равенство  $\widetilde{W}^T = \widetilde{W}^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'}$ , которое является формой записи соотношения (1.51) для односкоростной системы с финальным моментом  $T'$  и промежуточным моментом  $s = T$ . Из равенства имеем:

$$\widetilde{C}^T = (\widetilde{W}^T)^* \widetilde{W}^T = (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^* (\widetilde{W}^{T'})^* \widetilde{W}^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'} = (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^* \widetilde{C}^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'}.$$

Сопоставляя начало с концом и умножая слева и справа на  $\nu^{\frac{1}{2}}$ , приходим к (3.11).  $\square$

К настоящему моменту для конструируемой двухскоростной системы  $\mathfrak{s}_l^{T'}$  выбраны матрицы-функции  $\rho, \gamma|_{0 \leq x \leq h}$ , функция  $l|_{0 \leq t \leq \pi_2^{T'}(T')}$  и продолжение  $r|_{0 \leq t \leq 2T'}$ . Этот набор определяется *восемью* параметрами (скалярными функциями)  $\rho_1, \rho_2, \gamma_1, \gamma_2, l$  и  $\{r_{11}, r_{12}, r_{22}\}|_{2T' \leq t \leq 2T'}$ . Поэтому можно ожидать, что свобода выбора параметров исчерпана и остальные элементы системы определяются уже однозначно.

### 3.2.2. Пространства, операторы, волны

**Пространства** Обозначим  $\mathcal{F}^{T'} := L_2([0, T']; \mathbb{R}^2)$ . Функция  $l$  определяет в  $\mathcal{F}^{T'}$  семейство подпространств

$$\left\{ f \in \mathcal{F}^{T'} \mid f|_{[0, T'-\xi]} = 0, f_1(t) = \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^t l(t-s)f_2(s) ds, \pi_1^{T'}(\xi) \leq t \leq \pi_2^{T'}(\xi) \right\} \\ =: \mathcal{F}_l^{T', \xi}, \quad 0 \leq \xi \leq T'; \quad \mathcal{F}_l^{T', 0} := \{0\}, \quad \mathcal{F}_l^{T', T'} =: \mathcal{F}_l^{T'} \quad (3.12)$$

(ср. с (2.28), (2.29)). Наибольшее из них  $\mathcal{F}_l^{T'}$  будем называть *внешним пространством*, а его элементы — *управлениями*.

Пространство  $L_{2,\rho}([0, h]; \mathbb{R}^2) =: \mathcal{H}^h$  назовем *внутренним* (напомним, что  $h = x_2(T') = x_1(T)$ ). Оно содержит семейство подпространств

$$\mathcal{H}^s := \{y \in \mathcal{H}^h \mid \text{supp } y \subset [0, s]\}, \quad 0 \leq s \leq h.$$

**Проекторы** Определим  $\mathcal{P}_l^{T', \xi}$  как (косой) проектор в  $\mathcal{F}^{T'}$  на  $\mathcal{F}_l^{T', \xi}$  параллельно подпространству  $(\mathcal{C}^{T'})^{-1}[\mathcal{F}^{T'} \ominus \mathcal{F}_l^{T', \xi}]$ . Эквивалентным является определение

$$\mathcal{P}_l^{T', \xi} := e_l^{T', \xi} \left[ \left( e_l^{T', \xi} \right)^* \mathcal{C}^{T'} e_l^{T', \xi} \right]^{-1} \left( e_l^{T', \xi} \right)^* \mathcal{C}^{T'}, \quad 0 \leq \xi \leq T',$$

(ср. с (2.57)), в котором  $e_l^{T', \xi} : \mathcal{F}_l^{T', \xi} \rightarrow \mathcal{F}^{T'}$  есть оператор вложения. Определение корректно, поскольку  $\mathcal{C}^{T'}$  и все его блоки  $\left( e_l^{T', \xi} \right)^* \mathcal{C}^{T'} e_l^{T', \xi}$  суть изоморфизмы в соответствующих  $\mathcal{F}_l^{T', \xi}$ . Согласно Предложению 10 (см. также Замечание 1!), для оператора  $\mathcal{P}_l^{T', \xi}$  можно сформулировать следующее

**Предложение 12.** *Справедливо представление*

$$\left(\mathcal{P}_l^{T',\xi} f\right)(t) = f^{T',\xi} + \int_0^{\pi_2^{T'}(\xi)} p^{T'}(t, s, \xi) f(s) ds, \quad (3.13)$$

где

$$f^{T',\xi} := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi_1^{T'}(\xi), \\ \begin{pmatrix} \Lambda^\xi f_2(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, & \pi_1^{T'}(\xi) \leq t \leq \pi_2^{T'}(\xi), \\ f(t), & \pi_2^{T'}(\xi) < t \leq T', \end{cases}$$

матричное ядро  $p^{T'}(t, s, \xi)$  определено в кубе  $[0, T']^3$ , имеет носитель в

$$\Omega^{T'} = \left\{ (t, s, \xi) \in [0, T']^3 \mid \xi \in [0, T'], (t, s) \in \left[ \pi_1^{T'}(\xi), T' \right] \times \left[ 0, \pi_2^{T'}(\xi) \right] \right\}$$

и является гладким в кубе  $[0, T']^3$  вне  $\partial\Omega^{T'}$  и плоскости  $t = s$ . Для каждого  $\xi \in [0, T']$  и  $s \in [0, \pi_2^{T'}(\xi)]$  столбцы матрицы  $p^{T'}(\cdot, s, \xi)$  являются элементами пространства  $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$ . Для каждого  $\xi \in [0, T']$  амплитуды скачков  $p_{ij}^{T'}(\langle \pi_i^{T'}(\xi) \rangle, s, \xi)$ ,  $i, j = 1, 2$ , суть кусочно-гладкие функции на отрезке  $[0, T']$  вне точек  $s = \pi_i^{T'}(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} p_{11}^{T'}(\langle \pi_2^{T'}(\xi) \rangle, \pi_1^{T'}(\xi), \xi) &= p_{12}^{T'}(\langle \pi_2^{T'}(\xi) \rangle, \pi_2^{T'}(\xi), \xi) \\ &= p_{22}^{T'}(\langle \pi_1^{T'}(\xi) \rangle, \pi_2^{T'}(\xi), \xi) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Помимо этого, выполнены равенства

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\mathcal{P}_l^{T',\xi} f\right)_i \langle \pi_i^{T'}(\xi) \rangle = f_i(T'), \quad i = 1, 2 \quad (3.15)$$

(ср. с (2.65)). Вывод имеется в работе [7] (Лемма 8); отметим лишь, что он использует специфическое свойство ядра интегральной части оператора  $\mathcal{C}^{T'}$ : оно аннулируется при  $t = T'$  или  $s = T'$  (см. (3.2) для  $T = T'$ ).

**Волны** Обозначим

$$\mu(x) := \begin{pmatrix} \mu_1(x) & 0 \\ 0 & \mu_2(x) \end{pmatrix}, \quad \mu_i(x) := \left( \frac{\rho_i(0)\gamma_i(0)}{\rho_i(x)\gamma_i(x)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Введем плотный в  $\mathcal{F}_l^{T'}$  линейал гладких управлений

$$\mathcal{M}_l^{T'} := \mathcal{F}_l^{T'} \cap \{f \in C^\infty([0, T']; \mathbb{R}^2) \mid \text{supp } f \subset (0, T']\}, \quad (3.16)$$

аннулирующих в окрестности  $t = 0$ .

Определим оператор  $\mathcal{W}_l^{T'} : \mathcal{F}_l^{T'} \rightarrow \mathcal{H}^h$ ,  $\text{Dom } \mathcal{W}_l^{T'} = \mathcal{M}_l^{T'}$ ,

$$\left(\mathcal{W}_l^{T'} f\right)(x) := \mu(x) \begin{pmatrix} \left(\mathcal{P}_l^{T', \tau_2(x)} f\right)_1 \langle T' - \tau_1(x) \rangle \\ \left(\mathcal{P}_l^{T', \tau_2(x)} f\right)_2 \langle T' - \tau_2(x) \rangle \end{pmatrix}, \quad 0 < x < h \quad (3.17)$$

(ср. с (2.70)). Образы  $u^f(\cdot, T') := \mathcal{W}_l^{T'} f$  будем называть *волнами*.

Ключевым для дальнейшего оказывается следующий результат.

**Предложение 13.** При  $f \in \mathcal{M}_l^{T'}$  справедливо представление

$$\begin{aligned} u^f(x, T') &= (\mathcal{W}_l^{T'} f)(x) = \mu(x) \begin{pmatrix} f_1(T' - \tau_1(x)) \\ f_2(T' - \tau_2(x)) \end{pmatrix} \\ &+ \int_0^{T' - \tau_1(x)} w^{T'}(x, t) f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq h, \end{aligned} \quad (3.18)$$

с ядром  $w^{T'}$ , гладким в  $[0, h] \times [0, T']$  вне кривых  $t = T' - \tau_i(x)$ , аннулирующимся при  $t > T' - \tau_1(x)$  и таким, что

$$w^{T'}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T'. \quad (3.19)$$

Помимо этого,

$$w_{11}^{T'}(x, t) = \mu_1(x) p_{11}^{T', \tau_2(x)}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, t), \quad (3.20)$$

$$w_{12}^{T'}(x, t) = \mu_1(x) \left( p_{12}^{T', \tau_2(x)}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, t) - l_x(T' - \tau_1(x) - t) \right), \quad (3.21)$$

$$w_{21}^{T'}(x, t) = \mu_2(x) p_{21}^{T', \tau_2(x)}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, t), \quad (3.22)$$

$$w_{22}^{T'}(x, t) = \mu_2(x) p_{22}^{T', \tau_2(x)}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, t), \quad (3.23)$$

где

$$l_x(t) := \begin{cases} l(t), & 0 \leq t \leq \tau_2(x) - \tau_1(x), \\ 0, & t > \tau_2(x) - \tau_1(x). \end{cases}$$

Кроме того,

1. элемент  $w_{11}^{T'}(x, t)$  является непрерывным при  $t = T' - \tau_2(x)$ ;
2. элемент  $w_{22}^{T'}(x, t)$  аннулируется при  $t = T' - \tau_1(x)$ ;
3. справедливо равенство:

$$w_{12}^{T'}(x, T' - \tau_1(x) - 0) = -\mu_1(x)l(+0).$$

Представление (3.18)<sup>2</sup> устанавливается на следующем пути. Представление (3.13) подставляется в правую часть (3.17). Входящие в нее разрывы подсчитываются с учетом расположения носителей ядер  $p^{T'}$  и их возможных разрывов. Простые выкладки приводят к представлению (3.18) с ядром  $w^{T'}$ , имеющим элементы, заданные формулами (3.20)–(3.23). Из вида этих выражений усматривается характер гладкости  $w^{T'}$ . Свойства 1–3 также следуют из формул (3.20)–(3.23) и соотношения (3.14).

Свойство (3.19) есть следствие равенств (3.15). Из них и определения (3.17) имеем:

$$u^f(0, T') = f(T'), \quad (3.24)$$

что с необходимостью влечет  $w^{T'}(0, t) = 0$ .

К настоящему моменту можно сказать, что система  $\mathfrak{s}_t^{T'}$  определена, так как, имея в нашем распоряжении матрицу  $w^{T'}$ , заданную в  $[0, h] \times [0, T']$ , мы можем вычислить матрицы

$$\beta^i(x) := -w^{T'}(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle), \quad 0 < x < h, \quad (3.25)$$

$$\mathfrak{x}^i(x) := \left[ w_t^{T'}(x, t) \right]_{t=T'-\tau_i(x)-0}^{t=T'-\tau_i(x)+0}, \quad 0 < x < h, \quad (3.26)$$

а затем по формулам (1.34)–(1.38) вычислить  $A$  и  $B$  на интервале  $[0, h]$ .

В последующих разделах определяются остальные атрибуты системы, и доказывається, что построенная система обладает оператором реакции, совпадающим с  $\mathcal{R}^{2T}$ .

---

<sup>2</sup> Его полезно сопоставить с (2.5).



### 3.2.3. Сопряженный и обратный к $\mathcal{W}_i^{T'}$ .

Как видно из представления (3.18), оператор  $\mathcal{W}_i^{T'}$  ограничен. Его расширение по непрерывности с  $\mathcal{M}_i^{T'}$  на  $\mathcal{F}_i^{T'}$  имеет тот же вид, и мы сохраняем за ним обозначение  $\mathcal{W}_i^{T'}$ . Образы при действии расширения мы тоже называем волнами.

В силу гладкости входящих в (3.18) функций  $\mu_i$ ,  $\tau_i$  и характера гладкости ядра  $w^{T'}$ , оператор  $\mathcal{W}_i^{T'}$  сохраняет гладкость:  $\mathcal{W}_i^{T'} \mathcal{M}_i^{T'} \subset C^\infty([0, h]; \mathbb{R}^2)$ . Ниже это свойство будет уточнено.

### Сопряженный оператор

**Соглашение 4.** Элементы внутреннего пространства  $\mathcal{H}^h$  определены при  $x \in [0, h]$ . Определим функции  $g \in \mathcal{H}^h$  при  $x > h$  нулем:  $g(x) = 0$ .

Например, с учетом Соглашения 4 для  $g \in \mathcal{H}^h$

$$g(x_1(T' - t)) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T' - T, \\ g(x_1(T' - t)), & T' - T \leq t \leq T'. \end{cases}$$

В обозначении

$$\widehat{g}(t) := \begin{pmatrix} g_1(x_1(T' - t)) \\ g_2(x_2(T' - t)) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T', \quad (3.27)$$

первая компонента понимается с учетом Соглашения 4.

