САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

ЗОЛОТОВ ВЛАДИМИР ОЛЕГОВИЧ

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ГЕОМЕТРИЮ КОНЕЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

01.01.04 — Геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание учёной степени кандидата
физико—математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:
доктор физико—математических наук,
член-корреспондент РАН
Иванов С. В.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2020

Оглавление

1 Введение

Цели и задачи работы. Задачей работы является изучение свойств метрических пространств, зависящих только от изометрических типов конечных подмножеств. Наибольшее внимание уделено Марковскому типу, его связи с пространствами Александрова кривизны ≥ 0, а также классу конечно-плоских пространств.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Рассмотрение свойств метрических пространств, зависящих только от изометрических типов конечных подмножеств, имеет богатую историю. К такого рода свойствам относятся свойство удвоения [24, 30, 21, 8, 31, 29, 43, 7], тип Энфло [36, 23, 20, 37], масштабированный тип Энфло [36, 35, 26], Марковский тип [36, 41, 42, 12, 38, 22, 34, 14, 15]. Ответы на следующие вопросы о метрическом пространстве определяются только его конечными подмножествами:

- вкладывается ли данное пространство изометрично или билипшицево в Евклидово пространство ограниченной размерности?
- Является ли пространство ультраметрическим? (зависит только от трехточечных подпространств).
- Вкладывается ли данное пространство изометрично в некоторое дерево? (зависит только от четырех-точечных подпространств).

Помимо важности для теоретического исследования метрических пространств, конечно-точечные свойства важны для прикладных вопросов, где в большинстве случаев метрическое пространство либо дискретно по своей природе, либо представлено некой выборкой своих точек.

К задачам, решаемым с привлечением конечно-точечных свойств, относятся помимо вышеуказанных вопросов о вложимости [34, 12] вопросы о продолжимости липшицевых и би-липшицевых отображений [14, 38, 36], задача поиска ближайшего соседа, задачи кластеризации [24, 30], задачи маршрутизации [21, 8], задачи о построении сетей [31, 29], задачи поиска [43, 7].

Отдельно стоит выделить такие свойства, как ограниченность кривизны по Александрову (кривизна $\geq k$ и кривизна $\leq k$). Хотя их можно определить через условие на расстояния для четверок точек, в дополнение необходимо требовать, чтобы метрика была внутренней. (То есть чтобы расстояние между любыми двумя точками равнялось инфимуму длин путей, соединяющих эти две точки). Попытки избавиться от этого дополнительного требования приводят к ряду сложных открытых вопросов.

Следующий вопрос о характеризации конечных подмножеств пространств Александрова сформулирован С. Александер, В. Каповичем и А. Петруниным [11], см. также [12].

Вопрос 1.1. *Каково необходимое и достаточное условие на конечное метрическое пространство, чтобы оно допускало изометрическое вложение в пространство Александрова кривизны $\geq k$?*

Аналогичный вопрос для пространств Александрова кривизны $\leq k$ принадлежит М. Громову [27, Секция 1.19_+], [28, §15(b)], см. также [46, 45].

Первый основной результат данной работы проливает некоторый свет на то, как устроены конечные подмножества Александровских пространств, см. Теорему 1.3. Но перед тем, как его привести, нам нужно следующее определение, формализующее следующее неформальное описание: класс метрических пространств K называется конечно-плоским, если с точки зрения конечных подмножеств он совпадает с классом компактных плоских многообразий.

Определение 1.2. *Будем говорить, что метрическое пространство X является конечно-плоским, если для любого конечного $Y \subset X$ и любого $\epsilon > 0$ существует плоское компактное многообразие M и вложение $f : Y \to M$ такое, что*

$$d_X(y_1, y_2) \leq d_M(f(y_1), f(y_2)) \leq (1+\epsilon) d_X(y_1, y_2),$$

для любых $y_1, y_2 \in Y$.

Теорема 1.3. *Следующие пространства являются конечно-плоскими:*

1. *2-пространства Вассерштейна (см. Определение 2.10) над Евклидовыми пространствами,*

2. *факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп,*

3. *компактные плоские орбиобразия,*

4. *компактные плоские многообразия (тривиальное утверждение),*

5. *факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий,*

6. *2-пространства Вассерштейна над связными компактными группами Ли с би-инвариантными метриками.*

Верно и обратное: если Y *конечное подмножество плоского многообразия* M, $\epsilon > 0$, *и* K *один из классов пространств (1)–(6), то существует* $X \in K$ *и* $f : Y \to X$ *такое, что*

$$d_M(y_1, y_2) \leq d_X(f(y_1), f(y_2)) \leq (1 + \epsilon) d_M(y_1, y_2).$$

Отметим, что все пространства, участвующие в Теореме 1.3, являются пространствами Александрова кривизны ≥ 0. Для пространств Вассерштейна это следует из [44, Предложения 2.10]. Для компактных плоских многообразий и связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками неотрицательность кривизны по Александрову следует из неотрицательности секционной кривизны. Для факторов Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп, компактных плоских орбиобразий и факторов связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий неотрицательность кривизны по Александрову можно получить при помощи предложения, данного в [6, Секции 4.6].

Из Теоремы 1.3 следует, что любые свойства классов пространств, зависящие только от конечных подмножеств, совпадают для классов пространств (1)–(6), рассматриваемых в Теореме 1.3. В частности, мы применим Теорему 1.3 к вычислению констант Марковского типа для вышеуказанных классов Александровских пространств. Но перед этим мы остановимся более подробно на истории пространств Александрова, Марковского типа и связи между ними.

Пространства Александрова кривизны, ограниченной снизу. Понятие пространства Александрова кривизны, ограниченной снизу, было введено А. Д. Александровым [5, 9] в пятидесятых годах, см. также [10]. Оно обобщает понятие риманова многообразия секционной кривизны, ограниченной снизу. Грубо говоря, метрическое пространство является пространством Александрова кривизны $\geq k$, если (локально) каждый треугольник в этом пространстве имеет углы больше либо равные углам треугольника с теми же длинами сторон, но взятого в пространстве постоянной кривизны $= k$ (т.е. сфере, Евклидовой плоскости или плоскости Лобачевского).

Ключевой в истории пространств Александрова кривизны, ограниченной снизу, является работа Ю. Д. Бураго, М. Л. Громова и Г. Я. Перельмана [6]. Один из основных результатов этой статьи — теорема о глобализации (теорема Топоногова), которая гласит, что если вышеуказанное условие на углы выполнено локально, то оно выполнено и глобально. Одним из следствий этого результата является то, что пределы полных римановых многообразий кривизны $\geq k$ являются пространствами Александрова кривизны $\geq k$ (Предел в данном контексте подразумевается относительно метрики на множестве метрических пространств, называемой метрикой Громова–Хаусдорфа).

Более того, в [6] показано, что класс пространств Александрова кривизны $\geq k$, размерности $n \in \mathbb{N}$ и диаметра, не превосходящего $D > 0$, является компактом (относительно метрики Громова–Хаусдорфа). Вышеуказанные свойства имеют большую важность для приложении к теории римановых многообразий, так как позволяют рассматривать крайние случаи, либо эксплуатировать компактность при доказательстве утверждений про римановы многообразия кривизны $\geq k$.

Марковский тип. Понятие Марковского типа было введено К. Боллом [14] как инструмент для продолжения липшицевых отображений. Полное определение приводится в Параграфе 2.2, здесь ограничимся следующим: метрическое пространство обладает Марковским типом p (см. Определение 2.8), если существует $K > 0$ такое, что для произвольного симметричного Марковского процесса на X и любого $T \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_p(T) \leq K^p T \mathcal{E}_p(T), \tag{1.0.1}$$

где $\mathcal{E}(T)$ обозначает математическое ожидание p-ой степени расстояния, проходимого процессом за T шагов. Константой Марковского типа p, соответствующей времени T, пространства X называют инфимум таких K, для которых для всевозможных симметричных Марковских процессов на X выполняются неравенства (1.0.1) (при фиксированном T), ее обозначают $M_p(X, T)$. Константой Марковского типа p пространства X называют инфимум таких K, для которых для всевозможных симметричных Марковских процессов на X неравенства (1.0.1) выполняются для всех $T \in \mathbb{N}$, ее обозначают $M_p(X)$.

Кроме того, что Марковский тип является одним из ключевых инструментов для продолжения липшицевых отображений между пространствами, см. [14, 38, 39], он используется в как средство доказательства невложимости метрических пространств при ограничении на билипшицево искажение, см. [15, 34].

Александровские пространства неотрицательной кривизны и Марковский тип 2. С.-И. Охта и М. Пишо [42] показали, что любое геодезическое метрическое пространство, обладающее Марковским типом 2 с константой 1, является пространством неотрицательной кривизны по Александрову. Встал вопрос о том, верно ли обратное (см. [12, 41]).

Вопрос 1.4. *Верно ли, что любое Александровское пространство неотрицательной кривизны обладает Марковским типом* 2 *с константой* 1*?*

Вопрос 1.4 интересен не только сам по себе, но и как возможный подход к вопросу 1.1. Его частичное положительное решение дано в работах [3, 2], которые являются основой для диссертации. В данном тексте эти результаты сформулированы как Теорема 1.5.

Теорема 1.5. *Пусть X принадлежит одному из следующих классов метрических пространств:*

1. 2*-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами,*
2. *факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп,*
3. *компактные плоские орбиобразия,*
4. *компактные плоские многообразия,*
5. *факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по изометрическим действиям компактных групп Ли. (В частности в этот класс входят стандартные Евклидовы сферы, рассматриваемые с их внутренними метриками).*

Тогда X обладает Марковским типом 2 *с константой* 1.

Теорема 1.5 отвечает на вопросы, сформулированные в работах [12, 42]. До работы [3] не было даже известно, обладает ли окружность, рассматриваемая со своей внутренней метрикой, Марковским типом 2 с константой 1. Но было известно, что все Александровские пространства неотрицательной кривизны обладают Марковским типом с какими-то константами, однородно ограниченными сверху. Первая оценка такого типа была найдена С.-И. Охта в [41], где он показал, что любое Александровское пространство кривизны ≥ 0 обладает Марковским типом 2 с константой $\sqrt{6}$. Эта константа была улучшена А. Наором и Ю. Пересом до $1+\sqrt{2}$ (этот результат также опубликован в [41]). Позднее эта константа была улучшена до $\sqrt{1\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-1}}$ А. Андони, А. Наором и О. Нейманом, см. [12].

Для доказательства Теоремы 1.5 мы используем следующую теорему, которая предоставляет инструмент, позволяющий оценивать константы Марковского типа метрических пространств.

Для метрического пространства X мы обозначаем через $\mathscr{P}_p(X)$ p-пространство Вассерштейна над X (см. Определение 2.10).

