На правах рукописи

Боровицкий Вячеслав Андреевич

Многопараметрические оценки в гармоническом анализе: варианты неравенства Рубио де Франсиа и интерполяция абстрактных пространств типа Харди

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт–Петербург — 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, академик РАН **Кисляков Сергей Витальевич**
Официальные оппоненты:	**Каюмов Ильгиз Рифатович,** доктор физико-математических наук, Казанский (Приволжский) федеральный университет, ведущий научный сотрудник, профессор **Степанов Владимир Дмитриевич,** доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, главный научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования “Южный федеральный университет”

Защита состоится ___ ______________ г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://pdmi.ras.ru/.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311, ученому секретарю диссертационного совета Д 002.202.01.

Автореферат разослан ___ ________ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.202.01,
кандидат физико-
математических наук   Рядовкин Кирилл Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность. Новые утверждения, установленные в рамках данной диссертации, углубляют общее понимание некоторых вопросов теории Литлвуда–Пэли и теории пространств Харди. Они позволяют получать новые результаты как в рамках этих теорий, так и близких вопросах, что представляет большой интерес, так как теория Литлвуда–Пэли и теория пространств Харди имеют важные приложения к теории уравнений в частных производных, а через нее к физике и другим естественным наукам.

Целью данной работы является исследование двух вопросов современного гармонического анализа. Во-первых, новых вариантов многопараметрического неравенства Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа: в случае с весом и в случае многопараметрических групп Виленкина. Во-вторых, интерполяции абстрактных вариантов весовых пространств Харди.

Научная новизна: Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при решении задач гармонического анализа и смежных теорий. Гармонический анализ, в свою очередь, имеет множество приложений как в математике, так и в других науках.

Методология и методы исследования. В работе используются методы теории многопараметрических синглуярных интегральных операторов, разработанные, в основном, Р. Фефферманом [10—12], а также смежной теории для операторов на пространствах мартингалов, описанные в работах Ф. Вейса [26—29]. Всё это — вещественные методы гармонического анализа. В контексте вопросов об интерполяции пространств Харди возникают методы теории равномерных алгебр, являющейся частью функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

Во-первых, K-замкнутость[1] весовых пространств Харди на двумерном торе в соответствующих пространствах Лебега.

Теорема 1. *Пусть a, b — такие веса на $\mathbb{T}$, что $\log a, \log b \in \mathrm{BMO}$. Пусть еще u — вес на $\mathbb{T}^2$, удовлетворяющий условию Макенхаупта A_p при некотором $p \in (1,\infty)$ по первой переменной с константой, не зависящей от второй переменной, причем $\operatorname{ess\,sup}_{\xi_1} \|\log u(\xi_1,\cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$. Рассмотрим окаймленный вес $w(\xi_1,\xi_2) = a(\xi_1)u(\xi_1,\xi_2)b(\xi_2)$. Тогда пара*

$$(H^p_w(\mathbb{T}^2), H^\infty) \qquad K\text{-}\textit{замкнута в паре} \qquad (L^p_w(\mathbb{T}^2), L^\infty(\mathbb{T}^2)).$$

И абстрактный результат, из которого в конечном итоге и выводится теорема 1.

[1] K-замкнутость и некоторые другие более узкоспециализированные понятия будут разъяснены ниже, во время описания содержания работы.

Теорема 2. *Рассмотрим пространство с мерой (S,μ), где μ — σ-конечная мера. Рассмотрим еще какую-то w^*-замкнутую подалгебру X с единицей в алгебре $L^\infty(\mu)$, а также w^*-замкнутый модуль $Y \subseteq L^\infty(\mu)$ над алгеброй X. Предположим, что алгебра X удовлетворяет некоторому условию регулярности (α_μ), определенному в главе* 1 и ниже. *Тогда пара $\big(\operatorname{clos}_{L^r(\mu)}(Y \cap L^r(\mu)), Y\big)$ является K-замкнутой в паре $(L^r(\mu), L^\infty(\mu))$ для показателей r: $0 < r < \infty$.*

Во-вторых, неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франиса для ограниченных многопараметрических систем Виленкина.

Теорема 3. *Пусть $I_k = I_k^1 \times \ldots \times I_k^D \subseteq \mathbb{Z}_+^D$ — счетное семейство непересекающихся прямоугольников, то есть таких множеств, что $I_k^d = [a_k^d, b_k^d) = \big\{ n \in \mathbb{Z}_+ \,\big|\, a_k^d \le n < b_k^d \big\}$ — интервалы в $\mathbb{Z}_+$. Пусть $f_k : [0{,}1)^D \to \mathbb{R}$ — семейство функций, чей спектр Фурье–Виленкина лежит в I_k, то есть*

$$f_k(x) = \sum\nolimits_{(n_1,\ldots,n_D) \in I_k} \langle f_k, v_{n_1} \cdot \ldots \cdot v_{n_D} \rangle v_{n_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot v_{n_D}(x_D),$$

где v_{n_d} — функции Виленкина, соответствующие каким-то ограниченным системам Виленкина, которые могут быть различными для разных d. Тогда

$$\big\| \sum\nolimits_k f_k \big\|_{L^p([0,1)^D)} \le C \big\| \{f_k\} \big\|_{L^p([0,1)^D,\, l^2)}, \qquad 1 < p \le 2,$$

где константа C не зависит от выбора прямоугольников $\{I_k\}$ и функций $\{f_k\}$.