**Предложение 14.** Оператор  $(\mathcal{W}_i^{T'})^* : \mathcal{H}^h \rightarrow \mathcal{F}_i^{T'}$  действует на элементы  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  по правилу

$$\left( (\mathcal{W}_i^{T'})^* y \right) (t) = \mu^*(t) \widehat{y}(t) + \int_0^{\min(h, x_1(T' - t))} w_*^{T'}(t, x) y(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T', \quad (3.28)$$

где

$$\mu^* = \text{diag}\{\mu_1^*, \mu_2^*\}, \quad \mu_i^*(t) := ((\rho_i(0)\gamma_i(0)\rho_i(x_i(T' - t))\gamma_i(x_i(T' - t))))^{\frac{1}{4}},$$

а ядро  $w_*^{T'}$  является гладким в  $[0, T'] \times [0, h]$  вне кривых  $t = T' - \tau_i(x)$  и аннулируется при  $t > T' - \tau_1(x)$ .

Для доказательства правая часть (3.18) подставляется в произведение  $(\mathcal{W}_l^{T'} f, y)_{\mathcal{H}^h}$ . Затем, заменой порядка интегрирования, оно приводится к форме  $(f, (\mathcal{W}_l^{T'})^* y)_{\mathcal{F}^{T'}}$ .

**Сплетающее свойство** Во внешнем пространстве  $\mathcal{H}^h$  введем проекторы  $P^s$  на подпространства  $\mathcal{H}^s$ . Действие  $P^s$  сводится к срезке  $y \in \mathcal{H}^h$  на промежуток  $[0, s]$ . Следующий результат полезно сопоставить с определением (2.55).

**Лемма 10.** *Справедливо соотношение*

$$\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{P}_l^{T', \xi} = P^{x_2(\xi)} \mathcal{W}_l^{T'}, \quad 0 \leq \xi \leq T'. \quad (3.29)$$

*Доказательство.* Выберем  $f \in \mathcal{M}_l^{T'}$ ; пусть  $\xi, \tau \in (0, T')$ . Проекторы  $\mathcal{P}_l^{T', \xi}$  расширяются с ростом  $\xi$ , поэтому

$$\mathcal{P}_l^{T', \xi} \mathcal{P}_l^{T', \tau} = \mathcal{P}_l^{T', \tau} \quad \text{при } \tau < \xi,$$

$$\mathcal{P}_l^{T', \xi} \mathcal{P}_l^{T', \tau} = \mathcal{P}_l^{T', \xi} \quad \text{при } \tau > \xi.$$

При  $\tau < \xi$  и  $x = x_2(\tau)$  из определения (3.17) имеем:

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{P}_l^{T', \xi} f)(x_2(\tau)) &= \mu(x_2(\tau)) \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_l^{T', \tau} \mathcal{P}_l^{T', \xi} f)_1 \langle \pi_2^{T'}(\tau) \rangle \\ (\mathcal{P}_l^{T', \tau} \mathcal{P}_l^{T', \xi} f)_2 \langle \pi_1^{T'}(\tau) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \mu(x_2(\tau)) \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_l^{T', \tau} f)_1 \langle \pi_2^{T'}(\tau) \rangle \\ (\mathcal{P}_l^{T', \tau} f)_2 \langle \pi_1^{T'}(\tau) \rangle \end{pmatrix} = (W_l^{T'} f)(x_2(\tau)). \end{aligned}$$

При  $\tau > \xi$

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{P}_l^{T', \xi} f)(x_2(\tau)) &= \mu(x_2(\tau)) \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_l^{T', \tau} \mathcal{P}_l^{T', \xi} f)_1 \langle \pi_2^{T'}(\tau) \rangle \\ (\mathcal{P}_l^{T', \tau} \mathcal{P}_l^{T', \xi} f)_2 \langle \pi_1^{T'}(\tau) \rangle \end{pmatrix} \\ &= \mu(x_2(\tau)) \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_l^{T', \xi} f)_1 \langle \pi_2^{T'}(\tau) \rangle \\ (\mathcal{P}_l^{T', \xi} f)_2 \langle \pi_1^{T'}(\tau) \rangle \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Последнее равенство нулю следует из того, что управление  $\mathcal{P}_l^{T',\xi} f$  не имеет разрывов при  $t = \pi_i^{T'}(\tau)$  (имеет разрывы лишь при  $t = \pi_i^{T'}(\xi)$ ).

Отсюда заключаем:

$$(\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{P}_l^{T',\xi} f)(x) = \begin{cases} (\mathcal{W}_l^{T'} f)(x), & x < x_2(\xi), \\ 0, & x > x_2(\xi), \end{cases} = (P^{x_2(\xi)} \mathcal{W}_l^{T'} f)(x),$$

при  $0 < x < x_2(T') = h$ . Поскольку используемые  $f \in \mathcal{M}_l^{T'}$  плотны в  $\mathcal{F}_l^{T'}$ , приходим к (3.29).  $\square$

**Связь с  $\mathcal{C}_l^{T'}$**  Пусть  $e_l^{T'} : \mathcal{F}_l^{T'} \rightarrow \mathcal{F}^{T'}$  есть вложение, так что  $(e_l^{T'})^* e_l^{T'} = \mathbb{I}_{\mathcal{F}_l^{T'}}$ . Оператор  $\mathcal{C}_l^{T'} : \mathcal{F}_l^{T'} \rightarrow \mathcal{F}_l^{T'}$ ,

$$\mathcal{C}_l^{T'} := (e_l^{T'})^* \mathcal{C}^{T'} e_l^{T'} \stackrel{(3.9)}{=} \nu \mathbb{I}_{\mathcal{F}_l^{T'}} + I_l^{T'}$$

есть блок  $\mathcal{C}^{T'}$  в (под)пространстве  $\mathcal{F}_l^{T'}$ . Здесь  $I_l^{T'}$  — компактный интегральный оператор. Поскольку  $\mathcal{C}^{T'}$  — изоморфизм, этот блок является изоморфизмом в  $\mathcal{F}_l^{T'}$ . Из последнего равенства усматривается представление

$$(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1} = \nu^{-1} \mathbb{I}_{\mathcal{F}_l^{T'}} + J_l^{T'} \quad (3.30)$$

с компактным в  $\mathcal{F}_l^{T'}$  интегральным оператором

$$(J_l^{T'} f)(t) = \int_0^{T'} j^{T'}(t, s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T',$$

с кусочно-гладким в  $[0, T']^2$  ядром  $j^{T'}$ .

**Лемма 11.** *Справедливо равенство*

$$\mathcal{C}_l^{T'} = (\mathcal{W}_l^{T'})^* \mathcal{W}_l^{T'}. \quad (3.31)$$

*Доказательство. 1.* Обозначим  $A := \mathcal{W}_l^{T'} (\mathcal{C}_l^{T'})^{-1} (\mathcal{W}_l^{T'})^*$  и установим соотношение

$$AP^x = P^x A, \quad 0 < x < h. \quad (3.32)$$

Второе равенство в (2.56) (с заменой  $T$  на  $T'$ ) влечет  $(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1}(\mathcal{P}_l^{T',\xi})^* = \mathcal{P}_l^{T',\xi}(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1}$ . Далее имеем равенства:

$$\begin{aligned} AP^x &= \mathcal{W}_l^{T'}(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1}(\mathcal{W}_l^{T'})^* P^x \stackrel{(3.29)}{=} \mathcal{W}_l^{T'}(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1}(\mathcal{P}^{T',\tau_2(x)})^*(\mathcal{W}_l^{T'})^* \\ &= \mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{P}_l^{T',\tau_2(x)}(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1}(\mathcal{W}_l^{T'})^* \stackrel{(3.29)}{=} P^x \mathcal{W}_l^{T'}(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1}(\mathcal{W}_l^{T'})^* = P^x A. \end{aligned}$$

2. Из (3.18), (3.28) и (3.30) легко следует представление

$$A = \mathbb{I}_{\mathcal{H}^h} + B$$

с компактным интегральным оператором  $B$ . Из последнего, в силу (3.32), имеем  $BP^x = P^x B$ ,  $0 < x < h$ . Оператор, коммутирующий с проекторами-срезками, является оператором умножения на функцию. Для компактного оператора такое возможно лишь при  $B = \mathbb{O}_{\mathcal{H}^h}$ . Отсюда  $A = \mathbb{I}_{\mathcal{H}^h}$ .

3. Связанное с правой частью (3.18) отображение

$$f \mapsto \mu \begin{pmatrix} f_1(T' - \tau_1(\cdot)) \\ f_2(T' - \tau_2(\cdot)) \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом из  $\mathcal{F}_l^{T'}$  на  $\mathcal{H}^h$ , а интегральное слагаемое в ней отвечает компактному оператору. Значит,  $\mathcal{W}_l^{T'}$  есть фредгольмов оператор. Поэтому  $(\mathcal{W}_l^{T'})^*$  есть фредгольмов оператор из  $\mathcal{H}^h$  в  $\mathcal{F}_l^{T'}$ .

Из равенства  $\mathcal{W}_l^{T'}(\mathcal{C}_l^{T'})^{-1}(\mathcal{W}_l^{T'})^* = \mathbb{I}_{\mathcal{H}^h}$  видно, что оператор  $(\mathcal{W}_l^{T'})^*$  инъективен. Следовательно,  $(\mathcal{W}_l^{T'})^*$  есть изоморфизм из  $\mathcal{H}^h$  на  $\mathcal{F}_l^{T'}$ . Соответственно,  $\mathcal{W}_l^{T'}$  оказывается изоморфизмом из  $\mathcal{F}_l^{T'}$  на  $\mathcal{H}^h$ . Переходя в последнем равенстве к обратным операторам, приходим к (3.31).  $\square$

Из установленной в ходе доказательства изоморфности оператора  $\mathcal{W}_l^{T'}$  и равенства (3.29) легко получить соотношение

$$\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{F}_l^{T',\xi} = \mathcal{H}^{x_2(\xi)}, \quad 0 \leq \xi \leq T. \quad (3.33)$$

**Обратный оператор** Установив обратимость  $\mathcal{W}_l^{T'}$ , можно получить представление для  $(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}$ .

**Предложение 15.** Оператор  $(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} : \mathcal{H}^h \rightarrow \mathcal{F}_l^{T'}$  действует на элементы  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  по правилу

$$\left( (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right) (t) = \mu^\#(t) \widehat{y}(t) + \int_{x_2(T'-t)}^h w_{-1}^{T'}(t, x) y(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T', \quad (3.34)$$

где  $\mu^\# = \text{diag}\{\mu_1^\#, \mu_2^\#\}$ ,  $\mu_i^\#(t) := \left( \frac{\rho_i(0)\gamma_i(0)}{\rho_i(x_i(T'-t))\gamma_i(x_i(T'-t))} \right)^{-\frac{1}{4}} = \mu_i^{-1}(x_i(T'-t))$ , а ядро  $w_{-1}^{T'}$  является гладким в  $[0, T'] \times [0, h]$  вне кривых  $t = T' - \tau_i(x)$  и аннулируется при  $x < x_2(T' - t)$ .

*Доказательство.* Будем искать представление для  $(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}$  в виде правой части (3.34) с некоторым ядром  $w_{-1}^{T'}$ , определенным в прямоугольнике  $[0, T'] \times [0, h]$  и аннулирующимся при  $x < x_2(T' - t)$ . На время доказательства обозначим ядро  $w_{-1}^{T'} =: v$ .