Теорема 1.6. *Пусть $p \geq 1$ и X, Y метрические пространства такие, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1. *X и Y являются геодезическими пространствами, и X накрывает Y посредством конечнолистного, локально изометрического накрытия,*

2. *Y является фактор-пространством X под действием конечной группы, действующей изометриями,*

3. *Y является p-пространством Вассерштейна над X.*

Тогда для каждого $T \in \mathbb{N}$ мы имеем $M_p(X,T) \geq M_p(Y,T)$ и $M_p(X) \geq M_p(Y)$. Более того, в случае (3) выполняется $M_p(\mathscr{P}_p(X),T) = M_p(X,T)$, где $\mathscr{P}_p(X)$ обозначает p-пространство Вассерштейна над X.

Как видно из формулировки, область применимости Теоремы 1.6 не ограничивается пространствами Александрова неотрицательной кривизны, кроме того, она позволяет оценивать константы Марковского типа и для $p \neq 2$. Пользуясь этим, мы получаем следующие оценки на константы Марковского типа пространств Вассерштейна:

Следствие 1.7. *Для любых $p \in (2,\infty)$ и $T, d \in \mathbb{N}$ выполняется*

1. $M_p(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d), T) \le 16 d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$,

2. $M_2(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \le 4 d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sqrt{p-1}$.

Нижняя оценка на достаточное билипшицево искажение для вложения сноуфлейков в пространства Вассерштейна.

Определение 1.8. *Пусть X, Y метрические пространства и $f : X \to Y$. Би-липшицевым искажением f (обозначаемым $dist(f) \in [1, \infty]$) называется инфимум $D \ge 1$ таких, что существует $c = c(D) > 0$, для которого*

$$c d_X(x_1, x_2) \le d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le D c d_X(x_1, x_2),$$

для любых $x_1, x_2 \in X$.

Определение 1.9. *Для метрического пространства X и $0 \le \alpha < 1$ α-сноуфлейком X (обозначаемым X^α) называется метрическое пространство на множестве X с метрикой, заданной равенством*

$$d_{X^\alpha}(x_1, x_2) = (d_X(x_1, x_2))^\alpha.$$

Легко показать, что в X^α действительно выполняется неравенство треугольника, см. Замечание 2.4.

При помощи вышеуказанных оценок мы получаем следующее ограничение на вложимость сноуфлейков в пространства Вассерштейна, отвечая на вопрос [12].

Следствие 1.10. *Для каждого $n > 1$ существует n-точечное метрическое пространство X_n такое, что для любого $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$, любого $p \in (2, \infty)$ и любого $d \in \mathbb{N}$ α-сноуфлейк X_n не допускает вложения в $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$ с билипшицевым искажением менее, чем $C d^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} p^{-\frac{1}{2}} (\log n)^{\alpha-\frac{1}{2}}$, где $C > 0$ абсолютная константа.*

Следствие 1.10 было выдвинуто в качестве гипотезы в [12].

Научная новизна. Все результаты являются новыми.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Теорема 1.5 и Следствие 1.10 отвечают на вопросы, заданные в работах [12, 42].

Достоверность результатов и апробация работы. Для результатов работы даны точные доказательства. Результаты опубликованы в журналах категории $Q1$, докладывались на семинарах Лаборатории Геометрии ПОМИ РАН, геометрическом семинаре математического Института Кельна, международной конференции "Дни геометрии в Новосибирске — 2016" и периоде интенсивной активности "Metric Measure Spaces and Ricci Curvature" в институте Макса Планка в Бонне.

Публикации. По теме диссертации автором опубликованы статьи [2, 3, 4], а также препринт [1]. В статье [4], выполненной в соавторстве, автору принадлежат основные определения: определение биполярного сравнения и T-древовидного сравнения. Постановка задачи, решением которой является [4, Теор. 1.1], также принадлежит автору. Доказательства [4, Теор. 1.1], [4, Теор. 1.2] и [4, Теор. 1.6] принадлежат соавторам. На защиту выносятся только результаты работ [2, 3], выполненных без соавторов. Журналы, в которых опубликованы статьи [2, 3, 4], удовлетворяют рекомендациям ВАК.

Методология и методы исследования. Для доказательства Теоремы 1.6 автором введена новая техника поднятия Марковских цепей вдоль отображений. Она позволяет переносить верхние оценки на константы Марковского типа с накрывающего пространства на накрываемое, с пространства на его фактор по конечной группе изометрий, либо с пространства на пространство Вассерштейна над данным пространством.

В основе доказательства Теоремы 1.3 новая конструкция, позволяющая вкладывать пространства Вассерштейна над связными компактными группами Ли с би-инвариантными метриками в пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами.

Структура диссертации. Диссертация состоит из пяти глав. Основные результаты изложены во Введении, Главе 1. В Главе 2 изложены предварительные сведения, необходимые определения и используемые обозначения.

Глава 3 посвящена доказательству Теоремы 1.6, Следствий 1.7 и 1.10. Более подробно: в Параграфе 3.1 и Параграфе 3.2 мы вводим и изучаем поднятия Марковских цепей. В Параграфах 3.3, 3.4 и 3.5 мы доказываем части (1), (2) и (3) Теоремы 1.6, соответственно. В завершающем главу Параграфе 3.6 мы приводим доказательства следствий 1.7 и 1.10, а также обсуждаем контрпримеры.

В Главе 4 даны доказательства Теорем 1.3 и 1.5. Доказательство, которое мы приводим в Параграфе 4.2, существенно упрощено по сравнению с данным в работах [3, 2] за счет использования Теоремы 1.3.

Заключение дано в Главе 5.

Положения, выносимые на защиту.

1. Показано, что следующие метрические пространства являются конечно-плоскими: (а) 2-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами, (б) факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп, (в) компактные плоские орбиобразия, (г) факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий (Теорема 1.3).

2. Доказано, что компактные плоские многообразия, а также пространства, принадлежащие классам (а)–(г), обладают Марковским типом 2 с константой 1 (Теорема 1.5).

3. Разработан новый метод получения верхних оценок на константы Марковского типа (Теорема 1.6).

4. Получены верхние оценки на константы Марковского типа пространств Вассерштейна над Евклидовыми пространствами (Следствие 1.7).

5. Доказана нижняя оценка на достаточное билипшицевое искажение для вложения сноуфлейков в пространства Вассерштейна (Следствие 1.10).

Благодарности. Я благодарен С. В. Иванову за руководство при выполнении данной работы, множество идей и огромное терпение. Я выражаю благодарность А. Лычаку за внимание к моим работам и в особенности за ключевую подсказку, которая сформулирована в тексте как Лемма 4.4. Я благодарен А. Наору за ценные комментарии к работе [3], которые привели в частности к получению Следствия 1.7(2). Я признателен А. В. Алпееву, П. А. Галашину и Н. Д. Лебедевой за плодотворные обсуждения.

2 Термины, обозначения и предварительные сведения

2.1 Метрические пространства

Определение 2.1. *Пусть X метрическое пространство, $a \leq b$ и $\gamma : [a, b] \to X$ кривая в X. Длина γ, которую мы будем обозначать за $L(\gamma)$, определяется формулой*

$$L(\gamma) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b} \sum_{k=1}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \in [0, \infty].$$

Определение 2.2. *Метрическое пространство X является геодезическим, если для любой пары точек $x, y \in X$ существует непрерывный путь γ, соединяющий x и y, такой, что*

$$d(x, y) = L(\gamma).$$

Определение 2.3. *Пусть X метрическое пространство и G группа, действующая на X изометриями. Фактор полуметрика на X определяется формулой*

$$d_G(x, y) = \inf_{g_1, g_2 \in G} d(g_1(x), g_2(y)).$$

Фактор-пространство X/G это метрическое пространство, которое получается из (X, d_G) отождествлением точек, находящихся на расстоянии 0.

Для метрического пространства X мы обозначаем за $\operatorname{diam}(X)$ диаметр X. При помощи $\operatorname{Iso}(X)$ мы обозначаем группу изометрий X.

Пусть X и Y метрические пространства, и $p \geq 1$. Мы пишем $X \times_p Y$, чтобы обозначить p-произведение пространств, т.е. пространство с расстоянием, определяемым формулой

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2))^p = d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p.$$

Мы обозначаем при помощи X_p^n n-ную p-степень X, т.е.,

$$X_p^n = X \times_p X \times_p \dots \times_p X \text{ (n раз).}$$

Симметрическая группа S_n действует на X_p^n перестановками координат. Мы обозначаем за X_p^n/S_n соответствующее (метрическое) фактор-пространство.

Для $c > 0$ мы обозначаем за cX пространство с масштабированной метрикой, где расстояние определяется следующей формулой:

$$d_{cX}(x, y) = cd_X(x, y).$$

Замечание 2.4. *Пусть X метрическое пространство, $0 \leq \alpha < 1$ и X^α α-сноуфлейк X (см. Определение 1.9). Тогда в X^α выполняется неравенство треугольника.*

Доказательство. Достаточно показать, что для $a, b, c > 0$ неравенство

$$a \leq b + c$$

влечет

$$a^\alpha \leq b^\alpha + c^\alpha.$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что

$$a = b + c.$$

Более того, за счет масштабирования можно считать, что $a = 1$.

Таким образом осталось показать, что для $b, c > 0$ таких, что $b + c = 1$, выполняется $1 \leq b^\alpha + c^\alpha$. Так как функция x^α вогнутая, имеем

$$b^\alpha + c^\alpha \geq 2\Big(\frac{b+c}{2}\Big)^\alpha \geq (b + c)^\alpha = 1^\alpha = 1.$$

$\square$

Определение 2.5. *Мы говорим, что конечное метрическое пространство допускает почти изометрическое вложение в класс метрических пространств C, если для любого $\epsilon > 0$ существует вложение X в одно из пространств из класса C с билипшицевым искажением, не превосходящим $1 + \epsilon$.*

2.2 Марковские цепи и метрические пространства

Пусть $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ Марковская цепь на конечном множестве S с переходными вероятностями $a_{ij} = Pr[Z_{t+1} = j|Z_t = i]$, $i, j \in S$. Марковскую цепь $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ называют *стационарной*, если $\pi_i = Pr[Z_t = i]$ не зависит от $t = 0, 1, 2, \ldots$ Стационарную Марковскую цепь $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ называют *обратимой*, если $\pi_i a_{ij} = \pi_j a_{ji}$, для любых $i, j \in S$.

Для того, чтобы сконструировать стационарную обратимую Марковскую цепь на конечном множестве S, достаточно определить вектор с неотрицательными координатами $(\pi_i)_{i\in S}$ и матрицу с неотрицательными коэффициентами $(a_{ij})_{i,j\in S}$ и убедиться, что

(2.2.1) вектор π является стохастическим, т.е. $\sum_{i\in S} \pi_i = 1$,

(2.2.2) матрица a является стохастической, т.е. $\sum_{j\in S} a_{ij} = 1$, для любого $i \in S$,

(2.2.3) $\pi_i a_{ij} = \pi_j a_{ji}$, для любых $i, j \in S$.

Причем свойство (3.1.3) влечет как стационарность, так и обратимость.

Напомним, что последовательность случайных величин $W = \{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ на множестве X называют *случайным блужданием*.

