Институт математики с вычислительным центром —
обособленное структурное подразделение Федерального государственного
бюджетного научного учреждения
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук

На правах рукописи

Исаев Константин Петрович

Представление функций рядами экспонент

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
д. ф.-м. н., проф.
Р. С. Юлмухаметов

Уфа – 2021

Содержание

Введение

Диссертация посвящена вопросам о представлении функций рядами по системам экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}.$$

Исторически сначала изучались системы экспонент с вещественными показателями $\{\lambda_k\}$, но впоследствии теория рядов по системам экспонент с комплексными показателями оказалась более содержательной. Основные результаты по рядам экспонент, полученные исключительно аналитическим методами, изложены в монографии [40]. Центральным фактом в этой части теории экспонент, на наш взгляд, можно считать следующую теорему.

Теорема A. ([40, теорема 5.3.2, стр. 382]) *Пусть D — ограниченная выпуклая область на плоскости. Тогда имеется последовательность $\{\lambda_n\}$, зависящая только от области D, такая что любую функцию $F(z)$, аналитическую в области D, можно разложить в ряд*

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z},\ \ z \in D,$$

который сходится равномерно на компактах из области D.

Начиная с 70-х годов прошлого века в теории рядов экспонент стали активно применяться методы функционального анализа и стало возможным изучение вопросов представления рядами экспонент функций из различных локально выпуклых подпространств $H(D)$, где $H(D)$ — пространство функций аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ (с топологией равномерной сходимости на компактах из D). Большей частью изучались проективные пределы весовых нормированных пространств вида

$$H(D,\varphi) = \left\{ f(z) \in H(D) :\ \ \|f\| := \sup_{z\in D} |f(z)|e^{-\varphi(z)} < \infty \right\},$$

где D — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости и φ — неотрицательная выпуклая функция в этой области. В меньшей степени — индуктивные пределы пространств вида

$$H(D,\mathcal{M}) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in D} |f^{(n)}(z)| M_n^{-1} < \infty \right\},$$

где $\mathcal{M} = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ — логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел.

Характерные результаты в этом направлении изложены в работе [36]. Далее будем пользоваться понятием представляющих систем из этой работы. Система элементов e_n, $n \in \mathbb{N}$, в локально выпуклом пространстве X называется представляющей, если любой элемент этого пространства представляется в виде ряда

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n,$$

сходящегося в топологии пространства X. Если для каждого элемента это представление единственное, то представляющая система становится базисом. Если представляющая система не является базисом, то некоторая часть элементов этой системы может быть удалена, а оставшаяся часть продолжает быть представляющей в пространстве X, то есть представляющие системы, не являющиеся базисом, обладают некоторой избыточностью. Таким образом, в задаче о построении представляющих систем возникает дополнительный вопрос об оценке степени избыточности системы.

Вследствие систематического применения методов функционального анализа в проблеме представления функций рядами экспонент явным образом выяснилось, что эта задача распадается на две аналитические задачи:

1. конструкция целых функций с заданными асимптотическими свойствами;
2. описание сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье–Лапласа.

Здесь мы имеем в виду метод, основанный на понятии достаточного множества для локально выпуклого пространства целых функций, введенного в работе [68]. Опишем коротко схему этого метода применительно к локально выпуклым подпространствам $X \subset H(D)$. Предположим, что сильно сопряженное пространство X^* описано в терминах преобразования Фурье–Лапласа. Это значит, что

1) система экспонент $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, полна в пространстве X;

2) для каждого линейного непрерывного функционала $S \in X^*$ функция

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

является целой функцией;

3) топология в пространстве $\widehat{X} = \{\widehat{S},\ S \in X^*\}$, наведенная из X^*, описана в весовых терминах.

Если существует семейство $\mathcal{K}$ положительных непрерывных функций k на плоскости, таких что семейство полунорм

$$p_k(F) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|F(\lambda)|}{|k(\lambda)|},\ F \in \widehat{X},\ k \in \mathcal{K},$$

определяет топологию в пространстве $\widehat{X}$, совпадающую с топологией, наведенной из X^*, то пространство X называется равномерно аналитическим (см. [68]).

Пусть $S \subset \mathbb{C}$ — некоторое подмножество плоскости. Если семейство полунорм

$$p_{k,S}(F) = \sup_{\lambda\in S} \frac{|F(\lambda)|}{|k(\lambda)|},\ F \in \widehat{X},\ k \in \mathcal{K},$$

определяет ту же топологию в пространстве $\widehat{X}$, что и исходная, то это множество называется достаточным для пространства $\widehat{X}$.

Если дискретное множество S является достаточным для пространства $\widehat{X}$, то каждая функция $f \in X$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{\lambda\in S} f_n e^{\lambda z},$$

сходящегося в топологии пространства X (см. [68, теорема 1.6, стр. 12]).

Если топология пространства $\widehat{X}$ описана нужным образом и доказано, что пространство X равномерно аналитическое, то дискретное достаточное множество S как правило удается сконструировать в виде множества нулей целой функции с подходящим асимптотическим поведением.

Представление рядами экспонент в локально выпуклом ненормированном пространстве впервые рассмотрено, видимо, в работе [41] для пространства функций, аналитических в выпуклом многоугольнике и имеющих определенный рост вблизи границы. В работе [57] доказаны аналитические факты для обобщения результатов работы [41] на случай произвольной выпуклой области.

В достаточно общем виде для весовых пространств с наиболее тонкой ненормированной топологией эта схема реализована в работе [49]. В этой работе рассматриваются нормированные весовые пространства

$$H(D,\varphi) = \left\{ f(z) \in H(D): \ \|f\| := \sup_{z\in D} |f(z)| e^{-\varphi(z)} < \infty \right\},$$

где D — ограниченная выпуклая область плоскости и φ — неотрицательная выпуклая функция в этой области. Дается описание сопряженного пространства к проективному пределу пространств $H(D,\varphi_j)$ в случае, когда $\varphi_j(z) = h_j(-\ln d(z))$, где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы D, а последовательность неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих функций h_j удовлетворяет условиям:

а) $h_j(t) \geq h_{j+1}(t) + t, \ j \in \mathbb{N}, \ t \geq t_0$;

б) для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ найдется $s = s(j,\alpha)$, такое что $h_{j+1}(t+\alpha) \leq h_j(t) + s$, $t \geq t_0$.

Отметим, что при этих условиях оператор дифференцирования непрерывно действует в проективном пределе.

Доказано, что преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств $H(D,\varphi_j)$ и индуктивным пределом пространств $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_j)$, где

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sup_{z \in D}(\mathrm{Re}\ \lambda z - \varphi(z))$$

— преобразование Юнга функции φ. Далее в статье автор показывает, что множество нулей целой функции $\mathcal{L}$, удовлетворяющей условиям

1) все нули $\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots$ функции $\mathcal{L}$ — простые и круги $\Omega_j = \{|\lambda - \lambda_j| \le \delta\}$ при некотором $\delta > 0$ попарно не пересекаются;

2) вне множества $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$ функция $\mathcal{L}$ удовлетворяет неравенству

$$|\ln|\mathcal{L}(\lambda)| - H_D(\lambda)| \le C_0 \ln|\lambda| + C_1,$$

где C_0, C_1 — постоянные, будет достаточным для индуктивного предела пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_j)$.

Существование таких целых функций вытекает из теоремы 4 в работе [58]. По упомянутой выше теореме Л. Эйренпрайса любая функция $f \in \bigcap_j H(D, \varphi_j)$ будет представляться в виде ряда

$$f(z) = \sum_j f_n e^{\lambda_j z},$$

сходящегося в топологии проективного предела. В работе [36] отмечено, что представляющие системы экспонент в локально выпуклых ненормированных пространствах не могут образовывать базис. Эти системы будут иметь некоторую избыточность, то есть из них можно удалить некоторое подмножество элементов, так что оставшаяся часть системы тоже будет представляющей. В изложенном выше результате система показателей конструируется как множество нулей целой функции, свойства которой связаны только с опорной функцией области и никак не связаны с весовыми функциями φ_j. Тем самым, полученная представляющая система универсальна с одной стороны, с другой стороны она имеет большую степень избыточности. Точнее говоря, система имеет тем большую избыточность, чем меньший рост имеют весовые функции φ_j вблизи границы области. Степень избыточности технически зависит от точности асимптотики порождающей функции $\mathcal{L}$ и принципиально зависит от свойств топологий. А именно, если топология определяется полунормами с весовыми функциями φ_j, то чем больший рост имеют разности $|\varphi_j - \varphi_m|$, тем больше будет избыточность представляющих систем.

Так, например, из представляющей системы $\{e^{\lambda_k z}\}$ в теореме A можно удалить подсистему $\{e^{\mu_k z}\} \subset \{e^{\lambda_k z}\}$, если последовательность μ_k имеет регулярное распределение (см. [40, стр. 30, 100]) и нулевую линейную плотность:

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r} \sum_{|\mu_k|\le r} 1 = 0.$$

В частном случае, когда

$$\varphi_j(z) = \left(\frac{1}{d(z)}\right)^{p+\frac{1}{j}},\ z \in D,\ p > 0,$$

из системы, построенной в работе [49], можно удалять подсистему $e^{\mu_k z}$, если система показателей μ_k имеет регулярное распределение и является множеством простых нулей целой функции минимального типа при порядке $q = \frac{p}{p+1}$, то есть

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^q} \sum_{|\mu_k|\le r} 1 = 0.$$

Наиболее систематическое изучение минимальных абсолютно представляющих систем экспонент или двойственных с ними минимальных (слабо) достаточных множеств предпринято в диссертации [1]. Часть результатов этой работы опубликована в [2]. Минимальным абсолютно представляющим системам экспонент посвящены также работы [3]–[6]. В работе [4] рассмотрены пространства с последовательностью весов вида

$$\varphi_j(z) = \left(1 + \frac{1}{j}\right)\varphi(-\ln d(z)),\ z \in D,$$

и указаны ростовые характеристики целых функций, множество нулей которых могут послужить в качестве множества показателей представляющей системы экспонент. Полученные представляющие системы оказываются минимальными в определенном смысле. В работе [6] подобные результаты получены для проективных пределов равномерно весовых пространств более общего вида.

Через $B(z,t)$ мы обозначаем открытый круг с центром в точке z радиуса t. Для меры μ через $\mu(z,t)$ мы обозначаем μ-меру круга $B(z,t)$ и пусть $\mu(t) = \mu(0,t)$.

Запись $A(x) \asymp B(x),\ x \in X$, для положительных функций A, B означает, что для некоторых констант $C, c > 0$ для всех $x \in X$ выполняются оценки $cB(x) \le A(x) \le CB(x)$, символ $A(x) \prec B(x),\ x \in X$, $(A(x) \succ B(x),\ x \in X)$, означает существование константы $C > 0$, такой что $A(x) \le CB(x)$ $(B(x) \le CA(x))$.

Для целой функции L через $N(L)$ будем обозначать множество нулей функции L.

Целые функции с заданными асимптотическим свойствами изначально играли важную роль в теории рядов экспонент. Например, в доказательстве теоремы A показатели $\{\lambda_n\}$ выбираются как простые нули целой функции $L(\lambda)$ экспоненциального типа и вполне регулярного роста со свойствами:

1) при любом $\varepsilon > 0$

$$|L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)-\varepsilon|\lambda_n|}, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

2) для некоторого $\mu > 1$ имеет место оценка сверху:

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)-\mu\ln|\lambda|},\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

здесь $H_D(\lambda) = \max_{z\in\overline{D}} \operatorname{Re} \lambda z$ — опорная функция области D. В связи с этим обстоятельством в теории представления рядами экспонент обособленное место занимали выпуклые многоугольники. Дело в том, что характеристическую целую функцию L в этом случае можно взять в виде квазиполинома

$$L(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j e^{\gamma_j\lambda},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

здесь γ_j — вершины многоугольника, и требуемые свойства (1), (2) будут выполняться в существенно более точном виде

$$|L'(\lambda_n)| \succ e^{H_D(\lambda_n)}, n \in \mathbb{N},$$

$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

С помощью таких целых функций в [40] доказано, что функция, аналитическая в выпуклом многоугольнике D и непрерывная вместе со своей первой производной в $\overline{D}$, может быть представлена в виде ряда по системе $e^{\lambda_n z}$, причем этот ряд сходится всюду в $\overline{D}$ и равномерно сходится в $\overline{D} \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B(\gamma_j, \varepsilon)$, здесь γ_j — вершины многоугольника и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В работе [39] доказано, что эта система образует (безусловный) базис в пространстве Смирнова $E_2(D)$.

Теорема B. *Пусть функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n удовлетворяет условиям*

$$|L(\lambda)| \succ e^{H_D(\lambda)}, \lambda \notin \bigcup_n B(\lambda_n, \delta),$$
$$|L(\lambda)| \prec e^{H_D(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

причем круги $B(\lambda_n, \delta)$ попарно не пересекаются. Тогда любая функция $f \in E_2(D)$ единственным образом представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n e^{\lambda_n z},$$

и при этом выполняется соотношение

$$\|f\|^2 \asymp \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n|^2 e^{-2H_D(\lambda_n)},\ f \in E_2(D).$$

Пространство Смирнова на ограниченной области $G \subset \mathbb{C}$ с измеримой по Лебегу границей можно определить как пополнение пространства комплексных полиномов по гильбертовой норме

$$\|p\|^2 = \int_{\partial G} |p(z)|^2\, ds(z),$$

где $ds(z)$ — элемент дуги границы G, тем самым, пространство Смирнова — гильбертово пространство. Система экспонент, построенная в теореме B, образует безусловный базис. Мы придерживаемся следующего определения. Базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в нормированном пространстве называется безусловным базисом ([50], [69]), если для любого элемента

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$$

выполняется соотношение

$$\|x\|^2 \asymp \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \|e_n\|^2.$$

Понятие базиса Рисса введено в [10] и обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе. Безусловный базис $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf ||e_k|| \leq \sup ||e_k|| < \infty$.

Системы экспонент, в некотором смысле близкие к безусловным базисам, построены в пространстве Смирнова на областях с гладкой границей в работе [46]. В этой работе пространство Смирнова $E_2(D)$ вкладывается в шкалу гильбертовых пространств $E_2^\alpha(D)$ и строится система экспонент, которая полна и минимальна в пространстве $E_2(D)$. Доказывается, что соответствующий ряд для любой функции из $E_2^{\frac{1}{4}}(D)$ сходится в норме пространства $E_2(D)$ ([46, теорема 5.2]). Пространство $E_2^{\frac{1}{4}}(D)$ — собственное подпространство пространства Смирнова $E_2(D)$.

В работе [42] показано, что в пространстве Смирнова на области с границей, содержащей гладкую дугу, на которой кривизна конечна и отлична от нуля, безусловных базисов из экспонент не существует. В работе [20] доказано, что безусловных базисов из экспонент в пространстве Бергмана $B_2(D)$ не существует, если на границе области D есть хотя бы одна точка, в которой кривизна конечна и отлична от нуля.

Таким образом, безусловных базисов из экспонент известно не много: это классическая система Фурье в $L_2(-1;1)$ и ее допустимые возмущения по теореме Кадеца ([34]), системы в пространстве Смирнова $E_2(D)$ ([39]) и Бергмана $B_2(D)$ ([21]) на выпуклом многоугольнике.

С темой безусловных базисов из экспонент тесно связана задача о безусловных базисах из значений воспроизводящего ядра в гильбертовых пространствах целых функций.

Пусть E — некоторое гильбертово пространство целых функций, в котором все точечные функционалы $\delta_z : \ f \to f(z)$ ограничены. В силу самосопряженности каждый точечный функционал порождается элементом $K_z \in E$:

$$F(z) = (F, K_z)_E, \ \ F \in E.$$

Функция $K_z(w) := K(w, z)$ называется воспроизводящим ядром пространства E. Теория воспроизводящих ядер подробно изложена в [62].

Связь между безусловными базисами из экспонент и из значений воспроизводящих ядер устанавливается с помощью преобразования Фурье–Лапласа. Пусть $E(D)$ — некоторое гильбертово пространство функций на множестве D, причем система всех экспонент $\{e^{\lambda z}, \ \lambda \in \mathbb{C}\}$, полна в пространстве $E(D)$. Тогда пространство $\widehat{E}(D)$ целых функций

$$\widehat{f}(\lambda) := (e^{\lambda z}, f(z))_{E(D)}, \ \ f \in E(D),$$

с наведенной структурой гильбертового пространства

$$(\widehat{f}, \widehat{g})_{\widehat{E}(D)} = (f, g)_{E(D)}$$

изоморфно сопряженному пространству $E^*(D)$. При этом изоморфизме функционалы, порождаемые экспонентами $e^{\lambda z}$, отображаются в значения воспроизводящего ядра $K(w, \lambda)$ пространства $\widehat{E}(D)$. Таким образом, безусловный базис из экспонент в пространстве $E(D)$ отображается в безусловный базис из значений воспроизводящего ядра в пространстве $\widehat{E}(D)$. По этой схеме классической системе Фурье в пространстве $L_2(-1; 1)$ соответствует безусловный базис из значений воспроизводящих ядер в пространстве Пэли–Винера, а безусловным базисам из экспонент в пространствах Смирнова $E_2(D)$ и Бергмана $B_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D — базисы в пространствах $\widehat{E}_2(D)$ и $\widehat{B}_2(D)$ целых функций F, удовлетворяющих условию (см. [19], [43])

$$\|F\|^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})}\, dr\, d\Delta(\varphi) < \infty,$$

где

$$\Delta(\varphi) = h'(\varphi) + \int\limits_0^{\varphi} h(\theta)\, d\theta,\ \ h(\varphi) = max_{z\in\overline{D}}\mathrm{Re}\ ze^{i\varphi},$$

$$K(\lambda) = \|e^{\lambda z}\|^2,\ \ \lambda\in\mathbb{C},$$

с нормой в пространстве Смирнова и Бергмана соответственно.