Справедливы соотношения

$$\left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} \mathcal{W}_l^{T'} = \mathbb{I}_{\mathcal{F}_l^{T'}}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{W}_l^{T'} \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} = \mathbb{I}_{\mathcal{H}^h}. \quad (3.36)$$

Для любого  $x_0 \in [0, h]$  распределения  $\begin{pmatrix} \delta(x - x_0) \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ \delta(x - x_0) \end{pmatrix}$  являются пределами последовательностей функций из  $\mathcal{H}^h$ . Запишем соотношение (3.36) для семейства распределений

$$y_0(x) = \begin{pmatrix} \delta(x - x_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 \in [0, h].$$

Учитывая представление (3.34), имеем

$$\left( \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y_0 \right) (t) = g_0(t) + \int_{x_2(T'-t)}^h v(t, s) \begin{pmatrix} \delta(s - x_0) \\ 0 \end{pmatrix} ds,$$

где

$$g_0(t) := \begin{pmatrix} \mu_1^\sharp(t) \delta(x_1(T' - t) - x_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим  $f_0 := (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y_0$ , тогда

$$f_0(t) = g_0(t) + \int_{x_2(T'-t)}^h \begin{pmatrix} v_{11}(t, s) \delta(s - x_0) \\ v_{21}(t, s) \delta(s - x_0) \end{pmatrix} ds = g_0(t) + v_0^{\mathbf{I}}(t), \quad (3.37)$$

где

$$v_0^{\mathbf{I}}(t) := \begin{pmatrix} v_{11}(t, x_0) \\ v_{21}(t, x_0) \end{pmatrix}.$$

Далее применяем  $\mathcal{W}_l^{T'}$  к обеим частям равенства (3.37). Рассмотрим, как действует  $\mathcal{W}_l^{T'}$  на слагаемое  $g_0(t)$ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_l^{T'} g_0)(x) &= y_0(x) + \int_0^{T'-\tau_1(x)} w^{T'}(x, s) \begin{pmatrix} \mu_1^\sharp(s) \delta(x_1(T' - s) - x_0) \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= y_0(x) + \int_0^{T'-\tau_1(x)} \mu_1^\sharp(s) \begin{pmatrix} w_{11}^{T'}(x, s) \delta(x_1(T' - s) - x_0) \\ w_{21}^{T'}(x, s) \delta(x_1(T' - s) - x_0) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

После замены переменных в интеграле  $k := x_1(T' - s)$  имеем

$$\begin{aligned} &(\mathcal{W}_l^{T'} g_0)(x) = y_0(x) \\ &+ \int_x^{x_1(T')} \mu_1^\sharp(T' - \tau_1(k)) \tau_1'(k) \begin{pmatrix} w_{11}^{T'}(x, T' - \tau_1(k)) \delta(k - x_0) \\ w_{21}^{T'}(x, T' - \tau_1(k)) \delta(k - x_0) \end{pmatrix} dk. \end{aligned}$$

С учетом того, что матрица-функция  $w^{T'}$  аннулируется при  $x > x_1(T' - t)$ , имеем:

$$(\mathcal{W}_l^{T'} g_0)(x) = y_0(x) + \frac{\tau_1'(x_0)}{\mu_1(x_0)} \begin{pmatrix} w_{11}^{T'}(x, T' - \tau_1(x_0)) \\ w_{21}^{T'}(x, T' - \tau_1(x_0)) \end{pmatrix}.$$

Окончательно, из (3.36) следует

$$\mu(x) \begin{pmatrix} v_{11}(T' - \tau_1(x), x_0) \\ v_{21}(T' - \tau_2(x), x_0) \end{pmatrix} + \int_0^{T'-\tau_1(x)} w^{T'}(x, s) v^{\mathbf{I}}(s, x_0) ds$$

$$= -\frac{\tau_1'(x_0)}{\mu_1(x_0)} \left( w^{T'} \right)^{\mathbf{I}} (x, T' - \tau_1(x_0)), \quad (3.38)$$

с правой частью, которая при каждом значении параметра  $x_0 \in [0, h]$  принадлежит пространству  $\mathcal{H}^{x_0}$ . Поскольку  $\mathcal{W}_l^{T'} : \mathcal{F}_l^{T', \tau_2(x_0)} \rightarrow \mathcal{H}^{x_0}$  — изоморфизм, то уравнение (3.38) разрешимо относительно  $v^{\mathbf{I}}(\cdot, x_0) \in \mathcal{F}_l^{T', \tau_2(x_0)}$ . Отсюда, в частности, следует связь между компонентами:

$$v_{11}(t, x) = \int_{T' - \tau_2(x)}^t l(t - s) v_{21}(s, x) ds, \quad t \in [T' - \tau_2(x), T' - \tau_1(x)].$$

Анализируя возможные разрывы правой часть равенства (3.38), покажем, что вектор-функция  $v^{\mathbf{I}}(t, x)$  может иметь разрывы только при  $t = T' - \tau_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ .

В силу Леммы 13, правая часть (3.38) является кусочно-гладкой с возможными скачками при  $x = x_0$  и  $x = x_2(\tau_1(x_0))$ , причем при  $x > x_0$  она аннулируется. Заметим, что первая компонента правой части (3.38) непрерывна при  $x = x_2(\tau_1(x_0))$  и может иметь скачок лишь при  $x = x_0$ , в то время как вторая компонента может иметь скачки при  $x = x_0$  и  $x = x_2(\tau_1(x_0))$ . Из непрерывности интегрального слагаемого в левой части (3.38) следует, что компонента  $v_{11}(t, x)$  может иметь скачок при  $t = T' - \tau_1(x)$ , а компонента  $v_{21}(t, x)$  — при  $t = T' - \tau_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ .

Отметим, что, хотя функция  $w_{11}^{T'}(x, T' - \tau_1(x_0))$  имеет скачок производной при  $x = x_2(\tau_1(x_0))$ , это не ведет к скачку производных функции  $v_{11}(t, x)$  при  $t = T' - \tau_1(x_2(\tau_1(x_0)))$ . Дело в том, что если продифференцировать (3.38), то скачок производной  $(w_{11}^{T'})'_x(x, T' - \tau_1(x_0))$  должен компенсироваться соответствующим скачком производной интегрального слагаемого. Действительно, если предположить, что  $v_{11}(t, x)$  не является гладкой при  $t = T' - \tau_1(x_2(\tau_1(x_0)))$ , то из этого бы следовало, что  $w_{11}^{T'}(x, T' - \tau_1(x_0))$  не является гладкой при  $x = x_2(\tau_1(x_2(\tau_1(x_0))))$ , что противоречит Лемме 13. С другой стороны, компонента  $v_{11}(x, t)$  может иметь разрывы производных при  $t = T' - \tau_2(x)$ .

Аналогично, из соотношения (3.36) для семейства распределений

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \delta(x - x_0) \end{pmatrix}, \quad x_0 \in [0, h],$$

следует уравнение

$$\begin{aligned} \mu(x) \begin{pmatrix} v_{12}(T' - \tau_1(x), x_0) \\ v_{22}(T' - \tau_2(x), x_0) \end{pmatrix} + \int_0^{T' - \tau_1(x)} w^{T'}(x, s) v^{\mathbf{II}}(s, x_0) ds \\ = -\frac{\tau_2'(x_0)}{\mu_2(x_0)} \left( w^{T'} \right)^{\mathbf{II}}(x, T' - \tau_2(x_0)), \end{aligned} \quad (3.39)$$

которое разрешимо при любом  $x_0 \in [0, h]$  относительно  $v^{\mathbf{II}}(\cdot, x_0) \in \mathcal{F}_l^{T', \tau_2(x_0)}$  со связанными компонентами:

$$v_{12}(t, x) = \int_0^t l(t - s) v_{22}(s, x) ds, \quad t \in [T' - \tau_2(x), T' - \tau_1(x)].$$

В силу Леммы 13, правая часть (3.39) является кусочно-гладкой с возможными скачками при  $x = x_0$  и  $x = x_1(\tau_2(x_0))$  (при условии  $x_0 < x_2(\tau_1(h))$ ). Из этого следует, что компонента  $v_{22}(t, x)$  имеет возможные скачки при  $t = T' - \tau_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , а  $v_{12}(t, x)$  имеет возможные скачки при  $t = T' - \tau_1(x)$  и  $t = T' - \tau_2(x_1(\tau_2(x)))$ . Но если функция  $v_{12}(t, x)$  не является гладкой при  $t = T' - \tau_2(x_1(\tau_2(x)))$ , то из этого следует, что функция  $w_{12}^{T'}(x, T' - \tau_2(x_0))$  не является гладкой при  $x = x_1(\tau_2(x_1(\tau_2(x_0))))$ , что противоречит Лемме 13. С другой стороны,  $v_{12}(t, x)$  может иметь скачки производных при  $t = T' - \tau_2(x)$ .  $\square$

### 3.2.4. Оператор $L$

Здесь вводится оператор, который определяет эволюцию конструируемой динамической системы.

**Линеалы** Во внешнем пространстве  $\mathcal{F}_l^{T'}$  введем семейство гладких линеалов

$$\mathcal{M}_l^{T', \xi} := \mathcal{M}_l^{T'} \cap \mathcal{F}_l^{T', \xi}, \quad \mathcal{M}_{l,0}^{T', \xi} := \{f \in \mathcal{M}_l^{T', \xi} \mid f(T') = 0\}; \quad 0 \leq \xi \leq T',$$



и отметим, что

$$\mathcal{M}_l^{T',0} = \{0\}, \quad \mathcal{M}_l^{T',T'} = \mathcal{M}_l^{T'} = \cup_{0 < \xi < T'} \mathcal{M}_l^{T',\xi}.$$

Каждый из линеалов плотен в содержащем его подпространстве  $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$ . Поскольку связь между компонентами управлений, определяющая принадлежность к  $\mathcal{F}_l^{T',\xi}$ , имеет вид свертки, линеалы оказываются инвариантными относительно дифференцирования, из чего легко следует

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathcal{M}_l^{T',\xi} = \mathcal{M}_l^{T',\xi}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

По той же причине имеем:

$$\mathcal{T}_s^{T'} \mathcal{F}_l^{T',\xi} \subset \mathcal{F}_l^{T',\xi}, \quad \mathcal{T}_s^{T'} \mathcal{M}_l^{T',\xi} \subset \mathcal{M}_l^{T',\xi}; \quad 0 \leq s < \xi \leq T'. \quad (3.41)$$

Во внутреннем пространстве  $\mathcal{H}^h$  определим гладкие линеалы

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^s &:= \{y \in C^\infty([0, h]; \mathbb{R}^2) \mid \text{supp } y \subset [0, s]\}, \\ \mathcal{N}_0^s &:= \{y \in \mathcal{N}^s \mid y(0) = 0\}; \quad 0 \leq s \leq h, \end{aligned} \quad (3.42)$$

и отметим, что  $\mathcal{N}^h = \cup_{0 < s < h} \mathcal{N}^s$ . Каждый из линеалов плотен в содержащем его подпространстве  $\mathcal{H}^s$ .

**Лемма 12.** *Справедливы равенства*

$$\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{M}_l^{T',\xi} = \mathcal{N}^{x_2(\xi)}, \quad \mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{M}_{l,0}^{T',\xi} = \mathcal{N}_0^{x_2(\xi)}; \quad 0 \leq \xi \leq T'. \quad (3.43)$$

*Доказательство. 1.* Включения

$$\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{M}_l^{T',\xi} \subset \mathcal{N}^{x_2(\xi)}, \quad \mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{M}_{l,0}^{T',\xi} \subset \mathcal{N}_0^{x_2(\xi)}$$

следуют из вида правой части (3.18) и характера гладкости ядра  $w^{T'}$  в ней.

**2.** Пусть  $y \in \mathcal{N}^{x_2(\xi)}$ ,  $\xi \in (0, T']$ . В силу (3.33) существует единственное  $f \in \mathcal{F}_l^{T',\xi}$ , такое что  $\mathcal{W}_l^{T'} f = y$ . Покажем, что  $f \in \mathcal{M}_l^{T',\xi}$ .

Представим  $\mathcal{W}_l^{T'} f = \Theta f + If$ , где  $\Theta f$  и  $If$  суть слагаемые в (3.18) (так что  $I$  — интегральный оператор). Как легко видеть,  $IC^k([0, T']; \mathbb{R}^2) \subset$

$C^{k+1}([0, h]; \mathbb{R}^2)$ ,  $k = -1, 0, 1, 2, \dots$ , где  $C^{-1}([0, T']; \mathbb{R}^2) := L_2([0, T']; \mathbb{R}^2)$ ,  $C^0([0, T']; \mathbb{R}^2) := C([0, T']; \mathbb{R}^2)$ .

Представим  $\Theta f = y - If$ . Поскольку элемент  $y$  гладкий и  $If \in C^0([0, h]; \mathbb{R}^2)$ , имеем  $\Theta f \in C^0([0, h]; \mathbb{R}^2)$ . Для компонент управления  $f$  это влечет  $f_1|_{[\pi_2^{T'}(\xi), T']} \in C[\pi_2^{T'}(\xi), T']$ ,  $f_2|_{[\pi_1^{T'}(\xi), T']} \in C[\pi_1^{T'}(\xi), T']$ . Из связи компонент при  $t \in [\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)]$  следует  $f_1|_{[\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)]} \in C[\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)]$ . Поэтому возможные разрывы  $f_1$  и  $f_2$  могут иметь место только при  $t = \pi_2^{T'}(\xi)$  и  $t = \pi_1^{T'}(\xi)$  соответственно. Однако как видно из (3.18), их наличие привело бы к разрывам компонент элемента  $y$  в точке  $x = x_2(\xi)$ , что невозможно по его гладкости. Значит, разрывов нет. Таким образом, улучшена гладкость: из первоначального  $f \in \mathcal{F}_i^{T', \xi}$  следовало  $f \in \mathcal{F}_i^{T', \xi} \cap C^0([0, T']; \mathbb{R}^2)$ .

Рассуждая вполне аналогично, можно установить кусочную  $C^1$ -гладкость функции  $f$ , а затем исключить разрывы производных при  $t = \pi_i^{T'}(\xi)$  и прийти к  $f \in \mathcal{F}_i^{T', \xi} \cap C^1([0, T']; \mathbb{R}^2)$ .

Продолжая очевидным образом, получим  $f \in \mathcal{F}_i^{T', \xi} \cap C^k([0, T']; \mathbb{R}^2)$  с любым  $k$ , что равносильно включению  $f \in \mathcal{M}_i^{T', \xi}$ .

**3.** Второе соотношение в (3.43) следует из первого в силу (3.24).  $\square$

**Определение, свойства, представление** Ориентируясь на соотношение (2.7), во внутреннем пространстве *определим* оператор  $L : \mathcal{H}^h \rightarrow \mathcal{H}^h$ ,  $\text{Dom } L = \mathcal{N}^h$ ,

$$L := \mathcal{W}_i^{T'} \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_i^{T'})^{-1}. \quad (3.44)$$

Как легко видеть, свойства (3.40) и (3.43) обеспечивают корректность определения. Из них же следуют вложения

$$L\mathcal{N}^s \subset \mathcal{N}^s, \quad 0 \leq s \leq h. \quad (3.45)$$

**Лемма 13.** *Оператор  $L$  действует локально: для  $y \in \text{Dom } L$  выполнено*

$$\text{supp } Ly \subset \text{supp } y. \quad (3.46)$$

Оператор  $L_0 := L|_{\mathcal{N}_0^h}$  плотно задан и симметричен: для  $v, y \in \text{Dom } L_0 = \mathcal{N}_0^h$  выполнено  $(L_0 v, y)_{\mathcal{H}^h} = (v, L_0 y)_{\mathcal{H}^h}$ .