В-третьих, весовое неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франиса для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{I}$ — какое-то разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ на прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, а $w(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — некоторый вес на плоскости, пусть, как обычно, $\widehat{M_I f} = \widehat{f}\mathbb{1}_I$. Для показателей p в интервале $2 < p < \infty$ и веса w, удовлетворяющего двупараметрическому условию Макенхаупта с показателем $p/2$, верно неравенство*

$$c \big\| \{M_I f\}_{I \in \mathcal{I}} \big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2,\, l^2)} \le \|f\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)}. \tag{1}$$

Для показателей p в интервале $0 < p < 2$ и веса w, удовлетворяющего некоторому условию $\alpha_{r(p)}$, являющемуся в определенном смысле двойственным к условию Макенхаупта, верно неравенство

$$\Big\| \sum\nolimits_{I \in \mathcal{I}} f_I \Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2)} \le C \Big\| \{f_I\}_{I \in \mathcal{I}} \Big\|_{L^p_w(\mathbb{R}^2,\, l^2)}, \text{ где } \operatorname{supp} \widehat{f_I} \subseteq I \text{ для } I \in \mathcal{I}. \tag{2}$$

Число $r(p)$ должно удовлетворять условиям $1 < r(p) < 2$ и $r(p) \ge p$, а условие $w \in \alpha_r$ обозначает $w^{-\frac{1}{r-1}} \in A_{\frac{r}{2(r-1)}}$.

Достоверность. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами, их доказательства проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Результаты глав 1,3 опубликованы в рецензируемых журналах. Результаты главы 2 обобщают идеи работы автора [A3], также опубликованной в рецензируемом издании.

Апробация работы. Результаты работы были доложены в рамках нескольких выступлений на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций.

Личный вклад. Статья [A4] написана в соавторстве с С.В. Кисляковым. По мнению соавторов, их вклад в эту работу равный. Все остальные основные новые результаты, изложенные в работах [A1—A3] и приведённые в диссертации, являются результатами лично диссертанта.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science или Scopus.

Содержание работы

В диссертации рассматриваются приложения теории *многопараметрических сингулярных интегральных операторов*, а также ее мартингального варианта к вопросам *теории Литлвуда–Пэли*, а также задачи, связанные с самой теорией многопараметрических сингулярных операторов, а именно интерполяцию некоторых абстрактных вариантов *двупараметрических пространств Харди*.

Классическая теория сингулярных интегральных операторов рассматривает операторы с сильной особенностью, такие как преобразование Гильберта $\mathcal{H}$ или, в многомерном случае, преобразования Рисса $\mathcal{R}_d$:

$$(\mathcal{H}f)(t) = f * \Big(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{\pi\tau}\Big), \quad (\mathcal{R}_d f)(x) = f * \Big(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{c_D y_d}{|y|^{D+1}}\Big), \quad 1 \le d \le D.$$

Здесь “$*$” обозначает свертку, c_D — какая-то известная константа, а p. v. символизирует тот факт, что интеграл, который может не сходиться абсолютно, берется в смысле главного значения.

Преобразования Рисса коммутируют с однопараметрическим семейством растяжений, то есть $(\mathcal{R}_d f(\lambda\cdot))(x) = (\mathcal{R}_d f(\cdot))(\lambda x)$ для всех $\lambda > 0$, поэтому их и родственные им операторы называют *однопараметрическими сингулярными интегралами (интегральными операторами)*.[2]

[2] Такая мотивация терминологии более или менее следует идеям из классической работы Чанг и Р. Феффермана [10].

Нас же будет в основном интересовать класс *многопараметрических сингулярных интегралов (интегральных операторов)*, стандартными представителями которого являются *кратные преобразования Гильберта*

$$(\mathcal{H}_D f)(x) = \frac{1}{\pi^D}\,\mathrm{p.\,v.}\int_{\mathbb{R}^D} \frac{f(y)}{\prod_{d=1}^{D}(x_d - y_d)}\,\mathrm{d}y = f * \Bigl(\mathrm{p.\,v.}\,\frac{1}{\pi^D y_1\cdot\ldots\cdot y_D}\Bigr),$$

коммутирующие с многопараметрическим семейством растяжений. Общий класс таких операторов строго описать довольно сложно, поэтому мы не будем вдаваться в подробности, ограничившись замечанием, что это операторы, которые, если зафиксировать все переменные кроме одной, ведут себя подобно однопараметрическим сингулярным интегралам.