Безусловные базисы, непосредственно не связанные с базисами из экспонент, получены в работе [66]. В этой работе сконструированы безусловные базисы из воспроизводящих ядер в весовых гильбертовых пространствах

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ F\in H(\mathbb{C}):\ \ \|F\|^2 := \int\limits_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)}\, dm(\lambda) < \infty \right\}$$

для весов $\varphi(\lambda) = (\ln^+|\lambda|)^\alpha$ при $\alpha\in(1;2]$. В этой же работе показано, что если радиальная весовая функция $\varphi(\lambda)$ имеет определенную регулярность поведения и $\ln^2(|\lambda|+1) = o(\varphi(\lambda))$, то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не может быть. В работе [64] получены обобщения весовых гильбертовых пространств с безусловными базисами и в работе [63] рассмотрены допустимые возмущения имеющихся безусловных базисов.

В целом безусловные базисы из экспонент и из значений воспроизводящих ядер — явление редкое. Так результатом работ [13], [70], в которых исследовались весовые пространства на отрезке

$$L_2(h) = \left\{ f\in L_{\mathrm{loc}}(-1;1):\ \int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt < \infty \right\},$$

стало доказательство того, что если выпуклая функция h удовлетворяет условию

$$\lim_{|t|\to 1} \frac{h(t)}{\ln(1-|t|)} < 0,$$

то в пространстве $L_2(h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Изложим план диссертации и основные результаты. Как уже отмечалось, основным инструментом исследования рядов экспонент являются целые функции с заданными асимптотическими свойствами. Первая глава диссертации посвящена конструированию целых функций со свойствами, необходимыми при применениях в теории рядов экспонент.

Задача о существовании и конструировании целых функций с заданными асимптотическими свойствами возникла как внутренняя задача теории целых функций. В наиболее общем виде такая задача решена в работе [9]:

Теорема C. *Для любой субгармонической функции и на плоскости, имеющей конечный тип при порядке $\rho > 0$, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| = o(|\lambda|^{\rho}), \lambda \notin E, |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Исключительное множество E является C_0–множеством, то есть оно может быть покрыто кругами $B(w_k, r_k)$, так что

$$\sum_{|w_k|\le R} r_k = o(R),\ \ R \longrightarrow \infty.$$

В работе [59] эта теорема уточнена в смысле оценок разности и размеров исключительного множества.

Теорема D. *Для любой субгармонической функции и на плоскости, имеющей конечный ненулевой порядок роста и для любого $\beta < 0$, существует целая функция f, удовлетворяющая соотношению*

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| = O(\ln(|\lambda|+1)),\ \ \lambda \notin E, \quad |\lambda| \longrightarrow \infty,$$

при этом исключительное множество E может быть покрыто системой кругов $B(w_k, r_k)$, так что

$$\sum_{|w_k|\geq R} r_k = O(R^\beta),\ R \longrightarrow \infty.$$

Теоремы C и D не могут быть непосредственно применены в вопросах разложения в ряды экспонент. Дополнительно нужно получить нижние оценки для $|L'(\lambda_k)|$, а для этого нужно иметь не только оценки размеров исключительного множества, но в большей степени нужна информация о структуре этого множества, точнее говоря, нужна некоторая разделенность нулей. Существование целых функций с необходимыми свойствами для опорных функций выпуклых областей доказано в работе [58]. В диссертации доказана теорема о существовании целой функции, логарифмически приближающей достаточно гладкую субгармоническую функцию и имеющей разделенное множество нулей.

Теорема 1.1. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный тип при порядке роста ρ, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторых $a,\ \alpha > 0$, для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t)) \leq a(|z|+1)^\alpha t,\ t \in (0; (|z|+1)^{-\alpha}),$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, такими что при некоторых $\delta > 0, \beta \geq 0$ круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-\beta})$ попарно не пересекаются и сама функция для некоторых постоянных A, B удовлетворяет соотношениям

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \leq A\ln(|\lambda|+e),\ \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta),$$

$$\ln|f'(\lambda)| \geq u(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e),\ n \in N(f).$$

Постоянные A, B зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функции u.

В диссертации целые функции с асимптотическими свойствами применяются в качестве порождающих функций представляющих систем экспонент в локально выпуклых пространствах, связанных с весовыми нормированными пространствами $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$. Для этих целей целые функции должны асимптотически аппроксимировать сопряженную по Юнгу

$$\widetilde{\varphi}(\lambda)=\sup_{z\in D}(\mathrm{Re}\ \lambda z-\varphi(z)),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

к весовой функции φ (в случае пространств $H(D,\varphi)$) или функции вида

$$H_D(\lambda)+\ln T(|\lambda|),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

где

$$T(r)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{r^n}{M_n},\ r\geq 0,$$

— функция следа последовательности $\mathcal{M}=(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (в случае пространств $H(D,\mathcal{M})$).

Поскольку функции вида $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяют условию Липшица, то, в частности, их ассоциированные меры удовлетворяют условию

$$\mu(z,t)\leq Mt,\ z\in\mathbb{C},\ t\geq 0.$$

Это обстоятельство позволяет существенно уточнить теорему 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторого $M>0$ для всех точек $z\in\mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t))\leq Mt,\ t\in(0;1),$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, такими что при некотором $\delta\in(0;1)$ круги $B_\delta(\lambda_n)=B(\lambda_n,\delta(|\lambda_n|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются и сама функция удовлетворяет соотношению

$$|\ln|f(\lambda)|-u(\lambda)|\leq A\ln(|\lambda|+1)+C,\ \lambda\notin\bigcup_n B_\delta(\lambda_n),$$

а производная оценке

$$|\ln|f'(\lambda)| - u(\lambda)| \leq A\ln(|\lambda|+1) + C',\ \lambda \in N(f),$$

при этом постоянная $A > 0$ не зависит от M и функции u, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функции u.

Для приближения функций вида $H_D(\lambda)+\ln T(|\lambda|)$ можно было бы воспользоваться теоремой 1.2, но в применениях требуется раздельная аппроксимация слагаемых. Можно было бы применить теорему 1.2 к каждому из слагаемых (каждое из них удовлетворяет условию Липшица). Но при этом пропадает важное свойство — разделенность множества нулей. Поэтому в диссертации доказывается отдельная теорема о "раздельной" аппроксимации.

Теорема 1.3. *Пусть u_j — субгармонические функции на плоскости, μ_j, $j = 1, 2$, — меры, ассоциированные с ними по Риссу, для некоторого $M > 0$ удовлетворяющие условию*

$$\mu_j(B(z,t)) \leq Mt,\ t \in (0;1),$$

а мера μ_2, кроме того, удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^\infty \frac{\mu_2(r)\,dr}{r^2} < \infty.$$

Тогда существуют целые функции f_j, $j = 1, 2$, такие что все нули произведения $f = f_1 f_2$ простые, при некотором $\delta > 0$ круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-1})$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются, и для некоторых постоянных $B, C, C' > 0$ выполняются соотношения

$$|\ln|f_j(\lambda)| - u_j(\lambda)| \leq B\ln(|\lambda|+1) + C,\ \lambda \notin \bigcup_{z\in N(f_j)} B_\delta(z),$$

$$|\ln|f_j'(\lambda)| - u_j(\lambda)| \leq B\ln(|\lambda|+1) + C',\ \lambda \in N(f_j),$$

при этом постоянная $B > 0$ не зависит от M и функций u_j, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функций u_j.

Для субгармонических функций медленного роста аппроксимирующие целые функции можно конструировать с более свободным расположением нулей.

Теорема 1.4. *Пусть* $u(\lambda)$ *— субгармоническая на плоскости функция, ассоциированная мера которой удовлетворяет условию гладкости в теореме* 1.1, *и, кроме того,*

$$\sup_{t>0}(\mu(2t)-\mu(t))\le 1.$$

Определим последовательность R_n *из соотношений*

$$\mu(R_0)=1,\ \mu(R_n)-\mu(R_{n-1})=1,\ n\in\mathbb{N}.$$

Возьмем произвольные $r_n\in(R_{n-1};R_n)$, $n\in\mathbb{N}$, *и* $r_0\in(0;R_0)$. *Тогда целая функция*

$$f(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{r_ne^{i\varphi_n}}\right),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

где $\varphi_n\in[-\pi;\pi)$, $\varphi_{n-1}\cdot\varphi_n<0$, $n\in\mathbb{N}$, *удовлетворяет оценкам в теореме* 1.1. (*Для непрерывных радиальных субгармонических функций и условие гладкости вытекает из условия медленного роста.*)

Целых функций, имеющих асимптотические оценки логарифмической точности, в качестве инструмента для изучения безусловных базисов уже не достаточно. Для медленно растущих субгармонических функций удается построить аппроксимирующие целые функции с более точными оценками.

Теорема 1.5. *Пусть ассоциированная мера* μ *субгармонической на плоскости функции и удовлетворяет условиям*

1) *для некоторого положительного* $\delta>0$

$$\delta\le\mu(2t)-\mu(t),$$

$$\mu(2t)-\mu(t)\le 1,\ t>0;$$

2) *для любого* $z\in\mathbb{C}$ *и некоторых* $A>0,\beta\in(0;1)$

$$\int_0^{\beta|\lambda|}\frac{\mu(\lambda,t)\,dt}{t}\le A. \qquad (3)$$

Определим последовательность R_n *из соотношений*

$$\mu(R_0) = 1,\ \mu(R_n) - \mu(R_{n-1}) = 1,\ n \in \mathbb{N},$$

а последовательность r_n *из равенств*

$$\int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \ln t\, d\mu(t) = \ln r_n,\ n \in \mathbb{N},\ \int\limits_0^{R_0} \ln t\, d\mu(t) = \ln r_0.$$

Тогда для любой последовательности $\varphi_n \in [0; \pi/2]$ *целая функция*

$$L(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^n \frac{\lambda}{r_n e^{i\varphi_n}}\right)$$

удовлетворяет условию

$$|L(\lambda)| \asymp \frac{\mathrm{dist}\ (\lambda, \Lambda)}{1 + |\lambda|} e^{u(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\Lambda = \{\lambda_n\}$. *При этом для достаточно малых* $\sigma > 0$ *круги* $B_n(\sigma) := \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| \leq \sigma |\lambda_n|\}$, $n = 0, 1, 2,\ \dots$, *попарно не пересекаются.*

Теорема 1.6. *Пусть ассоциированная мера* μ *субгармонической функции* u *представляется в виде*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — *неотрицательные борелевские меры с массой* $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ *с носителями в непересекающихся кольцах* $\{z :\ R_n \leq |z| \leq R'_n\}$, *при этом последовательность* R_n *возрастающая,* $2R_n \leq R_{n+1}$ *и* $\frac{R'_n}{R_n} \leq c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Пусть, кроме того, мера* μ *удовлетворяет условию* (3). *Определим последовательность* r_n, $n \in \mathbb{N}$, *из равенств*

$$\int\limits_{R_n}^{R'_n} \ln t\, d\mu(t) = \ln r_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для произвольных φ_n, $w_n = r_n e^{i\varphi_n}$, *целая функция*

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_n}\right)$$

удовлетворяет условиям

1) *для достаточно малых* $\sigma > 0$ *круги* $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \le \sigma|w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \ldots$, *попарно не пересекаются;*

2) *имеет место соотношение*

$$|L(z)| \asymp \frac{\mathrm{dist}\ (z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1.7. *Пусть ассоциированная мера* μ *радиальной субгармонической функции* u, $u(0) = 0$, *удовлетворяет условию: для некоторого* $a > 1$

$$\mu(at) - \mu(t) \asymp 1, \ t > 0.$$

Тогда существует целая функция L *с простыми нулями в точках* w_n, *так что*

1) *для достаточно малых* $\sigma > 0$ *круги* $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \le \sigma|w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \ldots$, *попарно не пересекаются;*

2) *имеет место соотношение*

$$|L(z)| \asymp \frac{\mathrm{dist}\ (z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1.8. *Пусть ассоциированная мера* μ *радиальной субгармонической функции* u *представляется в виде*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — *неотрицательные борелевские меры с массой* $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ *с носителями в непересекающихся кольцах* $\{z : \ R_n \le |z| \le R'_n\}$, *при этом последовательность* R_n *возрастающая,* $2R_n \le R_{n+1}$ *и* $\frac{R'_n}{R_n} \le c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Определим последовательность* r_n, $n \in \mathbb{N}$, *из равенств*

$$\int\limits_{R_n}^{R'_n} \ln t \, d\mu(t) = \ln r_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для произвольных φ_n, $w_n = r_n e^{i\varphi_n}$, *целая функция*

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{w_n}\right)$$

удовлетворяет условиям

1) *для достаточно малых* $\sigma > 0$ *круги* $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \le \sigma |w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \ldots$, *попарно не пересекаются;*

2) *имеет место соотношение*

$$|L(z)| \asymp \frac{\mathrm{dist}\ (z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

Как уже отмечалось выше, конструирование представляющих систем экспонент в равномерно аналитических пространствах с помощью достаточных множеств приводит к двум аналитическим задачам — построение целых функций с заданной асимптотикой и разделенным множеством нулей и описание сопряженного пространства с помощью преобразования Фурье–Лапласа в терминах равномерно весовых норм. Первая из этих аналитических задач рассмотрена в первой главе диссертации. Второй задаче посвящены параграфы 2.1 и 2.2 второй главы.

Опишем отличие нашего подхода к задаче от подхода в предыдущих работах. Обычно рассматривались проективные пределы равномерно весовых пространств $H(D, \varphi_j)$ с убывающей последовательностью выпуклых весовых функций φ_j. Неизбежная избыточность полученных представляющих систем экспонент при этом зависела, в частности, от роста разностей $\varphi_j - \varphi_{j+1}$ вблизи границы D. Мы за отправную точку берем одно нормированное пространство $E \subset H(D)$ и определяем локально выпуклые пространства, названные инвариантной оболочкой и инвариантным ядром пространства E. А именно, инвариантное ядро $\mathcal{E}_p$ пространства E — это наибольшее линейное пространство, содержащееся в E и инвариантное относительно дифференцирования, а инвариантная оболочка $\mathcal{E}_i$ пространства E — это наименьшее линейное пространство, содержащее E и инвариантное относительно дифференцирования.

В первом параграфе второй главы доказывается теорема о преобразованиях Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов на нормированном пространстве $H(D,\varphi)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть φ — выпуклая функция на ограниченной выпуклой области комплексной плоскости D, $0 \in D$.*

1. *Пусть S — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D,\varphi)$ и $\widehat{S}(\lambda)$ — преобразование Фурье–Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$|\widehat{S}(\lambda)| \le \|S\|_{H^*(D,\varphi)} e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)},\ \lambda \in D,$$

тем самым,

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})} \le \|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

2. *Если функция $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}(y)}{\partial y_j \partial y_k} a_j a_k \ge \frac{b}{1+|y|^2}|a|^2,\ a, y \in \mathbb{R}^2,\ |y| \ge R, \tag{4}$$

для некоторой константы $b > 12$, и целая функция F такова, что

$$|F(\lambda)| \le C e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^{-10},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

то функция F является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(D,\varphi)$. Причем

$$\|S\|_{(H(D,\varphi))^*} \le M\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})},$$

где $\widetilde{\varphi}_a(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - a\ln(1+|\lambda|)$, и константа M зависит только от постоянной b в (4).

Из этой теоремы выводится описание пространства преобразований Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов на проективном пределе

$\bigcap_j H(D,\varphi_j)$ равномерно весовых пространств $H(D,\varphi_j)$ с убывающей последовательностью выпуклых на выпуклой области D весов φ_j и на индуктивном пределе $\bigcup_j H(D,\varphi_j)$ равномерно весовых пространств $H(D,\varphi_j)$ возрастающей последовательностью весов φ_j . Задача описания пространства преобразований Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов на проективном пределе рассматривалась, например, в работе [7]. Здесь теорема 2.1.3 доказана другим методом.

Теорема 2.1.2. *Пусть φ_n, $n\in\mathbb{N}$, — возрастающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D\subset\mathbb{C}$, содержащей точку $z=0$. Предположим, что сопряженные по Юнгу функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условию типа (4) с постоянной $b>12$ и для некоторых постоянных c_n выполняются соотношения*

$$\widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda)+\ln(1+|\lambda|)+c_n\le\widetilde{\varphi}_n(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}.$$

Тогда

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к индуктивному пределу нормированных пространств $H(D,\varphi_n)$, $n\in\mathbb{N}$, пространством и проективным пределом пространств $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n)$, $n\in\mathbb{N}$;*

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к проективному пределу нормированных пространств $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n)$, $n\in\mathbb{N}$, пространством и индуктивным пределом пространств $H(D,\varphi_n)$, $n\in\mathbb{N}$.*

Теорема 2.1.3. *Пусть φ_n, $n\in\mathbb{N}$, — убывающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D\subset\mathbb{C}$, содержащей точку $z=0$. Предположим, что сопряженные по Юнгу функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условию типа (4) с постоянной $b>12$ и для некоторых постоянных c_n выполняются соотношения*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda)+\ln(1+|\lambda|)+c_n\le\widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N}.$$

Тогда

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к проективному пределу нормированных пространств* $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *пространством и индуктивным пределом пространств* $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$;

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к индуктивному пределу нормированных пространств* $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *пространством и проективным пределом пространств* $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Далее в первом параграфе рассматриваются преобразования Фурье–Лапласа функционалов в подпространствах $A^\infty(D)$ типа классов Карлемана. Сначала рассматриваются функционалы на нормированных пространствах.