*Доказательство.* Выберем  $y \in \text{Dom } L$  :  $\text{supp } y \subset [\alpha, \beta]$ , где  $0 < \alpha < \beta < h$ . Покажем, что  $\text{supp } Ly \subset [\alpha, \beta]$ .

1. Из условия на носитель имеем  $y \in \mathcal{N}^\beta$ , откуда  $Ly \subset \mathcal{N}^\beta$  в силу (3.45), т. е.  $\text{supp } Ly \subset [0, \beta]$ . Значит,  $L$  не расширяет носитель *вправо*.

2. Выберем управление  $f \in \mathcal{M}_l^{T', \tau_2(\alpha)}$ , аннулирующееся вблизи  $t = T'$ . Такие управления плотны в подпространстве  $\mathcal{F}_l^{T', \tau_2(\alpha)}$ . В силу (3.43) (для  $\xi = \tau_2(\alpha)$ ), соответствующие волны  $\mathcal{W}_l^{T'} f$  содержатся в подпространстве  $\mathcal{H}^\alpha$  и плотны в нем. Кроме того,  $y \perp \mathcal{H}^\alpha$  в силу  $\text{supp } y \subset [\alpha, \beta]$ .

Для выбранных  $y$  и  $f$  имеем соотношения:

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \mathcal{W}_l^{T'} f_{tt}, y \right)_{\mathcal{H}^h} \stackrel{(3.31)}{=} \left( \mathcal{C}_l^{T'} f_{tt}, (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_{\mathcal{F}_l^{T'}} \\ &\stackrel{b}{=} \left( \mathcal{C}^{T'} f_{tt}, (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_{\mathcal{F}^{T'}} \stackrel{*}{=} \left( \mathcal{C}^{T'} f, \left( (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_{tt} \right)_{\mathcal{F}^{T'}} \\ &\stackrel{bb}{=} \left( \mathcal{C}^{T'} f, \left( (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_{tt} \right)_{\mathcal{F}_l^{T'}} \stackrel{(3.31)}{=} \left( \mathcal{W}_l^{T'} f, \mathcal{W}_l^{T'} \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_{\mathcal{H}^h} \\ &\stackrel{(3.44)}{=} (\mathcal{W}_l^{T'} f, Ly)_{\mathcal{H}^h}. \end{aligned}$$

В равенствах (b) и (bb) для упрощения записи опущен оператор вложения  $e_l^{T'}$ . Равенство (\*) — результат интегрирования по частям. При пронесении производных через оператор  $\mathcal{C}^{T'}$  используются обращение управления  $f$  в 0 в окрестности  $t = 0$  и  $t = T'$  и равенство  $(\mathcal{C}^{T'} f)(T') = \nu f(T') = 0$ , следующее из вида ядра интегральной части оператора  $\mathcal{C}^{T'}$  (см. (3.2)). Далее, сопоставляя начало с концом и учитывая плотность волн  $\mathcal{W}_l^{T'} f$  в  $\mathcal{H}^\alpha$ , получаем  $Ly \perp \mathcal{H}^\alpha$ , что равносильно  $\text{supp } Ly \subset [\alpha, \beta]$ . Следовательно, действие  $L$  не расширяет носитель *влево*.

Сопоставляя установленные свойства  $L$ , приходим к (3.46).

3. Выберем  $y, v \in \mathcal{N}_0^h$ ; обозначая  $f := (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y$ ,  $g := (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} v$ , имеем

$f, g \in \mathcal{M}_{l,0}^{T',T'}$  (см. (3.43)). Справедливы соотношения

$$(L_0 v, y)_{\mathcal{H}^h} \stackrel{(3.31)}{=} \left( \mathcal{C}_l^{T'} g_{tt}, f \right)_{\mathcal{F}_l^{T'}} \stackrel{**}{=} \left( \mathcal{C}_l^{T'} g, f_{tt} \right)_{\mathcal{F}_l^{T'}} \stackrel{(3.31)}{=} (v, L_0 y)_{\mathcal{H}^h}.$$

Равенство (\*\*) выводится теми же средствами, что и (\*): интегрированием по частям с учетом нулевых условий для  $f, g$  при  $t = 0, t = T'$  и равенств  $(\mathcal{C}^{T'} f)(T') = (\mathcal{C}^{T'} g)(T') = 0$ .  $\square$

Установим вид оператора, введенного определением (3.44).

**Лемма 14.** *Справедливо представление*

$$Ly = \rho^{-1} [(\gamma y_x)_x - Ay_x - By] \quad (3.47)$$

с гладкими  $A$  и  $B$ , удовлетворяющими условиям (1.5).

*Доказательство. 1.* Проводя весьма длинные выкладки, можно проверить, что подстановка представлений (3.34) и (3.18) в правую часть (3.44) и последующее интегрирование по частям приводят к выражению

$$\begin{aligned} (Ly)(x) &= \rho^{-1}(x) \left[ (\gamma(x)y'(x))' - A(x)y'(x) - B(x)y(x) \right] \\ &+ C(x)y'(x_2(\tau_1(x))) + D(x)y(x_2(\tau_1(x))) \\ &+ E(x)\tilde{y}'(x_1(\tau_2(x))) + F(x)\tilde{y}(x_1(\tau_2(x))) \\ &+ \int_{x_2(\tau_1(x))}^h G(x,s)y(s)ds, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где использовано обозначение

$$\tilde{v}(x_1(\tau_2(x))) := \begin{cases} v(x_1(\tau_2(x))), & 0 \leq x \leq x_2(\tau_1(h)), \\ 0, & x_2(\tau_1(h)) < x \leq h, \end{cases}$$

$A, B, C, D, E, F$  суть гладкие матрицы-функции,  $G$  — кусочно-гладкое ядро<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Все они выражаются через функции  $\rho_i, \gamma_i$ , матричные элементы ядер  $w^{T'}, w_{-1}^{T'}$  и их производные. Выражения весьма громоздки и их конкретный вид для дальнейшего не важен.

2. Оператор  $L$  можно расширить на распределения, определив действие расширения через правую часть (3.48). Поскольку распределения аппроксимируются гладкими финитными функциями, расширение наследует локальность (3.46). Действуя правой частью на распределения  $y = \delta_s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ( $\delta_s(\cdot)$  — мера Дирака с носителем в  $x = s$ ), нетрудно убедиться, что следующее из локальности условие  $\text{supp } Ly \subset \text{supp } y = \{s\}$  может выполняться только при  $C(s) = D(s) = E(s) = F(s) = G(\cdot, s) = 0$ . Следовательно, имеет место (3.47).

3. По Лемме 13 сужение  $L_0 := L|_{\mathcal{N}_0^h}$  есть оператор в  $\mathcal{H}^h = L_{2,\rho}([0, h]; \mathbb{R}^2)$ . Для дифференциального оператора вида (3.47) такое возможно лишь при выполнении условий (1.5).  $\square$

### 3.2.5. Эволюция

Каждому  $f \in \mathcal{F}_l^{T'}$  сопоставим функцию

$$u^f(x, t) := u^{\mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f}(\cdot, T') = (\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f)(x), \quad (x, t) \in [0, h] \times [0, T'] \quad (3.49)$$

(ср. с (1.51)). В силу (3.41) и (3.43), это определение корректно.

**Лемма 15.** При  $f \in \mathcal{M}_l^{T'}$  функция  $u^f$ , определенная соотношением (3.49), является решением задачи

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T', \quad (3.50)$$

$$u|_{t < \tau_2(x)} = 0, \quad (3.51)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T'. \quad (3.52)$$

*Доказательство.* Имеем равенства:

$$\begin{aligned} u_{tt}^f &= (\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f)_{tt} = \mathcal{W}_l^{T'} (\mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f)_{tt} = \mathcal{W}_l^{T'} ((\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} \mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f)_{tt} \\ &\stackrel{(3.44)}{=} L \mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f = Lu^f. \end{aligned}$$

Умножая  $u_{tt}^f - Lu^f = 0$  на  $\rho$ , получаем (3.50).

Согласно (3.41), имеем  $\mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f \in \mathcal{M}_l^{T',t}$ , откуда  $u^f(\cdot, t) \in \mathcal{N}^{x_2(t)} \subset \mathcal{H}^{x_2(t)}$  в силу (3.43). Поэтому  $\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset [0, x_2(t)]$ , что равносильно (3.51).

Соотношения

$$u^f(0, t) = u_{T'-t}^{T'} f(0, T') \stackrel{(3.24)}{=} (\mathcal{T}_{T'-t}^{T'} f)(T') = f(t)$$

приводят к (3.52). □

Подведем промежуточный итог. В ходе построений из исходных данных (оператора (3.1)) извлечены матрицы-функции  $\{\rho, \gamma, A, B\}|_{0 \leq x \leq h}$ , удовлетворяющие условиям (1.4) и (1.5). Такой набор определяет систему  $\mathfrak{s}_l^{T'}$  через задачу (2.31)–(2.33) с финальным моментом  $t = T'$ . Эта система имеет *свой* оператор управления  $W_l^{T'}$ . С другой стороны, набору был сопоставлен оператор  $\mathcal{W}_l^{T'}$  (см. (3.17)) и *через него* определены решения (3.49) задачи (3.50)–(3.52). Результат Леммы 15 означает, что эти задачи идентичны. В силу последнего, имеем равенство

$$W_l^{T'} = \mathcal{W}_l^{T'}. \quad (3.53)$$

### 3.3. Система $\mathfrak{s}^T$

Напомним, что  $h = x_1(T) = x_2(T')$ , и набор  $\{\rho, \gamma, A, B\}|_{0 \leq x \leq h}$  определяет систему  $\mathfrak{s}^T$  вида

$$\rho u_{tt} - (\gamma u_x)_x + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < h, \quad 0 < t < T, \quad (3.54)$$

$$u|_{t < \tau_1(x)} = 0, \quad (3.55)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.56)$$

(см. (2.1)–(2.3)). Система  $\mathfrak{s}^T$  имеет:

- внешнее пространство  $\mathcal{F}^T = L_2([0, T]; \mathbb{R}^2)$ ;
- внутреннее пространство  $\mathcal{H}^{x_1(T)} = L_2([0, x_1(T)]; \mathbb{R}^2)$ ;

- оператор управления  $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}^{x_1(T)}$ ;
- расширенный оператор реакции вида (2.11)

$$(R^{2T}f)(t) = -\tilde{\nu}f'(t) + \tilde{\omega}f(t) + \int_0^t \tilde{r}(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq 2T;$$

- связывающий оператор  $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,  $C^T = (W^T)^*W^T$ ,

$$(C^Tf)(t) \stackrel{(2.15)}{=} \tilde{\nu}f(t) + \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{2T-t-s} \tilde{r}(\eta)d\eta \right] f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Следующий результат устанавливает достаточность условий Теоремы 4 и, тем самым, завершает ее доказательство.

**Лемма 16.** *Справедливо равенство  $R^{2T} = \mathcal{R}^{2T}$ .*

*Доказательство. 1.* Равенства  $\tilde{\nu} = \nu$  и  $\tilde{\omega} = \omega$  обеспечены выбором параметров в подразделе 3.2.1: замечание в конце Шага 4. Остается проверить равенство  $\tilde{r} = r$ .

**2.** Установим связь между системами  $\mathfrak{s}^T$  и  $\mathfrak{s}^{T'}$ . Их внутренние пространства идентичны:  $\mathcal{H}^{x_1(T)} = \mathcal{H}^{x_2(T')} = \mathcal{H}^h$ . Сопоставляя решения задач (3.54)–(3.56) и (3.50)–(3.52), легко видеть, что выполнено равенство

$$W^T = W_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'}, \quad (3.57)$$

где  $\mathcal{T}_{T'-T}^{T'} : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{T'}$  есть оператор, введенный в (3.10). Отметим, что  $\text{Ran } \mathcal{T}_{T'-T}^{T'} \subset \mathcal{F}_l^{T'}$ , поскольку принадлежность к  $\mathcal{F}_l^{T'}$  не накладывает связи на компоненты управления при  $T' - T \leq t \leq T'$ . В силу этого, правая часть (3.57) корректно определена.

Далее имеем соотношения:

$$\begin{aligned} C^T &= (W^T)^*W^T \stackrel{(3.57)}{=} (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^*(W_l^{T'})^*W_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'} \stackrel{(3.53)}{=} (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^*(\mathcal{W}_l^{T'})^*\mathcal{W}_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'} \\ &\stackrel{(3.31)}{=} (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^*C_l^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'} \stackrel{b}{=} (\mathcal{T}_{T'-T}^{T'})^*C^{T'} \mathcal{T}_{T'-T}^{T'} \stackrel{(3.11)}{=} C^T. \end{aligned}$$

Поясним равенство (b). В силу отмеченной выше независимости компонент управлений из  $\mathcal{F}_l^{T'}$  при  $T' - T \leq t \leq T'$ , блоки операторов  $\mathcal{C}_l^{T'}$  и  $\mathcal{C}^{T'}$  в подпространстве  $\mathcal{F}^{T',T} = \text{Ran } \mathcal{T}_{T'-T}^{T'}$  оказываются идентичными. Равенство (b) констатирует совпадение этих блоков.

