



DEPARTMENT OF MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NICOLAI RESHETIKHIN

BERKELEY, CALIFORNIA 94720-3840
TELEPHONE (510)643-6234
FAX (510)642-8204
reshetik@math.berkeley.edu

8 сентября 2014 г.

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации К.Л. Малышева
"Корреляционные функции низкоразмерных неоднородных
моделей статистической физики и их асимптотики",
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Предметом диссертационной работы является исследование некоторых низкоразмерных неоднородных моделей статистической физики. Более точно, в работе вычисляются температурные корреляционные функции и изучаются их асимптотические свойства. В частности, рассматриваются задачи, которые демонстрируют связь квантовых интегрируемых систем с перечислительной комбинаторикой, теорией симметрических функций и случайных матриц. Основными методами, используемыми в диссертации, являются квантовый метод обратной задачи и подход функционального интегрирования. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, четырех приложений и списка литературы.

Квантовые интегрируемые модели демонстрируют связи с перечислительной комбинаторикой, что вызывает в последние годы заметный интерес в математической физике. Например, важную роль играет шестивершинная модель, интенсивно изучающаяся как для периодических, так и для фиксированных граничных условий. Шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки имеет отношение к перечислению укладок “ацтекских алмазов” и к перечислению знакочередующихся матриц. В случае XXZ -модели Гейзенберга (нулевая и бесконечная анизотропия) температурные корреляционные функции специального вида приводят к соотношениям, связанным с перечислением плоских разбиений и решеточных самоизбегающих путей. Плоские разбиения, или трехмерные диаграммы Юнга, в свою очередь связаны с широким рядом областей математики и математической физики. В частности, они интенсивно исследуются в теории вероятностей, в перечислительной комбинаторике, в теории ограниченных кристаллов, в теории направленного протекания, в теории топологических струн и в теории случайных блужданий на решетках.

В этой связи в первой части Главы 1 автором рассмотрено вычисление температурных корреляционных функций *выживание ферромагнитной струны* и *выживание доменной стенки* для XXZ цепочки при нулевой и бесконечной анизотропии. Указанные пределы примечательны тем, что именно в этих случаях можно записать N -частичные векторы состояния с помощью симметрических функций Шура. В результате форм-факторы соответствующих операторов можно вычислять с помощью формул, которые сводят суммы произведений функций Шура к представлениям в виде определителей. В рассматриваемом случае ответы в детерминантном виде получены автором для произвольно параметризованных форм-факторов операторов ферромагнитной струны и доменной стенки.

Будучи вычисленными в специальной q -параметризации, полученные детерминантные представления для форм-факторов сводятся к выражениям в терминах q -биномиальных определителей. С технической точки зрения, вычисления в Главе 1 оформлены автором в виде ряда доказанных предложений. Содержанием данных предложений являются, во-первых, некоторые формулы суммирования для функций Шура, и, во-вторых,

формула, связывающая определитель некоторой q -параметризованной матрицы с q -биномиальным определителем (при этом структура самой матрицы определяется тем, какой из форм-факторов рассматривается). Предложенный автором способ вычисления определителя q -параметризованной матрицы, который приводит к выражению через q -биномиальный определитель, технически основан на связи функций Шура с элементарными симметрическими функциями. Вычисление же самого q -биномиального определителя дает производящие функции плоских разбиений. Окончательно, q -параметризованные форм-факторы приводят в пределе $q \rightarrow 1$ к аналогам формулы Мак-Магона для числа плоских разбиений в ящике.

Функции Шура имеют также связь с полустандартными диаграммами Юнга, которые в свою очередь могут быть изображены графически как пучки самоизбегающих путей на квадратной решетке. Таким образом возникает интерпретация полученных форм-факторов в терминах самоизбегающих путей. В частности, для скалярных произведений бетевских векторов состояния возникает интерпретация в терминах пучков самоизбегающих путей, образующих конфигурацию "арбуз". Форм-факторы операторов ферромагнитной струны и доменной стенки в пределе $q \rightarrow 1$ связаны с интерпретацией в терминах конфигураций самоизбегающих путей на квадратной решетке, а также в терминах проекций трехмерных диаграмм Юнга с градиентными линиями.