Теорема 2.1.4. *Пусть* D — *ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку 0,* $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^\infty$ — *неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию неквазианалитичности*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty, \tag{5}$$

которое по теореме Данжуа–Карлемана (*см.* [67], [76], [75]) *равносильно условию на функцию следа*

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)\, dr}{r^2} < \infty.$$

Для $a \in \mathbb{R}$ *обозначим*

$$\psi_a(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - a \ln(1 + |\lambda|)).$$

Тогда

1) *если* S — *линейный непрерывный функционал на* $H(D, \mathcal{M})$ *и* $\widehat{S}(\lambda)$ — *преобразование Фурье–Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}), \ \lambda \in \mathbb{C},$$

то $\widehat{S} \in H(\mathbb{C}, \psi_0)$ *и*

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\psi_0)} \leq \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})};$$

2) *существует* $\alpha > 0$, *не зависящее от области* D *и последовательности* $\mathcal{M}$, *такое что для любой целой функции* $F \in H(\mathbb{C}, \psi_\alpha)$ *существует единственный линейный непрерывный функционал* S *на* $H(D, \mathcal{M})$, *для которого функция* F *является его преобразованием Фурье–Лапласа, и*

$$\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})} \leq C\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_\alpha)},$$

где константа $C > 0$ *зависит только от области* D *и последовательности* $\mathcal{M}$.

Из этой теоремы выводится описание сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье–Лапласа для индуктивных и проективных пределов нормированных пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, по возрастающей или убывающей последовательности $\mathcal{M}^{(k)}$.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, *— неубывающие логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию*

$$M_n^{(k+1)} \geq M_{n+1}^{(k)},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим $T_k(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n^{(k)}}$, $r \geq 0$, *функцию следа последовательности* $\mathcal{M}^{(k)}$ *и пусть*

$$\psi_k(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|),\ k \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что каждая из последовательностей удовлетворяет условию неквазианалитичности (5). *Тогда*

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к индуктивному пределу пространств* $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, *и проективным пределом пространств* $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$;

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств* $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *и индуктивным пределом пространств* $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.1.6. *Пусть* $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, *— неубывающие логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию*

$$M_n^{(k+1)} \le M_{n-1}^{(k)},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что каждая из последовательностей удовлетворяет условию (5). *Тогда*

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств* $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, *и индуктивным пределом пространств* $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$;

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к индуктивному пределу пространств* $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *и проективным пределом пространств* $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$.

Второй параграф второй главы диссертации посвящен более подробному изучению инвариантной оболочки и инвариантного ядра для равномерно весовых нормированных пространств $H(D, \varphi)$ и нормированных пространств типа классов Карлемана $H(D, \mathcal{M})$. Поскольку инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D, \varphi)$ определяется исходя из инвариантности относительно дифференцирования, то пространство преобразований Фурье–Лапласа $\widehat{\mathcal{H}}_i(D, \varphi)$ функционалов на $\mathcal{H}_i(D, \varphi)$ должно быть наименьшим модулем над кольцом многочленов, содержащем пространство $\widehat{H}(D, \varphi)$. Соответственно, пространство преобразований Фурье–Лапласа $\widehat{\mathcal{H}}_p(D, \varphi)$ функционалов на инвариантном ядре $\mathcal{H}_p(D, \varphi)$ должно быть наибольшим модулем над кольцом многочленов, содержащимся в

$\widehat{H}_p(D,\varphi)$. Поэтому параграф начинается с описания наибольших и наименьших модулей.

Теорема 2.2.1. *Пусть $u(\lambda)$ — непрерывная субгармоническая функция на плоскости и*

$$\overline{\lim}_{|\lambda|\to\infty}\frac{u(\lambda)}{|\lambda|}<\infty.$$

Положим

$$u_n(\lambda)=u(\lambda)+n\ln(1+|\lambda|),\ \lambda\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда

1) *наименьший модуль над кольцом многочленов, содержащий пространство $H(\mathbb{C},u)$, совпадает с $\bigcup_{n=1}^{\infty}H(\mathbb{C},u_n)$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор умножения на многочлен действует непрерывно в этом пространстве;*

2) *наибольший модуль над кольцом многочленов, содержащийся в $H(\mathbb{C},u)$ совпадает с $\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\mathbb{C},u_{-n})$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор умножения на многочлен действует непрерывно в этом пространстве.*

Из этой теоремы выводится (внешнее) описание инвариантной оболочки и инвариантного ядра пространства $H(D,\varphi)$.

Теорема 2.2.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$. Для выпуклой в D функции φ и $a\in\mathbb{R}$ положим*

$$\widetilde{\varphi}_a(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)-a\ln(1+|\lambda|),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

$$\varphi_a(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z-\widetilde{\varphi}_a(\lambda)),\ z\in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n>12$ выполняются условия

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_n(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_ja_k\geq\frac{b_n}{1+|y|^2}|a|^2,\ a,y\in\mathbb{R}^2,\ |y|\geq R,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда

1) *инвариантная оболочка* $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D,\varphi_n)$. *Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcap_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\varphi_n)$. *Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Если весовая функция φ имеет конечный порядок роста в смысле выполнения соотношения

$$\overline{\lim}_{d(z)\longrightarrow 0}\frac{\ln\varphi(z)}{-\ln d(z)}<\infty,$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы области D, то инвариантные оболочка и ядро могут быть описаны более непосредственным (внутренним) образом.

Теорема 2.2.3. *Пусть* D — *ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z=0$, φ — *положительная выпуклая функция на* D, *имеющая конечный порядок роста, такая что для некоторых* $b_n>12$ *выполняются условия*

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_n(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_ja_k\geq\frac{b_n}{1+|y|^2}|a|^2,\ a,y\in\mathbb{R}^2,\ |y|\geq R,\ n\in\mathbb{Z},$$

где

$$\widetilde{\varphi}_a(y)=\widetilde{\varphi}(y_1+iy_2)-a\ln(1+|y|),\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2,\ a\in\mathbb{R}.$$

Положим для $a\in\mathbb{R}$

$$\psi_a(z)=\varphi(z)-a\ln d(z),\ z\in D.$$

Тогда

1) *инвариантная оболочка* $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. *Если в этом объединении ввести топологию индуктивного*

предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;

2) *инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcap_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. *Если в этом пересечении ввести топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Для пространств $H(D,\mathcal{M})$ инвариантные оболочка и ядро описываются более естественным образом.

Пусть $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ неубывающая логарифмически выпуклая последовательность. Положим $M_n = M_0$ для $-n \in \mathbb{N}$ и для $k \in \mathbb{Z}$ через $\mathcal{M}_k$ будем обозначать последовательность со сдвигом $(M_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 2.2.4. *Предположим, что последовательность* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию неквазианалитичности*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty.$$

Тогда

1) *инвариантная оболочка* $\mathcal{H}_i(D,\mathcal{M})$ *пространства* $H(D,\mathcal{M})$ *совпадает с объединением пространств* $H(D,\mathcal{M}_k)$, $k \in \mathbb{N}$. *Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ *пространства* $H(D,\mathcal{M})$ *совпадает с пересечением пространств* $H(D,\mathcal{M}_k)$, $-k \in \mathbb{N}$. *Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

В третьем параграфе второй главы диссертации с помощью целых функций с заданной асимптотикой из первой главы мы конструируем дискретные достаточные множества для локально выпуклых пространств, образующих модуль над кольцом многочленов. А также дается оценка меры "избыточности" построенных достаточных множеств.

Пусть $\eta(t)$ — считающая функция дискретного множества S с одной предельной точкой в бесконечности:

$$\eta(t) = \sum_{\lambda \in S,\ |\lambda| \le t} 1,\ t > 0.$$

Множество будем называть регулярным, если его считающая функция удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \ln t\, d\eta(t) = \infty.$$

Для целой функции L для $\delta > 0$ положим

$$E_L(\delta) = \bigcup_{\lambda \in N(L)} B(\lambda, \delta(1 + |\lambda|)^{-1}).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) - n\ln(1 + |\lambda|) + c_n,\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда для проективного предела $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$ пространств $H(\mathbb{C}, \psi_n)$ существует дискретное достаточное множество S, такое что из него можно удалить любое конечное подмножество сохраняя свойство достаточности, а после удаления любого регулярного подмножества оно перестает быть достаточным.

Для индуктивных пределов нормированных пространств целых функций оценка избыточности достаточных множеств оказывается несколько более сложной: приходится задаться изначально некоторым "лишним" количеством точек, так что удаление меньшего количества сохраняет достаточность, а при удалении большего количества достаточность теряется.

Бесконечно возрастающую неотрицательную функцию $m(t)$, $t \ge 0$, $(m(0) = 0)$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{t > 0}(m(2t) - m(t)) \le 1$$

будем называть медленно растущей. С каждой медленно растущей функцией свяжем ассоциированную функцию скачков. А именно, определим последовательности R_n, r_n по формулам

$$m(R_0) = 1,\ m(R_{n+1}) - m(R_n) = 1,\ n = 0, 1, 2,\ \dots\ ,$$

$$\int\limits_{R_n}^{R_{n+1}} \ln t\, dm(t) = \ln r_n,\ n = 0, 1, 2,\ \dots\ .$$

Ассоциированной с $m(t)$ функцией скачков назовем функцию $m_0(t)$, $t \geq 0$, ($m_0(0) = 0$) с единичными скачками в точках r_n, $n = 1, 2,\ \dots$. Из определения следует соотношение

$$|m(t) - m_0(t)| \leq 1,\ t \geq 0.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) + n \ln(1 + |\lambda|) + c_n,\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{R}.$$

И пусть неотрицательная функция $m(t)$, $t > 0$, является функцией медленного роста, $m_0(t)$ — ассоциированная с ней функция скачков. Тогда для индуктивного предела $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ пространств $H(\mathbb{C}, \psi_n)$ существует дискретное достаточное множество $S = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, такое что если из него удалить подмножество $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty,$$

то множество $\widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ остается достаточным. Если же $m_0(t) - \eta(t) \leq C < \infty$, $t \geq 0$, то множество $S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ не будет достаточным.

В четвертом параграфе второй главы, используя метод достаточных множеств (метод Эйренпрайса), из теорем 2.3.1 и 2.3.2 мы выводим теоремы о представляющих системах экспонент в инвариантных оболочке и ядре нормированных пространств $H(D, \varphi)$ и $H(D, \mathcal{M})$.

Теорема 2.4.1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, φ — выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - n\ln(1 + |\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)),\ z \in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ выполнены условия

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b_n}{1 + |x|^2}|y|^2,\ y = (y_1, y_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда в инвариантной оболочке

$$\mathcal{H}_i(D, \varphi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \varphi_k)$$

пространства $H(D, \varphi)$ существует представляющая система $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, то есть любая функция $f \in \mathcal{H}_i(D, \varphi)$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z},$$

этот ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D, \varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество показателей представляющей системы $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, если удалить из Λ любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из Λ любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.

Теорема 2.4.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию "неквазианалитичности"*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, *— "сдвинутые" последовательности. Тогда в инвариантной оболочке* $\mathcal{H}_i(D, \mathcal{M}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}^{(k)})$ *пространства* $H(D, \mathcal{M})$ *существует представляющая система экспонент* $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, *то есть любая функция* $f \in \mathcal{H}_i(D, \mathcal{M})$ *представляется в виде ряда по данной системе экспонент*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z},$$

ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— множество показателей представляющей системы* $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. *Тогда, если удалить из* Λ *любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из* Λ *любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.*

Оценка избыточности представляющих систем в инвариантных ядрах оказывается более сложным, чем в инвариантных оболочках, что соответствует ситуации с достаточными множествами.

Теорема 2.4.3. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z = 0$, φ *— выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) + n \ln(1 + |\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} (\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)),\ z \in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ *выполнены условия*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b_n}{1 + |x|^2} |y|^2,\ y = (y_1, y_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть далее положительная функция $m(t)$, $t > 0$, *является медленно растущей,* $m_0(t)$ *— ассоциированная с ней функция скачков. Тогда существует система показателей* $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, *такая что система экспонент* $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ *является представляющей в инвариантном ядре* $\mathcal{H}_p(D, \varphi) =$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$ *пространства* $H(D,\varphi)$, *то есть любая функция* $f \in \mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *может быть представлена в виде суммы ряда*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. *При этом ряды из всех определяющих топологию* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *норм сходится*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k e^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_m)} < \infty,\ m \in \mathbb{N},$$

а ряд из абсолютных величин сходится в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \sup_{z\in D} \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k}\right| e^{-\varphi_n(z)} = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если из системы показателей Λ *удалить подмножество* $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, *считающая функция* $\eta(t)$ *которого удовлетворяет условию*

$$m_0(t)-\eta(t) \nearrow +\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}\}$ *остается представляющей. Если же* $m_0(t)-\eta(t) \le C < \infty,\ t \ge 0$, *то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.*

Теорема 2.4.4. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z=0$, $\mathcal{M}=\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию "неквазианалитичности"*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и пусть $M_{-n}=M_0,\ n \in \mathbb{N}$, *и* $\mathcal{M}^{(k)}=\{M_{n-k}\}_{n=0}^{\infty},\ k \in \mathbb{N}$, *— "сдвинутые" последовательности. Тогда для положительной медленно растущей функции* $m(t),\ t>0$, *существует система показателей* $\Lambda=\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, *такая что* *система экспонент* $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ *является представляющей в инвариантном ядре* $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}^{(k)})$ *пространства* $H(D, \mathcal{M})$, *то есть любая функция* $f \in \mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ *может быть представлена в виде суммы ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. *Если из системы показателей* Λ *удалить подмножество* $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, *считающая функция* $\eta(t)$ *которого удовлетворяет условию*

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}\}$ *остается представляющей. Здесь* $m_0(t)$ *— ассоциированная с* $m(t)$ *функция скачков. Если же* $m_0(t) - \eta(t) \leq C < \infty,\ t \geq 0$, *то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.*

В третьей главе диссертации рассматриваются нормированные пространства $H(D, \varphi)$ и $H(D, \mathcal{M})$ и доказывается существование систем экспонент, по которым функции из этих пространств можно разложить в ряд, сходящийся в более слабой норме. А также конструируются системы экспонент, по которым функции из собственного подпространства этих пространств можно разложить в ряд, сходящийся в норме пространства. Основой доказательств являются теоремы 1.2 и 1.3. В первом параграфе вопросы рассмотрены для пространств $H(D, \varphi)$. Так же как в теореме 2.2.2 введем обозначения

$$\widetilde{\varphi}_a(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - a \ln(1 + |\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\varphi_a(z) = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} (\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}_a(\lambda)),\ z \in D.$$

Теорема 3.1.1. *Для выпуклой области* D *комплексной плоскости, содержащей точку* $z = 0$, *и для любой неотрицательной выпуклой функции* $\varphi(z)$ *в этой области, стремящейся к бесконечности при* $\mathrm{dist}\ (z, \partial D) \longrightarrow 0$, *такой* *что* $\widetilde{\varphi}$ *дважды дифференцируема, и для некоторых констант* $b > 12$ *и* $R > 0$, *выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2, \ y = (y_1, y_2), \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ |x| \geq R,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, *обладающая свойством: каждая функция* $f \in H(D, \varphi)$ *представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi_\alpha)$, *где* $\alpha = 2A + 13$ *и* A *— константа из теоремы* 1.2. *Тем самым константа* α *— универсальная, то есть не зависит от области* D *и от весовой функции* φ.

Суть этой теоремы можно передать в другой формулировке.

Теорема 3.1.2. *Для выпуклой области* D *комплексной плоскости, содержащей точку* $z = 0$, *и для любой неотрицательной выпуклой функции* $\varphi(z)$ *в этой области, стремящейся к бесконечности при* $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, *такой что* $\widetilde{\varphi}$ *дважды дифференцируема, и для некоторых констант* $b > 4\alpha + 12$ (α *— универсальная постоянная из теоремы* 3.1.1) *и* $R > 0$, *выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2, \ y = (y_1, y_2), \ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ |x| \geq R,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, *обладающая свойством: каждая функция* $f \in H(D, \varphi_{-\alpha})$ *представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi)$.

Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 более непосредственным образом можно сформулировать для весовых функций конечного порядка.

Теорема 3.1.3. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 12$ и $R > 0$, выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2, \; y = (y_1, y_2), \; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \; |x| \geq R,$$

при условии: для некоторого $\rho > 0$

$$\varphi(z) \prec \operatorname{dist}^{-\rho}(z, \partial D), \; z \in D,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \varphi)$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \; z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H\left(D, \varphi(z) + \alpha(\rho + 1) \ln \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial D)}\right)$, где α — константа из теоремы 3.1.1.

Теорема 3.1.4. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 4\alpha + 12$ (α — универсальная постоянная из теоремы 3.1.1) и $R > 0$, выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2, \; y = (y_1, y_2), \; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \; |x| \geq R,$$

при условии: для некоторого $\rho > 0$

$$\varphi(z) \prec \operatorname{dist}^{-\rho}(z, \partial D), \; z \in D,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, *обладающая свойством: каждая функция* $f \in H\left(D, \varphi(z) - \alpha(\rho+1)\ln\frac{1}{\text{dist }(z,\partial D)}\right)$ *представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \; z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi)$.

Во втором параграфе третьей главы изучаются системы экспонент для пространств $H(D, \mathcal{M})$.

Теорема 3.2.1. *Существует такое натуральное число* s, *что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел* $\mathcal{M}$, *удовлетворяющей условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty,$$

и для любой ограниченной выпуклой области D, *содержащей точку* $z = 0$, *найдется система экспонент* $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, *обладающая свойством: каждая функция* $f \in H(D, \mathcal{M})$ *представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \; z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M}_s)$.

Для доказательства этой теоремы доказано утверждение о преобразованиях Фурье–Лапласа.

Теорема 3.2.2. *Существует такое натуральное число* s, *что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел* $\mathcal{M}$, *удовлетворяющей условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty,$$

и для любой ограниченной выпуклой области D, *содержащей точку* $z = 0$, *каждая функция* $f \in H(D, \mathcal{M})$ *является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала* S *на пространстве*

$H(\mathbb{C}, \psi_s)$:

$$f(z) = \widehat{S}(z) = S\left(e^{\lambda z}\right), \ z \in D,$$

где

$$\psi_s(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - s\ln(1 + |\lambda|)).$$

Теорема 3.2.1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3.2.3. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty,$$

и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей точку $z = 0$, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D)$, для которой $f^{(s)} \in H(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M})$.

