



## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу

Гордеева Алексея Сергеевича

“Приложения полиномиального метода в комбинаторике”

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - "Математическая логика, алгебра и теория чисел"

Диссертация Гордеева Алексея Сергеевича находится на стыке теории графов и классической алгебраической геометрии. Одним из центральных объектов в теории графов является правильные раскраски графов и гипер-графов, которые также имеют большое прикладное значение в теории алгоритмов и оптимизации. Например, задача о существовании правильной раскраски графа в  $k > 2$  цветов входит в список из 20 задач предложенных Ричардом Карпом в его фундаментальной работе о NP-полноте. Понятие правильной раскраски в  $k$  цветов  $\{1, 2, \dots, k\}$  естественно обобщается на списочные раскраски, где для каждой вершины имеется свой отдельный список цветов размера  $k$ . С алгоритмической точки зрения списочная и обычная раскрашиваемость графов тесно связаны, что во многом объясняет активные исследования на протяжении 50 последних лет и сотни полученных результатов по этой теме. Многие современные исследования по списочным раскраскам направлены на получение оценок на минимальное число цветов необходимых для правильных  $\chi(G)$  и списочных  $ch(G)$  раскрасок графов  $G$  и поиск графов  $G$  с хроматическим числом  $\chi(G)$  строго меньшим  $ch(G)$ .

Существует 3 подхода к получению оценок на  $\chi(G)$  и  $ch(G)$ : (1) алгоритмически-комбинаторный; (2) теоретико-вероятностный; (3) алгебраический. Пожалуй один из наиболее интересных алгебраических подходов для оценки сверху на  $ch(G)$  является метод предложенный Алоном и Тарси, основанный на комбинаторной теореме о нулях для полинома от многих переменных и позволяющий оценивать  $ch(G)$  через некоторые свойства произвольной ориентации ребер графа  $G$ .

Основные результаты диссертации состоят из точных вычислений оценок Алона-Тарси для прямых произведений циклов и путей а также вычисления оценки Алона и Тарси для двудольных гиперграфов. Эти оценки в свою очередь дают довольно точные оценки на списочные хроматические числа  $ch(G)$  для нескольких интересных классов графов и гиперграфов  $G$ . Для получения этих оценок автор доказывает новое обобщение  $q$ -версии гипотезы Дайсона и усиление теоремы Брессу Гулдена - интересных тождеств для свободных членов некоторых многочленов Лорана, естественно возникающих в квантовой электродинамике и теории случайных матриц.

Первая глава носит вводный характер. Она содержит большинство необходимых определений для понимания результатов диссертации, а также описывает полиномиальный метод и метод оценок Алона-Тарси на списочное хроматическое число.

Во второй главе автор доказывает основной технический инструмент диссертации для вычислений оценок Алона-Тарси, который также обобщает  $q$ -версию гипотезы Дайсона и теоремы Брессу Гулдена.

Третья глава посвящена выводу различных оценок для прямых произведений циклов и путей (важные классы решетчатых и тороидальных графов). Часть результатов получены с помощью более общей оценки на числа Алона-Тарси для прямого произведения чётного цикла и графа с чётными степенями вершин.

Четвертая глава посвящена гиперграфам. В частности получены новые оценки Алона-Тарси и оценки на списочные хроматические числа для двудольных гиперграфов. Также показана списочно- $2$ -раскрашиваемость  $k$ -регулярных  $k$ -однородных гиперграфов при  $k \geq 4$ , что обобщает результат Томассена об обычной  $2$ -раскрашиваемости. В отличие от предыдущих глав, последняя глава комбинирует 2 подхода -- алгебраический и теоретико-вероятностный.

В заключении, можно смело утверждать, что в диссертации А.С. Гордеева получены новые и актуальные результаты. Результаты будут интересны нескольким исследовательским группам работающим в университетах, например, таким как Тель-Авив (Нога Алон), Торонто (Майкл Маллой), Иллиной (Александр Косточка), МФТИ (Райгородский Андрей Михайлович). Все доказательства снабжены строгими доказательствами. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в трех журналах, рекомендованных ВАК, и в одном препринте, который, я уверен, должен быть принят к публикации в ближайшее время.