Далее, вычисляются температурные корреляционные функции выживания ферромагнитной струны и выживания доменной стенки, а также их асимптотики в случае длинной, но конечной цепочки и при достаточно низкой температуре. Представления в виде матричных интегралов асимптотически принимают вид произведения статсуммы гауссова унитарного ансамбля на квадраты чисел плоских разбиений. Получены соотношения, явно выражающие асимптотическое поведение корреляторов в случае, когда полное число узлов цепочки M , число спинов "вниз" N , число последовательных спинов в ферромагнитной струне или в доменной стенке n и обратная температура $\beta = \frac{1}{T}$ возрастают. Убывание корреляторов возникает при условии, если рост всех параметров подчинен определенному соотношению.

Вторая часть Главы 1 имеет дело со следующими двумя задачами.

Специальные корреляционные функции $XX0$ цепочки Гейзенберга над ферромагнитным состоянием могут быть использованы для перечисления путей блуждания недружественных пешеходов в модели со случайными поворотами. Для $XX0$ модели Гейзенберга на периодической цепочке вычисляется двухточечная корреляционная функция над суперпозицией собственных состояний магнетика, которую также можно интерпретировать как производящую функцию случайных блужданий недружественных пешеходов на одномерной решетке в среде с переменным числом недружественных соседей. Получена оценка числа путей пешехода, перемещающегося между двумя достаточно удаленными узлами в пределе, когда число поворотов растет как квадрат расстояния между начальным и конечным положениями пешехода.

В конце главы рассматривается XU цепочка Гейзенберга, для которой обсуждается вычисление корреляторов третьих компонент спинов. Нахождение указанных корреляторов сведено к вычислению производящей функции, для которой в диссертации получено представление в терминах функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным интегрирования. Производящая функция вычисляется с помощью представления в виде конечнократного грасманового интеграла. Для перехода от конечнократного интеграла к функциональному предложено накладывать на переменные интегрирования определенные граничные условия, выражающие квази-периодичность на отрезке мнимого времени. Интегралы гауссова типа вычисляются стандартно, и регуляризованные ответы принимают вид определителей конечных матриц. Полученные детерминантные представления используются для вывода многоточечных корреляторов третьих компонент спинов. В качестве приложения подхода рассматривается использование интеграла с квазипериодическими условиями при вычислении производящей функции случайных блужданий недружественных пешеходов для $XX0$ модели.

В Главе 2 рассматриваются модели квантовой статистической физики, для которых в подходе функционального интегрирования вычисляются

температурные корреляционные функции. Вычисление интегралов связано с разделением переменных интегрирования на высокоэнергетичную (“быструю”) и низкоэнергетичную (“медленную”) составляющие.

Во первых, рассматривается одномерный бозе-газ в гармоническом потенциале на вещественной оси. Функциональное интегрирование используется для вывода однопетлевого эффективного действия, описывающего низкоэнергетическую физику. Существенно, что случай бозе-газа в удерживающем потенциале существенно отличается от аналогичной ситуации для пространственно однородной системы. Дело в том, что бозе-конденсация в неоднородном случае происходит и в импульсном, и в координатном представлениях, где и характеризуется выраженным пиком распределения. Поэтому требуется рассматривать модель не в импульсном представлении (как в “классической” задаче о корреляциях в однородном бозе-газе), а именно в координатном для которого адекватным приближением для плотности распределения оказывается приближение Томаса-Ферми. При этом роль “медленного” поля играет решение, получаемое в приближении Томаса-Ферми. В режиме Гросса-Питаевского (отталкивание слабое, плотность частиц высокая) и в приближении Томаса-Ферми исследуются асимптотики двухточечных и многоточечных температурных корреляционных функций. Для вывода приближенных критических индексов используется вариационный метод, который в одномерном случае приводит к функции Грина однородного бозе-газа с правильной длинноволновой асимптотикой. Для неоднородного бозе-газа в диссертации получены оценки корреляторов в пределах, когда температура стремится к нулю, а объем квази-конденсата увеличивается. Определены критические индексы, которые зависят от пространственных координат и характеризуют убывание корреляционной функции. Результаты полученные с помощью функционального интегрирования, сводятся, в соответствующих пределах (например, при исчезновении удерживающего потенциала), к соотношениям для однородного бозе-газа, получаемым в рамках анзаца Бете. Полученные соотношения для критического индекса записаны в терминах физических наблюдаемых и могут на практике продемонстрировать эффект неоднородности в виде конкретной зависимости от координат.

Для сверхтекучего гелия-3А получено в лондонском пределе разложение среднего значения импульса (тока частиц) по степеням производных параметра порядка. Подтверждено само наличие поправок по степеням производных параметра порядка. Доказано наличие как квадратичных, так и кубических поправок.