Четвертая глава диссертации посвящена безусловным базисам из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций. В этой главе рассматриваются гильбертовы пространства целых функций H, удовлетворяющие условиям:

1. Пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$.

2. Пространство H устойчиво относительно деления, то есть если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$. Из этого условия следует в частности, что точечные функционалы отличны от нуля.

Из условия 1 следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром. Через $K(z)$ обозначим $k(z,z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ ([62]).

В первом параграфе четвертой главы получены необходимые условия существования безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в таких пространствах.

Теорема 4.1.1. *Если система $\{k(\lambda, z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве H, то существует целая функция L с простыми нулями в точках z_i, $i = 1, 2, \ \ldots\ ,$ для которой выполняется соотношение.*

$$\frac{1}{P}K(z) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \le PK(z),\ z \in \mathbb{C},$$

где P — некоторая положительная постоянная.

Введем одну характеристику для непрерывных на плоскости функций. Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z,r)$ обозначим круг $\{w: \ |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z,r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f,z,r)$ — расстояние от функции f до пространства гармонических в $B(z,r)$ функций:

$$d(f,z,r) = \inf\{\|f - H\|_r,\ H \text{ — гармонична в } \ B(z,r)\}.$$

Для положительного числа p положим

$$\tau(u,z,p) = \sup\{r: \ d(u,z,r) \le p\}.$$

Через $\tau(z)$ будем обозначать функцию $\tau(\ln K(w), z, \ln(5P))$, где P — константа из теоремы 4.1.1.

В следующих двух теоремах получены условия на распределение нулей порождающей функции безусловного базиса.

Теорема 4.1.2. *Пусть* $L(z)$ *— целая функция с простыми нулями* z_i, $i = 1, 2, \ldots$, *при некотором* P *удовлетворяющая двусторонней оценке*

$$\frac{1}{P}K(z) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \leq PK(z).$$

Тогда

1) *в любом круге* $B(z, 2\tau(z))$ *содержится хотя бы один нуль* z_i *функции* L*;*

2) *для любых* $i, j,\ i \neq j$, *выполняется неравенство*

$$|z_i - z_j| \geq \frac{\max(\tau(z_i), \tau(z_j))}{10P^{\frac{3}{2}}};$$

3) *для любого* i *в круге* $B\left(z_i, \frac{\tau(z_i)}{20P^{\frac{3}{2}}}\right)$ *справедливо соотношение*

$$\frac{1}{5^6 P^8}K(z) \leq \frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \leq PK(z).$$

Теорема 4.1.3. *Пусть* z_i, $i = 1, 2, \ldots$, *— нули функции* $L(z)$, *удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы:*

$$\frac{1}{P}K(z) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \leq PK(z).$$

Тогда для любого конечного множества нулей B, *содержащего хотя бы два нуля, найдется индекс* n, *такой что*

$$\sum_{z_i \in B,\, i \neq n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2} \leq (4P)^{12}.$$

В следующей теореме сформулированы условия, при которых безусловные базисы из воспроизводящих ядер в пространствах H отсутствуют.

Теорема 4.1.4. *Пусть* H *— функциональное гильбертово пространство целых функций, устойчивое относительно деления. Предположим, что для всех достаточно больших положительных чисел* p *найдется число* $\delta =$

$\delta(p) > 0$ и последовательность кругов $B(\zeta_j, R_j)$, такая что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in B(\zeta_j, R_j)$ удовлетворяет условию

$$\inf_{z\in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda).$$

и, кроме того,

$$\max_{z\in \overline{B}(\zeta_j,R_j)} \tau(z) = o(R_j), \;\; j \longrightarrow \infty.$$

Тогда в пространстве H безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Следующая теорема может служить инструментом для оценок функции $\tau(u, z, p)$.

Теорема 4.1.5. *Пусть субгармоническая на плоскости функция u дважды непрерывно дифференцируема. Если*

$$\frac{1}{b} \leq \frac{\Delta u(w)}{\Delta u(z)} \leq b, \;\forall w \in B\left(z, \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}\right).$$

то

$$\sqrt{\frac{8p}{b\Delta u(z)}} \leq \tau(u, z, p) \leq \sqrt{\frac{8pb}{\Delta u(z)}}.$$

Во втором параграфе четвертой главы рассматриваются более конкретные гильбертовы пространства. Пусть $\varphi(\lambda)$ — субгармоническая функция на плоскости и

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \; ||f||^2 := \int\limits_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)}\, dm(\lambda) < \infty \right\},$$

где dm — плоская мера Лебега. Тогда $\mathcal{F}_\varphi$ является гильбертовым пространством, удовлетворяющим условиям функциональности и устойчивости.

Если $\varphi(|\lambda|) = (\ln_+ |\lambda|)^\beta$ и $\beta \in (1; 2]$, то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существуют безусловные базисы из значений воспроизводящего ядра ([66]). Еще одно доказательство получено в [64] для случая, когда $\varphi(\lambda) = O(\ln_+ |\lambda|)^2$ и удовлетворяет некоторым условиям регулярности роста. В [63] описаны базисы Рисса из нормированных значений воспроизводящего ядра, когда $\varphi(\lambda) = (\ln_+ |\lambda|)^2$, в духе теоремы Кадеца об $1/4$. Аналогичный результат для $\beta \in (1;2)$ получен в [74]. В случае, когда весовая функция растет быстрее, чем $(\ln_+ |\lambda|)^2$ безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра не существует ([66], [64], [65], [78], [79]).

В следующей теореме доказано существование сколь угодно медленно растущих функций $\varphi(r)$, для которых $\ln r = o(\varphi(r))$, $r \longrightarrow \infty$, и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$, $\varphi(\lambda) = \varphi(|\lambda|)$, нет безусловных базисов из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.1. *Для произвольной положительной неограниченно возрастающей функции $\eta(t)$, $t > 0$, существует радиальная субгармоническая функция $\varphi(z)$, такая что*

$$\varphi(r) = O(\eta(r) \ln r), \ \ r \longrightarrow \infty,$$

и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы о безусловных базисах из работы [66] (весовая функция может быть нерадиальной).

Теорема 4.2.2. *Пусть ассоциированная мера μ субгармонической на плоскости функции φ удовлетворяет условиям*

1) *для некоторого положительного $\delta > 0$*

$$\delta \leq \mu(2t) - \mu(t), \ \ t > 0, \tag{6}$$

$$\mu(2t) - \mu(t) \leq 1, \ \ t > 0; \tag{7}$$

2) *для некоторых $A > 0, \beta \in (0;1)$ и любого $z \in \mathbb{C}$*

$$\int\limits_0^{\beta|z|} \frac{\mu(z,t)\,dt}{t} \leq A. \tag{8}$$

Тогда в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Утверждение теоремы 4.2.2 остается в силе, если ассоциированная мера весовой функции удовлетворяет условиям (6), (7) и (8) только кусочно.

Теорема 4.2.3. *Пусть ассоциированная мера ν субгармонической функции u представляется в виде $\nu = \nu_1 + \mu$, где $\nu_1(\mathbb{C}) \in (0, 1)$ и*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — неотрицательные борелевские меры с массой $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ с носителями в непересекающихся кольцах $\{z : \ R_n \le |z| \le R'_n\}$, при этом последовательность R_n возрастающая, $2R_n \le R_{n+1}$ и $\frac{R'_n}{R_n} \le c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, мера μ удовлетворяет условию (8), то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.3 позволяет конструировать веса φ сколь угодно медленного роста, так что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.4. *Если ассоциированная мера μ радиальной субгармонической функции u удовлетворяет условию (7), то найдется радиальная весовая функция φ, сравнимая с u:*

$$u(z) - \ln(|z| + 1) \le \varphi(z) \le u(z), \ \ z \in \mathbb{C},$$

такая что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

В третьем параграфе четвертой главы по целой функции L при некоторых условиях на распределение ее нулей $\lambda_k, \ k \in \mathbb{N}$, мы определяем гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L$, такое что в нем система $\{k(\lambda, \lambda_k), \ k \in \mathbb{N}\}$ оказывается безусловным базисом.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями, образующими множество $\mathcal{N} = \{\lambda_k, \ k \in \mathbb{N}\}$, и $G_\delta = G_\delta(L) := \{z : \ \mathrm{dist}\ (z, \mathcal{N}) \ge \delta\} = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(\lambda_k, \delta)$.

Предположим, что множество нулей удовлетворяет условию:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\neq k}\frac{1}{|\lambda_j-\lambda_k|}:=M<\infty. \tag{9}$$

Заметим, что из этого условия следует разделенность нулей

$$|\lambda_k-\lambda_m|\geq\frac{1}{M}:=\sigma>0,\ k\neq m.$$

Возьмем гладкую финитную функцию $\alpha(z)$ типа "шапочки", а именно, функцию со свойствами: $\alpha(z)$ — неотрицательная функция с носителем в единичном круге $B(0,1)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{C}}\alpha(z)\,dm(z)=1,$$

где $dm(z)$ — мера Лебега на плоскости. Для удобства будем также считать, что $0<\alpha(z)\leq 1$, $z\in B(0,1)$, и $\alpha(z)\equiv 1$ в круге $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Возьмем положительное δ и положим

$$\alpha_\delta(z)=\frac{1}{\delta^2}\alpha\left(\frac{z}{\delta}\right),\ z\in\mathbb{C},$$

и пусть φ — гладкая регуляризация функции $\ln|L(\lambda)|$:

$$\varphi(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{C}}\ln|L(z)|\alpha_\delta(\lambda-z)\,dm(z),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Как известно, функция φ будет гладкой субгармонической функцией на плоскости, причем $\varphi(\lambda)\geq\ln|L(\lambda)|,\ \lambda\in\mathbb{C}$, а в области G_δ выполняется равенство $\varphi(\lambda)=\ln|L(\lambda)|$. В силу субгармоничности

$$\Delta\varphi(z)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(z)\geq 0,\ z=x+iy\in\mathbb{C}.$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}=\mathcal{H}_L$ целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$|F(\lambda)|=o(e^{\varphi(\lambda)}),\ |\lambda|\to\infty,$$

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|F(\lambda)|^2e^{-2\varphi(\lambda)}\Delta\varphi(\lambda)\,dm(\lambda):=\|F\|^2<\infty.$$

Теорема 4.3.1. *$\mathcal{H}$ — гильбертово пространство.*

Теорема 4.3.2. *Система $\left\{l_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ образует безусловный базис в пространстве $\mathcal{H}$.*

Из теоремы 4.3.2 следует следующая теорема.

Теорема 4.3.3. *Пусть множество нулей $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ целой функции L удовлетворяет условию (9). Тогда система значений воспроизводящего ядра $\{K(\lambda, \lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ пространства $\mathcal{H}_L$ образует безусловный базис в этом пространстве.*

Пространства $\mathcal{H}_L$ выглядят искусственными. Но при этом основные пространства с безусловными базисами оказываются изоморфными (как нормированные пространства) соответствующим пространствам $\mathcal{H}_L$.

Теорема 4.3.4. *Пространство Пэли P, состоящее из целых функций экспоненциального типа π с нормой*

$$\|F\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(iy)|^2\, dy < \infty,$$

пространство $\widehat{E}_2(D)$ целых функций, представимых в виде

$$F(\lambda) = \int\limits_{\partial D} e^{\lambda z}\overline{f(z)}\, ds(z),$$

где D — выпуклый многоугольник, $f \in E_2(D)$:

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\partial D} |f(z)|^2\, ds(z) < \infty,$$

пространство $\widehat{B}_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D изоморфны как нормированные пространства соответствующим пространствам $\mathcal{H}_L$, где L — целая функция, порождающая базис.

Пятая глава диссертации посвящена безусловным базисам из экспонент в весовых пространствах на отрезке вещественной оси. Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и

$L^2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int\limits_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt} < \infty.$$

Изначально базисы из экспонент $\{e^{\lambda_n t}\}$ в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$ рассматривались в виде возмущений классической системы Фурье $\{e^{int}\}_{-\infty}^{\infty}$, образующей ортонормированный базис в этом пространстве. Наиболее точный результат в этом направлении — это теорема М. И. Кадеца ([34]).

Теорема E. *Если числа λ_n, таковы что $\sup_n |Im\ (\lambda_n - in)| < \frac{1}{4}$ и $\sup_n |Re\ \ \lambda_n| < \infty$, то система $\{e^{\lambda_n t}\}_{-\infty}^{\infty}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2(-\pi;\pi)$.*

Другое направление исследований связано с методом описания множества показателей базиса как нулей целой функции с определенными свойствами (см., например, [38], [35], [8], [51]).

Проблеме базисности систем экспонент в пространствах Соболева посвящены работы [77], [18].

Известно, что если для любого $\alpha > 0$

$$e^{h(t)}(1-|t|)^{\alpha} \to \infty,\ \ |t| \to 1,$$

то в пространстве $L^2((-1;1),h)$ безусловных базисов из экспонент не существует ([11], [13]).

Следующая теорема, доказанная в первом параграфе пятой главы, представляет собой уточнение теоремы 4.1.4 на случай пространств $\widehat{L}^2(I,h)$.

Теорема 5.1.1. *Пусть для достаточно больших $p > 0$ найдется некоторое число $\delta = \delta(p) > 0$ со свойством: существует последовательность $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, такая что интервалы*

$$I_k = \{x:\ \ |x - x_k| \le 2\tau(\ln K(z), x_k, p)\}$$

попарно не пересекаются и

$$\min_{x\in I_k}\tau(\ln K(z),x,p)\geq \delta(p)\tau(\ln K(z),x_k,p).$$

Пусть далее для любого $\varepsilon>0$ найдется отрезок $[m;s]$, $s>m$, $s,m\in\mathbb{Z}$, со свойствами

1) *если $I_{m,s}=\bigcup\limits_{m\leq k\leq s} I_k$, $I^0_{m,s}$ — наименьший отрезок вещественной оси, содержащий $I_{m,s}$, $d_{m,s}$ — сумма длин интервалов, составляющих $I_{m,s}$, а $d^0_{m,s}$ — длина отрезка $I^0_{m,s}$, то $d_{m,s}\geq(1-\varepsilon)d^0_{m,s}$;*

2) *выполняется оценка $\max_{k\in[m,s]}\tau(\ln K(z),x_k,p)\leq\varepsilon d^0_{m,s}$.*

Тогда в пространстве $L^2(I,h)$ безусловного базиса из экспонент не существует.

Следующая теорема, доказанная в работе [13] (теорема 4), является непосредственным следствием теоремы 5.1.1.

Теорема 5.1.2. *Пусть I — произвольный ограниченный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$— выпуклая функция на этом интервале. Предположим, что для некоторого $p>0$ существуют последовательность промежутков $[a_m;b_m]$ и положительных чисел τ_m, $m=1,2,\ \dots\ ,$ таких что*

1) *для некоторого положительного числа δ и для всех $x\in[a_m;b_m]$*

$$\delta\tau_m\leq\tau(\ln K(z),x,p)\leq\tau_m,\ m=1,2,\ \dots\ ,$$

2) *имеет место соотношение*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\frac{b_m-a_m}{\tau_m}=\infty,$$

тогда в пространстве $L^2(I,h)$ безусловного базиса из экспонент не существует.

Функция $u(z)=\ln K(z)$ гладкая, поэтому с помощью теоремы 4.1.5 последнюю теорему можно сформулировать в терминах производных.

Теорема 5.1.3. *Пусть функция $u(x)=\ln K(x)$ удовлетворяет условию: для достаточно больших $p>0$ и некоторого $b>0$ существует последовательность интервалов $(a_n;b_n)$, $n\in\mathbb{N}$, $a_n\to\infty$, $n\to\infty$, такая что для всех*

$x \in (a_n, b_n)$

$$\frac{1}{b} \le \frac{u''(x)}{u''(y)} \le b, \ \forall y: \ |x-y| \le \sqrt{8bp}(u''(x))^{-\frac{1}{2}},$$

при этом

$$\frac{(b_n - a_n)^2}{u''(a_n)} \to \infty.$$

Тогда в пространстве $L^2(I, h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Во втором параграфе пятой главы рассматриваются пространства $L^2((-1;1), h)$ со степенной весовой функцией.

Теорема 5.2.1. *В пространстве $L^2((-1;1), h)$ с весовой функцией*

$$h(t) = -\alpha \ln(1 - |t|), \ t \in (-1;1), \ \alpha > 0.$$

безусловных базисов из экспонент не существует.

В третьем параграфе пятой главы построены примеры выпуклых функций h на интервале $(-1;1)$ сколь угодно медленного роста на концах интервала, таких что в пространстве $L^2((-1;1), h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Теорема 5.3.1. *Для любой непрерывной интегрируемой положительной функции W на интервале $(-1;1)$, стремящейся к 0 при $|t| \to 1$ существует выпуклая функция h, такая что $e^{h(t)} \le \frac{1}{W(t)}$ при $|t| < 1$ и в пространстве $L^2((-1;1), h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.*

Результаты первой главы диссертации опубликованы в [71], [32], результаты второй главы — в [28], [14], [30], [31], [32], результаты третьей главы — в [33], [73], результаты четвертой главы — в [24], [27], [29], [72], результаты пятой главы — в [22], [23], [26], [70]. Результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором. Часть результатов диссертации, выносимых на защиту, опубликованы в совместных работах. Результаты совместных работ разделены.

Глава 1

Целые функции с заданными асимптотическими свойствами

В этой главе будут доказаны теоремы о существовании целых функций с заданными асимптотическими свойствами. Такие целые функции являются инструментом для построения дискретных достаточных множеств. Кроме того, они будут использованы для описания сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье–Лапласа.

Теорема 1.1. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный тип при порядке роста ρ, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторых $a,\ \alpha > 0$, для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t)) \leq a(|z|+1)^{\alpha} t,\ t \in (0; (|z|+1)^{-\alpha}), \tag{1.1}$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, такими что при некоторых $\delta > 0, \beta \geq 0$ круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-\beta})$ попарно не пересекаются и сама функция для некоторых постоянных A, B удовлетворяет соотношениям

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \leq A\ln(|\lambda|+e),\ \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta),$$

$$\ln|f'(\lambda)| \geq u(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e),\ n \in N(f).$$

Постоянные A, B зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функции u.