**3.** Из равенства  $C^T = \mathcal{C}^T$  очевидным образом следует равенство ядер в интегральных частях этих операторов:

$$\int_{|t-s|}^{2T-t-s} \tilde{r}(\eta) d\eta = \int_{|t-s|}^{2T-t-s} r(\eta) d\eta, \quad 0 \leq s, t \leq T.$$

Полагая в нем  $t = s = T - \frac{\sigma}{2}$  и дифференцируя по  $\sigma$ , получаем  $\tilde{r}(\sigma) = r(\sigma)$  при  $0 \leq \sigma \leq 2T$ .  $\square$

### 3.4. Представления для $A$ и $B$

В конце подраздела 3.2.2 был описан способ нахождения матриц  $A$  и  $B$  на отрезке  $[0, h]$ . Ниже мы излагаем этот способ в форме пошаговой процедуры, пригодной для численной реализации. Кроме того, предлагается второй способ определения  $A$  и  $B$ . Первые 4 шага в обоих способах одинаковые.

**Шаг 1.** По известным функциям  $l$ ,  $c_i$ ,  $\rho_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\tau_i$ ,  $x_i$ ,  $\pi_i^{T'}$  находим представление для операторов  $(e_l^{T',\xi})^*$  для каждого  $\xi \in [0, T']$  с матричным ядром  $k^{T'}(t, s, \xi)$ , определенным в области

$$\Sigma^{T'} = \left\{ (t, s, \xi) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi \in [0, T'], \pi_1^{T'}(\xi) \leq t, s \leq \pi_2^{T'}(\xi) \right\}.$$

Элемент  $k_{22}^{T'}$  ищется как решение скалярного интегрального уравнения

$$k_{22}^{T'}(t, s, \xi) = -L^{T'}(t, s, \xi) - \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} k_{22}^{T'}(t, \eta, \xi) L^{T'}(\eta, s, \xi) d\eta,$$

с ядром

$$L^{T'}(t, s, \xi) := \int_{\max(t,s)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} l(\tau - t)l(\tau - s) d\tau.$$



Остальные элементы ядра  $k^{T'}$  находятся по формулам (2.42)-(2.44), заменяя в них  $T$  на  $T'$ :

$$k_{21}^{T'}(t, s, \xi) = l(s - t) + \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^s l(s - \eta) k_{22}^{T'}(t, \eta, \xi) d\eta,$$

$$k_{11}^{T'}(t, s, \xi) = \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^t l(t - \eta) k_{21}^{T'}(\eta, s, \xi) d\eta,$$

$$k_{12}^{T'}(t, s, \xi) = \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^t l(t - \eta) k_{22}^{T'}(\eta, s, \xi) d\eta.$$

**Шаг 2.** По известному матричному ядру  $c^{T'}(t, s) = \int_{|t-s|}^{2T'-t-s} r(\eta) d\eta$  интегрального оператора  $\mathcal{C}^{T'}$  и матрице  $k^{T'}(t, s, \xi)$  находим представление для оператора  $\mathcal{C}_l^{T', \xi}$  с ядром  $c_l^{T'}(t, s, \xi)$ , определенным в  $[0, T']^3$  следующим образом:

$$c_l^{T'}(t, s, \xi) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \pi_1^{T'}(\xi)], \\ \widehat{c}_l^{T'}(t, s, \xi), & t \in [\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)], \\ c^{T'}(t, s), & t \in (\pi_2^{T'}(\xi), T'], \end{cases}$$

где

$$\widehat{c}_l^{T'}(t, s, \xi) = \begin{pmatrix} \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^t l(t - \eta) c_{\mathbf{II}}^{T'}(\eta, s) d\eta \\ c_{\mathbf{II}}^{T'}(t, s) \end{pmatrix} + \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} k^{T'}(t, \eta, \xi) c^{T'}(\eta, s) d\eta + k^{T'}(t, s, \xi) \nu, \quad s \in [0, T'].$$

Постоянная матрица  $\nu$  берется из представления (3.1) оператора  $\mathcal{R}^{2T'}$ .

**Шаг 3.** Определив матрицы  $c_l^{T'}$  и  $k^{T'}$ , найдем представление для оператора  $\mathcal{P}_l^{T', \xi}$ , при  $\xi \in [0, T']$  с матричным ядром  $p^{T'}$ , определенным в  $[0, T']^3$ . Для этого при каждом  $\xi \in [0, T']$  и  $\lambda \in [0, \pi_2^{T'}(\xi)]$  решаем пару уравнений относительно

столбцов матрицы  $p^T$

$$\left( \mathcal{C}_l^{T', \xi} (p^T)^{\mathbf{I}} (\cdot, \lambda, \xi) \right) (t) = z^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi), \quad t \in [0, T'] , \quad (3.58)$$

$$\left( \mathcal{C}_l^{T', \xi} (p^T)^{\mathbf{II}} (\cdot, \lambda, \xi) \right) (t) = z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi), \quad t \in [0, T]' , \quad (3.59)$$

с кусочно-гладкими правыми частями  $z^{\mathbf{I}}(\cdot, \lambda, \xi), z^{\mathbf{II}}(\cdot, \lambda, \xi) \in \mathcal{F}_l^{T', \xi}$ , которые определяются при  $(t, \lambda) \in [0, T'] \times [0, \pi_2^{T'}(\xi)]$  через матрицы  $k^{T'}$  и  $c_l^{T'}$  по формулам:

$$z^{\mathbf{I}}(t, \lambda, \xi) := \nu_1 \left( k^{T'} \right)^{\mathbf{I}} (t, \lambda, \xi) + \left( c_l^{T'} \right)^{\mathbf{I}} (t, \lambda, \xi),$$

$$z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi) = \left( c_l^{T'} \right)^{\mathbf{II}} (t, \lambda, \xi), \quad \text{при } \lambda \in [0, \pi_1^{T'}(\xi)] ,$$

$$z^{\mathbf{II}}(t, \lambda, \xi) = \nu_2 \left( k^{T'} \right)^{\mathbf{II}} (t, \lambda, \xi)$$

$$- \int_{\pi_1^{T'}(\xi)}^{\pi_2^{T'}(\xi)} \left( c_l^{T'} \right)^{\mathbf{I}} (t, s, \xi) l(s - \lambda) ds, \quad \text{при } \lambda \in [\pi_1^{T'}(\xi), \pi_2^{T'}(\xi)] .$$

Разрешимость уравнений (3.58), (3.59) следует из положительной определенности оператора  $\mathcal{C}_l^{T', \xi}$  в пространстве  $\mathcal{F}_l^{T', \xi}$ .

**Шаг 4.** Далее по формулам (3.20)–(3.23) находится ядро интегрального оператора  $\mathcal{W}_l^{T'}$  — матрица  $w^{T'}$ , гладкая в прямоугольнике  $[0, h] \times [0, T']$  вне характеристик  $t = T' - \tau_i(x)$  и аннулирующая при  $t > T' - \tau_1(x)$ .

### 3.4.1. Первый способ

**Шаг 5.** По формулам (3.25), (3.26) определяются матрицы  $\beta^i$  и  $\varkappa^i$  на отрезке  $[0, h]$ .

**Шаг 6.** Окончательно представления для матриц  $A$  и  $B$  на отрезке  $[0, h]$  даются формулами (1.34)–(1.39).

### 3.4.2. Второй способ

Имеется еще один способ определения матриц  $A$  и  $B$  (см. [20]).

**Шаг 5'.** При каждом  $x_0 \in [0, h]$  найдем первый и второй столбцы ядра  $v := w_{-1}^{T'}$ , решив уравнения (3.38) и (3.39), соответственно.

**Шаг 6'.** Определим матрицы  $A$  и  $B$  по формулам (3.60)–(3.62), приведенным ниже в Теореме 5.

В дальнейшем частные производные будем записывать в виде

$$z'_{(1)}(x, t) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, t), \quad z'_{(2)}(x, t) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, t),$$

для разрывов используем обозначения (1.8), (1.9), ядра  $w^{T'}$  и  $w_{-1}^{T'}$  обозначаются:

$$w^{T'} =: w, \quad w_{-1}^{T'} =: v.$$

**Теорема 5.** Для элемента  $a(x)$  антидиагональной матрицы  $A$  на отрезке  $[0, h]$  справедливы два представления

$$a(x) = -\frac{\rho_1 \rho_2 [c_1^2 - c_2^2]}{\mu_2 \sqrt{\rho_2 \gamma_2}}(x) w_{12}(x, \langle T' - \tau_2(x) \rangle) \quad (3.60)$$

$$= -\frac{\rho_1 \rho_2 [c_1^2 - c_2^2]}{\mu_1 \sqrt{\rho_1 \gamma_1}}(x) w_{21}(x, \langle T' - \tau_1(x) \rangle). \quad (3.61)$$

Для матрицы  $B$  на отрезке  $[0, h]$  справедливо представление

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{16} \rho^{-1}(x) ((\rho\gamma)'(\ln(\rho^5\gamma))' - 4(\rho\gamma)''(x)) \\ &+ \mu(x)\rho(x) \left( \frac{1}{2}(\gamma\rho^{-1})'\tilde{v} - 2\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\tilde{v}_{\mathbf{I}} + \gamma\rho^{-1}\tilde{v}_{\mathbf{II}} \right)(x) \\ &- \rho(x) \left( \tilde{w}_{\mathbf{II}}\mu^{-1} + \frac{1}{4}\tilde{w} \left( \mu^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}(\gamma\rho)' \right) \right)(x) \\ &+ \rho(x) \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} w(x, \langle T - \tau_i(x) \rangle) v(T - \tau_i(x), \langle x \rangle), \end{aligned} \quad (3.62)$$

где

$$\ln(\rho^5\gamma) = \begin{pmatrix} \ln(\rho_1^5\gamma_1) & 0 \\ 0 & \ln(\rho_2^5\gamma_2) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}(x) := \begin{pmatrix} v_{11}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, x) & v_{12}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, x) \\ v_{21}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, x) & v_{22}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, x) \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

$$\tilde{v}_{\mathbf{I}}(x) := \begin{pmatrix} (v_{21})'_{(1)}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, x) & (v_{12})'_{(1)}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, x) \\ (v_{21})'_{(1)}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, x) & (v_{22})'_{(1)}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, x) \end{pmatrix}, \quad (3.64)$$

$$\tilde{v}_{\mathbf{II}}(x) := \begin{pmatrix} (v_{11})'_{(2)}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, x) & (v_{12})'_{(2)}(\langle T' - \tau_1(x) \rangle, x) \\ (v_{21})'_{(2)}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, x) & (v_{22})'_{(2)}(\langle T' - \tau_2(x) \rangle, x) \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\tilde{w}(x) := \begin{pmatrix} w_{11}(x, \langle T' - \tau_1(x) \rangle) & w_{12}(x, \langle T' - \tau_2(x) \rangle) \\ w_{21}(x, \langle T' - \tau_1(x) \rangle) & w_{22}(x, \langle T' - \tau_2(x) \rangle) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{w}_{\mathbf{II}}(x) := \begin{pmatrix} (w_{11})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_1(x) \rangle) & (w_{12})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_2(x) \rangle) \\ (w_{21})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_1(x) \rangle) & (w_{22})'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_2(x) \rangle) \end{pmatrix}.$$

*Доказательство.* Доказательство Теоремы 5 разобьем на 5 этапов:

1. найдем представления для  $\frac{d}{dt} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y$  и  $\frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y$  при  $y \in \mathcal{N}^h$ ;
2. получим представление для первого слагаемого  $\mathcal{W}_l^{T'} \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y$ ;
3. получим представление для второго слагаемого  $\mathcal{W}_l^{T'} \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y$ ;
4. найдем представления для матриц  $A$  и  $B$ ;
5. уточним представление для матрицы  $A$ .

Начнем с небольшой технической леммы.

**Лемма 17.** *Для разрывов матриц-функций  $w(x, t)$  и  $v(t, x)$  на кривых  $t = T - \tau_i(x)$  при  $x \in [0, h]$  имеют место соотношения*

$$w(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle) = w(\langle x \rangle, T' - \tau_i(x)),$$

$$v(\langle T' - \tau_i(x) \rangle, x) = v(T' - \tau_i(x), \langle x \rangle).$$

*Доказательство.* Из Предложения 13 известно, что матрица-функция  $w(x, t)$  является гладкой в  $[0, h] \times [0, T']$  вне монотонно убывающих кривых  $t = T' -$

$\tau_i(x)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} w(x, T' - \tau_i(x) + 0) &= w(x + 0, T' - \tau_i(x)), \\ w(x, T' - \tau_i(x) - 0) &= w(x - 0, T' - \tau_i(x)), \end{aligned}$$

откуда следует первое равенство Леммы 17. Аналогично, второе равенство следует из того, что матрица  $v(t, x)$  является гладкой в  $[0, T'] \times [0, h]$  вне монотонно убывающих кривых  $t = T' - \tau_i(x)$ .  $\square$

**Этап 1.** Представления для  $\frac{d}{dt} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y$  и  $\frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y$ .

Ниже используется Соглашение 4 и обозначение (3.27).

