О Т З Ы В
официального оппонента
профессора РАН, доктора физико-математических наук
Александра Игоревича Буфетова
на диссертационную работу Дмитрия Николаевича Запорожца
«Нули случайных полиномов, распределение алгебраических чисел
и выпуклые оболочки случайных процессов»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.05 «теория вероятностей
и математическая статистика»

Яркая диссертация Д. Н. Запорожца находится на стыке теории вероятностей, теории чисел и геометрии банаховых пространств и посвящена в первую очередь исследованию случайных полиномов и их нулей и распределению алгебраических чисел на вещественной прямой и комплексной плоскости, а также исследованию выпуклых оболочек случайных процессов. Диссертация состоит из четырёх глав. Разберём их отдельно.

Первая глава относится к задаче о количестве вещественных нулей у случайного полинома. Это классическая задача, исследование которой восходит к работам Пойа, Блоха, Литтлвуда и Оффорда 1930-х годов. В 1968 г. Шепп высказал гипотезу о том, что если коэффициенты многочлена независимы и одинаково распределены, то для любого невырожденного распределения среднее число вещественных нулей лежит при всех n между $c_1 \log n$ и $c_2 \log n$, где константы $c_{1,2}$ зависят от распределения. Автор показал, что нижняя оценка в гипотезе Шеппа не имеет места: существует невырожденное распределение коэффициентов многочлена, такое что в среднем он будет иметь не более, чем $2+\varepsilon$ нулей. Также в первой главе показано, что если коэффициенты многочлена степени n независимы и и одинаково распределены, то вероятность того, что многочлен имеет более αn вещественных корней, стремится к нулю. Точный результат автора даже более сильный: он устанавливает сходимость почти наверное, а не по вероятности и разрешает выбор распределений коэффициентов из некоторого конечного набора.

Во второй главе изучается распределение комплексных корней случайного полинома с независимыми одинаково распределёнными комплексными коэффициентами. Шпаро и Шур показали, что при достаточно слабых предположениях на распределение коэффициентов, большинство корней лежат вблизи единичной окружности. Говоря более формально, рассмотрим случайную меру на плоскости, которая является нормированной считающей мерой для множества корней случайного полинома, тогда эта последовательность случайных мер сходится по вероятности в слабой топологии, то есть для любой непрерывной функции φ с компактным носителем $\int \varphi(z)\,d\mu_n(z)$ сходится по вероятности к $\int \varphi(z)\,d\mu(z)$. В диссертации этот результат усилен, а именно, найдены необходимые и достаточные условия на распределение коэффициентов, при котором указанная сходимость имеет место почти всюду, а не только по вероятности. Автором получена оценка сверху на скорость концентрации корней вблизи единичной окружности для распределений с медленно меняющимися хвостами. Изучен также и обратный случай, где наблюдаются различные варианты поведения корней, например, концентрации их вблизи двух окружностей. В более сложных случаях роль играет наименьшая вогнутая мажоранта пуассоновского точечного процесса с интенсивностью $\alpha v^{-(\alpha+1)}\,dudv$. Для аналитических функций, задаваемых степенным рядом $\sum \xi_k f_{k,n} z^k$ со случайными коэффициентами ξ_k и правильным образом выбранными масштабирующими множителями $f_{k,n}$ получена слабая сходимость (по вероятности) нормированной считающей меры корней к некоторой неслучайной мере. При этом имеет место свойство универсальности: оно не зависит от вида распределения ξ_0, но зависит от выбора множителей $f_{k,n}$.

В третьей главе изучаются вопросы распределения алгебраических чисел. Для рациональных чисел этот вопрос изучался ещё Лиувиллем в XIX в., для чисел более высоких степеней этот вопрос был поставлен Малером в 1985 г. Более точно, речь идёт о том, как распределены корни всех примитивных многочленов с целыми коэффициентами фиксированной степени n, коэффициенты которых не превосходят Q по модулю, если Q стремится к бесконечности. В диссертации рассмотрен вопрос о близости случайного такого многочлена p к многочленам с кратными корнями. В качестве меры близости можно взять либо минимум $\Delta(p)$ расстояния между корнями p, либо абсолютное значение дискриминанта $|D(p)|$. Автором показано, что для «большинства» многочленов $\Delta(p)$ принимает значение порядка 1, а $|D(p)|$ — порядка Q^{n-2}. Более формально это означает, что например, вероятность того, что $\Delta(p)$ не принадлежит отрезку $[1/C, C]$, асимптотически не превосходит константы, стремящейся к нулю с ростом C).