Доказательство теоремы 1.1.

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1.1. *Пусть u, $u(0) = 0$, субгармонична на всей плоскости и удовлетворяет условию*

$$u(\lambda) \le \sigma(|\lambda| + 1)^{\rho},\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Предположим, что ее ассоциированная мера удовлетворяет условию (1.1). Тогда существует субгармоническая функция $v \in C^{\infty}(\mathbb{C})$, удовлетворяющая условиям (1.1), (1.2) и

$$u(\lambda) \le v(\lambda) \le u(\lambda) + O(\ln(|\lambda| + 1)),\ \lambda \longrightarrow \infty,$$

$$\Delta v(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^{3(\rho+\alpha)}),\ \lambda \longrightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 1.1.

Из условия (1.2) по формуле Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(Re^{i\varphi})\,d\varphi = \int_0^R \frac{\mu(t)}{t}\,dt$$

следует, что

$$\mu\left(\frac{R}{e}\right) \le \sigma(R + 1)^{\rho},\ R > 0,$$

или

$$\mu(R) \le \sigma e^{\rho}(R + 1)^{\rho},\ R > 0.$$

Разобьем отрезок $[2^{n-1}; 2^n]$ на $N_n = [\sigma e^{\rho} 2^{(n+1)(\rho+1)}] + 1$ ($[x]$ обозначает целую часть x) отрезков I_k равной длины. Тогда по принципу Дирихле найдется хотя бы одно кольцо $S_n := \{z = te^{i\varphi}, t \in I_{k_n}, \varphi \in [0; 2\pi]\}$, мера которого удовлетворяет оценке

$$\mu(S_n) \le \frac{\mu(2^n)}{N_n} < 2^{-n}. \tag{1.3}$$

Ширину этих колец обозначим через h_n:

$$S_n = \{z : R_n \le |z| < R_n + h_n\},\ n \in \mathbb{N},$$

при этом

$$h_n \ge \frac{1}{8\sigma e^{\rho}} 2^{-(n+1)\rho}.$$

Пусть

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\,|_{S_n}$$

— сумма сужений меры μ на кольцо S_n. Из (1.3) следует, что $\nu(\mathbb{C}) \le 1$. Отсюда и из условия (1.1) обычными в этих вопросах выкладками доказывается оценка

$$\pi(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w) = O(\ln(|\lambda| + 1)),\ \lambda \longrightarrow \infty.$$

Функция $u_0(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$

1) субгармонична на всей плоскости, гармонична в кольцах S_n;

2) ассоциированная мера μ_0 удовлетворяет условиям (1.1), (1.2);

3) удовлетворяет оценке

$$|u_0(\lambda) - u(\lambda)| = |\pi(\lambda)| = O(|\lambda| + 1),\ \lambda \longrightarrow \infty. \tag{1.4}$$

Применим к функции u_0 процедуру регуляризации. Пусть $\alpha(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ — неотрицательная, финитная функция с носителем в $[-1; 1]$, такая что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \alpha(|\lambda|)\, dm(\lambda) = 1,$$

где dm — плоская мера Лебега. Возьмем последовательность чисел

$$\delta_n = \min\left(\frac{h_n}{4}, 2^{-\alpha(n+2)}\right)$$

и положим

$$\alpha_n(\lambda) = \delta^{-2}\alpha(\delta^{-1}(\lambda - w)).$$

Тогда функции

$$u_n(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \alpha_n(\lambda - w) u_0(w)\, dm(w),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

обладают общими свойствами регуляризаций: субгармоничны, бесконечно дифференцируемы и

$$u_n(\lambda) \ge u_0(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

и свойством, вытекающим из свойств u_0:

$$u_n(\lambda) \equiv u_0(\lambda),\ \lambda \in \widetilde{S} = \left\{\lambda : |\lambda| \in \left[R_n + \frac{h_n}{4}; R_n + \frac{3h_n}{4}\right]\right\}. \tag{1.5}$$

Определим функцию v следующим образом

$$v(\lambda) = u_n(\lambda),\ |\lambda| \in \left[R_n + \frac{h_n}{4}; R_{n+1} + \frac{3h_{n+1}}{4}\right],\ n \in \mathbb{N}.$$

В силу (1.5) функция v "склеивается" в кольцах $\widetilde{S}_n$ в субгармоническую функцию, равную в кольцах $\widetilde{S}$ функции u_0. Очевидно, что функция $v \in C^\infty(\mathbb{C})$ и удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Если λ лежит между кольцами $\widetilde{S}_n$ и $\widetilde{S}_{n+1}$, то

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) = u_n(\lambda) - u_0(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} (u_0(w) - u_0(\lambda))\alpha_n(\lambda - w)\, dm(w).$$

Переходя к полярным координатам и пользуясь формулой Йенсена, получим

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) = 2\pi \int\limits_0^{\delta_n} \alpha_n(t) \left(\int\limits_0^t \frac{\mu_0(\lambda, s)}{s}\, ds\right) t\, dt.$$

По определению $\delta_n \le 2^{-\alpha(n+1)} \le (|\lambda| + 1)^{-\alpha}$, и по свойству (1.1) имеем

$$v(\lambda) - u_0(\lambda) \le a \int\limits_{\mathbb{C}} \alpha_n(\lambda)\, dm(\lambda) = a.$$

Отсюда и из оценки (1.4) получим первое утверждение леммы 1.1. Оценим Δv. Если λ лежит между кольцами $\widetilde{S}_n$ и $\widetilde{S}_{n+1}$, то рассматривая u_0 как обобщенную функцию получим

$$\Delta v(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \Delta_\lambda \alpha_n(\lambda - w) u_0(w)\, dm(w) = \int\limits_{\mathbb{C}} \Delta_w \alpha_n(\lambda - w) u_0(w)\, dm(w) =$$

$$= \pi \int\limits_{\mathbb{C}} \alpha_n(\lambda - w)\, d\mu(w).$$

Если $\alpha = \max_t \alpha(t)$, то с учетом (1.2) имеем

$$\Delta v(\lambda) \le \alpha \delta_n^{-2} 2\mu(|\lambda| + 1) = O((|\lambda| + 1)^{3(\rho+\alpha)}).$$

Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Пусть u — гладкая субгармоническая функция, μ — ассоциированная мера этой функции, которая удовлетворяет условиям (1.1), (1.2), и для некоторого β имеет место оценка*

$$\Delta u(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^{\beta}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Тогда существует субгармоническая функция $\widetilde{u}$, такая что

$$|\widetilde{u}(\lambda) - u(\lambda)| = O(\ln(|\lambda| + 1)), \ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

При этом ассоциированная мера $\widetilde{\mu}$ функции $\widetilde{u}$ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Кроме того, существуют меры μ_n и прямоугольники P_n, $n \in \mathbb{N}$, такие что

1) $\sum_n \mu_n = \mu$;

2) *внутренности выпуклых оболочек носителей мер μ_n попарно не пересекаются;*

3) *носитель меры μ_n лежит в P_n, $n \in \mathbb{N}$;*

4) *отношение длин сторон прямоугольника P_n лежит в интервале $[3^{-1}; 3]$;*

5) *каждая точка плоскости попадает не более чем в 4 прямоугольника P_n;*

6) *если F_n — выпуклая оболочка носителя меры μ_n, то*

$$diam\ F_n \leq 2\sqrt{2} \min_{\lambda \in F_n} |\lambda|;$$

7) *внутри носителей F_n функция $\widetilde{u}$ гладкая и выполняется оценка*

$$\Delta \widetilde{u}(\lambda) = O((|\lambda| + 1)^{\beta}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 1.2.

Пусть Q_n, $n \in \mathbb{N}$, — квадрат с центром в начале координат с длиной стороны 3^n и сторонами, параллельными осям координат. Тогда

$$Q_{n+1} \setminus Q_n = \bigcup_{j=1}^{8} Q_{nj}, \ n \in \mathbb{N},$$

где Q_{nj} — квадраты, полученные сдвигом квадрата Q_n на векторы $(\pm 3^n, 0)$, $(0, \pm 3^n)$, $(\pm 3^n, \pm 3^n)$. Положим

$$\mu(Q_{nj}) := m_{nj} + q_{nj},\ j = 1, 2,\ \ldots\ , 8,\ n \in \mathbb{N},$$

где $q_{nj} = \{\mu(Q_{nj})\} \in [0; 1)$ — дробная часть $\mu(Q_{nj})$. Положим $q_n^+ = \sum_j q_{nj} \in [0; 8)$, $q_n^- = \sum_j (q_{nj} - 1) \in [-8; 0)$. Определим последовательность q_n следующим образом: положим $q_0 = \{\mu(Q_1)\}$, если q_j для $j \le k-1$ определены, то при $\sum_{j \le k-1} q_j \ge 0$, положим $q_k := q_k^-$, в противном случае $q_k := q_k^+$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} q_k \in (-8; 8),\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

Далее определим последовательность натуральных чисел $N_0, N_{nj},\ j = 1,\ \ldots\ 8$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $N_0 = [\mu(Q_1)]$, если $q_n = q_n^-$, то $N_{nj} = \mu(Q_{nj}) - (q_{nj} - 1)$, а если $q_n = q_n^+$, то $N_{nj} = \mu(Q_{nj}) - q_{nj}$. Таким образом, либо $N_{nj} = m_{nj} + 1$, либо $N_{nj} = m_{nj}$. Сужение меры μ на квадрат Q_{nj} обозначим через μ_{nj}, $\mu_0 = \mu\,|_{Q_0}$ и положим $\widetilde{\mu}_0 = \frac{N_0}{\mu(Q_0)}\mu_0$,

$$\widetilde{\mu}_{nj} = \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\mu_{nj},\ j = 1,\ \ldots\ , 8,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если $\mu(Q_{nj}) = 0$, то $\widetilde{\mu}_{nj} = 0$. Тогда $\widetilde{\mu}_{nj}(\mathbb{C}) = N_{nj}$ — целые неотрицательные числа, и если положим $\nu_{nj} = \mu_{nj} - \widetilde{\mu}_{nj}$, то

$$\nu_{nj}(\mathbb{C}) \in (-1; 1),\ \left(\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj}\right)(\mathbb{C}) \in (-8; 8).$$

Пусть $\nu = \nu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{8} \nu_{nj}$,

$$\nu^+ = \nu_0 + \sum_{q_n = q_n^+} \sum_{j=1}^{8} \nu_{nj},\ \nu^- = -\sum_{q_n = q_n^-} \sum_{j=1}^{8} \nu_{nj},$$

тогда $\nu^\pm$ — неотрицательные меры и $\nu = \nu^+ - \nu^-$. При этом

$$\nu^\pm\left(\bigcup_j Q_{nj}\right) = q^\pm \in (-8; 8).$$

Докажем, что верно соотношение

$$\pi(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{C}} \left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d\nu(w) = O(\ln(|\lambda| + 1)), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty. \tag{1.7}$$

Для этого докажем, что

$$|\nu(t)| = |\nu(B(0,t))| \leq 17, \; t \geq 0, \tag{1.8}$$

и для $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$

$$|\nu|(t) = |\nu|(B(0,t)) \leq 17 \ln(t + e), \; t \geq 0. \tag{1.9}$$

Если $t < \frac{9}{\sqrt{2}}$, то $B(0,t) \subset Q_2$, поэтому

$$|\nu(t)| \leq \nu_0(t) + \sum_{j=1}^{8} |\nu_{1j}(\mathbb{C})| \leq 9.$$

Для $t \geq \frac{9}{\sqrt{2}}$ через n обозначим наибольшее натуральное число, для которого $\frac{3^n}{\sqrt{2}} \leq t$, тогда $Q_n \subset B(0,t)$ и $\frac{3^{n+2}}{2} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{3^{n+1}}{\sqrt{2}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} t > t$, значит $Q_{n+2} \supset B(0,t)$. Таким образом, с учетом (1.6) получим

$$|\nu(t)| \leq |\nu(Q_n)| + \sum_{i=n}^{n+1} \sum_{j=1}^{8} |\nu_{ij}(\mathbb{C})| \leq 17.$$

Также можем оценить $\nu^{\pm}(t)$ и, сложив полученные оценки, доказать неравенство (1.9).

Возьмем произвольное $\lambda \in \mathbb{C}$ и разобьем плоскость на множества $E_1 = \mathbb{C} \setminus B(0; 2|\lambda|)$, $E_2 = B(0; 1)$ $E_3 = B(0; \frac{|\lambda|}{2}) \setminus B(0; 1)$, $E_4 = B(\lambda, (|\lambda| + 1)^{-\alpha})$ и $E' = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{4} E_k$. На множестве E_1 нужную оценку получим пользуясь (1.9) и неравенством: для некоторой постоянной C для всех $|z| \leq \frac{1}{2}$

$$|\ln |1 - z|| \leq C|z|. \tag{1.10}$$

$$\left| \int\limits_{E_1} \ln \left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d\nu(w) \right| = O(\ln |\lambda|), \; |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Оценка интеграла по E_2 очевидна.

$$\left|\int\limits_{E_2} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|\,d\nu(w)\right| = O(\ln|\lambda|),\ \ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Оценка первого интеграла в правой части неравенства

$$\left|\int\limits_{E_3} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|\,d\nu(w)\right| \le \left|\int\limits_{E_3} \ln\left|1-\frac{w}{\lambda}\right|\,d\nu(w)\right| + \left|\int\limits_{E_3} \ln\left|\frac{w}{\lambda}\right|\,d\nu(w)\right|$$

следует из (1.9) и (1.10). Второй интеграл интегрируем по частям

$$\left|\int\limits_{E_3} \ln\left|\frac{w}{\lambda}\right|\,d\nu(w)\right| = \left|\int\limits_1^{\frac{|\lambda|}{2}} \ln\frac{|\lambda|}{t}\,d\nu(t)\right| \le \ln 2\left|\nu\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)\right| + \left|\int\limits_1^{\frac{|\lambda|}{2}} \frac{\nu(t)\,dt}{t}\right|.$$

Нужную оценку получим, используя (1.8)):

$$\left|\int\limits_{E_3} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|\,d\nu(w)\right| = O(\ln|\lambda|),\ \ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Из свойства (1.1)) имеем

$$\left|\int\limits_{E_4} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|\,d\nu(w)\right| \le a,\ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть n — наименьшее натуральное число, для которого $B(0,2|\lambda|) \subset Q_n$, то есть $\frac{3^{n-1}}{2} < 2|\lambda| \le \frac{3^n}{2}$. Тогда $E' \subset B(0,2|\lambda|) \setminus B(0,\frac{|\lambda|}{2}) \subset Q_n \setminus Q_{n-3}$, поэтому

$$|\nu|(E') \le 24.$$

С другой стороны,

$$max_{w\in E'}\left|\ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right|\right| = O(\ln|\lambda|),\ \ |\lambda| \longrightarrow \infty.$$

Из последних двух оценок следует оценка интеграла по множеству E'. Таким образом, соотношение (1.7) доказано.

Положим $\widetilde{u}(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$, где $\pi(\lambda)$ — потенциал меры ν, определенный в (1.7)). Тогда $\widetilde{u}$ — субгармоническая функция с ассоциированной мерой $\widetilde{\mu}$. По построению условия (1.1), (1.2) выполнены. А также во внутренности каждого квадрата Q_{nj}

$$\Delta\widetilde{u}(\lambda) = \pi\widetilde{\mu}(\lambda) = \pi\frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\mu_{nj} = \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\Delta u(\lambda),$$

поэтому верна оценка

$$\Delta\widetilde{u}(\lambda) = O((|\lambda|+1)^{\beta}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty. \tag{1.11}$$

Из (1.7) следует соотношение

$$|\widetilde{u}(\lambda) - u(\lambda)| = O(\ln(|\lambda|+1)), \ |\lambda| \longrightarrow \infty$$

По построению, $\widetilde{\mu}(Q_{nj}) = N_{nj}$ — целые неотрицательные числа и к сужениям $\widetilde{\mu}_{nj}$ можно применить Теорему 1 (о разбиении мер) из работы [59]: существует совокупность пар (μ_{nj}^k, P_{nj}^k) прямоугольников P_{nj}^k и единичных мер μ_{nj}^k, таких что выполняются условия 1-5 леммы 1.2. Дополнительно, прямоугольники P_{nj}^k лежат в квадратах Q_{nj}. Остается перенумеровать их одним индексом. Свойство 7 выполняется по оценке (1.11), свойство 6 — из соответствующего свойства квадратов Q_{nj}.

Лемма 1.2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.1.