**Лемма 18.** Для  $y \in \mathcal{N}^h$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right) (t) &= -\mu_i^\#(t) \begin{pmatrix} \left( \gamma_1^{\frac{1}{2}} \rho_1^{-\frac{1}{2}} y_1' \right) (x_1(T' - t)) \\ \left( \gamma_2^{\frac{1}{2}} \rho_2^{-\frac{1}{2}} y_2' \right) (x_2(T' - t)) \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{4} \mu_i^\#(t) \begin{pmatrix} \left( \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \rho_1^{-\frac{3}{2}} (\gamma_1 \rho_1)' y_1 \right) (x_1(T' - t)) \\ \left( \gamma_2^{-\frac{1}{2}} \rho_2^{-\frac{3}{2}} (\gamma_2 \rho_2)' y_2 \right) (x_2(T' - t)) \end{pmatrix} \\ &\quad + \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x_i(T' - t)) v(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) y(x_i(T' - t)) \\ &\quad + \int_{x_2(T'-t)}^h v'_{(1)}(t, x) y(x) dx, \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right) (t) = (Ey)(t) + (Gy)(t) + \int_{x_2(T'-t)}^h v''_{(2)}(t, x) y(x) dx, \quad (3.67)$$

где

$$(Ey)(t) := (\mu^\sharp)''(t)\widehat{y}(t) + 2(\mu^\sharp)'(t)\widehat{y}'(t) + \mu^\sharp(t)\widehat{y}''(t), \quad (3.68)$$

$$(Gy)(t) := \sum_{i=1,2} M_i(t)y'(x_i(T'-t)) + \sum_{i=1,2} N_i(t)y(x_i(T'-t)), \quad (3.69)$$

$$M_i(t) := -\frac{\gamma_i}{\rho_i}(x_i(T'-t))v(t, \langle x_i(T'-t) \rangle), \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} N_i(t) := & 2\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}(x_i(T'-t))v'_{(1)}(t, \langle x_i(T'-t) \rangle) \\ & - \frac{\gamma_i}{\rho_i}(x_i(T'-t))v'_{(2)}(t, \langle x_i(T'-t) \rangle) \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)'(x_i(T'-t))v(t, \langle x_i(T'-t) \rangle). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Здесь  $M_i(t)$ ,  $N_i(t)$  суть матричные коэффициенты перед  $y'(x_i(T'-t))$  и  $y(x_i(T'-t))$  соответственно,  $i = 1, 2$ .

*Доказательство.* Функции  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  являются обратными к эйконалам  $\tau_i(x)$  и могут быть записаны в виде

$$x_i(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{\gamma_i}{\rho_i}}(x_i(s))ds = \int_0^t c_i(x_i(s))ds, \quad i = 1, 2.$$

Ниже мы используем следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}x_i(T'-t) = -\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{2}}(x_i(T'-t)), \quad \frac{d^2}{dt^2}x_i(T'-t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_i}{\rho_i}\right)'(x_i(T'-t)).$$

Дифференцируя (3.34), имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)(t) &= (\mu^\sharp)'(t)\widehat{y}(t) + \mu^\sharp(t)\widehat{y}'(t) \\ &+ \frac{d}{dt} \int_{x_2(T'-t)}^h v(t, x)y(x)dx, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathcal{W}_l^{T'}\right)^{-1}y\right)(t) = (Ey)(t) + \frac{d^2}{dt^2} \int_{x_2(T'-t)}^h v(t, x)y(x)dx.$$

Выпишем производные  $\widehat{y}_i(t) = y_i(x_i(T' - t))$

$$\widehat{y}'_i(t) = - \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} y'_i(x_i(T' - t)), \quad (3.73)$$

$$\widehat{y}''_i(t) = \left( \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right) y''_i + \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)' y'_i \right) (x_i(T' - t)), \quad (3.74)$$

и производные  $\mu_i^\sharp(t) = \nu_i^{-\frac{1}{2}} (\gamma_i \rho_i)^{\frac{1}{4}} (x_i(T' - t))$

$$\left( \mu_i^\sharp \right)' (t) = -\frac{1}{4} \left( \mu_i^\sharp \gamma_i^{-\frac{1}{2}} \rho_i^{-\frac{3}{2}} (\gamma_i \rho_i)' \right) (x_i(T' - t)), \quad (3.75)$$

$$\left( \mu_i^\sharp \right)'' (t) = \frac{1}{16} \left( \mu_i^{-1} \rho_i^{-2} \left( 4 (\rho_i \gamma_i)'' - (\rho_i \gamma_i)' (\ln (\rho_i^5 \gamma_i))' \right) \right) (x_i(T' - t)). \quad (3.76)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_2(T'-t)}^h v(t, x) y(x) dx &= \int_{x_2(T'-t)}^h v'_{(1)}(t, x) y(x) dx \\ &+ \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x_i(T' - t)) v(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) y(x_i(T' - t)). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Подставляя первые производные (3.73), (3.75), (3.77) в (3.72), приходим к (3.66).

Продифференцируем каждое из слагаемых правой части (3.77) еще раз по  $t$ .

Производная интегрального слагаемого есть

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_2(T'-t)}^h v'_{(1)}(t, x) y(x) dx &= \int_{x_2(T'-t)}^h v''_{(1)}(t, x) y(x) \\ &+ \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x_i(T' - t)) v'_{(1)}(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) y(x_i(T' - t)). \end{aligned}$$

Для производной  $i$ -го слагаемого суммы имеем:

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x_i(T' - t)) v(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) y(x_i(T' - t)) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left[ \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right) (x_i(T' - t)) v(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) \right] y'(x_i(T' - t)) \\
&+ \left[ \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x_i(T' - t)) v'_{(1)}(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) \right] y(x_i(T' - t)) \\
&- \left[ \frac{\gamma_i}{\rho_i} (x_i(T' - t)) v'_{(2)}(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) \right] y(x_i(T' - t)) \\
&- \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)' (x_i(T' - t)) v(t, \langle x_i(T' - t) \rangle) \right] y(x_i(T' - t)).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \int_{x_2(T'-t)}^h v(t, x) y(x) dx &= (Gy)(t) + \int_{x_2(T'-t)}^h v''_{(2)}(t, x) y(x) dx, \quad (3.78) \\
(Gy)(t) &:= \sum_{i=1,2} M_i(t) y'(x_i(T' - t)) + \sum_{i=1,2} N_i(t) y(x_i(T' - t))
\end{aligned}$$

с  $M_i$  и  $N_i$ , заданными в (3.70) и (3.71) соответственно. Суммируя (3.78) с  $(Ey)(t)$ , приходим к (3.67). Лемма 18 доказана.  $\square$

В силу представления (3.18) для  $\mathcal{W}_l^{T'}$ , имеем:

$$\begin{aligned}
\left( \mathcal{W}_l^{T'} \frac{d^2}{dt^2} \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y \right) (x) &= \mu(x) \left( \begin{array}{c} \left( \frac{d^2}{dt^2} \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y \right)_1 (T' - \tau_1(x)) \\ \left( \frac{d^2}{dt^2} \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y \right)_2 (T' - \tau_2(x)) \end{array} \right) \\
&+ \int_0^{T' - \tau_1(x)} w(x, t) \left( \frac{d^2}{dt^2} \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y \right) (t) dt. \quad (3.79)
\end{aligned}$$

Дальнейшее преобразование правой части (3.79) производится на Этапах 2 и 3. На Этапе 2 с учетом (3.67) находится представление для первого слагаемого в (3.79). На Этапе 3 второе слагаемое в (3.79) интегрируется по частям и преобразуется с помощью формулы (3.66). При таком преобразовании возникают слагаемые вида:

$$\begin{aligned}
C(x) y'(x_1(\tau_2(x))), \quad D(x) y(x_1(\tau_2(x))), \quad \tilde{C}(x) y'(x_2(\tau_1(x))), \\
\tilde{D}(x) y(x_2(\tau_1(x))), \quad \int_0^h J(x, s) y(s) ds, \quad (3.80)
\end{aligned}$$



где  $C, D, \tilde{C}, \tilde{D}$  суть некоторые гладкие матрицы-функции,  $J$  — кусочно-гладкая матрица-функция. Из представления (3.47) для оператора  $L$  следует, что сумма всех слагаемых такого вида равна нулю. Поэтому в дальнейших выкладках за слагаемыми вида (3.80) можно не следить и заменять многоточием.

**Этап 2.** Представление для первого слагаемого в (3.79).

**Лемма 19.** *Справедливо представление*

$$\begin{aligned} & \mu(x) \begin{pmatrix} \left( \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_1 (T' - \tau_1(x)) \\ \left( \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_2 (T' - \tau_2(x)) \end{pmatrix} \\ &= \rho^{-1}(x) \left( (\gamma y)' - M_3 y' - (N_3 + q) y \right) (x) + \dots, \end{aligned} \quad (3.81)$$

где

$$q := \frac{1}{16} \rho^{-1} \left( (\rho \gamma)' (\ln(\rho^5 \gamma))' - 4(\rho \gamma)'' \right), \quad (3.82)$$

$$M_3 := \mu \gamma \tilde{v}, \quad N_3 := \mu \rho \left( \frac{1}{2} (\gamma \rho^{-1})' \tilde{v} - 2\gamma^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \tilde{v}_{\mathbf{I}} + \gamma \rho^{-1} \tilde{v}_{\mathbf{II}} \right), \quad (3.83)$$

матрицы-функции  $\tilde{v}, \tilde{v}_{\mathbf{I}}, \tilde{v}_{\mathbf{II}}$  определены в (3.63)–(3.65).

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} & \mu(x) \begin{pmatrix} \left( \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_1 (T' - \tau_1(x)) \\ \left( \frac{d^2}{dt^2} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y \right)_2 (T' - \tau_2(x)) \end{pmatrix} = \mu(x) \begin{pmatrix} (Ey)_1 (T' - \tau_1(x)) \\ (Ey)_2 (T' - \tau_2(x)) \end{pmatrix} \\ & + \mu(x) \begin{pmatrix} (Gy)_1 (T' - \tau_1(x)) \\ (Gy)_2 (T' - \tau_2(x)) \end{pmatrix} + \mu(x) \int_{x_2(T'-t)}^h v''_{(1)}(t, x) y(x) dx. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Из (3.68), с учетом (3.73)–(3.76), можно вывести

$$(Ey)_i (T' - \tau_i(x)) = \rho_i^{-1} \mu_i^{-1} \left( (\gamma_i (y_i))' - q_i y_i \right) (x), \quad (3.85)$$

где  $q_i$  определено в (3.82). Из представления (3.69) с  $M_i, N_i$ , определенными в (3.70), (3.71), следует

$$\begin{pmatrix} (Gy)_1 (T' - \tau_1(x)) \\ (Gy)_2 (T' - \tau_2(x)) \end{pmatrix} = -(\gamma \rho^{-1} \tilde{v})(x) y'(x)$$

$$+ \left( 2\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\tilde{v}_{\mathbf{I}} - \gamma\rho^{-1}\tilde{v}_{\mathbf{II}} - \frac{1}{2}(\gamma\rho^{-1})'\tilde{v} \right) (x)y(x) + \dots \quad (3.86)$$

Подставляя (3.85) и (3.86) в (3.84), приходим к (3.81) с матрицами  $M_3, N_3$ , определенными в (3.83).  $\square$

**Этап 3.** Представление для второго слагаемого (3.79).

**Лемма 20.** *Справедливо представление*

$$\begin{aligned} & \int_0^{T'-\tau_1(x)} w(x, s) \left( \frac{d^2}{ds^2} \left( \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y \right) \right) (s) ds = \left( \tilde{w}\mu^{-1}\gamma^{\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}} \right) (x)y'(x) \\ & + \left( \tilde{w}_{\mathbf{II}}\mu^{-1} + \frac{1}{4}\tilde{w}\mu^{-1}\gamma^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{3}{2}}(\gamma\rho)' \right) (x)y(x) \\ & - \left( \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x)w(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle) v(T' - \tau_i(x), \langle x \rangle) \right) y(x) + \dots \end{aligned}$$

*Доказательство.* Пусть  $\psi(s) := \left( \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y \right) (s)$ . Ядро  $w(x, s)$  может иметь собственные скачки и скачки производных на кривых  $s = T' - \tau_i(x)$ . Интегрируем по частям с учетом  $\psi(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^{T'-\tau_1(x)} w(x, s) \left( \frac{d^2}{ds^2} \left( \left( \mathcal{W}_l^{T'} \right)^{-1} y \right) \right) (s) ds \\ & = \sum_{i=1,2} w'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle) \psi(T' - \tau_i(x)) \\ & - \sum_{i=1,2} w(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle) \psi'(T' - \tau_i(x)) \\ & + \int_0^{T'-\tau_1(x)} w''_{(2)}(x, s) \psi(s) ds. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Далее, из (3.34) выводим соотношения

$$\begin{aligned} \psi(T' - \tau_1(x)) &= \begin{pmatrix} \left( \left[ \frac{\rho_1 \gamma_1}{\rho_1(0) \gamma_1(0)} \right]^{\frac{1}{4}} y_1 \right) (x) \\ \left( \left[ \frac{\rho_2 \gamma_2}{\rho_2(0) \gamma_2(0)} \right]^{\frac{1}{4}} y_2 \right) (x_2(\tau_1(x))) \end{pmatrix} \\ &+ \int_{x_2(\tau_1(x))}^h v(T' - \tau_1(x), s) y(s) ds, \\ \psi(T' - \tau_2(x)) &= \begin{pmatrix} \left( \left[ \frac{\rho_1 \gamma_1}{\rho_1(0) \gamma_1(0)} \right]^{\frac{1}{4}} y_1 \right) (x_1(\tau_2(x))) \\ \left( \left[ \frac{\rho_2 \gamma_2}{\rho_2(0) \gamma_2(0)} \right]^{\frac{1}{4}} y_2 \right) (x) \end{pmatrix} \\ &+ \int_x^h v(T' - \tau_2(x), s) y(s) ds, \end{aligned}$$