Теория многопараметрических сингулярных интегралов значительно сложнее теории однопараметрических. Сравнивая, например, какое-нибудь преобразование Рисса с кратным преобразованиям Гильберта, легко заметить, что сама размерность множества, где ядро имеет сингулярность, у второго больше, чем у первого.

Некоторые вопросы теории сильно упрощаются, когда ядро многопараметрического сингулярного оператора $K(x,y)$ распадается в произведение, то есть представляется в виде $K_1(x_1,y_1)\cdot\ldots\cdot K_D(x_D,y_D)$. К сожалению, многие интересные операторы не обладают такой структурой.

Приложения к теории Литлвуда–Пэли. Одним из важных вопросов теории Литлвуда–Пэли является сравнение нормы функции с нормами ее "кусочков", спектры (носители преобразования Фурье) которых лежат в каких-то регулярных множествах.

Рассмотрим абстрактную постановку. Пусть G — локально компактная абелева группа. С помощью меры Хаара тогда определены пространства $L^p(G)$, а также прямое и обратное преобразования Фурье для элементов пространств $L^2(G)$ и $L^2(\widehat{G})$ соответственно, где $\widehat{G}$ — двойственная по Понтрягину группа, также снабженная мерой Хаара. Определим операторы M_I, $I \subseteq \widehat{G}$, формулой $\widehat{M_I f} = \widehat{f}\mathbb{1}_I$, где $\widehat{f}$ обозначает преобразование Фурье функции f, а $\mathbb{1}_I$ — индикатор множества I. Такие операторы называются *мультипликаторами Фурье с символом* $\mathbb{1}_I$. Они "вырезают" из функции f "кусочек" со спектром в I.

Рассмотрим какое-то счетное разбиение $\widehat{G}$ на измеримые подмножества $\{I\}_{I\in\mathcal{I}}$. Тогда, по теореме Планшереля, для любой функции $f \in L^2(G)$

$$\|f\|_{L^2(G)} = \Bigl\|\Bigl(\sum_{I\in\mathcal{I}}|M_I f|^2\Bigr)^{1/2}\Bigr\|_{L^2(G)} \overset{\mathrm{def}}{=} \bigl\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\bigr\|_{L^2(G,l^2)}.$$

Такие соотношения весьма удобны, так как позволяют сводить утверждения о норме функции f к утверждениям о нормах функций $M_I f$. Если заменить L^2 нормы на L^p нормы, это равенство, вообще говоря, перестанет быть верным, хотя часто все-таки можно сформулировать нечто похожее. В частности, для $G = \mathbb{R}^D$ знаменитое неравенство Литлвуда–Пэли устанавливает, что для $1 < p < \infty$

$$c\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\, l^2)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^D)} \le C\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\, l^2)}, \qquad (3)$$

но не для произвольных разбиений $\mathcal{I}$, а для $\mathcal{I}$, в случае $D = 1$, состоящих из интервалов с концами, формирующими лакунарную по Адамару последовательность, а в случае произвольной размерности D, для $\mathcal{I}$, являющихся декартовым произведением таких последовательностей интервалов.

Другие знаменитые неравенства такого рода, называемые неравенствами Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа или просто неравенствами Рубио де Франсиа, обобщают каждое из односторонних неравенств в (3) на значительно более общий класс разбиений, но для ограниченной шкалы показателей p. А именно, для разбиений $\mathcal{I}$ пространства $\mathbb{R}^D$ на произвольные непересекающиеся параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям, верны оценки

$$c\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\, l^2)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^D)}, \qquad 2 \le p < \infty, \qquad (4)$$

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^D)} \le C\big\|\{M_I f\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\, l^2)}, \qquad 1 < p \le 2. \qquad (5)$$

Неравенство (4) было доказано Рубио де Франсиа для $D = 1$ в работе [23] и обобщено на случай произвольной размерности в [15] Журне (более простое доказательство было затем дано Сориа в [24]). Неравенство (5) следует из неравенства (4) по двойственности. Несмотря на то, что из неравенства (4) нельзя вывести аналог неравенства (5) для $p \le 1$, более тонкие методы дают для $0 < p \le 2$ соотношение

$$\Big\|\sum_{I\in\mathcal{I}} f_I\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^D)} \le C\big\|\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}\big\|_{L^p(\mathbb{R}^D,\, l^2)}, \text{ где } \operatorname{supp}\widehat{f_I} \subseteq I \text{ для } I \in \mathcal{I}. \qquad (6)$$

Уточним, что здесь $\mathcal{I}$, так же как и в неравенствах (4) и (5), является разбиением пространства $\mathbb{R}^D$ на непересекающиеся параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям. Неравенство (6) мы сформулировали без использования операторов M_I: при $p \le 1$ они ведут себя довольно плохо, и такая формулировка позволяет не заострять на этом внимания, в то время как при $1 < p \le 2$ из нее легко получить исходное неравенство (5).