Центр тяжести единичных мер μ_n, построенных в лемме 1.2, обозначим через λ_n:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} w\,d\mu(w) = \lambda_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Через $\widetilde{\mu}_n$ обозначим сужение меры $\widetilde{\mu}$ на множество $Q_n \setminus Q_0$ и через π_n потенциал этой меры

$$\pi_n(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\widetilde{\mu}_n(\lambda).$$

Тогда мера $\widetilde{\mu}_n$ удовлетворяет условиям теоремы 3 в работе [59] и по этой теореме с учетом условия (1.1) получим существование полинома P, такого что вне множества кругов $B_k(\varepsilon) = B(\lambda_k, \varepsilon(|\lambda_k|+1)^{-\gamma})$, где λ_k — нули многочлена P, $\gamma \geq \alpha$, а $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, выполняется соотношение

$$|\pi(\lambda) - \ln|P(\lambda)|| \leq A \ln(|\lambda| + e).$$

При этом постоянная A не зависит от n. В силу независимости постоянной A от n обычным образом обосновывается предельный переход. В результате получим, что существует целая функция f с простыми нулями в точках λ_n, удовлетворяющая условию

$$|\widetilde{u}(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \leq A \ln(|\lambda| + 1), \ \lambda \notin \bigcup_n B_n(\varepsilon).$$

Необходимо показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ круги $B_n(\varepsilon)$ попарно не пересекаются. Оценим расстояние d_n от точки λ_n до границы выпуклой оболочки F_n носителя меры μ_n. Пусть w_n — одна из точек достижения этого расстояния:

$$|\lambda_n - w_n| = \inf\{|\lambda_n - w|, \ w \notin F_n\}.$$

Пусть $\lambda_n - w_n = e^{i\varphi_n}|\lambda_n - w_n|$ и $z = Tw = e^{-\varphi_n}(\lambda_n - w)$. При таком преобразовании образ F^* оболочки F_n расположится в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\ z \leq d_n\}$, и для образа меры $d\mu^*(z) = d\mu_n(\lambda - e^{i\varphi_n} z)$ будут выполняться условия

$$\int\limits_{\mathbb{C}} d\mu^*(z) = 1, \quad \int\limits_{\mathbb{C}} z\, d\mu^*(z) = 0, \quad d\mu^*(z) = \frac{1}{\pi}\chi_n(z)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n} z) dm(z),$$

где $\chi_n(z)$ — характеристическая функция F^*. Пусть

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(x+iy)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n}(x+iy))\, dy.$$

Тогда $\delta(x)$ — финитная функция с носителем на отрезке $[a; d_n]$ и по условиям 6-7 в лемме 1.2

$$0 \leq \delta(x) \leq C(|\lambda_n| + 1)^{\beta+1} := M_n.$$

Кроме того, из свойств μ^* следует, что

$$\int\limits_a^{d_n} \delta(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_a^{d_n} x\delta(x)\,dx = 0.$$

Лемма 1.3. *Пусть $\delta(x)$ — неотрицательная, непрерывная и финитная функция, удовлетворяющая условиям*

$$1)\ \operatorname{conv}\operatorname{supp}\delta = [a; d], \quad 2)\ \sup_x \delta(x) \le M < \infty,$$

$$3)\ \int\limits_a^{d} \delta(x)\,dx = 1, \quad 4)\ \int\limits_a^{d} x\delta(x)\,dx = 0.$$

Тогда

$$d \ge \frac{1}{6M}.$$

Доказательство леммы 1.3.

Определим число $c > 0$ из равенства

$$\int\limits_{-c}^{c} \delta(x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

Из условия 2) следует, что $c \ge \frac{1}{6M}$. Допустим, что $d < c$. Тогда, учитывая 3), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{-c} \delta(x)\,dx = 1 - \int\limits_{-c}^{d} \delta(x)\,dx \ge 1 - \int\limits_{-c}^{c} \delta(x)\,dx = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{0} |x|\delta(x)\,dx \ge \frac{2c}{3} + \int\limits_{-c}^{0} |x|\delta(x)\,dx \ge \frac{2c}{3}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_0^{d} |x|\delta(x)\,dx \le \int\limits_0^{c} |x|\delta(x)\,dx \le c\int\limits_{-c}^{c} \delta(x)\,dx = \frac{c}{3}.$$

По условию 4)

$$\frac{2c}{3} \leq \int\limits_{-\infty}^{0} |x|\delta(x)\,dx = \int\limits_{0}^{d} |x|\delta(x)\,dx \leq \frac{c}{3}.$$

Из полученного противоречия имеем

$$d \geq c \geq \frac{1}{6M}.$$

Лемма 1.3 доказана.

Из леммы 1.3 вытекает, что для $\gamma = 3(\rho + \alpha) + 1$ круг $B_n(\varepsilon) = B(\lambda_n, \varepsilon(|\lambda| + 1)^{-\gamma})$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ лежит в оболочке F_n и, тем самым, эти круги попарно не пересекаются. Обычными приемами с помощью формулы Коши

$$\frac{1}{f'(\lambda_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_n} \frac{dz}{f(z)},$$

можем получить необходимые оценки для производной в точках λ_n.

Теорема 1.1 доказана.

Далее теорему 1.1 докажем в одном частном, но важном для применений случае, с более конкретными выводами.

Теорема 1.2. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторого $M > 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(B(z,t)) \leq Mt,\ t \in (0;1), \tag{1.12}$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, такими что при некотором $\delta \in (0;1)$ круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n| + 1)^{-1})$ попарно не пересекаются и сама функция удовлетворяет соотношению

$$|\ln|f(\lambda)| - u(\lambda)| \leq A\ln(|\lambda| + 1) + C,\ \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta),$$

а производная оценке

$$|\ln|f'(\lambda)| - u(\lambda)| \leq A\ln(|\lambda| + 1) + C',\ \lambda \in N(f),$$

при этом постоянная $A > 0$ *не зависит от* M *и функции* u, *а постоянные* C, C', δ *зависят от* M, *но не зависят от функции* u.

Заметим, что если субгармоническая функция u для некоторой константы $K > 0$ удовлетворяет условию Липшица

$$|u(z) - u(w)| \le K|z - w|, \ z, w \in \mathbb{C},$$

то ее ассоциированная мера удовлетворяет условию типа (1.12):

$$\mu(z, t) \le Ket, \ z \in \mathbb{C}, \ t > 0.$$

Это следует из формулы Йенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\varphi})\, d\varphi = u(z) + \int_0^r \frac{\mu(z,t)}{t}\, dt, \ z \in \mathbb{C}, \ t > 0.$$

В самом деле, из условия Липшица следует оценка

$$\mu\left(z, \frac{r}{e}\right) \le \int_{\frac{r}{e}}^{r} \frac{\mu(z,t)}{t}\, dt \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(z + re^{i\varphi}) - u(z)|\, d\varphi \le Kr.$$

Доказательство теоремы 1.2.

Докажем несколько предварительных лемм.

Лемма 1.4. *Пусть* u *— субгармоническая в* $\mathbb{C}$ *функция,* $u(0) = 0$, *и ее ассоциированная мера* μ *удовлетворяет условию* (1.12). *Тогда существует субгармоническая бесконечно дифференцируемая в* $\mathbb{C}$ *функция* $v(\lambda)$, *удовлетворяющая условиям*

$$u(\lambda) \le v(\lambda) \le u(\lambda) + M, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\Delta v(\lambda) \le \pi\alpha M, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\alpha > 0$ *— некоторая константа.*

Доказательство леммы 1.4.

Пусть $\alpha(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\alpha(t) = 0$, $t \notin (0;1)$; $\alpha(t) > 0$, $t \in (0;1)$; и

$$\int_0^1 t\alpha(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}.$$

Если $\alpha(\lambda) = \alpha(|\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C}$, и dm — плоская мера Лебега, то

$$v(\lambda) := \int_{\mathbb{C}} \alpha(\lambda - w)u(w)\,dm(w) = \int_{\mathbb{C}} \alpha(w)u(\lambda - w)\,dm(w),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

— субгармоническая и бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{C}$ функция (см. [53, стр. 51]). По определению

$$v(\lambda) - u(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} (u(w) - u(\lambda))\alpha(\lambda - w)\,dm(w).$$

Переходя к полярным координатам и пользуясь формулой Йенсена получим

$$v(\lambda) - u(\lambda) = 2\pi \int_0^1 \alpha(t) \left(\int_0^t \frac{\mu(\lambda, s)}{s}\,ds \right) t\,dt.$$

Очевидно, что

$$v(\lambda) \geq u(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

и по условию (1.12) имеем

$$v(\lambda) - u(\lambda) \leq M \int_{\mathbb{C}} \alpha(\lambda)\,dm(\lambda) = M.$$

Первое утверждение леммы доказано. Оценим Δv. Рассматривая u как обобщенную функцию, получим

$$\Delta v(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} \Delta_\lambda \alpha(\lambda - w)u(w)\,dm(w) = \int_{\mathbb{C}} \Delta_w \alpha(\lambda - w)u(w)\,dm(w) =$$

$$= \pi \int_{\mathbb{C}} \alpha(\lambda - w)\,d\mu(w).$$

Если $\alpha = \max_t \alpha(t)$, то с учетом (1.12) имеем

$$\Delta v(\lambda) \le \pi\alpha\mu(\lambda, 1) \le \pi\alpha M.$$

Лемма 1.4 доказана.

Таким образом, теорему 1.2 можем доказывать, считая, что функция u удовлетворяет условию

$$\Delta u(\lambda) \le M, \ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.13}$$

Покажем, что теорему 1.2 достаточно доказать для $M = 1$. В самом деле, пусть доказана следующая теорема.

Теорема 1.2′. *Пусть $v \in C^\infty$, $v(0) = 0$, — субгармоническая функция на плоскости, причем*

$$\Delta v(\lambda) \le 1, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда существует целая функция g с простыми нулями w_n, такими что при некотором $\delta_0 \in (0;1)$ круги $B(w_n, \delta_0(|w_n|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются и функция удовлетворяет соотношению

$$|\ln|g(w)| - v(w)| \le A_0 \ln(|w|+1) + C_0 \ \lambda \notin \bigcup_n B(w_n, \delta_0(|w_n|+1)^{-1}),$$

а производная оценке

$$|\ln|g'(\lambda)| - v(\lambda)| \le A_0 \ln(|\lambda|+1) + C_0', \ \lambda \in N(g),$$

при этом постоянные $A_0, C_0, C_0' > 0$ не зависят функции v.

Пусть функция u удовлетворяет условию (1.13). Если $M > 1$, то рассмотрим функцию $v(w) = u(\frac{w}{M})$. Поскольку $\mu_v(z,t) = \mu(\frac{z}{M}, \frac{t}{M})$, то при $t < 1$

$$\mu_v(z,t) \le M \cdot \frac{t}{M} = t.$$

По теореме 1.2′ найдется функция g с соответствующими оценками. Возьмем функцию $f(\lambda) = g(M\lambda)$ с простыми нулями в точках $\lambda_n = \frac{1}{M} w_n$. При отображении $w \longrightarrow \frac{w}{M}$ попарно не пересекающиеся круги $B(w_n, \delta_0(|w_n|+1)^{-1})$ отображаются в непересекающиеся круги $B(\lambda_n, \frac{\delta_0}{M}(M|\lambda_n|+1)^{-1})$ и вне этих кругов выполняется оценка

$$|\ln|f(\lambda)| - u(\lambda)| \le A_0 \ln(|\lambda|+1) + A_0 \ln M + C_0. \tag{1.14}$$

Поскольку

$$\frac{\delta_0}{M^2}(|\lambda_n|+1)^{-1} \le r_n := \frac{\delta_0}{M}(M|\lambda_n|+1)^{-1} \le \frac{\delta_0}{M}(|\lambda_n|+1)^{-1},$$

то круги $B(\lambda_n, \frac{\delta_0}{M^2}(|\lambda_n|+1)^{-1})$ также попарно не пересекаются. Продолжим оценку 1.14 на внешность этих кругов. Пусть H — минимальная гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda_n, r_n)$, тогда по формуле Грина и по условию (1.13)

$$0 \le H(\lambda) - u(\lambda) = \int\limits_{B(\lambda_n, r_n)} G(\lambda, z)\, d\mu(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{B(\lambda_n, r_n)} G(\lambda, z) \Delta u(z)\, dm(z) \le$$

$$\le \frac{M}{\pi} \int\limits_{B(\lambda_n, r_n)} G(\lambda, z)\, dm(z),\ \ \lambda \in B(\lambda_n, r_n),$$

где $G(\lambda, z)$ — функция Грина задачи Дирихле для $B(\lambda_n, r_n)$. Учитывая, что для функции $A(\lambda) = |\lambda - \lambda_n|^2$ имеем $\Delta A(\lambda) \equiv 4$, и гармоническая мажоранта функции A тождественно равна r_n^2, получим оценку

$$0 \le H(\lambda) - u(\lambda) = \frac{M}{4} \max_{z \in B(\lambda_n, r_n)} (r_n^2 - |\lambda_n - z|^2) \le \frac{1}{4M},\ \ \lambda \in B(\lambda_n, r_n). \tag{1.15}$$

По принципу максимума и в силу (1.14) для $\lambda \in B(\lambda_n, r_n)$ имеем

$$\left| H(\lambda) - \left(\ln|f(\lambda)| - \ln \frac{|\lambda - \lambda_n|}{r_n} \right) \right| \le \max_{|z - \lambda_n| = r_n} |u(z) - \ln|f(z)|| \le$$

$$\le A_0 \ln(|\lambda_n| + r_n + 1) + A_0 \ln M + C_0 \le A_0 \ln(|\lambda_n|+1) + A_0 \ln(2M) + C_0. \tag{1.16}$$

Если $\frac{\delta_0}{M^2}(|\lambda_n|+1)^{-1} \le |\lambda - \lambda_n| \le r_n \le \frac{\delta_0}{M}(M|\lambda_n|+1)^{-1}$, то $\left|\ln\left|\frac{\lambda - \lambda_n}{r_n}\right|\right| \le \ln M$, поэтому

$$|H(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \le A_0 \ln(|\lambda|+1) + (A_0+1)\ln(2M) + C_0,$$

где $\lambda \in B(\lambda_n, r_n) \setminus B(\lambda_n, \frac{\delta_0}{M^2}(|\lambda_n|+1)^{-1})$. Отсюда вместе с (1.15) следует требуемая оценка для самой функции f

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \le A_0 \ln(|\lambda|+1) + (A_0+1)\ln(2M) + C_0 + \frac{1}{4M},$$

где $\lambda \notin B(\lambda_n, \frac{\delta_0}{M^2}(|\lambda_n|+1)^{-1})$. Переходя к пределу при $\lambda \to \lambda_n$ в (1.16) и применяя оценку (1.15), получим требуемую оценку для $f'(\lambda_n)$:

$$|u(\lambda_n) - \ln|f'(\lambda_n)|| \le A_0 \ln(|\lambda_n|+1) + C_0' + \frac{1}{4M} + \ln M,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства теоремы 1.2$'$ потребуется еще одна лемма.

Лемма 1.5. *Пусть u гладкая субгармоническая функция, Δu удовлетворяет условию (1.13) с $M = 1$. Через Q_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначим квадрат с центром в начале координат, с длиной стороны 3^n и сторонами, параллельными осям координат. Тогда*

$$Q_{n+1} \setminus Q_n = \bigcup_1^8 Q_{nj},\ \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где Q_{nj} — квадраты, полученные сдвигом квадрата Q_n на вектора $(\pm 3^n, 0)$, $(0, \pm 3^n)$, $(\pm 3^n, \pm 3^n)$. Существует субгармоническая функция $\widetilde{u}$ с ассоциированной мерой $\widetilde{\mu}$, такая что

1) *в квадратах Q_{nj} функция $\widetilde{u}$ гладкая и выполняется условие (1.13);*

2) *$\widetilde{\mu}(Q_{nj})$ — неотрицательное целое число;*

3) *имеет место оценка*

$$|u(\lambda) - \widetilde{u}(\lambda)| \le 45 \ln(|\lambda| + e) + 142,\ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство леммы 1.5.

Положим

$$\mu(Q_{nj}) := m_{nj} + q_{nj},\ \ j = 1, 2,\ \ldots\ , 8,\ \ n \in \mathbb{N},$$

где $q_{nj} = \{\mu(Q_{nj})\} \in [0; 1)$ — дробная часть $\mu(Q_{nj})$. Положим $q_n^+ = \sum_j q_{nj} \in [0; 8)$, $q_n^- = \sum_j (q_{nj} - 1) \in [-8; 0)$. Определим последовательность q_n следующим образом: положим $q_0 = \{\mu(Q_0)\}$, если q_j для $j \le k-1$ определены, то при $\sum_{j\le k-1} q_j \ge 0$, положим $q_k := q_k^-$, в противном случае $q_k := q_k^+$. Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n} q_k \in (-8;8),\ n \in \mathbb{N}.$$

Далее определим последовательность натуральных чисел N_0, N_{nj}, $j = 1, \ \dots \ ,8$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $N_0 = [\mu(Q_0)]$, если $q_n = q_n^-$, то $N_{n_j} = \mu(Q_{nj}) - (q_{nj} - 1)$, а если $q_n = q_n^+$, то $N_{nj} = \mu(Q_{nj}) - q_{nj}$. Таким образом, либо $N_{nj} = m_{nj} + 1$, либо $N_{nj} = m_{nj}$. Сужение меры μ на квадрат Q_{nj} обозначим через μ_{nj}, $\mu_0 = \mu\,|_{Q_0}$ и положим $\widetilde{\mu}_0 = \frac{N_0}{\mu(Q_0)}\mu_0$, $\nu_0 = \mu_0 - \widetilde{\mu}_0$,

$$\widetilde{\mu}_{nj} = \frac{N_{nj}}{\mu(Q_{nj})}\mu_{nj},\ j = 1,\ \dots\ ,8,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если $\mu(Q_{nj}) = 0$, то $\widetilde{\mu}_{nj} = 0$. Тогда $\widetilde{\mu}_{nj}(\mathbb{C}) = N_{nj}$ — целые неотрицательные числа и, если положим $\nu_{nj} = \mu_{nj} - \widetilde{\mu}_{nj}$, то

$$\nu_{nj}(\mathbb{C}) \in (-1;1),\ \left(\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj}\right)(\mathbb{C}) \in (-8;8). \tag{1.17}$$

Пусть $\nu = \nu_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj}$,

$$\nu^+ = \nu_0 + \sum_{q_n = q_n^+}\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj},\ \nu^- = -\sum_{q_n = q_n^-}\sum_{j=1}^{8} \nu_{nj},$$

тогда $\nu^\pm$ — неотрицательные меры и $\nu = \nu^+ - \nu^-$. При этом

$$\nu^\pm\left(\bigcup_{j=1}^{8} Q_{nj}\right) = q_n^\pm \in (-8;8).$$

Утверждение 1.1. *Верно соотношение*

$$\pi(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w) \le 45\ln(|\lambda| + e) + 142,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство утверждения 1.1.

