ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Лебедевой Елены Александровны «Всплеск-преобразование: частотно-временная локализация, разложения по системам всплесков, обратимость», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена решению некоторых современных проблем теории всплесков (или вейвлетов) на вещественной оси $\mathbb{R}$ и на группах Виленкина. В отличии от обычного преобразования Фурье всплеск-функции хорошо локализованы как в пространственной, так и в частотной области. Мерой такой локализации является константа неопределенности Гейзенберга, которая в работе обозначается $UC_H(f)$. В частности, классический результат принципа неопределенности утверждает, что для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ справедливо точное неравенство $UC_H(f) \geq 1/2$ (в работе используется $\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\omega}\,dx$) и экстремальной функцией является гауссиан. Возможность управлять локализацией семейств всплесков крайне важна в практических приложениях. Кроме этого, всплески дают примеры безусловных базисов в пространствах L^p. Например, система сплайн-всплесков Фабера–Шаудера является базисом в $C[0,1]$, в то время как тригонометрическая система нет. Вокруг этих фундаментальных свойств всплесков сконцентрированы основные результаты диссертации. Отметим, что изучению всплеск-систем и близких понятий с теоретической и практической точек зрения посвящено большое количество исследований. Можно отметить результаты А. Хаара, А. Гроссмана, Й. Морле, С. Малла, Й. Мейера, П. Лемарье, И. Добеши, А. Коена, Р. ДеВора, У. Лоутона, Ч. Чуи, Г. Баттла, И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова, М.А. Скопиной, Н.И. Черных и многих других. Важность данной тематики подчеркивает тот факт, что в 2017 году престижная премия Абеля была присуждена Й. Мейеру за «за его ключевую роль в развитии математической теории вейвлетов».

Диссертация состоит из списка обозначений и сокращений, введения, девяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 124 источника. Общий объем составляет 215 страниц. Достоверность и обоснованность сформулированных результатов подтверждается подробными разъяснениями и строгими математическими доказательствами, базирующимися на современных методах функционального анализа и теории функций, публикациями автора в высокорейтинговых математических журналах. Полученные результаты были доложены на специализированных научных семинарах и международных конференциях, на некоторых из которых я присутствовал лично.

Работа содержит много результатов, сосредоточенных в девяти (!) главах. Однако я бы выделил наиболее близкие мне результаты первых глав, связанные с оценками констант неопределенности всплесков. Эти задачи носят экстремальный характер, что привносит в них дополнительную сложность, но, одновременно, некоторую завершенность.

Первый результат, который я хотел бы отметить, это решение проблемы Ч. Чуи о существовании семейства ортонормированных базисов всплесков, константа неопределенности которого равномерно ограниченна с ростом гладкости порождающих функций. Ч. Чуи и Й. Вонг (1996) показали, что для многих систем всплесков, включая всплески Добеши и Баттла–Лемарье, это не так. Автор дает позитивный ответ в теореме 1.2.1.

Для доказательства этой теоремы применяется следующая интересная идея. Параметр гладкости обозначается $l \in \mathbb{N}$. Берется функция $m_l^M(\omega) = (\cos\frac{\omega}{2})^{-2l} m^M(\omega)$, где m^M — маска всплеска Мейера с фиксированным параметром $\theta(\omega)$. Она сглаживается при помощи свертки с ядром U_n некоторого линейного метода суммирования ряда Фурье и нормируется: $m_l(\omega) = (\cos\frac{\omega}{2})^{2l} \frac{U_{n(l)} * m_l^M(\omega)}{U_{n(l)} * m_l^M(0)}$. В результате получается маска неортогональной масштабирующей функции φ_l, по которой с помощью стандартной процедуры строится искомое семейство ортонормированных всплесков с масштабирующей функцией $\varphi_l^\perp$ и всплеск-функцией $\psi_l^\perp$, называемых автором квазисплайн-всплесками. Доказывается, что квазисплайн-функции убывают экспоненциально, их преобразование Фурье в бесконечности имеет поведение $O(\omega^{-l})$ и константы неопределенности стремятся к константам неопределенности всплеск-функций Мейера, что влечет их равномерную ограниченность. Доказательство нетривиально, проходит в несколько шагов и использует довольно тонкие оценки всплеск-функций. Применяются вспомогательные результаты из теории приближений и всплесков, в частности, лемму 1.2.1 о скорости приближения линейного метода приближения функции. Степень приближения $n(l)$ берется достаточно большой, чтобы погасить нормы функции m_l^M и ее производной, которые экспоненциально зависят от l. Тот факт, что свертка является тригонометрическим полиномом, с одной стороны позволяет использовать формулу $\widehat{\varphi}_l(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} m_l(\frac{\omega}{2^k})$, на которую опирается доказательство близости констант неопределенности $\varphi_l^\perp$, φ^M и, как следствие, $\psi_l^\perp$, ψ^M, а с другой — доказать экспоненциальное убывание $\varphi_l^\perp$ методами комплексного анализа. Все эти моменты оказались очень любопытными для меня.