Впервые рассмотрел неравенство (6) Бургейн: в статье [9] он доказал его при $p = 1$ в размерности $D = 1$. Кисляков и Парилов в своей заметке [3] нашли к задаче другой подход, что позволило им обобщить результат Бургейна на случай произвольного p в интервале $0 < p \le 2$. Наконец, Осипов в своих статьях [6] и [7] доказал неравенство (6) при $0 < p \le 2$ в произвольной размерности $D \in \mathbb{N}$. Отметим, что все утверждения остаются верными также и для $G = \mathbb{T}^D$, причем методы доказательства остаются неизменными.

Методы доказательства неравенств Рубио де Франсиа тесно связаны с теорией сингулярных интегральных операторов. При этом в случае $D > 1$ эти операторы оказываются многопараметрическими. Поэтому задачи, связанные с неравенствами Рубио де Франсиа при $D > 1$, вполне соответствуют общей направленности диссертации.

Нас будут интересовать два круга вопросов, связанных с неравенствами Рубио де Франсиа. Во-первых, весовые оценки в случае нескольких переменных. Во-вторых, варианты неравенства Рубио де Франсиа для некоторых групп-произведений G, отличных от классических $\mathbb{R}^D$ и $\mathbb{T}^D$.

Весовые оценки интересовали еще Рубио де Франсиа в исходной работе [23]. Там он рассматривал неравенство (4) сразу же в весовом случае: он показал, что если при $p > 2$ в нем вместо L^p рассматривать L^p_w с весом $w \in A_{p/2}$, то неравенство остается верным (A_s — стандартные классы Макенхаупта, см. про них, например, в книге Стейна [25]).

Рассмотрение размерности $D = 1$ для стандартных групп $\mathbb{R}$ и (неявно) $\mathbb{T}$ с весом завершил Кисляков в статье [2], доказав весовой вариант неравенства (6) для показателей $0 < p < 2$:

$$\Big\|\sum\nolimits_{I\in\mathcal{I}} f_I\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R})} \le C\Big\|\{f_I\}_{I\in\mathcal{I}}\Big\|_{L^p_w(\mathbb{R},\, l^2)}, \text{ где } \operatorname{supp}\widehat{f}_I \subseteq I \text{ для } I\in\mathcal{I},$$

причем $\mathcal{I}$ — разбиение $\mathbb{R}$ на произвольные интервалы, а вес w таков, что $w^{-\frac{1}{r-1}}$ удовлетворяет условию Макенхаупта $A_{\frac{r}{2(r-1)}}$ для какого-то r, для которого $\max(1,p) \le r < 2$.

Рубио де Франсиа предвосхитил то, что развитие методов работы с многопараметрическими сингулярными интегральными операторами позволит обобщить его результат на случай $D \ne 1$. Это и произошло в статьях [6; 7; 15], но без оглядки на более общий случай с весом.

В главе 3 мы, пусть и не полностью, ответим на запрос Рубио де Франсиа, рассмотрев весовой случай по крайней мере в размерности $D = 2$ (как для $2 < p < \infty$, так и для $0 < p < 2$). В частности, докажем аналог весового неравенства, доказанного Кисляковым. Для этого мы воспользуемся техникой, основанной на теории двупараметрических сингулярных интегральных операторов и атомных разложений в соответствующих пространствах Харди, разработанной Р. Фефферманом, и некоторыми современными ее обобщениями.

Неравенство Рубио де Франсиа для нестандартных групп G, по-видимому, впервые изучалось в работе Осипова [22]. В ней был рассмотрен случай, когда G — диадическая группа. Двойственной к ней группой $\widehat{G}$ является множество функций Уолша с операцией обыкновенного умножения функций, которое естественным образом отождествляется с группой неотрицательных целых чисел с некоторой нестандартной “побитовой” операцией сложения. Такое отождествление порождает понятие интервала (отрезка) на двойственной группе, передавая его по наследству от естественного порядка на $\mathbb{Z}_+$. Эта постановка ассоциирована с “дискретным” преобразованием Фурье–Уолша, имеющим большое количество приложений как в математике, так и в естественных и инженерных науках.

Используя построенную Ганди [14; 18] теорию операторов, отображающих мартингалы в измеримые функции, сходную с теорией однопараметрических сингулярных интегралов, Осипову удалось доказать неравенство (5) для диадической группы. Совсем недавно Целищев [8] обобщил этот результат на случай, когда G принадлежит определенному классу групп Виленкина. Двойственные группы $\widehat{G}$, в таком случае, идентифицируются с системами Виленкина и снабжены естественным понятием интервала, которое также определяется отождествлением с множеством $\mathbb{Z}_+$ с естественным отношением порядка.