Возьмем $\lambda \in Q_{n+1} \setminus Q_n$. Если $w \in Q_{m+1} \setminus Q_m$, то $\frac{3^m}{2} \le |w| \le \frac{1}{\sqrt{2}} 3^{m+1}$ и $|\ln(|\zeta|+1)| \le 2|\zeta|$, при $|\zeta| \le \frac{1}{2}$, поэтому

$$\left| \int\limits_{\mathbb{C}\setminus Q_{n+2}} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w) \right| \le \sum_{m=2}^{\infty} \left| \int\limits_{Q_{n+m+1}\setminus Q_{n+m}} \ln\left|1-\frac{\lambda}{w}\right| d\nu(w) \right| \le$$

$$\le \frac{32|\lambda|}{3^n} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{3^m} \le 8\sqrt{2}. \tag{1.18}$$

Аналогично,

$$\left| \int\limits_{Q_{n-1}} \ln\left|1-\frac{w}{\lambda}\right| d\nu(w) \right| \le \frac{2}{|\lambda|} \left(8 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{3^{n-m}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \le 10\sqrt{2}. \tag{1.19}$$

Докажем, что

$$|\nu(t)| = |\nu(B(0,t))| \le 17,\ t \ge 0. \tag{1.20}$$

В самом деле, если $t < \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $B(0,t) \subset Q_2$, поэтому

$$|\nu(t)| \le |\nu(Q_1)| + \sum_{j=1}^{8} |\nu_{1j}(\mathbb{C})| \le 9.$$

Для $t \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$ через n обозначим наибольшее натуральное число, для которого $\frac{3^n}{\sqrt{2}} \le t$, тогда $Q_n \subset B(0,t)$ и $\frac{3^{n+2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{3^{n+1}}{\sqrt{2}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}} t > t$, значит, $Q_{n+2} \supset B(0,t)$. Таким образом, с учетом (1.17) получим

$$|\nu(t)| \le |\nu(Q_n)| + \sum_{i=n}^{n+1} |\sum_{j=1}^{8} \nu_{ij}(\mathbb{C})| \le 17.$$

Пусть $\widetilde{\nu}_n$ — сужение меры ν на квадрат Q_n. Тогда

$$\left| \int\limits_{Q_{n-1}} \ln\frac{|\lambda|}{|w|} d\nu(w) \right| = \left| \int\limits_0^{3^n} \ln\frac{|\lambda|}{t} d\widetilde{\nu}_{n-1}(t) \right| \le \ln\frac{|\lambda|}{3^n} |\nu(Q_{n-1})| + \left| \int\limits_0^{3^n} \frac{\widetilde{\nu}_{n-1}(t)}{t} dt \right|.$$

По условию (1.13) с $M = 1$, учитывая (1.20), имеем

$$\left| \int\limits_0^{3^n} \frac{\widetilde{\nu}_{n-1}(t)}{t} dt \right| \le \int\limits_0^1 \frac{\mu(t)}{t} dt + \int\limits_1^{3^n} \frac{17\,dt}{t} \le 1 + 17\ln(|\lambda|+e).$$

Тем самым,

$$\left|\int\limits_{Q_{n-1}} \ln\frac{|\lambda|}{|w|}\,d\nu(w)\right| \leq 18 + 17\ln(|\lambda| + e),$$

и вместе с (1.19) получим

$$\left|\int\limits_{Q_{n-1}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right|\,d\nu(w)\right| \leq 17\ln(|\lambda| + e) + 33. \tag{1.21}$$

Если $w \in Q_{n+2} \setminus Q_{n-1}$, то $|w| \in [\frac{3^{n-1}}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}3^{n+2}]$, и $|\lambda| \in [\frac{3^n}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}3^{n+1}]$, поэтому для $w \notin B(\lambda, 1)$ верна оценка

$$\frac{\sqrt{2}}{9}\cdot 3^{-n} \leq \left|\frac{\lambda - w}{w}\right| \leq 51,$$

значит,

$$\left|\ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right|\right| \leq \ln(|\lambda| + e) + 4.$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_{(Q_{n+2}\setminus Q_{n-1})\setminus B(\lambda,1)} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right|\,d\nu(w)\right| \leq 24\ln(|\lambda| + e) + 96. \tag{1.22}$$

Остается оценить интеграл по кругу $B(\lambda, 1)$. Мера ν по построению является частью меры μ, поэтому для нее выполняется условие (1.12) с $M = 1$. Учитывая это обстоятельство и интегрируя по частям, получим

$$\left|\int\limits_{B(\lambda,1)} \ln|\lambda - w|\,d\nu(w)\right| \leq 1,$$

$$\left|\int\limits_{B(\lambda,1)} \ln|w|\,d\nu(w)\right| \leq \pi\ln(|\lambda| + e).$$

Тем самым,

$$\int\limits_{B(\lambda,1)} \left|\ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right|\right|\,d\nu(w) \leq \pi\ln(|\lambda| + e) + 1.$$

Отсюда и из (1.18), (1.21) и (1.17) получим оценку из утверждения 1.1.

Утверждение 1.1 доказано.

По утверждению 1.1 для функции $\widetilde{u}(\lambda) = u(\lambda) - \pi(\lambda)$ выполняются утверждения леммы 1.5.

Лемма 1.5 доказана.

Утверждение 1.2. *Существуют меры* μ_n, $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$, *и прямоугольники* P_n, $n \in \mathbb{N}$, *такие что*

1) $\sum_n \mu_n = \widetilde{\mu}$;

2) *внутренности выпуклых оболочек носителей мер* μ_n *попарно не пересекаются;*

3) *носитель меры* μ_n *лежит в* P_n, $n \in \mathbb{N}$;

4) *стороны прямоугольников параллельны осям координат и отношение длин сторон прямоугольника* P_n *лежит в интервале* $[3^{-1}; 3]$;

5) *каждая точка плоскости попадает не более чем в 4 прямоугольника* P_n;

6) *если* F_n *— выпуклая оболочка носителя меры* μ_n, *то*

$$diam\ F_n \le 2\sqrt{2} \min_{\lambda \in F_n} |\lambda| + \sqrt{2}.$$

Доказательство утверждения 1.2.

К сужениям меры $\widetilde{\mu}$ на квадраты Q_{nj} применим теорему 1 из работы [59]. После перенумерации получим множество единичных мер, удовлетворяющих свойствам 1-5 утверждения 1.2. Свойство 6 следует из соответствующего свойства квадратов Q_{nj}.

Утверждение 1.2 доказано.

Продолжим доказательство теоремы 1.2′. Центр тяжести единичных мер μ_n, построенных в утверждении 1.2, обозначим через λ_n:

$$\int\limits_{\mathbb{C}} w\, d\mu_n(w) = \lambda_n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Через $\widetilde{\mu}_n$ обозначим сужение меры $\widetilde{\mu}$ на квадрат Q_n и через π_n потенциал этой меры

$$\pi_n(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d\widetilde{\mu}_n(\lambda).$$

Тогда мера $\widetilde{\mu}_n$ удовлетворяет условиям теоремы 3 в работе [59]. По терминологии этой работы в силу условия (1.13) каждая точка $\lambda \in \mathbb{C}$ для любого $s = s(\lambda) \in (0;1]$ является (π, s)–нормальной по мере $\widetilde{\mu}$. Значит, по этой теореме получим, что для полинома

$$P_n(\lambda) = \prod_{\lambda_k \in Q_n} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)$$

вне множества кругов $B_k(s) = B(\lambda_k, s(\lambda_k))$, $\lambda_k \in Q_n$, выполняется соотношение

$$|\pi_n(\lambda) - \ln|P_n(\lambda)|| \le A\ln(|\lambda| + 1) + B\ln(s(\lambda) + 1) + C,$$

где постоянные A, B, C не зависят от μ и n.

В силу независимости постоянной A от n обычным образом обосновывается предельный переход. В результате получим, что существует целая функция f с простыми нулями в точках λ_n, удовлетворяющая условию

$$|\widetilde{u}(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \le A\ln(|\lambda| + 1) + B\ln(s(\lambda) + 1) + C, \ \ \lambda \notin \bigcup_n B_n(s). \qquad (1.23)$$

Покажем, что при достаточно малом $\delta > 0$ круги $B_n = B_n(\lambda_n, \delta(|\lambda_n| + 1)^{-1})$ попарно не пересекаются. Оценим расстояние d_n от точки λ_n до границы выпуклой оболочки F_n носителя меры μ_n. Пусть w_n — одна из точек достижения этого расстояния:

$$|\lambda_n - w_n| = \inf\{|\lambda_n - w|, \ w \notin F_n\}.$$

Пусть $w_n - \lambda_n = e^{i\varphi_n}|\lambda_n - w_n|$ и $z = Tw = e^{-\varphi_n}(\lambda_n - w)$. При таком преобразовании образ F^* оболочки F_n расположится в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\, z \le d_n\}$ и для образа меры $d\mu^*(z) = d\mu_n(\lambda_n - e^{i\varphi_n}z)$ будут выполняться условия

$$\int\limits_{\mathbb{C}} d\mu^*(z) = 1, \quad \int\limits_{\mathbb{C}} z\, d\mu^*(z) = 0, \quad d\mu^*(z) = \frac{1}{\pi}\chi_n(z)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n}z)dm(z),$$

где $\chi_n(z)$ — характеристическая функция множества F^*. Пусть

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(x+iy)\Delta\widetilde{u}(\lambda_n - e^{i\varphi_n}(x+iy))\,dy.$$

Тогда $\delta(x)$ — финитная функция с носителем на отрезке $[a; d_n]$ и по условию 6 утверждения 1.2

$$0 \le \delta(x) \le 3\pi(|\lambda_n|+1) := M_n.$$

Кроме того, из свойств μ^* следует, что

$$\int\limits_a^{d_n} \delta(x)\,dx = 1, \quad \int\limits_a^{d_n} x\delta(x)\,dx = 0.$$

Из леммы 1.3 следует, что

$$d_n \ge \frac{1}{18\pi}(1+|\lambda_n|)^{-1},\ n \in \mathbb{N}.$$

По свойству 2 в утверждении 1.2 круги $B_n = B(\lambda_n, \delta(1+|\lambda_n|)^{-1})$, где $\delta < \frac{1}{18\pi}$, попарно не пересекаются. В частности, любая точка λ вне этих кругов является $(\pi, (1+|\lambda_n|)^{-1})$ нормальной по мерам $\widetilde{\mu}$ и $\nu = \sum_k \delta(\lambda_k)$, где $\delta(w)$ — единичная точечная мера в точке w. В силу соотношения (1.23) вне кругов B_n выполняется оценка

$$|\widetilde{u}(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \le A\ln(|\lambda|+1) + C,\ \lambda \notin \bigcup_n B_n.$$

Обычными приемами с помощью формулы Коши

$$\frac{1}{f'(\lambda_n)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B_n} \frac{dz}{f(z)},$$

можем получить необходимые оценки для производной в точках λ_n.

Теорема 1.2 доказана.

В применениях подобных теорем нередко требуется "раздельная" аппроксимация нескольких субгармонических функций.

Теорема 1.3. *Пусть u_j — субгармонические функции на плоскости, μ_j, $j = 1,2$, — меры, ассоциированные с ними по Риссу, для некоторого $M > 0$ удовлетворяющие условию*

$$\mu_j(B(z,t)) \le Mt, \ t \in (0;1), \tag{1.24}$$

а мера μ_2, кроме того, удовлетворяет условию

$$\int_1^{\infty} \frac{\mu_2(r)\,dr}{r^2} < \infty. \tag{1.25}$$

Тогда существуют целые функции f_j, $j = 1,2$, такие что все нули произведения $f = f_1 f_2$ простые, при некотором $\delta > 0$ круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-1})$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются, и для некоторых постоянных $B, C, C' > 0$ выполняются соотношения

$$|\ln|f_j(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le B\ln(|\lambda|+1) + C, \ \lambda \notin \bigcup_{z \in N(f_j)} B_\delta(z),$$

$$|\ln|f_j'(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le B\ln(|\lambda|+1) + C', \ \lambda \in N(f_j),$$

при этом постоянная $B > 0$ не зависит от M и функций u_j, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функций u_j.

Доказательство теоремы 1.3.

По теореме 1.2 для каждой из функций u_j существует целая функция f_j, удовлетворяющая оценкам

$$|\ln|f_j(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le A\ln(|\lambda|+1) + C, \ \lambda \notin \bigcup_{\lambda \in N(f_j)} B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-1}), \tag{1.26}$$

$$|\ln|f_j'(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le A\ln(|\lambda|+1) + C', \ \lambda \in N(f_j).$$

При этом круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-1})$, $\lambda \in N(f_j)$, для каждого $j = 1,2$ по отдельности попарно не пересекаются. В виде леммы сформулируем свойства меры μ_2 и ассоциированной меры ν_2 функции $\ln|f_2|$.

Лемма 1.6. 1. *Имеют место соотношения*

$$\mu_2(t) = o(t), \quad \nu_2(t) = o(t),\ t \longrightarrow \infty. \tag{1.27}$$

2. *Если* $\lambda \notin \bigcup_{z\in N(f_2)} B_\delta(z)$, *то*

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\nu_2(\lambda,\tau)\,d\tau}{\tau} \le 2A\ln(1+|\lambda|) + C''.$$

Доказательство леммы 1.6.

Первое утверждение леммы — непосредственное следствие условия (1.25). Для доказательства второго воспользуемся формулой Йенсена для функции $v(z) = u_2(z) - \ln|f_2(z)|$ с ассоциированным зарядом $\nu = \mu_2 - \nu_2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(\lambda + re^{i\varphi})\,d\varphi = v(\lambda) + \int\limits_0^{r} \frac{\nu(\lambda,\tau)\,d\tau}{\tau}.$$

По соотношению (1.27) найдется $R > 2$, такое что $\mu_2(t) \le \frac{t}{4}$ для всех $t \ge R$. Пусть $|\lambda| \ge R$. Положим $r(w) = \delta(1+|w|)^{-1}$. С окружностями $C(\lambda, r)$, $r \in [\frac{1}{2}; 1)$, могут пересекаться только исключительные круги $B(w_k, r(w_k))$, центры которых лежат в $B(\lambda, 1+\delta)$, и для них $r(w_k) \le 2r(\lambda)$, поэтому

$$\sum_{w_k \in B(\lambda,1+\delta)} r(w_k) \le 2r(\lambda)\mu_2(1+\delta+|\lambda|) < \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что найдется число $r \in [\frac{1}{2}; 1)$, такое что окружность $C(\lambda, r)$ не пересекается с исключительным множеством. По построению на этой окружности выполняется неравенство

$$|v(z)| = |u_2(z) - \ln|f_2(z)|| \le A\ln(1+|z|) + C$$

и такое же неравенство выполняется в точке λ. По формуле Йенсена получим

$$\left|\int\limits_0^{r} \frac{\mu_2(t) - \nu_2(t)}{t}\,dt\right| \le 2A\ln(1+|z|) + C_1.$$

Отсюда и из условия (1.24) вытекает второе утверждение леммы 1.6.

Лемма 1.6 доказана.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение об исключительных множествах.

Утверждение 1.3. *Для любого $\delta' \in (0;\delta)$ оценка (1.26) для u_2 выполняется вне кругов $B(\lambda, \delta'(|\lambda|+1)^{-1})$, $\lambda \in N(f_2)$, возможно, с другой постоянной C.*

Доказательство утверждения 1.3.

В самом деле, возьмем произвольное $\lambda \notin E' := \bigcup_{z\in N(f_2)} B(z, \delta'(|z|+1)^{-1})$. Если при этом $\lambda \notin E := \bigcup_{z\in N(f_2)} B(z, \delta(|z|+1)^{-1})$, то оценки выполняются по утверждению теоремы. Если $\lambda \in E$, то найдется номер n, такой что $r' := \delta'(1+|\lambda_n|)^{-1} \leq |\lambda - \lambda_n| < r := \delta(1+|\lambda_n|)^{-1}$. Пусть $G(\lambda, w)$ — функция Грина круга $B(\lambda_n, r)$, тогда имеют место представления

$$u_2(\lambda) = h(\lambda) - \int\limits_{B(\lambda_n, r)} G(\lambda, w)\, d\mu_2(w),\ \ln|f_2(\lambda)| = h_0(\lambda) - G(\lambda, \lambda_n),$$

где функции h, h_0 — гармонические мажоранты u_2 и $\ln|f_2|$ в круге $B(\lambda_n, r)$. Разность $|h(\lambda) - h_0(\lambda)|$ оценивается по принципу максимума для гармонических функций: для некоторой постоянной C_1

$$|h_0(\lambda) - h(\lambda)| \leq A\ln(1+|\lambda|) + C_1.$$

Потенциал меры μ_2 оценим на основании условия (1.24). Пусть h_1 — гармоническая мажоранта функции u_2 в круге $B(\lambda, 2r)$. Тогда, если выбрать изначально $\delta < \frac{1}{2}$, то

$$\int\limits_{B(\lambda_n, r)} G(\lambda, w)\, d\mu_2(w) = h(\lambda) - u_2(\lambda) \leq h_1(\lambda) - u_2(\lambda) = \int\limits_0^{2r} \frac{\mu_2(\lambda, t)\, dt}{t} \leq 2Mr \leq M.$$

И, наконец,

$$G(\lambda, \lambda_n) = \ln\frac{r}{|\lambda_n - \lambda|} \leq \ln\frac{r}{r'} = \ln\left(\frac{\delta}{\delta'}\right), \lambda \notin B(\lambda_n, r').$$

Таким образом, для $\lambda \notin B(\lambda_n, r')$

$$|u_2(\lambda) - \ln|f_2(\lambda)|| \le A\ln(1+|\lambda|) + C_1 + M + \ln\left(\frac{\delta}{\delta'}\right).$$

Утверждение 1.3 доказано.