Кроме того, функциональное интегрирование применяется для вывода спектра коллективных возбуждений в антиферромагнитной фазе двумерной модели Хаббарда со слабым отталкиванием как вблизи нулевой температуры, так и в окрестности критической температуры Нееля.

Существенную роль в физике нано-материалов играют такие дефекты кристаллической структуры как дислокации и дисклинации. В теории упругости с несовместностью “классические” дислокационные решения характеризуются полюсной особенностью тензора напряжений на оси дефекта. Глава 3 диссертации посвящена двум задачам. Во-первых, предложена трансляционно-калибровочная лагранжева модель модифицированных дислокаций, описываемых тензором напряжений со сглаженной особенностью. Цилиндрическая область вблизи оси дислокации, внутри которой происходит сглаживание, называется областью ядра. Уравнения (нелинейной) модели решены для прямолинейной дислокации в упругом бесконечном цилиндре, и соответствующий тензор напряжений получен в линейном и квадратичном приближениях. При этом эйнштейновское калибровочное уравнение играет роль нестандартного закона несовместности. Физический закон, связывающий тензоры напряжений и деформаций, содержит члены первого и второго порядков. Получаемые окончательно компоненты тензора напряжений определены вне и внутри ядра, а граница ядра при этом характеризуется несколькими самосогласованно возникающими радиусами. Самосогласованный характер полученного решения свидетельствует об удовлетворительности предложенной модели, в рамках которой собственная энергия дислокаций описывается калибровочным лагранжианом, квадратичным по плотности дефектов.

Далее, функциональное интегрирование используется для вычисления статистической суммы и температурных корреляционных

функций компонент напряжений в модели, рассматривающей набор модифицированных дислокаций как термодинамический ансамбль. Модель дислокаций при ненулевой температуре эквивалентна двумерному электронейтральному кулоновскому газу зарядов, потенциал взаимодействия которых имеет логарифмический вид на больших расстояниях и сглажен (стремится к нулю) для зарядов на близком расстоянии. Корреляторы компонент напряжений используются для получения формул, описывающих перенормировку упругих постоянных, которая обусловлена зарождением дислокационных диполей. При этом основное внимание уделяется тем эффектам, которые связаны с использованием именно несингулярных (модифицированных) дислокаций. Продемонстрированные эффекты конечности ядер дислокаций могут быть проверены экспериментально.

Мне было очень приятно ознакомиться с диссертацией. Она основана на оригинальных и очень интересных результатах, описанных выше. Я не обнаружил никаких существенных недостатков или замечаний. Вот одно несущественное замечание и два вопроса (скорее замечания о том, куда можно двигаться дальше):

1. На мой взгляд, диссертант использует слово 'оценка' там, где нужно использовать 'приближение'. Мне кажется, что в математической литературе 'оценка' означает 'неравенство'. Хотя в физической литературе этот термин иногда используется для приближённого значения.
2. Было бы очень интересно распространить результаты, полученные диссертантом, на случай sl_n -магнетиков. В этом случае понятно, что такое предел $q \rightarrow 1$, хотя аналог случая $\Delta = 0$ менее очевиден (это какая-то интересная система свободно-фермионного типа). Мне кажется, что многие из результатов диссертанта имеют интересные, мало изученные аналоги в этом случае.
3. Работы диссертанта, составляющие содержание Глав 2 и 3, используют приближения гидродинамического типа для вычисления функциональных интегралов. По видимому, более точно нужно сказать для придания смысла этим интегралам и этому приближению. Это довольно стандартные предположения, которые широко используются в литературе. Было

бы очень интересно оценить ошибку таких приближений. По видимому, это безнадежно сложная задача, но всё же было бы интересно иметь хоть какой-то прогресс в этом направлении.

Автореферат хорошо отражает содержание диссертации. Подходы, развитые в диссертации, а также полученные результаты могут быть использованы в дальнейшем при изучении новых задач, возникающих в статистической физике. Некоторые разделы диссертации могут быть положены в основу специальных курсов.

Представленная диссертация К. Л. Малышева является законченной научно-квалификационной работой, результаты которой могут быть квалифицированы как существенное научное достижение в теории квантовых интегрируемых систем, в статистической физике, а также в области математики известной как асимптотическая комбинаторика. Диссертация соответствует специальности 01.01.03 - математическая физика и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторским диссертациям. Я считаю что К. Л. Малышев заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук.

Профессор математического факультета
Калифорнийского Университета (Беркли),
Черн-Симонс профессор математической
физики (Беркли, Калифорния, США),
доктор физико-математических наук

Николай Юрьевич Решетихин