В главе 2 мы рассмотрим обобщение этих результатов на многопараметрический случай. Рассматривая произведения произвольного количества ограниченных групп Виленкина (бесконечных прямых произведений циклических групп, порядки которых ограничены) и естественное понятие *прямоугольников* на двойственной группе, отождествляемой с функциями Виленкина, мы докажем неравенство (5). Основным инструментом будет мартингальный аналог теории многопараметрических сингулярных интегралов, изложенный в работах Вейса [26—29].

Интерполяция абстрактных пространств Харди. Теория пространств Харди является важной частью современного гармонического анализа. Эти пространства самым тесным образом связаны именно с сингулярными интегральными операторами, а некоторые их варианты — с многопараметрическими сингулярными интегральными операторами. Одной из основных тем в этой теории являются критерии ограниченности операторов, действующих в пространствах Харди.

Соответственно, важную роль в этом круге вопросов играют интерполяционные теоремы родственные теоремам Марцинкевича или Рисса–Торина. Интерполяционные свойства шкалы пространств Харди удобно рассматривать с помощью понятия K-замкнутости. Пара подпространств (Y_1, Y_2) называется K-замкнутой в паре пространств (X_1, X_2), если любому разложению элемента $f \in Y_1 + Y_2$ в сумму $f = g + h$ элементов $g \in X_1$ и $h \in X_2$ соответствует разложение $f = g' + h'$, где $g' \in Y_1$, $h' \in Y_2$ и $\|g'\|_{X_1} \le C\|g\|_{X_1}$, $\|h'\|_{X_2} \le C\|h\|_{X_2}$. Как несложно показать [16], при K-замкнутости интерполяционные свойства пары (X_1, X_2) наследуются парой (Y_1, Y_2), по крайней мере если речь идет о вещественной интерполяции. Поэтому вместо непосредственного доказательства интерполяционных теорем для пространств Харди, обычно ставится вопрос об их K-замкнутости в соответствующих пространствах Лебега.

Вопрос K-замкнутости пары пространств Харди $\bigl(H^r(\mathbb{T}^D), H^s(\mathbb{T}^D)\bigr)$ в паре соответствующих пространств Лебега $\bigl(L^r(\mathbb{T}^D), L^s(\mathbb{T}^D)\bigr)$ для разных размерностей и разных пар показателей $0 < r < s \leq \infty$ на данный момент является решенным лишь частично. Тогда как в случае $s \neq \infty$ K-замкнутость установлена для произвольных размерностей, в случае $s = \infty$ K-замкнутость доказана лишь для $D = 1, 2$, а случай $D > 2$ является на данный момент, по-видимому, нерешенной задачей. То же самое справедливо также и для $\mathbb{R}^D$ вместо $\mathbb{T}^D$. История этого вопроса подробно обсуждается в обзоре [16]. Отметим, что пространства Харди на многомерном торе прямым образом связаны именно с многопараметрическими сингулярными интегральными операторами, главной темой диссертации.

Вопрос K-замкнутости для весовых пространств Харди также интересен. Эта тема отчасти вдохновлена вопросом о справедливости аналога теоремы Гротендика для диск-алгебры, который в размерности $D = 1$ можно разрешить с помощью интерполяции весовых пространств Харди (см. про это в обзоре [4]). В частности, например, известно, что K-замкнутость пары $(H^p_w(\mathbb{T}), H^\infty(\mathbb{T}))$ в паре $(L^p_w(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$, где w — некоторый вес на окружности, эквивалентна условию $\log w \in \mathrm{BMO}$, см. обзор [13].

В соответствии с общей направленностью диссертации, мы включаем в нее результаты автора из работы [A1], относящиеся как раз к случаю пары весовых пространств $\bigl(H^p_w(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2)\bigr)$ на двумерном торе. Случай отсутствия веса ($w \equiv 1$), как уже упоминалось выше, был исследован давно, см. [5]. После этого, в [20] K-замкнутость такой пары была доказана в случае, когда переменные разделяются: $w(\xi_1, \xi_2) = a(\xi_1)b(\xi_2)$, где $\log a, \log b \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$. В работе автора [A1] был разобран более сложный случай окаймленного веса $w(\xi_1, \xi_2) = a(\xi_1)u(\xi_1, \xi_2)b(\xi_2)$, где a и b — такие, как выше, а функция u удовлетворяет некоторым специальным условиям. По поводу точной формулировки см. теорему 1.

В главе 1 мы рассмотрим некоторое абстрактное обобщение классического понятия пространств Харди граничных значений аналитических функций и соответствующий абстрактный подход к теоремам о K-замкнутости. Эти абстрактные пространства определяются через аксиоматику, моделирующую свойства оператора гармонического сопряжения. Подобная аксимоматическая постановка рассматривалась ранее статьями [1; 19], однако в главе 1 соответствующий аппарат будет развит более глубоко и последовательно. В частности, будет показано, что с помощью простых приемов весовые результаты могут быть включены в те же общие конструкции, что и невесовые, чего не было в цитированных работах.