Отмечу в плюс, что выкладки довольно подробные (и это характерно для всей работы), хотя в некоторых местах, например, асимптотических оценках, можно было бы использовать более грубые, но менее громоздкие, константы.

Другой интересный результат заключается в нахождении минимального значения $UC_H(\psi_\theta^M)$ всплеск-функции Мейера ψ_θ^M. Для этого используется явное выражение для $UC_H^2(\psi_\theta^M)$ в виде интегрального функционала от $\theta(\cdot)$, найденное автором ранее (2007). В работе вывод этого выражения не приводится (возможно, что это результат кандидатской диссертации, но для полноты изложения его можно было привести). В результате мы имеем экстремальную задачу вариационного типа. Решение этой задачи формулируется в теореме 2.1.1. Применяя методы вариационного исчисления доказывается, что экстремальная функция θ^* удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению $x'' = -qt\cos x$, где $x(t) = 2\omega^*(t)$, $q \approx 0{,}676$. При этом $UC_H(\psi_{\theta^*}^M) \approx 2{,}622$. Аналитическое решение дифференциального уравнения неизвестно, поэтому автор приводит интересный метод последовательных приближений, в результате которого получается последовательность выписываемых явно функций $\theta_n \rightrightarrows \theta^*$ и соответствующая последовательность всплеск-функций Мейера $\psi_{\theta_n}^M$, равномерно сходящихся к $\psi_{\theta^*}^M$.

Несомненный интерес представляют всплески с наименьшей константой неопределенности. Выше мы привели оценку $UC_H(f) \geq 1/2$. Однако, как отмечается автором, для действительных всплесков f с бесселевой системой сжатий и сдвигов $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{f}|^2 = 0$. В этом случае Г. Баттл (1997) доказал, что $UC_H(f) \geq 3/2$. Автором показано, что для всплесков Мейера наилучшее возможное значение 2,622. Чуть лучше установленная численно оценка 2,134 для всплесков Добеши. Однако всплески с константой 3/2 неизвестны. В этой связи интересен следующий результат, в котором решается периодический аналог данной проблемы, поставленный Ю. Престином и Э. Куаком (1999). В этом случае рассматривается периодическая константа неопределенности $UC_B(f)$, введенная Э. Брейтенбергером (1985). Он доказал, что $UC_B(f) > 1/2$, если $f \in L^2[0,1)$. В случае периодических дискретных всплесков, являющихся фреймами Парсеваля, естественно рассматривать константу Брейтенбергера для всплесковых последовательностей функций ψ_j и соответствующих масштабирующих последовательностей φ_j, $j \in \mathbb{Z}_+$. В теореме 3.2.1 явно выписывается параметрическое семейство $\{\psi_j^a, \varphi_j^a\}$, $a > 1$, на котором достигается оценка 1/2 и при этом $\lim_{j\to\infty} UC_B(\psi_j^a) = 3/2$ для фиксированного $a > 1$. Интересно, что это семейство определяется при помощи тэта-функций и при доказательстве неявно используются их свойства. Появление константы 3/2 оказалось неслучайным. Для этого в теореме 3.3.1 автор доказывает периодический аналог результата Баттла: если последовательность всплеск-функций $f_n \in L^2[0,1)$ удовлетворяет периодическим условиям типа Баттла, то $\lim_{n\to\infty} UC_B(f_n) \geq 3/2$. Примером минимизирующей последовательности и является ψ_j^a. Для доказательства теоремы 3.3.1 устанавливается предельная связь констант Брейтенбергера и Гейзенберга.

Помимо перечисленных результатов для всплесков в пространстве $L^p(\mathbb{R})$ получены достаточные условия для безусловной сходимости разложений по двойственным системам всплесков, найдена формулу обращения непрерывного всплеск-преобразования, применимая в случае нарушения условия допустимости. Также изучены задачи для всплесков в пространстве L^p на группах Кантора и Виленкина, в частности, определена константа неопределенности в случае группы Кантора и получены ее значения для всплесков Лэнга. Несомненно, что эти результаты полезны для специалистов в данной тематике.

Оценивая диссертацию в целом, следует отметить, что изложение полученных результатов в работе проведено четко и последовательно. Все утверждения сформулированы ясно и математически строго доказаны.