Определение 2.6. *Мы называем случайное блуждание W на множестве X Марковским блужданием, если существует стационарная обратимая Марковская цепь $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ на конечном множестве состояний S, и отображение $f : S \to X$ такое, что $W_t = f(Z_t)$.*

(Если отображение f инъективно, то W_t это просто стационарная обратимая Марковской цепь на конечном подмножестве в X. Если X является метрическим пространством без изолированных точек, то любое Марковское блуждание на X может быть аппроксимировано стационарной обратимой Марковской цепью на конечном подмножестве X. Однако при наличии изолированных точек, например в случае конечных метрических пространств,

класс Марковских блужданий является намного более богатым, чем класс стационарных обратимых Марковских цепей на конечных подмножествах).

Мы говорим, что Марковские блуждания W и $\widetilde{W}$ на множестве X эквивалентны, если вероятностные меры на множествах последовательностей $X^\infty = \{\{x_i\}_{i=1}^\infty | x_i \in X\}$, индуцированные W и $\widetilde{W}$, совпадают.

Обозначение 2.7. *Пусть Z стационарная обратимая Марковская цепь на конечном множестве состояний S, и $S_0, \ldots, S_T \subset S$. Мы обозначаем за*

$$A^Z(S_0, \ldots, S_T)$$

вероятность $Pr[Z_0 \in S_0, \ldots, Z_T \in S_T]$. Для $s \in S$ и $S_1 \subset S$ мы обозначаем за $P^Z(s, S_1)$ условную вероятность $Pr[Z_1 \in S_1 | Z_0 = s]$.

Для Марковского блуждания W на метрическом пространстве X и $T \in \mathbb{N}$, мы обозначаем за $\mathcal{E}_p(W,T)$ математическое ожидание $\mathbb{E}\, d(W_T, W_0)^p$.

Следующее определение является несколько перефразированной версией определения, данного в [12, Секции 3].

Определение 2.8. *Пусть X метрическое пространство, $T \in \mathbb{N}$ и $p \geq 1$. Константой Марковского типа p, соответствующей времени T, пространства X, обозначаемой $M_p(X,T)$, называют инфимум всевозможных $K > 0$ таких, что для любого Марковского блуждания W на X*

$$\mathcal{E}_p(W,T) \leq K^p T \mathcal{E}_p(W,1).$$

Константа Марковского типа p, обозначаемая $M_p(X)$, определяется равенством

$$M_p(X) = \sup_{T \in \mathbb{N}} M_p(X,T) \in [1, \infty].$$

Говорят, что X обладает Марковским типом p, если $M_p(X) < \infty$.

Следующее предложение является непосредственным следствием определений.

Предложение 2.9. *Для любых метрических пространств X, Y, $p \geq 1$, $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $T \in \mathbb{N}$ выполняется следующее:*

1. $M_p(X \times_p Y, T) = \max\{M_p(X,T), M_p(Y,T)\}$,

2. $M_p(X_p^n, T) = M_p(X,T)$,

3. $M_p(cX, T) = M_p(X,T)$.

Пусть U и V две вещественнозначные случайные величины. Мы пишем $U =_{st} V$, если U и V имеют одинаковые распределения. Для U и V, заданных на одном вероятностном пространстве, мы пишем $U \overset{a.s.}{\leq} V$, если $U \leq V$ почти всегда, т.е. $Pr[U > V] = 0$.

2.3 Пространства Вассерштейна

Для метрического пространства X мы обозначаем при помощи $\mathscr{P}_p(X)$ p-пространство Вассерштейна (пространство Канторовича–Рубинштейна) над X. В следующих абзацах мы напомним определение. Для более подробного введения в теорию пространств Вассерштейна см. [47].

Определение 2.10. *Пусть X метрическое пространство. Пусть $p \geq 1$ и пусть μ, ν вероятностные меры с конечным p-ым моментом, т.е. такие, что*

$$\int_X d^p(x,o)d\mu(x) < \infty, \int_X d^p(x,o)d\nu(x) < \infty,$$

для какого-то (а значит и любого) $o \in X$. Мы говорим, что мера q на $X \times X$ является спариванием μ и ν, если

$$q(A \times X) = \mu(A),\ q(X \times A) = \nu(A),$$

для любых борелевских подмножеств $A \subset X$; p-расстояние по Вассерштейну между μ и ν определяется как

$$d_{W_p}(\mu,\nu) = \inf\left\{ \Big(\int_{X\times X} d^p(x,y)dq(x,y) \Big)^{\frac{1}{p}} : q \text{ является спариванием } \mu \text{ и } \nu \right\}.$$

Наконец, p-пространство Вассерштейна $\mathscr{P}_p(X)$ *это множество борелевских вероятностных мер с конечным p-ым моментом на* X*, снабженных p-расстоянием Вассерштейна.*

3 Константы Марковского типа, плоские торы и пространства Вассерштейна

3.1 Поднятия Марковских цепей: определения и базовые свойства

Определение 3.1. *Пусть X и Y два множества и $\chi : X \to Y$ – отображение. Пусть $\widetilde{W}$ и W Марковские блуждания на X и Y. Мы говорим, что $\widetilde{W}$ является поднятием W вдоль χ, если Марковские блуждания $\chi(\widetilde{W})$ и W эквивалентны, см. Определение 2.6.*

В случае, если X и Y являются метрическими пространствами, и в дополнение к предыдущему свойству выполняется $d(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_0) =_{st} d(W_1, W_0)$, мы говорим, что $\widetilde{W}$ является метрическим поднятием W вдоль χ.

Предложение 3.2. *Пусть X и Y метрические пространства и $\chi : X \to Y$ 1-липшицево отображение. Предположим, что $\widetilde{W}$ это метрическое поднятие W вдоль χ, тогда*

1. $d(\widetilde{W}_1, \widetilde{W}_0) \overset{a.s.}{\leq} \operatorname{diam}(Y)$,
2. $\frac{\mathcal{E}_p(W,T)}{T\mathcal{E}_p(W,1)} \leq \frac{\mathcal{E}_p(\widetilde{W},T)}{T\mathcal{E}_p(\widetilde{W},1)}$, *для любого $T \geq 2$ и любого $p \geq 1$.*

Доказательство. Первое утверждение предложения следует непосредственно из определения метрического поднятия. Вышеуказанное определение также влечет, что

$$\mathcal{E}_p(\widetilde{W}, 1) = \mathcal{E}_p(W, 1), \text{ для любого } p \geq 1.$$

Из определения понятия и факта, что χ является 1-липшицевым отображением, получаем, что

$$\mathcal{E}_p(\widetilde{W}, T) \geq \mathcal{E}_p(W, T), \text{ для любого } T \geq 2 \text{ и любого } p \geq 1.$$

Что влечет второе утверждение предложения. $\square$

План доказательства Теоремы 1.6(1) – показать, что каждое Марковское блуждание на базе накрытия может быть поднято в накрывающее пространство, и применить Предложение 3.2(2) к полученному поднятию.

Определение 3.3. *Для стационарной обратимой Марковской цепи* $\{\widetilde{Z}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *на* $\widetilde{S}$ *мы говорим, что* $\widetilde{Z}$ *подчинено* $E \subset \widetilde{S} \times \widetilde{S}$*, если* $A^{\widetilde{Z}}(\{x\},\{y\}) = 0$*, для любых* $x, y \in \widetilde{S}$ *таких, что* $(x, y) \notin E$*, см. Обозначение 2.7.*

Пусть S, $\widetilde{S}$ конечные множества, $E \subset \widetilde{S} \times \widetilde{S}$ симметричное подмножество и $\sigma : \widetilde{S} \to S$ отображение. Для $x \in \widetilde{S}$ и $V \subset \widetilde{S}$ мы обозначаем за $\deg_E(x, V)$ количество элементов в $\{y \in V : (x, y) \in E\}$. Следующее определение предоставляет условие на E, которое влечет, что каждая стационарная обратимая Марковская цепь на S допускает поднятие вдоль σ, подчиненное E, см. Лемму 3.6.

Определение 3.4. *Мы говорим, что* σ *является регулярным по отношению к* E*, если* $\deg_E(x, \sigma^{-1}(s)) = \deg_E(y, \sigma^{-1}(s)) \neq 0$*, для любого* $s \in S$ *и для любых* $x, y \in \widetilde{S}$ *таких, что* $\sigma(x) = \sigma(y)$*.*

3.2 Поднятия Марковских цепей: основные леммы

Следующая лемма предоставляет достаточное условие того, что Марковская цепь является поднятием другой Марковской цепи. Более сложный аргумент показывает, что данное условие также является необходимым, см. Лемму 3.20.

Лемма 3.5. *Пусть* $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ *и* $\{\widetilde{Z}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *стационарные обратимые Марковские цепи на конечных множествах* S *и* $\widetilde{S}$ *и* $\sigma : \widetilde{S} \to S$ *отображение такое, что*

1. $A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s)) = A^{Z}(\{s\})$*, для каждого* $s \in S$*,*

2. $P^{\widetilde{Z}}(\widetilde{s}_1, \sigma^{-1}(s_2)) = P^{Z}(\sigma(\widetilde{s}_1), \{s_2\})$*, для каждых* $\widetilde{s}_1 \in \widetilde{S}, s_2 \in S$*.*

Тогда $\widetilde{Z}$ *является поднятием* Z *вдоль* σ*.*

Доказательство. Нам требуется показать, что для любого $T \in \mathbb{N}$ и любых $s_0, \dots, s_T \in S$

$$A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_0), \sigma^{-1}(s_1), \dots, \sigma^{-1}(s_T)) = A^Z(\{s_0\}, \{s_1\}, \dots, \{s_T\}).$$

Свойство (1) влечет случай $T = 0$. Общий случай следует из (2) по индукции.

□

Следующая лемма является главным техническим инструментом работы.

Лемма 3.6. *Пусть S, $\widetilde{S}$ конечные множества, $\sigma : \widetilde{S} \to S$ отображение, регулярное по отношению к симметричному множеству $E \subset \widetilde{S} \times \widetilde{S}$, и $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ стационарная обратимая Марковская цепь на S. Тогда существует стационарная обратимая Марковская цепь $\{\widetilde{Z}_t\}_{t=0}^{\infty}$ на $\widetilde{S}$ такая, что $\widetilde{Z}$ является поднятием Z вдоль σ, и $\widetilde{Z}$ подчинена E.*

Доказательство. Пусть π_x, a_{xy} стационарное распределение и переходная матрица для Z_t. Для $x \in \widetilde{S}$ мы обозначаем $\sigma^{-1}(\sigma(x))$ при помощи M_x. Мы определяем Марковскую цепь $\widetilde{Z}$ при помощи распределения $\widetilde{\pi}_x = \frac{\pi_{\sigma(x)}}{|M_x|}$ и переходной матрицы

$$\widetilde{a}_{xy} = \begin{cases} \frac{a_{\sigma(x)\sigma(y)}}{\deg_E(x, M_y)}, (x, y) \in E, \\ 0, \ (x, y) \notin E. \end{cases}$$

Начнем с демонстрации того, что $\widetilde{\pi}_x, \widetilde{a}_{xy}$ корректно определяют стационарную обратимую Марковскую цепь, т.е. убедимся в том, что выполняются свойства (3.1.1)–(3.1.3). Свойства (3.1.1), (3.1.2) и случай $(x, y) \notin E$ свойства (3.1.3) следуют непосредственно из определений $\widetilde{\pi}$ и $\widetilde{a}$.