с учетом которых получаем:

$$\sum_{i=1,2} w'_{(2)}(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle) \psi(T' - \tau_i(x)) = (\tilde{w}_{\Pi} \mu^{-1})(x) y(x) + \dots \quad (3.88)$$

Из (3.66) имеем

$$\begin{aligned} \psi'(T' - \tau_1(x)) &= -\mu^{-1}(x) \begin{pmatrix} \left( \gamma_1^{\frac{1}{2}} \rho_1^{-\frac{1}{2}} y_1' + \frac{1}{4} \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \rho_1^{-\frac{3}{2}} (\gamma_1 \rho_1)' y_1 \right) (x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \left( \frac{\gamma_1}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} (x) v(T' - \tau_1(x), \langle x \rangle) y(x) + \dots, \\ \psi'(T' - \tau_2(x)) &= -\mu^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \left( \gamma_2^{\frac{1}{2}} \rho_2^{-\frac{1}{2}} y_2' + \frac{1}{4} \gamma_2^{-\frac{1}{2}} \rho_2^{-\frac{3}{2}} (\gamma_2 \rho_2)' y_2 \right) (x) \end{pmatrix} \\ &+ \left( \frac{\gamma_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} (x) v(T' - \tau_2(x), x) y(x) + \dots, \end{aligned}$$

с учетом которых

$$\sum_{i=1,2} w(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle) \psi'(T' - \tau_i(x)) = -\tilde{w}(x) \left( \mu^{-1} \gamma^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \right) (x) y'(x)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \tilde{w}(x) \left( \mu^{-1} \gamma^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{3}{2}} (\gamma \rho)' \right) (x) y(x) \\
& + \left( \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x) w(x, \langle T - \tau_i(x) \rangle) v(T - \tau_i(x), \langle x \rangle) \right) y(x) + \dots \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Подставляя (3.88) и (3.89) в (3.87), приходим к утверждению Леммы 20.  $\square$

**Этап 4.** Вывод представлений для матриц  $A$  и  $B$ .

Складывая представления, полученные в Леммах 19 и 20, имеем:

$$\begin{aligned}
(Ly)(x) &= \rho^{-1}(x) \left( (\gamma y)' - M_3 y' - (N_3 + q) y \right) (x) \\
&+ \left( \tilde{w} \mu^{-1} \gamma^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \right) (x) y'(x) \\
&+ \left( \tilde{w} \mu^{-1} + \frac{1}{4} \tilde{w} \mu^{-1} \gamma^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{3}{2}} (\gamma \rho)' \right) (x) y(x) \\
&- \left( \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} (x) w(x, \langle T' - \tau_i(x) \rangle) v(T' - \tau_i(x), \langle x \rangle) \right) y(x) + \dots
\end{aligned}$$

Сравнивая это представление оператора  $L$  с установленным в Лемме 14

$$L = \rho^{-1} \left[ \frac{d}{dx} \gamma \frac{d}{dx} - A \frac{d}{dx} - B \right],$$

получаем представления для матриц  $A$  и  $B$

$$\begin{aligned}
A(x) &= \left( \mu \gamma \tilde{v} - \rho \tilde{w} \mu^{-1} \gamma^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \right) (x), \quad (3.90) \\
B(x) &= \left( q + N_3 - \rho \tilde{w} \mu^{-1} - \frac{1}{4} \rho \tilde{w} \mu^{-1} \gamma^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{3}{2}} (\gamma \rho)' \right) (x) \\
&+ \rho(x) \left( \sum_{i=1,2} \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} \right)^{\frac{1}{2}} w(x, \langle T - \tau_i(x) \rangle) v(T - \tau_i(x), \langle x \rangle) \right),
\end{aligned}$$

где матрицы-функции  $q$  и  $N_3$  заданы в (3.82) и (3.83) соответственно. Тем самым, представление (3.62) для матрицы  $B$  доказано.

**Этап 5.** Представление (3.90) для матрицы  $A$  допускает следующее уточнение.

**Лемма 21.** *Разрывы матриц-функций  $v$  и  $w$  на кривых  $t = T' - \tau_i(x)$  связаны соотношением:*

$$\tilde{v}(x) = \mu^{-1}(x) \tilde{w}(x) \mu^{-1}(x) \tau'(x). \quad (3.91)$$

*Доказательство.* Для распределения  $y_0(x) = \delta_{x_0}(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $x_0 \in [0, h]$  имеем:

$$\left( (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y_0 \right) (t) = \mu^\sharp(t) \delta_{x_0}(x_1(T' - t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11}(t, x_0) \\ v_{21}(t, x_0) \end{pmatrix}.$$

В силу соотношения  $\mathcal{W}_l^{T'} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} = \mathbb{I}_{\mathcal{H}^h}$ ,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= \left( \mathcal{W}_l^{T'} (\mathcal{W}_l^{T'})^{-1} y_0 \right) (x) \\ &= y_0(x) + \mu_1^{-1}(x_0) \tau_1'(x_0) \begin{pmatrix} w_{11}(x, T' - \tau_1(x_0)) \\ w_{21}(x, T' - \tau_1(x_0)) \end{pmatrix} \\ &\quad + \mu(x) \begin{pmatrix} v_{11}(T' - \tau_1(x), x_0) \\ v_{21}(T' - \tau_2(x), x_0) \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^{T' - \tau_1(x)} w(x, s) \begin{pmatrix} v_{11}(s, x_0) \\ v_{21}(s, x_0) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Сокращая  $y_0(x)$  в левой и правой части, получим:

$$\begin{aligned} &\mu_1^{-1}(x_0) \tau_1'(x_0) \begin{pmatrix} w_{11}(x, T' - \tau_1(x_0)) \\ w_{21}(x, T' - \tau_1(x_0)) \end{pmatrix} + \mu(x) \begin{pmatrix} v_{11}(T' - \tau_1(x), x_0) \\ v_{21}(T' - \tau_2(x), x_0) \end{pmatrix} \\ &= - \int_0^{T' - \tau_1(x)} w(x, s) \begin{pmatrix} v_{11}(s, x_0) \\ v_{21}(s, x_0) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Аналогично, для распределения  $\delta_{x_0}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  выводится соотношение:

$$\begin{aligned} &\mu_2^{-1}(x_0) \tau_2'(x_0) \begin{pmatrix} w_{12}(x, T' - \tau_2(x_0)) \\ w_{22}(x, T' - \tau_2(x_0)) \end{pmatrix} + \mu(x) \begin{pmatrix} v_{12}(T' - \tau_1(x), x_0) \\ v_{22}(T' - \tau_2(x), x_0) \end{pmatrix} \\ &= - \int_0^{T' - \tau_1(x)} w(x, s) \begin{pmatrix} v_{12}(s, x_0) \\ v_{22}(s, x_0) \end{pmatrix} ds. \end{aligned}$$

Объединяя два предыдущих равенства, имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} w_{11}(x, T' - \tau_1(x_0)) & w_{12}(x, T' - \tau_2(x_0)) \\ w_{21}(x, T' - \tau_1(x_0)) & w_{22}(x, T' - \tau_2(x_0)) \end{pmatrix} \mu^{-1}(x_0) \tau'(x_0) \\ & + \mu(x) \begin{pmatrix} v_{11}(T' - \tau_1(x), x_0) & v_{12}(T' - \tau_1(x), x_0) \\ v_{21}(T' - \tau_2(x), x_0) & v_{22}(T' - \tau_2(x), x_0) \end{pmatrix} \\ & = - \int_0^{T' - \tau_1(x)} w(x, s) v(s, x_0) ds. \end{aligned}$$

Слагаемые в левой части при  $x = x_0$  имеют скачки, в то время как правая часть скачка при  $x = x_0$  не имеет. Соотношение (3.91) следует из равенства амплитуд скачков первого и второго слагаемых левой части.  $\square$

С учетом (3.91), представление (3.90) для матрицы  $A(x)$  примет вид

$$A(x) = (\gamma \tilde{w} \rho - \rho \tilde{w} \gamma)(x) \left( \mu^{-1} \gamma^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \right)(x),$$

откуда, с учетом условия (1.5), для элемента  $a$  справедливы два представления (3.60), (3.61). Доказательство теоремы завершено.  $\square$

### 3.5. Система с нулевой функцией отклика

В системе

$$\rho u_{tt} - \gamma u_{xx} + Au_x + Bu = 0, \quad 0 < x < T, \quad 0 < t < T, \quad (3.92)$$

$$u|_{t < x} = 0, \quad (3.93)$$

$$u|_{x=0} = f, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.94)$$

ПОЛОЖИМ

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad A = B = 0. \quad (3.95)$$

Ее оператор реакции имеет (простейший из возможных) вид

$$R^{2T} = - \frac{d}{dt} \quad (3.96)$$

(см.(2.11)).

В этом разделе мы приведем пример системы (3.92)–(3.94) с *ненулевыми* коэффициентами  $A$  и  $B$ , удовлетворяющими условию самосопряженности (1.5) и оператором реакции (3.96). Примечателен следующий факт. С точки зрения внешнего наблюдателя, делающего заключения о свойствах системы по оператору реакции, системы с одним и тем же оператором реакции в принципе неразличимы. Между тем, в первой из систем (с  $A = B = 0$ ) волны в первом и втором каналах распространяются независимо и не взаимодействуют друг с другом, в то время как во второй взаимодействие имеет место и, соответственно, физическая картина волновых процессов сложнее. Перейдем к построению системы.

### 3.5.1. Определение и выбор параметров

В случае  $\rho$  и  $\gamma$  вида (3.95), процедура выбора параметров системы, описанная в разделе 3.2.1, упрощается. По  $\rho$  и  $\gamma$  определяются функции:  $c_i$ ,  $\tau_i$ ,  $x_i$ ,  $\pi_i^{T'}$ , а свободными параметрами являются: функция  $l = l(t)$  и эрмитово-положительное продолжение матрицы  $r|_{[0,2T]}$ .

**Шаг 1.** Скорости  $c_1 := \sqrt{\frac{\gamma_1}{\rho_1}} = 1$ ,  $c_2 := \sqrt{\frac{\gamma_2}{\rho_2}} = \frac{1}{2}$  суть константы, эйконалы  $\tau_1(x) := x$  и  $\tau_2(x) := 2x$  определены на отрезке  $[0, T]$ , обратные к эйконалам функции  $x_1(t) := t$  и  $x_2(t) := \frac{1}{2}t$  определены на отрезках  $[0, T]$  и  $[0, T']$  соответственно, где  $T' = 2T$ . Функции  $\pi_i^{T'}(\xi)$ ,  $i = 1, 2$ , определенные в (3.6), примут вид:

$$\pi_1^{T'}(\xi) := T' - \xi, \quad \pi_2^{T'}(\xi) := T' - \frac{\xi}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq T'.$$

**Шаг 2.** Выбираем гладкую функцию  $l = l(t)$  на отрезке  $[0, T]$  с условием  $l(0) = 0$ , в соответствии с (3.7), что обеспечивает  $a(0) = 0$ .

**Шаг 3.** Выберем нулевое продолжение матрицы  $r|_{[0,2T]}$ :

$$r|_{[0,2T']} = 0.$$

Такое продолжение является эрмитово-положительным, так как оператор (3.8), действующий в пространстве  $\mathcal{F}^{T'} := L_2([0, T']; \mathbb{R}^2)$ , есть:

$$\mathcal{C}^{T'} = \mathbb{I}_{\mathcal{F}^{T'}}. \quad (3.97)$$

Из Теоремы 4 следует, что к данному моменту свобода выбора параметров исчерпана, и матрицы  $A$  и  $B$  на отрезке  $[0, T]$  определяются однозначно, а оператор реакции построенной системы имеет вид (3.96).

### 3.5.2. Определение матриц $A$ и $B$ .

В этом разделе матрицы  $A$  и  $B$  определяются способами, описанными в разделе 3.4. Формулы существенно упрощаются, так как в силу (3.97), проектор  $\mathcal{P}_l^{T', \xi}$  совпадает с проектором  $X_l^{T', \xi}$  на подпространство  $\mathcal{F}_l^{T', \xi}$ . Напомним, что проектор  $X_l^{T', \xi}$  вводился в разделе 2.3.1. Из совпадений операторов  $\mathcal{P}_l^{T', \xi}$  и  $X_l^{T', \xi}$  следует совпадение матричных ядер  $p^{T'}$  и  $k^{T'}$ .