Основные результаты диссертации являются новыми, обобщают и усиливают ранее известные результаты многих специалистов в данной области. Для доказательства результатов работы диссертанту пришлось преодолеть значительные идейные и технические сложности.

Некоторые комментарии по содержанию диссертации были сделаны выше. Есть еще незначительные замечания к содержанию и оформлению диссертации:

- Во введении перед формулировкой теоремы 0.0.1 (1.2.1) нужно было привести необходимое свойство линейных методов суммирования джексоновского типа, сформулированное в лемме 1.2.1, а также определение порядка полинома $n(l)$. Без этого непонятно, почему перечисленные примеры методов допустимы. Возможно, что можно было использовать это утверждение не с модулем непрерывности, а сразу с нормой производной (что достаточно), поскольку в таком виде оно также известно. А так перегружено «ω».

- Для леммы 2.1.2 В.Ю. Протасова нет ссылки или доказательства.

- В отличии от леммы 2.1.1 в теореме 2.2.3 не совсем ясна роль параметра a. Верно ли, что в утверждении 1 нужно дописать «для каждого n и a».

- Имеются опечатки в формулах:

  – стр. 7: в 3-й строчной формуле нужен интеграл по $\mathbb{R}^2$ вместо $\mathbb{R}$,

- стр. 46: выражение для $n(l) = O(\ldots)$ заменить на $n(l) \geq C\ldots$ для некоторой положительной константы C или $n(l) \asymp \ldots$,
- стр. 47: в последней строчной формуле в середине пропал множитель $(\cos\frac{\omega}{2})^{-2l}$, хотя в итоге формула корректна,
- стр. 50: во 2-й строке доказательства леммы 1.4.3 вместо «w» нужно «ω», то же на стр. 51 в середине.

- Некоторые стилистические замечания и замеченные орфографические ошибки:
  - стр. 8, 1-я строка 2-го абзаца: ошибка в слове «всплеск-функции»,
  - стр. 9: не раскрыт термин НВП при первом встрече,
  - стр. 9, 11: где-то строчки вылезли за край текста.
  - стр. 16: пропущена ссылка на результат автора 2007 года, хотя в гл. 2 она есть,
  - стр. 17: пропущена запятая в последней строчной формуле после min,
  - стр. 17: в лемме 2.1.1 вместо «точка минимума» лучше «экстремальная функция»,
  - стр. 20: в 1-й строке теоремы 0.0.5 пропущена запятая после «$j \in \mathbb{N}$» и тире,
  - стр. 44: несколько непривычная формулировка теоремы 1.2.1, полностью составленная из других теорем; здесь же перегружено α (порядок убывания нормы и показатель Гёльдера), причем «Гёльдер» пишется через «ё»; также «u_l» определено только после формулировки,
  - стр. 50: во 1-й строке доказательства леммы 1.4.лучше написать $\omega \in [a, b]$,
  - стр. 51: в формуле (1.17), возможно, вместо «$\leq$» перед «O» лучше писать «$=$»,
  - стр. 154: пояснить, что такое F,
  - стр. 188: во втором абзаце заменить «В данной работе» на «В данной главе».
  - стр. 204–215: в списке литературы инициалы авторов идут перед фамилиями.

Тем не менее, указанные недостатки носят технический характер и никак не снижают весьма высокой научной ценности диссертационной работы.

Основные результаты диссертации являются новыми, они полностью отражены в публикациях автора, опубликованы в 15 научных работах, все в журналах из перечня ВАК РФ (5 статей в российских и 10 статей в зарубежных журналах). Результаты диссертации докладывались на многочисленных международных конференциях и различных научных семинарах, в работе которых принимали участие известные специалисты в данной области.

Диссертационная работа Е.А. Лебедевой «Всплеск-преобразование: частотно-временная локализация, разложения по системам всплесков, обратимость» является научно-квалификационной работой, удовлетворяющей всем требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее автор — Лебедева Елена Александровна, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — Вещественный,
комплексный и функциональный анализ,
профессор Горбачев Дмитрий Викторович.

300012, г. Тула, пр. Ленина, д. 92
ФГБОУ Тульский государственный университет
Институт прикладной математики и компьютерных наук
Профессор кафедры прикладной математики
и информатики Д.В. Горбачев

e-mail: dvgmail@mail.ru
Тел. дом.: (4872)264905
Тел. раб.: (4872)254620

25.09.2017

Подпись Д.В. Горбачева удостоверяю.
Начальник ОК ТулГУ М.В. Метелищенкова
25.09.17