Для того, чтобы верифицировать случай $(x, y) \in E$ свойства (3.1.3), мы должны показать, что $\widetilde{\pi}_x \widetilde{a}_{xy} = \widetilde{\pi}_y \widetilde{a}_{yx}$ для любых $x, y \in \widetilde{S}$ таких, что $(x, y) \in E$. Зафиксируем $x, y \in \widetilde{S}$, пусть N количество элементов в множестве

$$(M_x \times M_y) \cap E.$$

Так как σ регулярно по отношению к E, мы получаем

$$|M_x| \deg_E(x, M_y) = N = |M_y| \deg_E(y, M_x).$$

Следовательно,

$$\widetilde{\pi}_x \widetilde{a}_{xy} = \frac{\pi_{\sigma(x)}}{|M_x|} \frac{a_{\sigma(x)\sigma(y)}}{\deg_E(x, M_y)} = \frac{\pi_{\sigma(x)} a_{\sigma(x)\sigma(y)}}{N} =$$

$$= \frac{\pi_{\sigma(y)} a_{\sigma(y)\sigma(x)}}{N} = \frac{\pi_{\sigma(y)}}{|M_y|} \frac{a_{\sigma(y)\sigma(x)}}{\deg_E(y, M_x)} = \widetilde{\pi}_y \widetilde{a}_{yx}.$$

Значит мы действительно корректно определили стационарную обратимую Марковскую цепь $\widetilde{Z}$.

Нам остается показать, что $\widetilde{Z}$ является поднятием Z вдоль σ. Из определения $\widetilde{\pi}$ мы получаем

$$A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s)) = \pi_s, \text{ для любого } s \in S,$$

а определение $\widetilde{a}$ влечет

$$P^{\widetilde{Z}}(x, \sigma^{-1}(s)) = a_{\sigma(x)s}, \text{ для любых } x \in \widetilde{S}, s \in S.$$

Для завершения доказательства достаточно применить Лемму 3.5. □

3.3 Накрытия и доказательство Теоремы 1.6(1)

Следующая лемма влечет Теорему 1.6(1).

Лемма 3.7. *Пусть X, Y геодезические пространства и $\chi : X \to Y$ k-листное локально изометрическое накрытие. Тогда каждое Марковское блуждание на Y допускает метрическое поднятие вдоль χ (см. Определение 3.1).*

Доказательство. Пусть W Марковское блуждание на Y, заданное в виде $W_t = f(Z_t)$, где $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ стационарная обратимая Марковская цепь на конечном множестве S, и f отображение из S в Y.

Определим $\widetilde{S} = \{(s,x) \in S \times X : \chi(x) = f(s)\}$. Обозначим проекции с $\widetilde{S}$ на S и X при помощи σ и $\widetilde{f}$. Для каждой неупорядоченной пары $\{s_1, s_2\}$ (не обязательно различных) элементом S зафиксируем минимизирующую геодезическую $\gamma_{s_1 s_2}$, соединяющую $f(s_1)$ и $f(s_2)$. Пусть E множество всевозможных пар $(x_1, x_2) \in \widetilde{S} \times \widetilde{S}$ таких, что существует поднятие $\gamma_{\sigma(x_1)\sigma(x_2)}$, соединяющее $\widetilde{f}(x_1)$ и $\widetilde{f}(x_2)$. Заметим, что для любых $(x_1, x_2) \in E$

$$d_X(\widetilde{f}(x_1), \widetilde{f}(x_2)) = d_Y(f(\sigma(x_1)), f(\sigma(x_2))). \tag{3.3.1}$$

Существование и единственность накрывающего пути влечет, что

$$\deg_E(x, \sigma^{-1}(s)) = 1,$$

для любых $x \in \widetilde{S}, s \in S$. Следовательно, σ является регулярным отображением по отношению к E. Лемма 3.6 влечет существование стационарной обратимой Марковской цепи $\widetilde{Z}_t$ on $\widetilde{S}$, такой, что

1. $\widetilde{Z}_t$ является поднятием Z_t вдоль σ,
2. $\widetilde{Z}$ подчинена E (см. Определение 3.3).

Определим $\widetilde{W}$ равенством $\widetilde{W}_t = \widetilde{f}(\widetilde{Z}_t)$. Определения $\widetilde{S}$ и $\widetilde{f}$ влекут, что

$$\chi \circ \widetilde{f} = f \circ \sigma.$$

Следовательно, эквивалентность $\sigma(\widetilde{Z})$ и Z_t влечет эквивалентность $\chi(\widetilde{W})$ и W. Осталось заметить, что $\widetilde{W}$ является метрическим поднятием W, что следует из свойств (1), (2) и (3.3.1). $\square$

Отметим, что в предыдущем доказательстве условие конечнолистности ($k < \infty$) используется для того, чтобы для $s \in S$ множество $\sigma^{-1}(s)$ было конечно. Это позволяет сконструировать стационарное распределение для $\widetilde{Z}_t$.

Доказательство Теоремы 1.6(1). Утверждение следует из Леммы 3.7 и Предложения 3.2. $\square$

3.4 Фактор-пространства по действиям конечных групп

Напомним, что конечная группа G, действующая изометриями на метрическом пространстве X, индуцирует фактор-метрику на X/G, задаваемую формулой $d_{X/G}(\bar{x},\bar{y}) = \min_{x\in\bar{x},y\in\bar{y}} d_X(x,y)$. Следующая лемма является аналогом Леммы 3.7 для фактор-отображений.

Лемма 3.8. *Пусть X метрическое пространство. Пусть G конечная подгруппа $\mathrm{Iso}(X)$, и пусть $\chi : X \to X/G$ соответствующее фактор-отображение. Тогда любое Марковское блуждание на X/G допускает метрическое поднятие вдоль χ.*

Доказательство. Доказательство близко к доказательству Леммы 3.7, единственное отличие в конструкции множества E. Пусть W_t Марковское блуждание на X/G, заданное как $W_t = f(Z_t)$, где $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ стационарная обратимая Марковская цепь на конечном множестве S, и f отображение из S в X/G.

Определим $\widetilde{S} = \{(s,x) \in S\times X : \chi(x) = f(s)\}$. Обозначим проекции с $\widetilde{S}$ на S и X при помощи σ и $\widetilde{f}$. Пусть E множество всевозможных пар $(x_1,x_2) \in \widetilde{S}\times\widetilde{S}$ таких, что $d_X(\widetilde{f}(x_1),\widetilde{f}(x_2)) = d_{X/G}(f(\sigma(x_1)), f(\sigma(x_2)))$.

Пусть $s_1, s_2 \in S$ и $x_1, x_2 \in \sigma^{-1}(s_1)$. Так как $\sigma^{-1}(s_1)$ и $\sigma^{-1}(s_2)$ являются орбитами изометрического действия конечной группы, то

$$\deg_E(x_1, \sigma^{-1}(s_2)) = \deg_E(x_2, \sigma^{-1}(s_2)) \neq 0.$$

Следовательно, σ является регулярным отображением по отношению к E.

Оставшаяся часть доказательства совпадает с завершением доказательства Леммы 3.7. □

Теперь мы можем получить Теорему 1.6(2), см. следующее предложение.

Предложение 3.9. *Пусть X метрическое пространство и G конечная подгруппа $\mathrm{Iso}(X)$. Тогда для любого $p \geq 1$ и любого $T \in \mathbb{N}$ выполняется $M_p(X,T) \geq M_p(X/G,T)$ и $M_p(X) \geq M_p(X/G)$.*

Доказательство. Утверждение следует из Леммы 3.8 и Предложения 3.2. □

3.5 Пространства Вассерштейна

Напомним, что, для метрического пространства X мы обозначаем, через X_p^n, p-степень X и через X_p^n/S_n фактор-пространство X_p^n по действию перестановками координат. Следующая лемма позволяет получить Теорему 1.6(3) как следствие Предложения 3.9, см. Предложение 3.11.

Лемма 3.10. *Пусть X метрическое пространство, $n \in \mathbb{Z}$ и $p \geq 1$. Отображение $\Phi_n : n^{-\frac{1}{p}}(X_p^n/S_n) \to \mathscr{P}_p(X)$, определяемое как*

$$\Phi_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\delta(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}\delta(x_n),$$

сохраняет расстояния.

Доказательство. Обозначим $n^{-\frac{1}{p}}(X_p^n/S_n)$ за Y. Зафиксируем две точки $w = (w_1, \ldots, w_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$ в Y. Расстояние между w и q выражается равенством

$$d_Y^p(w, q) = \frac{1}{n} \inf_{s \in S_n} \sum_{i=1}^{n} d^p(w_i, q_{s(i)}).$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ обозначает множество всех $n \times n$ матриц перестановок, а D $n \times n$ матрицу, заданную как $D_{ij} = d^p(w_i, q_j)$. Формула для расстояния может быть переписана как

$$d_Y^p(w, q) = \frac{1}{n} \inf_{A \in \mathcal{P}_n} D \circ A,$$

где $D \circ A$ обозначает $\mathrm{Tr}(DA)$.

Пусть $\mathcal{D}$ обозначает множество всех $n \times n$ дважды стохастических матриц. Тогда расстояние по Вассерштейну между $\Phi_n(w)$ и $\Phi_n(q)$ может быть записано как

$$d_{W_p}^p(\Phi_n(w), \Phi_n(q)) = \frac{1}{n} \inf_{A \in \mathcal{D}} D \circ A.$$

По теореме Биркгофа — Фон Неймана $\mathcal{D}$ является выпуклой оболочкой $\mathcal{P}_n$. Так как "$D \circ$" является линейным функционалом, мы заключаем, что

$$\frac{1}{n} \inf_{A \in \mathcal{D}} D \circ A = \frac{1}{n} \inf_{A \in \mathcal{P}_n} D \circ A.$$

И следовательно $d_Y(w, q) = d_{W_p}(\Phi(w), \Phi(q))$. $\square$

Предложение 3.11. *Пусть X метрическое пространство, $p \geq 1$ и $T \in \mathbb{N}$. Тогда $M_p(\mathscr{P}_p(X), T) = M_p(X, T)$ и $M_p(\mathscr{P}_p(X)) = M_p(X)$.*

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ мы обозначаем при помощи I_k образ Φ_{2^k}, где Φ_{2^k} отображение, определенное в Лемме 3.10. Заметим, что $I_k \subset I_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Так как объединение $\cup_{k=1}^{\infty} I_k$ плотно в $\mathscr{P}_p(X)$ (см. [47]), мы получаем

$$M_p(\mathscr{P}_p(X), T) = \sup_{k \in \mathbb{N}} M_p(I_k, T).$$

Применяя Лемму 3.10, Предложение 3.9 и Предложение 2.9, мы заключаем, что

$$M_p(I_k, T) = M_p((2^k)^{-\frac{1}{p}}(X_p^{(2^k)}/S_{2^k}), T) \leq M_p(X, T).$$

Следовательно, $M_p(\mathscr{P}_p(X), T) \leq M_p(X, T)$. Существование изометрической копии X в $\mathscr{P}_p(X)$ влечет неравенство в обратную сторону. □

3.6 Доказательства следствий 1.7 и 1.10 и контрпримеры

Доказательство Следствия 1.7(1). Для $p > 2$ и $T \in \mathbb{N}$ известна следующая верхняя оценка для $M_p(\mathbb{R}, T)$:

$$M_p(\mathbb{R}, T) \leq 16 p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}},$$

см. [38, Theorem 4.5]. Предложение 2.9 влечет, что

$$M_p(\mathbb{R}_p^d, T) \leq 16 p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

Так как для любого $x \in \mathbb{R}^d$ выполняется неравенство $||x||_p \leq ||x||_2 \leq d^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} ||x||_p$, мы получаем

$$M_p(\mathbb{R}^d, T) \leq 16 d^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

Наконец, применяя Предложение 3.11, мы получаем верхнюю оценку:

$$M_p(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d), T) \leq 16 d^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} p^{\frac{1}{2}} T^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}.$$

□

Определение 3.12 (см. [12]). *Пусть X и Y метрические пространства и $D \in [1,\infty]$. Говорят, что отображение $f : X \to Y$ имеет искажение не более, чем D, если существует $s \in (0,\infty)$ такое, что для любых $x, y \in X$ выполняется*

$$sd_X(x,y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq Dsd_X(x,y).$$

Инфимум $D \in [1,\infty]$, удовлетворяющих этому условию, называется искажением f и обозначается $dist(f)$. Инфимум $dist(f)$ на множестве всех отображений $f : X \to Y$ обозначается при помощи $c_Y(X, d_X)$.