Наконец, четвёртая глава посвящена двум группам задач, связанным с выпуклой геометрией. В первой части (пп. 4.2–4.5) основное место занимает вычисление внутренних объёмов липшицевых шаров в пространстве L^2, а также более общих компактов, связанных с полунормами соболевского типа. Автор применяет эти результаты к вычислению среднего объёма выпуклой оболочки броуновского движения в $\mathbb{R}^k$. Вероятностным методом получено существенное продвижение в проблеме о симплексе минимальной средней ширины. Напомним её формулировку. Как выбрать на единичной n-мерной сфере $n+1$ точку с тем, чтобы математическое ожидание длины проекции их выпуклой оболочки на прямую, направляющий вектор которой равномерно распределён на сфере, было минимальным? Давняя гипотеза (см., например, обзор Грицманна и Клее 1994 г.) состоит в том, что минимум достигается на правильном симплексе. Соискатель доказал, что не существует симплекса, для которого средняя ширина будет меньше таковой для правильного симплекса больше, чем в $1 + (C \log\log n / \log n)$ раз. Вторая часть главы относится к вопросам о выпуклой оболочке случайных блужданий. В частности, найдена вероятность, с которой выпуклая оболочка симметричного блуждания в d-мерном пространстве не содержит начала координат, а при $d = 2$ также найдено математическое ожидание угла, под которым видна выпуклая оболочка. Также найдено математическое ожидание числа вершин выпуклой оболочки. Было бы интересно распространить эти результаты на случай процессов с непрерывным временем, например, на броуновское движение.

Диссертационная работа Д. Н. Запорожца вносит весомый вклад в теорию вероятностей и теорию чисел. Результаты диссертации полностью обоснованы подробными доказательствами, достоверность которых не вызывает сомнений. Бесспорные достоинства работы — ясное, подробное, продуманное изложение и тонкость применяемой техники.

К недостаткам можно отнести отдельные шероховатости изложения. Например, при формулировке теоремы о существовании распределений коэффициентов многочлена, при которых среднее число вещественных нулей мало́, можно было бы дать не только оценку, зависящую от некоторых числовых характеристик этих распределений, но и абсолютную оценку, которой можно добиться выбирая эти характеристики оптимальным образом.

Построение главы 4 вызывает вопросы. Глава посвящена двум почти независимым сюжетам: первый связан с вычислениями внутренних объёмов (пп. 4.2–4.5), а второй — с выпуклыми оболочками случайных блужданий (пп. 4.6–4.8). При этом введение к главе является введением лишь к первому сюжету. Возможно, стоило бы выделить пп. 4.6–4.8 в отдельную главу. Есть отдельные опечатки и редакционные ошибки, впрочем, неизбежные в работе такого объёма. Например, на с. 10 вместо ссылки на раздел 1.2.3 даётся ссылка на раздел «1.53», которого в работе нет, а на с. 3 автореферата стоит «частична опровергнута».

Отмеченные недостатки, однако, не влияют на высокую оценку диссертации в целом. Полученные в диссертации результаты своевременно опубликованы, в том числе в журналах, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает её содержание. Полученные результаты могут найти применение в исследованиях по теории вероятностей и теории чисел, ведущихся в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Лаборатории им. П. Л. Чебышёва Санкт-Петербургского государственного университета, Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, факультете математики НИУ «Высшая школа экономики», Хабаровском научном центре, Московском государственном университете, Астраханском государственном университете, а также при чтении специальных курсов по различным разделам теории вероятностей для студентов старших курсов, магистрантов и аспирантов.

Таким образом, диссертационная работа Д. Н. Запорожца удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям Положением о присуждении учёных степеней, а её автор Запорожец Дмитрий Николаевич, безусловно, заслуживает присвоения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

Профессор РАН,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
отдела дифференциальных уравнений
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Буфетов ________ А. И. Буфетов

119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
Тел. +7 (495) 984 81 41, доб. 39-95
E-mail: bufetov@mi.ras.ru

Подпись Буфетова А.И. заверяю
Гл. специалист отдела кадров МИАН
В.Н. Атанин