Отметим, что, прежде чем получить объявленный выше "двумерный" результат в абстрактной форме, в главе 1 развивается достаточно полная теория, моделирующая известные “одномерные” результаты для пространств Харди.

Описание диссертации по главам и параграфам. Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, кратко формулируются основные результаты.

Первая глава посвящена доказательству K-замкнутости весовых пространств Харди на двумерном торе в соответствующих пространствах Лебега. Для этого в ней развивается обобщенный и расширенный вариант аксиоматической теории абстрактных пространств Харди из работ [1; 19].

В разделе 1.1 изучаются абстрактные варианты пространства $H^\infty(\mathbb{T})$ — равномерные алгебры, удовлетворяющие условию $(\alpha_{p,k,\mu})$:

Определение. Пусть X — w^*-замкнутая подалгебра с единицей алгебры $L^\infty(\mu)$. Алгебра X удовлетворяет условию $(\alpha_{p,k,\mu})$, $0 < p < \infty$ и $k \in \mathbb{N}$, если для любой неотрицательной функции $\phi \in L^p(\mu)$ существует такая последовательность функций $\{u_n\}_{n=0}^\infty \subseteq X$, $u_n \to u$ п.в., что выполнены соотношения

$$\operatorname{Re} u_n \geq 0, \qquad \left\|u_n^k\right\|_{L^p(\mu)} \leq C\|\phi\|_{L^p(\mu)}, \qquad \operatorname{Re} u \geq \phi^{1/k},$$

причем константа C не зависит от функции ϕ.

Условие $(\alpha_{p,k,\mu})$ походит на условия (α_p) из упомянутых работ (оба они мотивированы свойствами оператора гармонического сопряжения), но является несколько более свободным. Благодаря этому удается доказать, что в условии $(\alpha_{p,k,\mu})$ параметры p и k по сути не важны, что мотивирует краткое обозначение (α_μ), а также установить, что условие (α_μ) выдерживает переход к мерам вида $w\,\mathrm{d}\mu$, где w принадлежит к достаточно широкому классу весов, который мы называем *регулярными весами.* В случае $X = H^\infty(\mathbb{T})$, например, для регулярности веса w достаточно выполнения условия $\log w \in \mathrm{BMO}$. Среди прочего, в этом разделе доказывается упомянутая выше теорема 2, которая устанавливает K-замкнутость модулей, связанных с какой-то алгеброй X, удовлетворяющей условию (α_μ), а также абстрактный аналог аналитического разбиения единицы Бургейна [17].

В разделе 1.2 обсуждается перенос в рассматриваемую нами более общую постановку основного результата статьи [19] о K-замкнутости пересечений модулей над алгеброй X, удовлетворяющей условию (α_p), которое в нашем случае превращается в более свободное условие (α_μ).

Этот результат используется в разделе 1.3 для того, чтобы получить K-замкнутость весовых пространств Харди на двумерном торе для весов $w(\cdot,\cdot)$ двух переменных, удовлетворяющих по первой переменной какому-то условию Макенхапута с константой, не зависящей от второй переменной, и для которых $\sup_{\xi_1 \in \mathbb{T}} \|\log w(\xi_1, \cdot)\|_{\mathrm{BMO}} < \infty$.

Наконец, в разделе 1.4 с помощью абстрактного аналога аналитического разбиения единицы доказывается, что K-замкнутость имеет место также и в случае, когда вышеупомянутые веса двух переменных окаймлены весами одной переменной с логарифмом в пространстве BMO. Это приводит, в частности, к упомянутой выше теореме 1 о K-замкнутости пары весовых пространств Харди на двумерном торе в соответствующих пространствах Лебега для окаймленных весов.

Вторая глава посвящена доказательству аналога неравенства Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа (или, для краткости, неравенства Рубио де Франсиа) для ограниченных многопараметрических систем Виленкина.

В разделе 2.1 излагаются основные определения и сведения о многопараметрических системах Виленкина, соответствующих мартингалах и пространствах Харди таких мартингалов. Связывающим понятием здесь является система счисления с переменным основанием: каждая такая система порождает группу Виленкина, характеры на которой формируют систему Виленкина. Такая система также порождает обобщенную фильтрацию, то есть фильтрацию индексированную векторами целых положительных чисел (конечно, снабженных лишь частичным порядком), и соответствующие обобщенные мартингалы, которые называют *многопараметрическими мартингалами Виленкина*. Для систем Виленкина, которые называют *ограниченными*, излагаются важные в дальнейшем факты теории мартингальных пространств Харди, которая для таких систем является весьма богатой и проработанной.

В разделе 2.2 доказывается вариант теоремы Ганди об ограниченности операторов, отображающих мартингалы в измеримые функции, для мартингалов, связанных с ограниченными многопараметрическими системами Виленкина. Это удается сделать, сведя с помощью некоторого комбинаторного утверждения доказываемую теорему к известным результатам теории мартингальных пространств Харди. Класс операторов из теоремы можно воспринимать как мартингальный аналог многопараметрических сингулярных интегральных операторов.