Для удобства читателя мы напоминаем, что для метрического пространства (X, d_X) и $\alpha \in (0,1]$ метрическое пространство (X, d_X^α) называется α-сноуфлейком (X, d_X).

Доказательство Следствия 1.10. Следующая лемма предоставляет ограничение на билипшицеву вложимость сноуфлейков в пространства с ограниченными константами Марковского типа.

Лемма 3.13 ([12], Lemma 16). *Зафиксируем метрическое пространство Y, $T \in \mathbb{N}$, $K, p \in [1,\infty)$ и $\zeta \in [0,1]$. Предположим, что*

$$M_p(Y,T) \leq KT^{\frac{\zeta(p-1)}{p}}.$$

Обозначим $n = 2^{4T}$. Тогда существует n-точечное метрическое пространство (X, d_X) такое, что

$$c_Y(X, d_X^\alpha) \geq C\frac{1}{K}(\log n)^{\alpha - \frac{1+\zeta(p-1)}{p}}, \text{ для любого } \alpha \in \Big[\frac{1+\zeta(p-1)}{p}, 1\Big],$$

где $C > 0$ абсолютная константа.

Лемма 3.13 так, как она сформулирована, не утверждает, что (X, d_X) не зависит от p, но ее доказательство дано для $4T$-мерного дискретного куба (куба Хэмминга), т.е. $(X, d_X) = (\{0,1\}^{4T}, ||\cdot||_1)$. Применяя Лемму 3.13 с $Y = \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)$, $\zeta = \frac{\frac{p}{2}-1}{p-1}$ и $K = 16d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}p^{\frac{1}{2}}$, мы получаем Следствие 1.10. □

Доказательство Следствия 1.7(2). Основой для доказательства является следующее предложение:

Предложение 3.14 ([38], Theorem 1.2)**.** *Для $p \geq 2$ выполняется $M_2(L_p) \leq 4\sqrt{p-1}$.*

Для $x \in \mathbb{R}^d$ мы имеем $||x||_p \leq ||x||_2 \leq d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}||x||_p$. Что влечет, что для мер μ, ν с конечным p-ым моментом на $\mathbb{R}^d$ выполняется $d_{\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d_p)}(\mu, \nu) \leq d_{\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)}(\mu, \nu) \leq d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} d_{\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d_p)}(\mu, \nu)$. Таким образом

$$M_2(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d)) \leq d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} M_2(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d_p)).$$

Оставшаяся часть доказательства схожа с доказательством Предложения 3.11. Предложение 3.10 предоставляет нам семейство изометрий

$$\Phi_n : n^{-\frac{1}{p}}((\mathbb{R}^d_p)^n_p / S_n) \to \mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d_p).$$

Мы обозначаем при помощи I_k образ Φ_{2^k}. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $I_k \subset I_{k+1}$. Так как объединение $\cup_{k=1}^{\infty} I_k$ плотно в $\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d_p)$, мы получаем

$$M_2(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d_p)) = \sup_{k \in \mathbb{N}} M_2(I_k) = \sup_{k \in \mathbb{N}} M_2((\mathbb{R}^d_p)^{2^k}_p / S_{2^k}).$$

Из Предложения 3.9 мы получаем $M_2((\mathbb{R}^d_p)^{2^k}_p / S_{2^k}) \leq M_2((\mathbb{R}^d_p)^{2^k}_p) = M_2(\mathbb{R}^{d2^k}_p)$. Предложение 3.14 влечет, что $M_2(\mathbb{R}^{d2^k}_p) \leq 4\sqrt{p-1}$. Следовательно,

$$M_2(\mathscr{P}_p(\mathbb{R}^d_p)) \leq 4\sqrt{p-1}.$$

□

Следующий пример показывает, что пункты Теоремы 1.6 (1) и (2) не выполняются в общем случае для бесконечнолистных накрытий и бесконечных групп, действующих изометриями.

Пример 3.15. *Рассмотрим d-мерный куб Хэмминга Ω^d, т.е. множество $\{0,1\}^d$ с L_1 метрикой. Для констант Марковского типа $M_2(\Omega^d)$ выполняется*

$$M_2(\Omega^d) \xrightarrow[d \to \infty]{} \infty,$$

см. [36, подраздел 9.4].

Куб Хэмминга Ω^d может быть превращен в метрический граф $G(\Omega^d)$ при помощи добавления ребер длины 1 между каждыми двумя точками $x, y \in \Omega^d$ такими, что $d(x, y) = 1$. Рассмотрим универсальное накрытие $\widetilde{G}(\Omega^d)$ графа $G(\Omega^d)$. Граф $\widetilde{G}(\Omega^d)$ является метрическим деревом, и следовательно, $M_2(\widetilde{G}(\Omega^d)) \leq 30$, см. [38].

Следовательно, для достаточно большого d выполняется $M_2(\widetilde{G}(\Omega^d)) \leq 30 < M_2(G(\Omega^d))$.

Определение 3.16 (см. [16])**.** *Пусть X и Y метрические пространства. Отображение $\chi : X \to Y$ является субметрией, если и только если для любого $x \in X$ и любого $r > 0$ выполняется*

$$\chi(B(x, r)) = B(\chi(x), r),$$

где $B(x, r)$ обозначает замкнутый шар с центром x и радиусом r.

Положительное решение следующей гипотезы предоставило бы однородный подход к частям (1) и (2) Теоремы 1.6.

Гипотеза 3.17. *Пусть X и Y метрические пространства такие, что существует субметрия $\chi : X \to Y$, такая, что для любого $y \in Y$ множество $\chi^{-1}(y)$ является конечным. Тогда $M_2(X) \geq M_2(Y)$.*

Нам не удалось отыскать доказательство или опровержение данной гипотезы. Но нам удалось построить пример, который показывает, что наш метод, т.е., поднятие Марковских блужданий, не дает решения, см. Предложение 3.18 и Пример 3.19.

Предложение 3.18. *Существуют конечные метрические пространства $\widetilde{X}$, X, субметрия $\chi : \widetilde{X} \to X$, стационарная обратимая Марковская цепь $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ на конечном множестве S, и инъективное отображение $f : S \to X$ такие, что $f(Z_t)$ не допускает метрического поднятия вдоль χ.*

Остаток данной секции посвящен доказательству Предложения 3.18. Необходимая конструкция описана в следующем примере:

Пример 3.19. *Пусть* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, G_X *граф на множестве вершин* X, *имеющий* 5 *пять ребер, которые соединяют все пары вершин кроме* x_2 *и* x_4. *Мы рассматриваем* X *как метрическое пространство с метрикой, индуцированной* G_X, *т.е расстояние между любой парой точек кроме* $\{x_2, x_4\}$ *равняется* 1. *И расстояние между* x_2 *и* x_4 *равняется* 2.

Пусть $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ *Марковская цепь на множестве* $S = X = \{x_1, \ldots, x_4\}$ *со стационарным распределением* $(\frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10})$ *и переходной матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

и пусть $f = id$.

Пусть $\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{12}\}$, $G_{\widetilde{X}}$ *граф на множестве вершин* $\widetilde{X}$, *и имеющий* 16 *ребер. Первая группа ребер образует цикл* $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{12}$. *Вторая группа состоит из оставшихся* 4 *ребер, соединяющих следующие пары вершин:* $\{\widetilde{x}_3, \widetilde{x}_1\}$, $\{\widetilde{x}_3, \widetilde{x}_5\}$, $\{\widetilde{x}_9, \widetilde{x}_7\}$, $\{\widetilde{x}_9, \widetilde{x}_{11}\}$. *Так же как, и в случае с* X, *мы рассматриваем* $\widetilde{X}$, *как метрическое пространство с метрикой, индуцированной* $G_{\widetilde{X}}$.

Пусть $r_4 : Z_+ \to \{1, 2, 3, 4\}$ *отображение, сопоставляющее числу его остаток по модулю* 4. *Пусть* $\chi : \widetilde{X} \to X$, *определяемое равенством*

$$\chi(\widetilde{x}_i) = x_{r_4(i)}.$$

Заметим, что χ *это гомоморфизм графов между* $G_{\widetilde{X}}$ *и* G_X. *Также* χ *локально сюръективно, т.е. для любой вершины* u *в* $G_{\widetilde{X}}$ *выполняется* $f(N_{G_{\widetilde{X}}}(u)) = N_{G_X}(f(u))$, *где* N *обозначает окрестность вершины. Следовательно,* χ *является субметрией.*

Лемма 3.20. *Пусть* $\{\widetilde{Z}_t\}_{t=0}^{\infty}$ *и* $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ *стационарные обратимые Марковские цепи на конечных множествах* $\widetilde{S}$ *и* S. *Предположим, что* $\widetilde{Z}$ *является поднятием* Z *вдоль отображения* $\sigma : \widetilde{S} \to S$. *Тогда выполняется* $P^{\widetilde{Z}}(\widetilde{s}_1, \sigma^{-1}(s_2)) = P^{Z}(\sigma(\widetilde{s}_1), \{s_2\})$, *для любого* $\widetilde{s}_1 = \widetilde{S}$ *и любого* $s_2 \in S$.

Доказательство. Доказательство опирается на следующее равенство, которое следует из Определения 2.6

$$A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \sigma^{-1}(s_1), \sigma^{-1}(s_2)) = A^{Z}(s_2, s_1, s_2), \tag{3.6.1}$$

где $s_1, s_2 \in S$.