**Шаг 1.** Решая скалярное интегральное уравнение

$$k_{22}^{T'}(t, s, \xi) = -L^{T'}(t, s, \xi) - \int_{T'-\xi}^{T'-\frac{\xi}{2}} k_{22}^{T'}(t, \eta, \xi) L^{T'}(\eta, s, \xi) d\eta \quad (3.98)$$

с ядром

$$L^{T'}(t, s, \xi) := \int_{\max(t, s)}^{T'-\frac{\xi}{2}} l(\tau - t) l(\tau - s) d\tau,$$

находим  $k_{22}^{T'}$ . Остальные элементы  $k^{T'}$  находятся по формулам



$$\begin{aligned}
k_{11}^{T'}(t, s, \xi) &= \int_{T'-\xi}^{T'-\frac{\xi}{2}} \int_{T'-\xi}^{T'-\frac{\xi}{2}} l(t-\eta)l(s-\tau)k_{22}^{T'}(\eta, \tau, \xi) d\tau d\eta \\
&+ \int_{T'-\xi}^{T'-\frac{\xi}{2}} l(t-\eta)l(s-\eta) d\eta, \tag{3.99}
\end{aligned}$$

$$k_{12}^{T'}(t, s, \xi) = \int_{T'-\xi}^{T'-\frac{\xi}{2}} l(t-\eta)k_{22}^{T'}(\eta, s, \xi) d\eta, \tag{3.100}$$

$$k_{21}^{T'}(t, s, \xi) = l(s-t) + \int_{T'-\xi}^{T'-\frac{\xi}{2}} l(s-\eta)k_{22}^{T'}(t, \eta, \xi) d\eta. \tag{3.101}$$

**Шаг 2 и 3.** В силу (3.97),

$$\mathcal{C}_l^{T', \xi} = \mathbb{I}_{\mathcal{F}_l^{T', \xi}}, \quad c_l^{T'} \equiv 0, \quad p^{T'} = k^{T'}.$$

**Шаг 4.** Оператор  $\mathcal{W}_l^{T'}$  имеет представление

$$(\mathcal{W}_l^{T'} f)(x) = \begin{pmatrix} f_1(T' - x) \\ f_2(T' - 2x) \end{pmatrix} + \int_{T'-2x}^{T'-x} w^{T'}(x, t) f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq T,$$

с ядром

$$w^{T'}(x, t) = \begin{pmatrix} -p_{11}^{T'}(T' - x, t, 2x) & -p_{12}^{T'}(T' - x, t, 2x) - l(T' - x - t) \\ p_{21}^{T'}(T' - 2x, t, 2x) & p_{22}^{T'}(T' - 2x, t, 2x) \end{pmatrix},$$

определенным при  $T' - 2x \leq t \leq T' - x$  и аннулирующимся при других  $(x, t) \in [0, T] \times [0, T']$ . С учетом совпадения матриц  $p^{T'}$  и  $k^{T'}$ , имеем:

$$\begin{aligned}
w_{11}^{T'}(x, t) = & - \int_{T'-2x}^{T'-x} l(T' - x - \eta) l(t - \eta) d\eta \\
& - \int_{T'-2x}^{T'-x} \int_{T'-2x}^{T'-x} l(T' - x - \eta) l(t - s) k_{22}^{T'}(\eta, s, 2x) ds d\eta, \quad (3.102)
\end{aligned}$$

$$w_{12}^{T'}(x, t) = - \int_{T'-2x}^{T'-x} l(T' - x - \eta) k_{22}^{T'}(\eta, t, 2x) d\eta - l(T' - x - t), \quad (3.103)$$

$$w_{21}^{T'}(x, t) = \int_{T'-2x}^{T'-x} l(t - \eta) k_{22}^{T'}(T' - 2x, \eta, 2x) d\eta + l(t - T' + 2x), \quad (3.104)$$

$$w_{22}^{T'}(x, t) = k_{22}^{T'}(T' - 2x, t, 2x). \quad (3.105)$$

### Первый способ определения $A$ и $B$ .

В общем случае этот способ был описан в разделе 3.4.1.

**Шаг 5.** Из Предложения 2 с заменой  $T$  на  $T'$  следуют представления для матриц  $\beta^i$  и  $\varkappa^i$ :

$$\beta^i(x) = -w^{T'}(x, \langle T' - ix \rangle) = (-1)^{i+1} w^{T'}(x, T' - ix), \quad (3.106)$$

$$\varkappa^i(x) = \left[ w_t^{T'}(x, t) \right]_{t=T'-ix-0}^{t=T'-ix+0} = (-1)^i \left[ w_t^{T'}(x, t) \right]_{t=T'-ix}, \quad i = 1, 2.$$

**Шаг 6.** Из формул лучевого метода (1.34), (1.35) следует представление для элемента матрицы  $A$ :

$$a(x) = \frac{3}{2} \beta_{21}^1(x) = \frac{3}{2} \beta_{12}^2(x), \quad x \in (0, T).$$

С учетом равенства (3.106) и соотношений (3.103), (3.104) находим

$$a(x) = \frac{3}{2} \left( \int_0^x k_{22}^{T'}(T' - x - s, T' - 2x, 2x) l(s) ds + l(x) \right). \quad (3.107)$$

Матрица  $B$  определяется по формулам (1.36)–(1.38), которые в данном случае упрощаются:

$$\begin{aligned} B_{11} &= -\frac{2}{3}a^2 - 2(\beta_{11}^1)', \\ B_{12} &= 3\chi_{12}^2 - \frac{8}{3}a' - 2\beta_{22}^2a, \\ B_{21} &= -\frac{3}{2}\chi_{21}^1 - \frac{2}{3}a' + \beta_{11}^1a, \\ B_{22} &= \frac{4}{3}a^2 - 2(\beta_{22}^2)'. \end{aligned}$$

Из (3.107) видно, что  $a(x) \equiv 0$  тогда и только тогда, когда  $l(x) \equiv 0$ . Следовательно, выбирая ненулевую функцию  $l$ , получим систему с ненулевыми матрицами  $A$  и  $B$ .

### Второй способ.

Матрицы  $A$  и  $B$  можно найти способом, описанным в разделе 3.4.2.

**Шаг 5'.** В силу (3.97), оператор  $\mathcal{W}_l^{T'} : \mathcal{M}_l^{T'} \rightarrow \mathcal{N}^T$  оказывается унитарным (см. Лемму 11), а сопряженный оператор  $(\mathcal{W}_l^{T'})^* : \mathcal{N}^T \rightarrow \mathcal{M}_l^{T'}$  имеет представление:

$$\left( (\mathcal{W}_l^{T'})^* y \right) (t) = \begin{pmatrix} y_1(T' - t) \\ y_2\left(\frac{T' - t}{2}\right) \end{pmatrix} + \int_{\frac{T' - t}{2}}^T w_*^{T'}(t, x) y(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T',$$

с ядром

$$w_*^{T'}(t, x) = \left[ w^{T'} \right]^{tr}(x, t)\rho, \quad (t, x) \in [0, T'] \times [0, T].$$

В силу унитарности оператора  $\mathcal{W}_l^{T'}$ , для матричного ядра  $w_{-1}^{T'}$  интегральной части оператора  $(\mathcal{W}_l^{T'})^{-1}$  справедливо равенство

$$w_{-1}^{T'}(t, x) = \left[ w^{T'} \right]^{tr}(x, t)\rho. \quad (3.108)$$

**Шаг 6'.** Ввиду простой связи (3.108) матричных ядер  $w_{-1}^{T'}$  и  $w^{T'}$ , пред-

ставления для матриц  $A$  и  $B$ , полученные в Теореме 5, упрощаются:

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{3}{2}w_{21}^{T'}(x, T' - x) = -\frac{3}{2}w_{12}^{T'}(x, T' - 2x) \\ &= \frac{3}{2} \left( l(x) + \int_0^x k_{22}^{T'}(T' - 2x, T' - x - s, 2x) l(s) ds \right), \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} B(x) &= \gamma \left( \tilde{w}_{\mathbf{I}}^{T'} \right)^{tr}(x) \rho - 2 \left( \tilde{w}_{\mathbf{II}}^{T'} \right)^{tr}(x) \rho - \rho \tilde{w}_{\mathbf{II}}^{T'}(x) \\ &\quad + \rho w^{T'}(x, \langle T' - x \rangle) \left( w^{T'} \right)^{tr}(x, \langle T' - x \rangle) \rho \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho w^{T'}(x, \langle T' - 2x \rangle) \left( w^{T'} \right)^{tr}(x, \langle T' - 2x \rangle) \rho, \end{aligned} \quad (3.110)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{T'}(x) &= \begin{pmatrix} w_{11}^{T'}(x, \langle T' - x \rangle) & w_{12}^{T'}(x, \langle T' - 2x \rangle) \\ w_{21}^{T'}(x, \langle T' - x \rangle) & w_{22}^{T'}(x, \langle T' - 2x \rangle) \end{pmatrix}, \\ \tilde{w}_{\mathbf{I}}^{T'}(x) &= \begin{pmatrix} (w_{11}^{T'})'_{(1)}(x, \langle T' - x \rangle) & (w_{12}^{T'})'_{(1)}(x, \langle T' - 2x \rangle) \\ (w_{21}^{T'})'_{(1)}(x, \langle T' - x \rangle) & (w_{22}^{T'})'_{(1)}(x, \langle T' - 2x \rangle) \end{pmatrix}, \\ \tilde{w}_{\mathbf{II}}^{T'}(x) &= \begin{pmatrix} (w_{11}^{T'})'_{(2)}(x, \langle T' - x \rangle) & (w_{12}^{T'})'_{(2)}(x, \langle T' - 2x \rangle) \\ (w_{21}^{T'})'_{(2)}(x, \langle T' - x \rangle) & (w_{22}^{T'})'_{(2)}(x, \langle T' - 2x \rangle) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отметим, что формулы (3.109) и (3.110) удовлетворяют условию самосопряженности

$$a'(x) = B_{21}(x) - B_{12}(x), \quad x \in [0, T],$$

что является следствием самосопряженности оператора  $L$ , определенного в (3.44).

## Литература

1. Авдонин С. А., Белишев М. И., Иванов С. А. Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения  $y_{tt} - y_{xx} + v(x)y = 0$  // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 3. С. 307–331.
2. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн // Москва: Наука. 1972.
3. Белишев М. И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // Докл. Акад. Наук СССР. 1987. Т. 297. № 3. С. 524–527.
4. Белишев М. И. Граничное управление и обратные задачи: Одномерный вариант ВС-метода // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 19–80.
5. Белишев М. И., Благовещенский А. С. Динамические обратные задачи теории волн // СПб: С.-Пб Государственный Университет. 1999.
6. Белишев М. И., Иванов С. А. Граничное управление и канонические реализации двухскоростной динамической системы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 222. С. 18–44.
7. Белишев М. И., Иванов С. А. Характеризация данных динамической обратной задачи для двухскоростной системы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1999. Т. 259. С. 19–45.
8. Белишев М. И., Иванов С. А. Единственность в малом в динамической обратной задаче для двухскоростной системы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2001. Т. 275. С. 41–54.
9. Белишев М. И., Иванов С. А. Восстановление параметров системы связанных балок по динамическим граничным измерениям // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2005. Т. 324. С. 20–42.
10. Белишев М. И., Зуров А. В. Эффекты, связанные с совпадением скоростей в двухскоростной динамической системе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. Т. 264. С. 44–65.

11. Белишев М. И., Пестов А. Л. Прямая динамическая задача для балки Тимошенко // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2009. Т. 369. С. 16–47.
12. Белишев М. И., Пестов А. Л. Характеризация данных обратной задачи для одномерной двухскоростной динамической системы // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26. № 3. С. 89–130.
13. Благовещенский А. С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 115. С. 28–38.
14. Благовещенский А. С. О несамосопряженной обратной краевой задаче в матричной форме для гиперболического дифференциального уравнения // Проблемы Математической Физики. 1971. Т. 5. Р. 38–61.
15. Благовещенский А. С. Обратная осесимметричная задача Лэмба // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1992. Т. 203. С. 51–67.
16. Григолюк Э. И., Селезов И. Г. Неклассические модели теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Москва: Итоги Науки и Техники, сер. Механика твердых деформируемых тел. 1973. Т. 5.
17. Зуров А. В. Эффекты, связанные с совпадением скоростей в двухскоростной динамической системе // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2003. Т. 297. С. 49–65.
18. Крейн М. Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. Акад. Наук СССР. 1954. Т. 95. № 6. С. 767–770.
19. Нижник Л. П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений // Киев: Изд. Наукова Думка. 1991.
20. Пестов А. Л. Об обратной задаче для одномерной двухскоростной динамической системы // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 426. С. 150–188.
21. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики // Москва: Наука. 1984.
22. Романов В. Г. О задаче определения параметров упругой слоистой среды и импульсного источника // Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49. № 5. С. 1157–1183.
23. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids // Amsterdam:

North–Holland Publishing Company. 1987.

24. Belishev M. I. Boundary Control Method in Dynamical Inverse Problems – An Introductory Course // Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. 2011. Vol. 529. P. 85–150.
25. Belishev M. I., Blagovestchenskii A. S., Ivanov S. A. Erratum to «The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems» // Wave Motion. 1997. Vol. 25. P. 83–107. – Wave Motion. Vol. 26. 1997.
26. Blagovestchenskii A. S. Inverse problems of wave processes // Netherlands: VSP. 2001.
27. Chadwick P. and Ogden R. W. On the definition of elastic moduli // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1971. Vol. 44. № 1. P. 41–53.
28. Chadwick P. and Ogden R. W. A theorem of tensor calculus and its application to isotropic elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1971. Vol. 44. № 1. P. 54–68.
29. Morassi A., Nakamura G., Sini M., An inverse dynamical problem for connected beams // Euro. Jnl. of Applied. Mathematics. 2005. Vol. 16. № 1. P. 83–109.
30. Morassi A., Rocchetto L. A Damage Analysis of Steel-Concrete Composite Beams Via Dynamic Methods: Part 1. Experimental Results // Journal of Vibration and Control. 2003. Vol. 9. P. 507–527.
31. Rakesh, Sacks P. Stability for an inverse problem for a two speed hyperbolic pde in one space dimension // Inverse Problems. 2010. Vol. 26. № 2. 025005. P. 20
32. Rakesh, Tang J., Lacey A. Determining the twist in an optical fiber // arXiv:1512.02631v1 [math.AP], accepted for publishing in Inverse Problems. 2015.
33. Sacks P., Yakhno V. The inverse problem for a layered anisotropic half space // Journal of Mathematical Analysis and Application. 1998. Vol. 228. № 2. P. 377–398.