В разделе 2.3 с помощью установленного варианта теоремы Ганди доказывается ограниченность двух вспомогательных операторов, к которым впоследствии будет сведено доказательство неравенства Рубио де Франсиа.

В разделе 2.4 описывается предложенная Целищевым в [8] процедура разбиения интервала в $[a, b) \subseteq \mathbb{Z}$, которая, наряду с ограниченностью двух вспомогательных операторов, является ключевым компонентом доказательства неравенства Рубио де Франсиа.

В разделе 2.5, наконец, с помощью установленных до этого вспомогательных фактов, доказывается аналог неравенства Рубио де Франсиа для ограниченных многопараметрических систем Виленкина.

В самом конце, в разделе 2.6, обсуждаются некоторые следствия и варианты основной теоремы, в том числе ослабленная версия неравенства для случая $0 < p \leq 1$ и версия однопараметрического неравенства Рубио де Франсиа для системы Уолша и некоторого экзотического понятия интервала. Там же обсуждается невозможность распространения неравенства Рубио де Франсиа для ограниченных многопараметрических систем Виленкина на случай произвольных разбиений множества $\mathbb{Z}_+^D$.

Третья глава посвящена доказательству весового варианта неравенства Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа (неравенства Рубио де Франсиа) для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$.

Сначала, в разделе 3.1 описываются отличия рассматриваемой в главе весовой ситуации от безвесовой, изученной ранее Осиповым в работе [6]. В частности, отмечаются сложности, связанные с весовым неравенством Рубио де Франсиа в случае $p \geq 2$ и технические сложности, связанные с отсутствием достаточно общих технических результатов в литературе.

В разделе 3.2 описываются предварительные сведения, касающиеся, в основном, двупараметрических весовых пространств Харди.

В разделе 3.3 практически без изменений приводится вариант Осипова [6] рассуждения Кислякова–Парилова [3], которое сводит неравенство Рубио де Франсиа к вопросу об ограниченности двух сингулярных интегральных операторов. Это геометрическое рассуждение универсально применимо в любой размерности как с весом, так и без него.

В разделе 3.4 с помощью ряда технических выкладок устанавливается ограниченность двух вспомогательных операторов в пространствах L^p_w для $1 < p < 2$. При этом используется классическая теория Р. Феффермана [11], позволяющая доказывать ограниченность двупараметрических сингулярных интегральных операторов в пространствах Лебега с весом.

В разделе 3.5 с помощью родственных (в каком-то смысле двойственных вышеупомянутым) выкладок доказывается ограниченность двух вспомогательных операторов уже в пространствах Харди с весом. При этом используются результаты об ограниченности операторов в двупараметрических весовых пространствах Харди, принадлежащие Ли [21].

В разделе 3.6 оба весовых неравенства Рубио де Франсиа для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$, то есть одностороннее неравенство для $p < 2$ и двойственное ему одностороннее неравенство для $p > 2$, формально выводятся из доказанных ранее результатов (это подразумевает достаточно простую смену формулировки и использование двойственности).

Наконец, в разделе 3.7 описывается дополнительный результат главы: модификация неравенства Рубио де Франсиа на случай, когда разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ состоит из произвольных измеримых множеств примерно одинакового “размера”.

В **заключении** приводятся основные результаты, заключающиеся в следующем. В главе 1 была доказана K-замкнутость весовых пространств

Харди на двумерном торе в соответствующих пространствах Лебега: для этого мы рассмотрели абстрактный аналог пространств Харди граничных значений аналитических функций и соответствующий абстрактный подход к теоремам о K-замкнутости. Далее, в главе 2 было установлено неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для многопараметрических систем Виленкина и произвольных прямоугольников в $\mathbb{Z}_+^D$. Было описано несколько интересных вспомогательных результатов, а также следствий и вариантов основной теоремы. Наконец, в главе 3 неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ было обобщено на случай с весом, а соответствующее двойственное неравенство, в том числе для показателей $p \leq 1$, было обобщено для весов, в некотором смысле двойственных весам Макенхаупта.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Боровицкий В. А.* K-замкнутость для весовых пространств Харди на торе $\mathbb{T}^2$ // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2017. — Т. 456, вып. 3. — С. 25—36.

A2. *Боровицкий В. А.* Весовое неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ // Алгебра и анализ. — 2020. — Т. 32, № 6. — С. 24—57.

A3. *Боровицкий В. А.* Неравенство Литлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для двупараметрической системы Уолша // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2020. — Т. 491. — С. 27—42.

A4. *Боровицкий В. А.*, *Кисляков С. В.* Интерполяция абстрактных пространств типа Харди // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2021. — Т. 503. — С. 22—56.

Список литературы

1. *Злотников И. К.*, *Кисляков С. В.* Теорема Гротендика для некоторых алгебр и модулей над ними // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2019. — Т. 480. — С. 108—121.