Зафиксируем $s_2 \in S$, раскрываем левую и правую часть (3.6.1), мы получаем

$$\sum_{\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)} (A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \{\widetilde{s}_1\}) P^{\widetilde{Z}}(\widetilde{s}_1, \sigma^{-1}(s_2))) = A^{Z}(\{s_2\}, \{s_1\}) P^{Z}(s_1, \{s_2\}). \tag{3.6.2}$$

Обратимость Марковских цепей влечет, что $A^{Z}(\{s_1\}, \{s_2\}) = A^{Z}(\{s_2\}, \{s_1\})$ и $A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \{\widetilde{s}_1\}) = A^{\widetilde{Z}}(\{\widetilde{s}_1\}, \sigma^{-1}(s_2))$. Теперь мы можем переписать (3.6.2) как

$$\sum_{\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)} \frac{A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \{\widetilde{s}_1\})^2}{A^{\widetilde{Z}}(\{\widetilde{s}_1\})} = \frac{A^{Z}(\{s_2\}, \{s_1\})^2}{A^{Z}(\{s_1\})}. \tag{3.6.3}$$

Из Определения 2.6 мы получаем

$$A^{Z}(\{s_1\}) = \sum_{\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)} A^{\widetilde{Z}}(\{\widetilde{s}_1\}), \tag{3.6.4}$$

$$A^{Z}(\{s_2\}, \{s_1\}) = \sum_{\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)} A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \{\widetilde{s}_1\}). \tag{3.6.5}$$

Подставляя последние два неравенства в (3.6.3) и перемещая знаменатель правой части в левую, мы получаем

$$\sum_{\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)} A^{\widetilde{Z}}(\{\widetilde{s}_1\}) \sum_{\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)} \frac{A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \{\widetilde{s}_1\})^2}{A^{\widetilde{Z}}(\{\widetilde{s}_1\})} = \Big(\sum_{\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)} A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \{\widetilde{s}_1\}) \Big)^2. \tag{3.6.6}$$

Заметим, что последнее равенство является случаем равенства в неравенстве Коши-Шварца. Следовательно, существует константа $\widetilde{C} = \widetilde{C}(s_1, s_2)$ такая, что

$$\frac{A^{\widetilde{Z}}(\sigma^{-1}(s_2), \{\widetilde{s}_1\})}{A^{\widetilde{Z}}(\{\widetilde{s}_1\})} = P^{\widetilde{Z}}(\widetilde{s}_1, \sigma^{-1}(s_2)) = \widetilde{C},$$

для любого $\widetilde{s}_1 \in \sigma^{-1}(s_1)$. Из равенств (3.6.4) и (3.6.5) следует, что

$$\frac{A^{Z}(\{s_2\}, \{s_1\})}{A^{Z}(\{s_1\})} = P^{Z}(s_1, \{s_2\}) = \widetilde{C}.$$

$\square$

Лемма 3.21. *Пусть $\{\widetilde{Z}_t\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ стационарные обратимые Марковские цепи на конечных множествах $\widetilde{S}$ и S. Предположим, что $\widetilde{Z}$ является поднятием Z (см. Определение 3.1) вдоль отображения $\sigma : \widetilde{S} \to S$. Пусть $s_1, s_2 \in S$ такие, что $A^{Z}(\{s_1\}, \{s_2\}) \neq 0$. Пусть $\widetilde{S}_1 \subset \sigma^{-1}(s_1)$, $\widetilde{S}_2 \subset \sigma^{-1}(s_2)$ такие, что*

$$A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_1, \sigma^{-1}(s_2) \setminus \widetilde{S}_2) = 0, \tag{3.6.7}$$

$$A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_2, \sigma^{-1}(s_1) \setminus \widetilde{S}_1) = 0. \tag{3.6.8}$$

Тогда

$$\frac{A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_1)}{A^{Z}(\{s_1\})} = \frac{A^{Z}(\widetilde{S}_2)}{A^{Z}(\{s_2\})}.$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{s}_1 \in \widetilde{S}_1$, Лемма 3.20 влечет, что

$$P^{\widetilde{Z}}(\widetilde{s}_1, \sigma^{-1}(s_2)) = P^{Z}(s_1, \{s_2\}).$$

Применяя предположение (3.6.7), мы можем переписать это равенство как

$$A^{\widetilde{Z}}(\{\widetilde{s}_1\}, \widetilde{S}_2) = A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{s}_1)\frac{A^{Z}(\{s_1\}, \{s_2\})}{A^{Z}(\{s_1\})}.$$

Суммируя предыдущие равенства для всех $\widetilde{s}_1 \in \widetilde{S}_1$, получаем

$$A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2) = A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_1)\frac{A^{Z}(\{s_1\}, \{s_2\})}{A^{Z}(\{s_1\})}.$$

Аналогичный аргумент показывает, что

$$A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_2, \widetilde{S}_1) = A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_2)\frac{A^{Z}(\{s_2\}, \{s_1\})}{A^{Z}(\{s_2\})}.$$

Так как $A^Z(\{s_1\},\{s_2\}) \neq 0$, мы заключаем, что

$$\frac{A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_1)}{A^Z(\{s_1\})} = \frac{A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{S}_2)}{A^Z(\{s_2\})}.$$

□

Доказательство предложения 3.18. Пусть X, $\widetilde{X}$ и χ такие, как в Примере 3.19. От противного допустим, что существует $\{\widetilde{Z}_t\}_{t=0}^{\infty}$ стационарная обратимая Марковская цепь на конечном множестве $\widetilde{S}$ и отображение $\widetilde{f}:\widetilde{S}\to\widetilde{X}$, такие, что Марковское блуждание $\widetilde{f}(\widetilde{Z}_t)$ является метрическим поднятием $f(Z_t)$ вдоль χ. Заметим, что так как f инъективно, Марковская цепь $\widetilde{Z}_t$ является поднятием Марковской цепи Z_t вдоль отображения $\sigma:\widetilde{S}\to S$, определяемого равенством $\sigma = f^{-1}\circ\chi\circ\widetilde{f}$. Для $1\le i\le 4$, $1\le j\le 12$ мы обозначаем $A^Z(\{x_i\})$ при помощи p_i и $A^{\widetilde{Z}}(\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{x}_j))$ при помощи q_j.

Пусть $i=1,\dots,11$, рассмотрим $\widetilde{x}_i$ и $\widetilde{x}_{i+1}$. По Лемме 3.21, примененной с $s_1 = x_{r_4(i)}, s_2 = x_{r_4(i+1)}, \widetilde{S}_1 = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{x}_i), \widetilde{S}_2 = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{x}_{i+1})$, мы получаем

$$\frac{q_i}{p_{r_4(i)}} = \frac{q_{i+1}}{p_{r_4(i+1)}}. \tag{3.6.9}$$

Эти равенства влекут, что

$$q_3 = q_1 = q_5 \neq 0. \tag{3.6.10}$$

Лемма 3.21, примененная с $s_1 = x_3, s_2 = x_1, \widetilde{S}_1 = \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{x}_3), \widetilde{S}_2 = \widetilde{f}^{-1}(\{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_5\})$ влечет, что

$$\frac{q_3}{p_3} = \frac{q_1+q_5}{p_1}.$$

Так как $p_3 = p_1 = \frac{3}{10}$, мы получаем

$$q_3 = q_1 + q_5.$$

Что противоречит (3.6.10). □

4 Конечно-плоские метрические пространства

4.1 Доказательство Теоремы 1.3

Для удобства доказательства Теоремы 1.3 мы переформулируем ее с использованием понятия почти изометрического вложения. Напомним, что мы говорим, что конечное метрическое пространство допускает почти изометрическое вложение в класс метрических пространств C, если для любого $\epsilon > 0$ существует вложение X в одно из пространств из класса C с билипшицевым искажением, не превосходящим $1 + \epsilon$.

Теорема 4.1. *Пусть X конечное метрическое пространство. Предположим, что X допускает почти изометрическое вложение в один из следующих классов пространств:*

1. *2-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами,*
2. *факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп,*
3. *компактные плоские орбиобразия,*
4. *компактные плоские многообразия,*
5. *факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий,*
6. *2-пространства Вассерштейна над связными компактными группами Ли с би-инвариантными метриками.*

Тогда X допускает почти изометрическое вложение в каждый из этих классов пространств.

Схема доказательства циклическая $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1)$, и наиболее важная стрелка это: $(6) \Rightarrow (1)$.

Стрелка (1) $\Rightarrow$ (2) является следствием Леммы 3.10 и аргумента про плотное подмножество из доказательства Предложения 3.11.

Теперь мы переходим к обоснованию стрелки (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть X конечное подпространство фактор-пространства $\mathbb{R}^n/G$, где G конечная группа, действующая изометриями. Существует Евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ и действие ρ_1 группы G на $\mathbb{R}^m$ перестановками координат такое, что X может быть вложено изометрически в $\mathbb{R}^m/\rho_1$, см., например, [1, Corollary 1]. Для $M > 0$ мы обозначаем при помощи $\rho_2^{(M)}$ действие $\mathbb{Z}^m$ на $\mathbb{R}^m$ сдвигами, масштабированное в M раз, т.е.

$$(\rho_2^{(M)}(a_1, \ldots, a_m))(x_1, \ldots, x_m) = (x_1 + Ma_1, \ldots, x_m + Ma_m).$$

Заметим, что действие $\rho_1 \times \rho_2^{(M)}$ является дискретным и имеет ограниченную фундаментальную область. Следовательно $\mathbb{R}^m/(\rho_1 \times \rho_2^{(M)})$ является компактным плоским орбиобразием. Если M достаточно велико, то $\mathbb{R}^m/(\rho_1 \times \rho_2^{(M)})$ содержит изометрическую копию X.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) получается из следующего предложения, см. [17, Proposition 3.3].

Предложение 4.2. *Каждое плоское орбиобразие является пределом по Громову-Хаусдорфу последовательности замкнутых плоских многообразий.*

Слудующая стрелка это (4) $\Rightarrow$ (5). По теореме Бибербаха [18, 19] компактное плоское многообразие может быть представлено как фактор плоского тора по изометрическому действию конечной группы. Таким образом мы получаем (4) $\Rightarrow$ (5).

Для того, чтобы обосновать (5) $\Rightarrow$ (6), мы применяем следующее предложение, см. [25, Theorem 3.2].

Предложение 4.3. *Пусть M компактное риманово многообразие и $\rho : G \to$ $\mathrm{Iso}(M)$ действие изометриями компактной группы Ли G на M. Пусть N*

обозначает соответствующее фактор-пространство. Существует отображение поднятия

$$\Lambda : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M),$$

такое, что для любых $\mu, \nu \in \mathcal{P}(N)$ выполняется

$$d_{W_2}(\Lambda(\mu), \Lambda(\nu)) = d_{W_2}(\mu, \nu),$$

$$\rho_\sharp(\Lambda(\mu)) = \mu,$$

где $\rho : M \to N$ каноническая проекция.

Наконец, мы можем перейти к доказательству (6) $\Rightarrow$ (1).