У меня имеются следующие замечания и пожелания, все касающиеся улучшению изложения и оформлению диссертации:

- стр. 4 "В общих чертах, метод, как правило, заключается в том, чтобы некоторым образом описать исследуемый объект (...), в терминах множества корней структурно не очень сложного многочлена от нескольких переменных" - следует разбить на несколько простых предложений.
- введение: пожалуй более логично было бы начать с мотивации для правильных раскрасок графов; также сделать 2 раздела посвященных (1) тождествам для коэффициентам многочленов и полиномиальному методу (2) правильным раскраскам.
- стр. 17 "мы получили альтернативное определение числа Алона-Тарси". Во-первых, не очень хорошо использовать "мы получили"; во-вторых, "альтернативное определение" лучше заменить на "эквивалентное определение".
- стр. 18 последний параграф - что это?
- Теорема 2.2.4 Выглядит как техническая лемма (безусловно полезная, но все-таки воспринимающаяся как вспомогательное утверждение). В отличие от теорем 2.2.1 -2.2.3 ее условия действительно громоздки и сразу не понятно чем она сильно отличается от предыдущих результатов. Объяснения с матрицами на страницах 21-22 -- шаг в нужном

направлении, но шаг не достаточный. Хотелось бы неформальных объяснений в чем ее смысл/ или в чем ее сила по сравнению с предыдущими теоремами.

- Также в определении  $C_i$  стоит поставить скобки внутри объединения.
- стр. 30 обозначения. Логично было бы напомнить здесь определение  $F_G(x)$
- Предложение 3.2.10 Предложение состоит из определения  $\eta$  и собственно предложения с другой переменной  $\tau$ . Гораздо удобнее читать их отдельно.
- Теорем 3.2.1 Опечатка:  $G_1, G_2$  слева в неравенстве и  $G$  и  $H$  справа.
- У автора есть тенденция сжимать доказательства и часто использовать нелинейную логическую структуру в выведении алгебраических тождеств. Возьмем, для примера несложное доказательство Предложение 3.3.2. В нем формула (3.4) это то что мы хотим доказать, формула (3.5) то что уже доказано и формула (3.6) опять то что мы хотим доказать. Очень не удобно читать такие формулы так, как нужно помнить про каждую из них если она уже доказана или еще нет.
- Предложение 3.3.2 "Достаточно показать, что ..." Не понятен план доказательства. Лучше использовать простые предложения и четко анонсировать план: Мы покажем что (1)  $M$  не 0 матрица (2)  $M$  эрмитова/анти-эрмитова. Этого достаточно для доказательства по следующим причинам "...". Дополнительно структурировать доказательства предложения, например выделив в отдельные утверждения (1) и (2).
- Стоит добавить пояснений в выводе некоторых формул, например на стр. 37 "Несложно видеть, что этот коэффициент равен ...". На самом деле довольно сложно учитывая что нижестоящая формула довольно длинная и содержит несколько новых определений. В итоге я смог ее проверить, но это точно было не очень просто увидеть.
- стр. 40 формула сразу после выражения (40) - в одном месте перепутаны индексы  $i$  и  $j$ .
- стр. 41 в элементарных вычислениях для размера  $|U|$  во втором и третьем выражениях с конца доказательства предложения 3.3.5 не очень понятно как получены равенства. Нужно добавить объяснений.
- стр. 42 При суммировании в формуле для  $|A|$  и  $|B|$  следует поставить скобки.
- стр. 43 Сложно различать  $Q_\varepsilon$  как множество и как их линейную комбинацию.

По моему мнению, диссертация "Приложения полиномиального метода в комбинаторике" представляет собой законченную научно-исследовательскую работу, полностью соответствующую специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел, и полностью удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент,  
кандидат физико-математических наук  
Николай Вадимович Гравин



Institute for Theoretical Computer Science  
School of Information Management and Engineering  
Shanghai University of Finance and Economics  
Address: No.100 Wudong Road, Yangpu District, Shanghai, China  
Email: [nikolai@mail.shufe.edu.cn](mailto:nikolai@mail.shufe.edu.cn)