2. *Кисляков С. В.* Теорема Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2008. — Т. 355. — С. 180—198.

3. *Кисляков С. В.*, *Парилов Д. В.* О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2005. — Т. 327. — С. 98—114.

4. *Кисляков С. В.* Абсолютно суммирующие операторы на диск-алгебре // Алгебра и анализ. — 1991. — Т. 3, № 4. — С. 1—77.

5. *Кисляков С. В.*, *Шу К.* Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы // Алгебра и анализ. — 1996. — Т. 8, № 4. — С. 75—109.

6. *Осипов Н. Н.* Неравенство Литлвуда–Пэли для произвольных прямоугольников в $\mathbb{R}^2$ при $0 < p \leq 2$ // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 2. — С. 164—184.

7. *Осипов Н. Н.* Одностороннее неравенство Литлвуда–Пэли в $\mathbb{R}^n$ для $0 < p \leq 2$ // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2010. — Т. 376. — С. 88—115.

8. *Целищев А. С.* Неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина // Математический сборник. — 2021. — Т. 212, № 10. — С. 152—164.

9. *Bourgain J.* On square functions on the trigonometric system // Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B. — 1985. — Vol. 37, no. 1. — P. 20—26.

10. *Chang S.-Y. A.*, *Fefferman R.* Some recent developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1985. — Vol. 12, no. 1. — P. 1—43.

11. *Fefferman R.* Harmonic analysis on product spaces // Annals of Mathematics. — 1987. — Vol. 126, no. 1. — P. 109—130.

12. *Fefferman R.* Calderón–Zygmund theory for product domains: H^p spaces // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1986. — Vol. 83, no. 4. — P. 840—843.

13. *Gamelin T. W.*, *Kislyakov S. V.* Uniform Algebras as Banach Spaces // Handbook of the geometry of Banach spaces. — 2001. — Vol. 1. — P. 671—706.

14. *Gundy R. F.* A Decomposition for L^1-Bounded Martingales // The Annals of Mathematical Statistics. — 1968. — Vol. 39, no. 1. — P. 134—138.

15. *Journé J.-L.* Calderón-Zygmund operators on product spaces // Revista Matemática Iberoamericana. — 1985. — Vol. 1, no. 3. — P. 55—91.

16. *Kisliakov S. V.* Interpolation of H^p-spaces: some recent developments // Function Spaces, Interpolation Spaces, and Related Topics (Haifa, 1995), Israel Mathematical Conference Proceedings. Vol. 13. — 1999. — P. 102—140.

17. *Kislyakov S.* Bourgain's Analytic Projection Revisited // Proceedings of the American Mathematical Society. — 1998. — Vol. 126, no. 11. — P. 3307—3314.

18. *Kislyakov S. V.* Martingale transforms and uniformly convergent orthogonal series // Journal of Soviet Mathematics. — 1987. — Vol. 37, no. 5. — P. 1276—1287.

19. *Kislyakov S. V.*, *Zlotnikov I. K.* Interpolation for intersections of Hardy-type spaces // Israel Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 239. — P. 21—38.

20. *Kislyakov S.* Interpolation Involving Bounded Bianalytic Functions // Complex Analysis, Operators, and Related Topics. — Springer, 2000. — P. 135—149.

21. *Lee M.-Y.* Boundedness of Calderón-Zygmund operators on weighted product Hardy spaces // Journal of Operator Theory. — 2014. — Vol. 72, no. 1. — P. 115—133.

22. *Osipov N.* Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality for the Walsh system // St. Petersburg Mathematical Journal. — 2017. — Vol. 28, no. 5. — P. 719—726.

23. *Rubio de Francia J. L.* A Littlewood-Paley Inequality for Arbitrary Intervals // Revista Matematica Iberoamericana. — 1985. — Vol. 1, no. 2. — P. 1—14.

24. *Soria F.* A Note on a Littlewood–Paley Inequality for Arbitrary Intervals in $\mathbb{R}^2$ // Journal of the London Mathematical Society. — 1987. — Vol. s2—36, no. 1. — P. 137—142.

25. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. — Princeton University Press, 1993.

26. *Weisz F.* Cesaro Summability of Two-Dimensional Walsh–Fourier Series // Journal of Approximation Theory. — 1997. — Vol. 88, no. 2. — P. 168—192.

27. *Weisz F.* Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. — Springer, 2006.

28. *Weisz F.* Summability of Multi-Dimensional Fourier Series and Hardy Spaces. — Springer, 2013.

29. *Weisz F.* Summation of Fourier series // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis. — 2004. — Vol. 20. — P. 239—266.

Боровицкий Вячеслав Андреевич

Многопараметрические оценки в гармоническом анализе: варианты неравенства Рубио де Франсиа и интерполяция абстрактных пространств типа Харди

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 60 экз.
Типография ______________________________________