Лемма 4.4. *Пусть G связная группа Ли с би-инвариантной метрикой. Рассмотрим действие*

$$\rho : G \to \mathrm{Iso}(\sqrt{2}G \times \sqrt{2}G),$$

заданное равенством

$$\rho(g)(g_1, g_2) = (gg_1, gg_2).$$

Тогда соответствующее фактор-пространство $(\sqrt{2}G \times \sqrt{2}G)/G$ изометрично G.

Доказательство. Во-первых заметим, что в каждом классе эквивалентности $\overline{(g_1, g_2)}$ существует единственный элемент вида $(1, x)$. Этот x выражается как $x = g_1^{-1}g_2$.

Остается показать, что

$$d_{(\sqrt{2}G\times\sqrt{2}G)/G}((1, x_1), (1, x_2)) = d_G(x_1, x_2).$$

Сначала покажем, что

$$d_{(\sqrt{2}G\times\sqrt{2}G)/G}((1, x_1), (1, x_2)) \geq d_G(x_1, x_2).$$

Мы имеем

$$d_{(\sqrt{2}G\times\sqrt{2}G)/G}((1, x_1), (1, x_2)) = \sqrt{2} \min_{g\in G} \sqrt{d_G^2(1, g) + d_G^2(x_1, gx_2)}.$$

По неравенству треугольника мы получаем

$$\sqrt{d_G^2(1,g)+d_G^2(x_1,gx_2)} \geq \sqrt{d_G^2(1,g)+(d_G(x_1,x_2)-d_G(1,g))^2}$$

Из выпуклости функции $x^2+(1-x)^2$ следует, что

$$\sqrt{d_G^2(1,g)+(d_G(x_1,x_2)-d_G(1,g))^2} \geq \sqrt{2\Big(\frac{1}{2}d_G(x_1,x_2)\Big)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}d_G(x_1,x_2).$$

Теперь перейдем к доказательству того, что

$$d_{(\sqrt{2}G\times\sqrt{2}G)/G}((1,x_1),(1,x_2)) \leq d_G(x_1,x_2).$$

Снова запишем

$$d_{(\sqrt{2}G\times\sqrt{2}G)/G}((1,x_1),(1,x_2)) = \sqrt{2}\min_{g\in G}\sqrt{d_G^2(1,g)+d_G^2(x_1,gx_2)}.$$

Пусть $h\in G$ элемент, переводящий x_2 в середину кратчайшей соединяющей x_1 и x_2. Тогда

$$\min_{g\in G}\sqrt{d_G^2(1,g)+d_G^2(x_1,gx_2)} \leq \sqrt{d_G^2(1,h)+d_G^2(x_1,hx_2)} =$$

$$= \sqrt{2\Big(\frac{1}{2}d_G(x_1,x_2)\Big)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}d_G(x_1,x_2).$$

□

Мы обозначаем при помощи E^n Евклидово пространство размерности n.

Зафиксируем G связную компактную группу Ли с би-инвариантной метрикой. Мы построим последовательность отображений $\widetilde{\Lambda}_m : \mathscr{P}(G)\to\mathscr{P}(E^{n(m)})$, проиндексированных натуральными числами $m=1,2,3\dots$, такую, что билипшицевы искажения отображений $\widetilde{\Lambda}_m$ стремятся к нулю.

Шаг 1: Конструкция отображений $\widetilde{\Lambda}_m$. Для $m\in\mathbb{N}$ мы обозначаем $M=M(m)=2^{\frac{m}{2}}$. Лемма 4.4 предоставляет нам башню групп:

$$\dots \stackrel{p_{m+1}}{\to} (MG)^{M^2} \stackrel{p_m}{\to} \dots \stackrel{p_3}{\to} 2G\times 2G\times 2G\times 2G \stackrel{p_2}{\to} \sqrt{2}G\times\sqrt{2}G \stackrel{p_1}{\to} G.$$

При помощи Предложения 4.3 мы конструируем башню поднимающих отображений:

$$\dots \overset{\Lambda_{m+1}}{\leftarrow} \mathscr{P}((MG)^{M^2}) \overset{\Lambda_m}{\leftarrow} \dots \overset{\Lambda_3}{\leftarrow} \mathscr{P}(2G\times 2G\times 2G\times 2G) \overset{\Lambda_2}{\leftarrow} \mathscr{P}(\sqrt{2}G\times\sqrt{2}G) \overset{\Lambda_1}{\leftarrow} \mathscr{P}(G).$$

Для метрического пространства X, некоторого Евклидового пространства E, отображения $A : X \to E$ и $C > 0$ мы обозначаем при помощи $A^{(C)} : CX \to E$ отображение, заданное равенством $A^{(C)}(x) = CA(x)$. По теореме Нэша о вложимости (см. [40]) существует $k \in \mathbb{N}$ и биективное риманово изометрическое C^1-отображение $f : G \to E^k$. Мы определяем отображение $F_m : (MG)^{M^2} \to E^{kM^2}$ равенством

$$F_m(g_1, \dots, g_{M^2}) = (f^{(M)}(g_1), \dots, f^{(M)}(g_{M^2})).$$

Мы завершаем построение отображения $\widetilde{\Lambda}_m : \mathscr{P}(G) \to \mathscr{P}(E^{kM^2})$, определяя его формулой

$$\widetilde{\Lambda}_m = (F_m)_\sharp \circ \Lambda_m \circ \dots \circ \Lambda_1.$$

Шаг 2: Доказательство того, что би-липшицевы искажения $\widetilde{\Lambda}_m$ *стремятся к* 1. Заметим, что $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ и $(F_m)_\sharp$ являются 1-липшицевыми. Следовательно, $\widetilde{\Lambda}_m$ также 1-липшицево.

Мы определяем отображение $\widetilde{p}_m : \mathrm{Im}(F_m) \to G$ равенством $\widetilde{p}_m = p_1 \circ \dots \circ p_m \circ F_m^{-1}$. Заметим, что $(\widetilde{p}_m)_\sharp \circ \widetilde{\Lambda}_m = \mathrm{id}$. Таким образом для того, чтобы показать, что би-липшицевы искажения $\widetilde{\Lambda}_m$ стремятся к 1, достаточно показать, что $\lim_{m\to\infty} |\widetilde{p}_m|_{Lip} \leq 1$.

Мы обозначаем при помощи D диаметр G и при помощи $|\cdot|_{E^n}$ стандартную норму в E^n. Для пары точек $x, y \in \mathrm{Im}(F_m)$ таких, что $|x - y|_{E^{kM^2}} > d$, мы очевидно имеем

$$|x - y|_{E^{kM^2}} > D \geq d_G(\widetilde{p}_m(x), \widetilde{p}_m(y)).$$

Заметим, что так как f является римановo изометрическим C^1-отображением и G компактна, то существует $L > 0$ такое, что $|f^{-1}|_{Lip} < L$. Из конструкции F_m мы получаем, что $|{F_m}^{-1}|_{Lip} < L$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Таким образом, для любой пары точек $x, y \in \operatorname{Im}(F_m)$ таких, что $|x - y|_{E^{kM^2}} \le D$, выполняется

$$d_G({F_m}^{-1}(x), {F_m}^{-1}(y)) < LD.$$

Следовательно,

$$|x-y|_{E^{kM^2}} \ge$$

$$\ge d_{(MG)^{M^2}}({F_m}^{-1}(x), {F_m}^{-1}(y)) \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in (MG)^{M^2}, d_{(MG)^{M^2}}(\widetilde{x},\widetilde{y})<LD} \frac{|F_m(\widetilde{x}) - F_m(\widetilde{y})|_{E^{kM^2}}}{d_{(MG)^{M^2}}(\widetilde{x},\widetilde{y})} \ge$$

$$\ge d_G(\widetilde{p}_m(x), \widetilde{p}_m(y)) \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in (MG)^{M^2}, d_{(MG)^{M^2}}(\widetilde{x},\widetilde{y})<LD} \frac{|F_m(\widetilde{x}) - F_m(\widetilde{y})|_{E^{kM^2}}}{d_{(MG)^{M^2}}(\widetilde{x},\widetilde{y})} \ge$$

$$\ge d_G(\widetilde{p}_m(x), \widetilde{p}_m(y)) \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in (MG), d_{MG}(\widetilde{x},\widetilde{y})<LD} \frac{|f^{(M)}(\widetilde{x}) - f^{(M)}(\widetilde{y})|_{E^{k}}}{d_{MG}(\widetilde{x},\widetilde{y})} =$$

$$= d_G(\widetilde{p}_m(x), \widetilde{p}_m(y)) \inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in G, d_{G}(\widetilde{x},\widetilde{y})<\frac{LD}{M}} \frac{|f(\widetilde{x}) - f(\widetilde{y})|_{E^{k}}}{d_{G}(\widetilde{x},\widetilde{y})}.$$

Заметим, что так как f риманово изометрическое C^1-отображение, и G компактна, то

$$\inf_{\widetilde{x},\widetilde{y}\in G, d_{G}(\widetilde{x},\widetilde{y})<\frac{LD}{M}} \frac{|f(\widetilde{x}) - f(\widetilde{y})|_{E^{k}}}{d_{G}(\widetilde{x},\widetilde{y})} \underset{m\to\infty}{\to} 1.$$

4.2 Доказательство Теоремы 1.5

Доказательство. Пусть M метрическое пространство из одного из классов, указанных в формулировке данной теоремы.

Для Марковской цепи $\{Z_t\}_{t=0}^{\infty}$ и отображения $f : \{1, \dots, n\} \to M$ мы должны показать, что

$$\mathbb{E}\, d^2(f(Z_t), f(Z_0)) \le t\mathbb{E}\, d^2(f(Z_1), f(Z_0)), \ \textit{для любого}\ t \in \mathbb{N}.$$

Зафиксируем $\epsilon > 0$. По Теореме 4.1 существует $m \in \mathbb{N}$ и отображение в пространство Вассерштейна над Евклидовым пространством $f_\epsilon : \{1, ..., n\} \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^m)$ такое, что для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется

$$\frac{1}{(1+\epsilon)} d_{M_\epsilon}(f_\epsilon(i), f_\epsilon(j)) \le d_M(f(i), f(j)) \le (1+\epsilon) d_{M_\epsilon}(f_\epsilon(i), f_\epsilon(j)). \qquad (4.2.1)$$

Хорошо известно (см. [36]), что Евклидовы пространства обладают Марковским типом 2 с константой 1, а значит по Теореме 1.6 пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами тоже обладают Марковским типом 2 с константой 1. Мы заключаем, что

$$\mathbb{E}\, d^2(f_\epsilon(Z_t), f_\epsilon(Z_0)) \leq t\mathbb{E}\, d^2(f_\epsilon(Z_1), f_\epsilon(Z_0)), \text{ \textit{для любого} } t \in \mathbb{N}.$$

Комбинируя последнее неравенство с (4.2.1), получаем

$$\mathbb{E}\, d^2(f(Z_t), f(Z_0)) \leq (1+\epsilon)^2 t\mathbb{E}\, d^2(f(Z_1), f(Z_0)), \text{ \textit{для любого} } t \in \mathbb{N}.$$

Так как ϵ произвольно, мы заключаем, что

$$\mathbb{E}\, d^2(f(Z_t), f(Z_0)) \leq t\mathbb{E}\, d^2(f(Z_1), f(Z_0)), \text{ \textit{для любого} } t \in \mathbb{N}.$$

□

5 Заключение

В работе показано, что следующие классы пространств Александрова кривизны ≥ 0 являются конечно-плоскими: (а) 2-пространства Вассерштейна над Евклидовыми пространствами, (б) факторы Евклидовых пространств по изометрическим действиям конечных групп, (в) компактные плоские орбиобразия, (г) факторы связных компактных групп Ли с би-инвариантными метриками по компактным подгруппам их групп изометрий.

Компактные плоские многообразия и пространства, принадлежащие классам (а)–(г), удовлетворяют свойству биполярного сравнения и свойству T-древовидного сравнения для любого дерева T на конечном наборе вершин. (Эти свойства были введены и изучены в [4].) Данные свойства тесно связаны с непрерывностью переноса массы и так называемым MTW-условием Ма–Трудингера–Ванга (см. [4]) и, вообще говоря, не выполняются для более общих Александровских пространств неотрицательной кривизны, см. [33].

Определение 5.1. *Пусть T неориентированное дерево с конечным набором вершин $V(T)$ и ребер $E(T)$. Мы говорим, что метрическое пространство X удовлетворяет свойству T-древовидного сравнения, если для любого отображения $f : V(T) \to X$ существует отображение в Гильбертово пространство $h : V(T) \to \mathbb{H}$ такое, что*

1. *$d_X(f(v_1), f(v_2)) \leq ||h(v_1) - h(v_2)||$, для любых $v_1, v_2 \in V(T)$.*

2. *$d_X(f(v_1), f(v_2)) = ||h(v_1) - h(v_2)||$, для любого ребра $\{v_1, v_2\} \in E(T)$.*

Следующий вопрос о внутренней характеризации конечных подмножеств компактных плоских многообразий остался открытым.

Вопрос 5.2. *Пусть X конечное метрическое пространство, удовлетворяющее свойству T-древовидного сравнения для любого дерева T на конечном наборе вершин. Верно ли, что X допускает почти изометрическое вложение в* *класс компактных плоских многообразий? (По Теореме 1.3 почти изометрическая вложимость в класс компактных плоских многообразий равносильна почти изометрической вложимости в любой из классов (а)–(г)).*

В работе показано, что компактные плоские многообразия и пространства, принадлежащие классам (а)–(г), обладают Марковским типом 2 с константой 1. В частности было показано, что сферы в Евклидовых пространствах, рассматриваемые с внутренней метрикой, обладают Марковским типом 2 с константой 1. Однако, полный ответ на Вопрос 1.4 получен не был. В частности не известен ответ для плоских конусов.

Вопрос 5.3. *Пусть* $0 < \alpha < 2\pi$ *и* $\alpha \neq \frac{2\pi}{k}$ *для любого* $k = 1, 2, 3, \ldots$. *Рассмотрим* K_α *плоский конус с углом при вершине равным* α. *При каких* α *конус* K_α *обладает Марковским типом* 2 *с константой* 1*?*

Ответ неизвестен ни для одного α. Но известно, что при α, близких к 2π, существуют конечные подмножества K_α, не допускающие почти изометрических вложений в классы пространств, рассматриваемых в Теореме 1.3, см. [33].

Получены верхние оценки на константы Марковского типа пространств Вассерштейна над Евклидовыми пространствами. В качестве следствия получена нижняя оценка на достаточное билипшицево искажение для вложения сноуфлейков в пространства Вассерштейна. Для дальнейших вопросов о вложимости в пространства Вассерштейна см. [12].

Работы автора по теме:

[1] Zolotov, Vladimir. “Dimension of a snowflake of a finite Euclidean subspace.” arXiv preprint arXiv:1706.09998 (2017).

[2] Zolotov, Vladimir. “Finite flat spaces.” Mathematika 65.4 (2019): 1010–1017.

[3] Zolotov, Vladimir. “Markov type constants, flat tori and Wasserstein spaces.” Geometriae Dedicata 195.1 (2018): 249–263.

[4] Lebedeva, Nina, Anton Petrunin, and Vladimir Zolotov. “Bipolar comparison.” Geometric and Functional Analysis 29.1 (2019): 258–282.

Литература:

[5] Александров, Александр Данилович. “Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения.” Труды Математического института имени ВА Стеклова 38.0 (1951): 5–23.

[6] Бураго, Юрий Дмитриевич, Михаил Леонидович Громов и Григорий Яковлевич Перельман. “Пространства АД Александрова с ограниченными снизу кривизнами.” Успехи математических наук 47.2 (284 (1992): 3–51.

[7] Abraham, Ittai, and Cyril Gavoille. “Object location using path separators.” Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Principles of distributed computing. ACM, 2006.

[8] Abraham, Ittai, et al. “Routing in networks with low doubling dimension.” 26th IEEE International Conference on Distributed Computing Systems (ICDCS’06). IEEE, 2006.

[9] Alexandrov, A. D. “Uber eine Verallgemeinerung der Riemannscen Geometrie.” Schriftenreiche der Institut fur Mathematik 1 (1957): 33–84.

[10] Aleksandrov, A. D., Berestovskii, V. N. and Nikolaev, I. G. “Generalized Riemannian spaces.” Russian Mathematical Surveys 41 (1986): 1–54.

[11] S. Alexander, V. Kapovitch, and A. Petrunin. “Alexandrov meets Kirszbraun.” In Proceedings of the Gokova Geometry-Topology Conference 2010, pages 88—109. Int. Press, Somerville, MA, 2011.

[12] Andoni, Alexandr, Assaf Naor, and Ofer Neiman. "Snowflake universality of Wasserstein spaces." Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. Vol. 51. No. 3. Societe Mathematique de France, 2018.

[13] Austin, Tim, Assaf Naor, and Yuval Peres. "The wreath product of Z with Z has Hilbert compression exponent 2/3." Proceedings of the American Mathematical Society 137.1 (2009): 85–90.

[14] Ball, Keith. "Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps." Geometric & Functional Analysis GAFA 2.2 (1992): 137–172.

[15] Bartal, Yair, et al. "On metric Ramsey-type phenomena." Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing. ACM, 2003.

[16] Berestovskii, V. N. "Submetries of space-forms of negative curvature." Siberian Mathematical Journal 28.4 (1987): 552–562.

[17] Bettiol, Renato G., Andrzej Derdzinski, and Paolo Piccione. "Teichmüller theory and collapse of flat manifolds." Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -) 197.4 (2018): 1247–1268.

[18] Bieberbach, Ludwig. "Über die bewegungsgruppen der euklidischen räume." Mathematische Annalen 70.3 (1911): 297–336.

[19] Bieberbach, Ludwig. "Über die bewegungsgruppen der euklidischen räume (zweite abhandlung.) die gruppen mit einem endlichen fundamentalbereich." Mathematische Annalen 72.3 (1912): 400–412.

[20] Bourgain, Jean, Vitali Milman, and Haim Wolfson. "On type of metric spaces." Transactions of the American Mathematical Society 294.1 (1986): 295–317.

[21] Chan, Hubert TH, et al. "On hierarchical routing in doubling metrics." Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[22] Ding, Jian, James R. Lee, and Yuval Peres. "Markov type and threshold embeddings." Geometric and Functional Analysis 23.4 (2013): 1207–1229.

[23] Enflo, Per. "On the nonexistence of uniform homeomorphisms between L p-spaces." Arkiv för matematik 8.2 (1970): 103–105.

[24] Friggstad, Zachary, Mohsen Rezapour, and Mohammad R. Salavatipour. "Local search yields a PTAS for k-means in doubling metrics." SIAM Journal on Computing 48.2 (2019): 452–480.

[25] Galaz-Garcia, Fernando, et al. "On quotients of spaces with Ricci curvature bounded below." Journal of Functional Analysis 275.6 (2018): 1368–1446.

[26] Giladi, Ohad, and Assaf Naor. "Improved bounds in the scaled Enflo type inequality for Banach spaces." arXiv preprint arXiv:1004.4221 (2010).

[27] Gromov, Mikhail. "Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces". Springer Science & Business Media, 2007.

[28] Gromov, Mikhail. "CAT(k)-spaces: construction and concentration." Journal of Mathematical Sciences 119.2 (2004): 178–200.

[29] Gupta, Anupam, Mohammad T. Hajiaghayi, and Harald Räcke. "Oblivious network design." Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.

[30] Huang, Lingxiao, et al. "Epsilon-coresets for clustering (with outliers) in doubling metrics." 2018 IEEE 59th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS). IEEE, 2018.

[31] Har-Peled, Sariel, and Manor Mendel. "Fast construction of nets in low-dimensional metrics and their applications." SIAM Journal on Computing 35.5 (2006): 1148–1184.

[32] Khot, Subhash, and Assaf Naor. "Nonembeddability theorems via Fourier analysis." Mathematische Annalen 334.4 (2006): 821–852.

[33] Lebedeva, Nina. "On open flat sets in spaces with bipolar comparison." Geometriae Dedicata (2018): 1–5.

[34] Linial, Nathan, Avner Magen, and Assaf Naor. "Girth and Euclidean distortion." Geometric & Functional Analysis GAFA 12.2 (2002): 380–394.

[35] Mendel, Manor, and Assaf Naor. "Scaled enflo type is equivalent to rademacher type." Bulletin of the London Mathematical Society 39.3 (2007): 493–498.

[36] Naor, Assaf. "An introduction to the Ribe program." Japanese Journal of Mathematics 7.2 (2012): 167–233.

[37] Naor, Assaf, and Gideon Schechtman. "Remarks on non linear type and Pisier's inequality." Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik 552 (2002): 213.

[38] Naor, Assaf, et al. "Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov-hyperbolic metric spaces." Duke Mathematical Journal 134.1 (2006): 165–197.

[39] Naor, Assaf, and Yuval Rabani. "On Lipschitz extension from finite subsets." Israel Journal of Mathematics 219.1 (2017): 115–161.

[40] Nash, John. "C1 isometric imbeddings." Annals of mathematics (1954): 383–396.

[41] Ohta, Shin-Ichi. "Markov Type of Alexandrov Spaces of Non-Negative Curvature." Mathematika 55.1–2 (2009): 177–189.

[42] Ohta, Shin-Ichi, and Mikaël Pichot. "A note on Markov type constants." Archiv der Mathematik 92.1 (2009): 80–88.

[43] Slivkins, Aleksandrs. "Distance estimation and object location via rings of neighbors." Distributed Computing 19.4 (2007): 313–333.

[44] Sturm, Karl-Theodor. "On the geometry of metric measure spaces." Acta mathematica 196.1 (2006): 65–131.

[45] Dylan Thurston, Length inequalities in trees and CAT(0) spaces, URL (version: 2014-04-22): https://mathoverflow.net/q/163706

[46] Foertsch, Thomas, Alexander Lytchak, and Viktor Schroeder. "Nonpositive curvature and the Ptolemy inequality." International Mathematics Research Notices 2007.9 (2007): rnm100-rnm100.

[47] Villani, Cédric. "Topics in optimal transportation." No. 58. American Mathematical Soc., 2003.