Пусть $z \in N(f_1)$. Тогда в круге $B_{\frac{\delta}{2}}(z)$ других нулей функции f_1 нет и может быть только один нуль функции f_2. Если $w \in N(f_2)\bigcap B_{\frac{\delta}{2}}(z)$, то переместим эту точку в ближайшую к ней точку w' на границе круга $B_{\frac{\delta}{4}}(z)$. Пусть $N(f_2) = \{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Через $\widetilde{w}_k$ обозначим точку w_k, если w_k не попадает в объединение кругов $B_{\frac{\delta}{2}}(\lambda)$, $\lambda \in N(f_1)$, и точку w'_k для точек w_k, попадающих в какой-то из этих кругов, и через $\widetilde{N}$ обозначим множество точек $\widetilde{w}_k$. Очевидно, круги $B_{\frac{\delta}{8}}(\lambda)$, $\lambda \in N(f_1)\bigcup\widetilde{N}$, попарно не пересекаются.

Лемма 1.7. *Пусть*

$$\pi_2(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|1 - \frac{\lambda}{w_k}\right|,\ \widetilde{\pi}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left|1 - \frac{\lambda}{\widetilde{w}_k}\right|,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

(*Сходимость этих рядов следует из условия* (1.25)). *Тогда вне множества попарно непересекающихся кругов* $E := \bigcup_{w\in N(f_2)\bigcup\widetilde{N}} B_{\frac{\delta}{8}}(w)$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и некоторой постоянной* C *выполняется оценка*

$$|\pi_2(\lambda) - \widetilde{\pi}(\lambda)| \le \varepsilon\ln(1+|\lambda|) + C.$$

Доказательство леммы 1.7.

Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{\lambda\notin E}\sum_{k\le n}\left|\ln\left|1 - \frac{\lambda}{w_k}\right| - \ln\left|1 - \frac{\lambda}{\widetilde{w}_k}\right|\right| \le C(n),$$

то не уменьшая общности можем рассматривать только достаточно большие по модулю w_k, например, считать, что $|w_k| \ge 25$. Поскольку при $|z - w| \le 1$ и $|z| \ge 25$

$$\frac{23}{24} \le \frac{1+|z|}{1+|w|} \le \frac{25}{24}, \tag{1.28}$$

то можем считать, что $|w_k - \widetilde{w}_k| \le \frac{\delta}{3}(1+|w_k|)^{-1}$ и, тем самым,

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{w_k}\right| \le \frac{\delta}{2|w_k|(1+|w_k|)} \le \frac{1}{2}.$$

Тогда, учитывая простое неравенство $|\ln|1-\zeta|| \le 2|\zeta|$ при $|\zeta| \le \frac{1}{2}$, имеем

$$\left|\ln\left|1 - \frac{w_k - \widetilde{w}_k}{w_k}\right|\right| \le \frac{2|w_k - \widetilde{w}_k|}{|w_k|} \le \frac{\delta}{|w_k|(1+|w_k|)}.$$

По соотношению (1.27)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\ln\left|\frac{\widetilde{w}_k}{w_k}\right|\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\ln\left|1 - \frac{\widetilde{w}_k - w_k}{w_k}\right|\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{|w_k|(1+|w_k|)} =$$

$$= \int_1^{\infty}\frac{\delta\, d\nu_2(w)}{|w|(1+|w|)} \le \int_1^{\infty}\frac{\delta\, d\nu_2(t)}{t^2} = 2\delta\int_1^{\infty}\frac{\nu_2(t)\, dt}{t^3} := C_1. \tag{1.29}$$

Зафиксируем точку λ и через $I_1(\lambda)$ обозначим множество индексов k, для которых $|w_k| \ge 2|\lambda|$, через $I_2(\lambda)$ — тех, для которых $|w_k| \le \frac{|\lambda|}{2}$, и пусть $I_3(\lambda)$ — все остальные k, то есть k, для которых $\frac{|\lambda|}{2} < |w_k| < 2|\lambda|$. Через $J_1(\lambda)$ обозначим индексы $k \in I_3(\lambda)$, такие что $|\lambda - w_k| \ge \frac{1}{2}$, и пусть для некоторого $p > 1$ $J_2(\lambda)$ — множество индексов k, для которых $\frac{1}{2} > |\lambda - w_k| \ge p\delta(1+|\lambda|)^{-1}$ и $J_3(\lambda)$ — все остальные индексы $k \in I_3(\lambda)$.

Пусть $k \in I_1(\lambda)$, тогда $|\lambda| \le |w_k|/2$ и $|\lambda - w_k| \ge |w_k|/2$, поэтому

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right| \le \frac{\delta}{|w_k|(1+|w_k|)} \le \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\left|\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| = \left|\ln\left|1 - \frac{\widetilde{w}_k - w_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \le \frac{2\delta}{|w_k|(1+|w_k|)},$$

и

$$\left|\sum_{k\in I_1}\ln\left|\frac{\lambda - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right|\right| \le \int_{2|\lambda|}^{\infty}\frac{2\delta\, d\nu_2(w)}{|w|(1+|w|)} \le \int_{2|\lambda|}^{\infty}\frac{2\delta\, d\nu_2(t)}{t(1+t)} \le C_2. \tag{1.30}$$

Пусть $k \in I_2(\lambda)$, тогда $|\lambda - w_k| \ge |\lambda|/2$, поэтому для $|\lambda| \ge 1$

$$\left|\frac{w_k - \widetilde{w}_k}{\lambda - w_k}\right| \le \frac{\delta}{|\lambda|(1+|w_k|)} \le \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\left|\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right| = \left|\ln\left|1-\frac{\widetilde{w}_k-w_k}{\lambda-w_k}\right|\right| \le \frac{2\delta}{|\lambda|(1+|w_k|)},$$

и

$$\left|\sum_{k\in I_2}\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right| \le \int\limits_1^{|\lambda|/2}\frac{2\delta\,d\nu_2(w)}{|\lambda|(1+|w|)} \le \int\limits_1^{|\lambda|/2}\frac{2\delta\,d\nu_2(t)}{|\lambda|(1+t)} \le C_3. \tag{1.31}$$

Пусть $k\in J_1(\lambda)$. Тогда

$$\left|\frac{w_k-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right| \le \frac{2\delta}{3(1+|w_k|)} \le \frac{1}{2},$$

и по соотношению (1.27)

$$\left|\sum_{k\in J_1}\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right| \le \int\limits_{|\lambda|/2}^{2|\lambda|}\frac{4\delta\,d\nu_2(t)}{3(1+t)} \le \int\limits_{|\lambda|/2}^{2|\lambda|}\frac{8\delta\,d\nu_2(t)}{3(|\lambda|+2)} \le C_4. \tag{1.32}$$

Нам остается оценить разность потенциалов по множеству таких индексов k, что $|\lambda-w_k|\le\frac{1}{2}$. Для $k\in J_2(\lambda)$ за счет выбора p по прежнему имеем

$$\left|\frac{w_k-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right| \le \frac{1}{2}.$$

Поэтому для $r=p\delta(1+|\lambda|)^{-1}$ в силу (1.28)

$$\left|\sum_{k\in J_2}\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right| \le \frac{2\delta}{3}\sum_{k\in J_2}\left|\frac{1}{(\lambda-w_k)(1+|w_k|)}\right| \le \frac{\delta}{1+|\lambda|}\int\limits_r^{\frac{1}{2}}\frac{d\nu_2(\lambda,t)}{t}.$$

Значит,

$$\left|\sum_{k\in J_2}\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right| \le \frac{2\delta\nu_2(\lambda,\frac{1}{2})}{1+|\lambda|} + \frac{\delta}{1+|\lambda|}\int\limits_r^{\frac{1}{2}}\frac{\nu_2(\lambda,t)\,dt}{t^2}. \tag{1.33}$$

По утверждению второго пункта леммы 1.6

$$\nu_2(\lambda,t)\le 2A\ln(1+|\lambda|)+C,$$

поэтому

$$\frac{\delta\nu_2(\lambda,\frac{1}{2})}{1+|\lambda|}\le C_5$$

и

$$\frac{\delta}{1+|\lambda|}\int\limits_{r}^{\frac{1}{2}}\frac{\nu_2(\lambda,t)\,dt}{t^2}\leq\frac{\delta}{(1+|\lambda|)r}\int\limits_{r}^{\frac{1}{2}}\frac{\nu_2(\lambda,t)\,dt}{t}\leq$$

$$\leq\frac{2A}{p}\ln(1+|\lambda|)+\frac{C''}{p}=\frac{2A}{p}\ln(1+|\lambda|)+C_6.$$

Из последних двух оценок и из (1.33) имеем

$$\left|\sum_{k\in J_2}\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right|\leq\frac{2A}{p}\ln(1+|\lambda|)+C_7. \tag{1.34}$$

Количество индексов в $J_3(\lambda)$ конечно, ограничено некоторой абсолютной постоянной N, и для $k\in J_3(\lambda)$

$$\left|\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right|\leq\mathrm{Const}\ ,\ \lambda\notin E,$$

поэтому

$$\left|\sum_{k\in J_3}\ln\left|\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right|\leq C_8. \tag{1.35}$$

Поскольку

$$|\pi_2(\lambda)-\widetilde{\pi}(\lambda)|\leq\sum_k\left|\ln\left|\frac{w_k}{\widetilde{w}_k}\right|\right|+\sum_k\left|\ln\left|1-\frac{\lambda-\widetilde{w}_k}{\lambda-w_k}\right|\right|,$$

то из оценок (1.29)–(1.32), (1.34)–(1.35) следует утверждение леммы 1.7.

Лемма 1.7 доказана.

Завершим доказательство теоремы 1.3.

По условию (1.25) имеет место представление

$$f_2(\lambda)=e^{g(\lambda)}\prod_k\left(1-\frac{\lambda}{w_k}\right),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

где g — целая функция. Положим

$$\widetilde{f}(\lambda)=e^{g(\lambda)}\prod_k\left(1-\frac{\lambda}{\widetilde{w}_k}\right),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

тогда по лемме 1.7 для любого $\varepsilon>0$ и $\lambda\notin E=\bigcup_{w\in N(f_2)\bigcup\widetilde{N}}B_{\frac{\delta}{8}}(w)$

$$|\ln|f_2(\lambda)|-\ln|\widetilde{f}(\lambda)||=|\pi_2(\lambda)-\widetilde{\pi}(\lambda)|\leq\varepsilon\ln(1+|\lambda|)+C.$$

По утверждению 1.3 вне множества E имеем оценку с некоторой постоянной C и произвольным $\varepsilon > 0$

$$|u_2(\lambda) - \ln|\widetilde{f}(\lambda)|| \le |u_2(\lambda) - \ln|f_2(\lambda)|| + |\pi_2(\lambda) - \widetilde{\pi}(\lambda)| \le$$

$$\le (A+\varepsilon)\ln(1+|\lambda|) + C,\ \lambda \notin E = \bigcup_{w\in N(f_2)\bigcup \widetilde{N}} B_{\frac{\delta}{8}}(w). \tag{1.36}$$

Продолжим эту оценку на объединение множеств $\bigcup_k (B_{\frac{\delta}{8}}(w_k) \setminus B_{\frac{\delta}{8}}(\widetilde{w}_k))$. Объединение $B_{\frac{\delta}{8}}(w_k) \bigcup B_{\frac{\delta}{8}}(\widetilde{w}_k)$ лежит в круге $B_{\frac{11\delta}{24}}(\widetilde{w}_k) \subset B_{\frac{14\delta}{24}}(w_k) \subset B_\delta(w_k)$. Таким образом, оценка (1.36) выполняется вне попарно непересекающихся кругов $B_{\frac{11\delta}{24}}(\widetilde{w}_k)$. По утверждению 1.3 она выполняется и вне кругов $B_{\frac{\delta}{8}}(\widetilde{w}_k)$.

Теорема 1.3 доказана.

Для субгармонических функций медленного роста аппроксимирующие целые функции можно конструировать с более свободным расположением нулей.

Теорема 1.4. *Пусть $u(\lambda)$ — субгармоническая на плоскости функция и ее ассоциированная мера удовлетворяет условию (1.1) и*

$$\sup_{t>0}(\mu(2t) - \mu(t)) \le 1. \tag{1.37}$$

Определим последовательность R_n из соотношений

$$\mu(R_0) = 1,\ \mu(R_n) - \mu(R_{n-1}) = 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Возьмем произвольные $r_n \in (R_{n-1}; R_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $r_0 \in (0; R_0)$. Тогда целая функция

$$f(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{r_n e^{i\varphi_n}}\right),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\varphi_n \in [-\pi; \pi)$, $\varphi_{n-1}\cdot\varphi_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет оценкам в теореме 1.1. (Для непрерывных радиальных субгармонических функций и условие (1.1) вытекает из условия (1.37)).

Доказательство теоремы 1.4.

Можно считать, что функция u имеет представление

$$u(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d\mu(w), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

В силу условия (1.37) имеем $R_n \geq 2R_{n-1}, \ n \in \mathbb{N}$. Пусть $|\lambda| \in (R_n; R_{n+1}]$. Поскольку $|\ln|1 - w|| \leq 2|w|$ при $|w| \leq \frac{1}{2}$, то

$$\left| \int\limits_{|w| \geq R_{n+2}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d\mu(w) \right| \leq 2|\lambda| \int\limits_{R_{n+2}}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{t} \leq 2|\lambda| \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{R_k} \leq \frac{2|\lambda|}{R_{n+2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq 2. \tag{1.38}$$

Аналогичным образом получим оценку

$$\left| \int\limits_{|w| \leq R_{n-1}} \ln\left|1 - \frac{w}{\lambda}\right| \, d\mu(w) \right| \leq 2. \tag{1.39}$$

Пусть $\lambda_n = r_n e^{i\varphi_n}$ и $\delta(w)$ — единичная точечная мера в точке w. Положим $\widetilde{\mu} = \sum_j \delta(\lambda_j)$. Тогда в силу (1.37)

$$\widetilde{\mu}(2t) - \widetilde{\mu}(t) \leq 2, \ t > 0,$$

и так же, как в (1.38), (1.39), получим оценки

$$\left| \int\limits_{|w| \geq R_{n+2}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d\widetilde{\mu}(w) \right| \leq 2. \tag{1.40}$$

$$\left| \int\limits_{|w| \leq R_{n-1}} \ln\left|1 - \frac{w}{\lambda}\right| \, d\widetilde{\mu}(w) \right| \leq 2. \tag{1.41}$$

По построению имеют место соотношения

$$|\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)| \leq 1, \ t > 0, \ \mu(R_k) - \widetilde{\mu}(R_k) = 0, \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Интегрированием по частям получим

$$\left| \int\limits_{R_0}^{R_{n-1}} \ln\frac{|\lambda|}{t} \, d(\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)) \right| = \left| \int\limits_{R_0}^{R_{n-1}} \frac{\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)}{t} \, dt \right| \leq \ln\frac{|\lambda|}{R_0}. \tag{1.42}$$

Очевидно, в силу условия (1.1) выполняется соотношение

$$\left| \int\limits_{|w| \le R_0} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)) \right| \le \mathrm{Const} \cdot \ln(|\lambda| + e). \tag{1.43}$$

Через S обозначим кольцо $\{w : \frac{|\lambda|}{2} \le |w| \le 2|\lambda|\}$ и через S_1 — кольцо $\{w : R_{n-1} \le |w| \le R_{n+2}\}$. На множестве $S_1 \setminus S$ имеет место простая оценка

$$\left| \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \right| \le \mathrm{Const} \cdot \ln(|\lambda| + e), \tag{1.44}$$

и по построению μ-мера этого множества не больше 3. Поэтому

$$\left| \int\limits_{S_1 \setminus S} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)) \right| \le \mathrm{Const} \cdot \ln(|\lambda| + e). \tag{1.45}$$

Возьмем произвольные положительные δ, β и пусть $B_n(\delta, \beta) = B(\lambda_n, \delta(1 + |\lambda_n|)^{-\beta})$, $E(\delta, \beta) = \bigcup_n B_n(\delta, \beta)$. Тогда для $\lambda \notin E(\delta, \beta)$ и $w \in S$ выполняется оценка (1.44), поэтому

$$\left| \int\limits_{S} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)) \right| \le \mathrm{Const} \cdot \ln(e + |\lambda|), \lambda \notin E(\delta, \beta). \tag{1.46}$$

Из оценок (1.38)-(1.43), (1.45)-(1.46) следует, что целая функция

$$f(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right), \ \lambda \in \mathbb{C},$$

вне множества $E(\delta, \beta)$ удовлетворяет соотношению

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \le \mathrm{Const} \cdot \ln(e + |\lambda|), \ \lambda \notin E(\delta, \beta).$$

Выбирая $\beta = 0$ и δ достаточно малым, можем добиться чтобы круги $B_n(\delta, \beta)$ попарно не пересекались. Тогда из формулы Коши

$$\frac{1}{f'(\lambda_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_n} \frac{dw}{f(w)}, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

будет следовать оценки производных

$$\ln|f'(\lambda_n)| \geq u(\lambda_n) - \mathrm{Const} \cdot \ln(|\lambda_n| + e),\ n \in \mathbb{N}.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 1.4 покажем, что для радиальных субгармонических функций условие типа (1.1) всегда выполняется.

Лемма 1.8. *Если σ — некоторая радиальная неотрицательная борелевская мера, удовлетворяющая условию (1.37), то для любого $z \neq 0$ и $t \in \left[0; \frac{|z|}{2}\right]$ верно*

$$\sigma(z,t) \leq \frac{2t}{\pi|z|}.$$

Доказательство леммы 1.8.

Через $Q(z,t)$ обозначим криволинейный четырехугольник, ограниченный двумя касательными к окружности $C(z,t)$, проведенными из начала координат и окружностями $C(0,|z|-t), C(0,|z|+t)$. Радиальную меру в полярных координатах можно представить в виде $d\sigma(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}d\sigma(r)d\varphi$. Следовательно, учитывая, что при $t \in [0; \frac{|z|}{3}]$

$$\frac{|z|+t}{|z|-t} \leq 2,$$

имеем

$$\sigma(z,t) \leq \sigma(Q(z,t)) = \frac{1}{\pi}(\sigma(|z|+t) - \sigma(|z|-t)) \arcsin\frac{t}{|z|} \leq \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{t}{|z|} \leq \frac{2t}{\pi|z|}.$$

Лемма 1.8 доказана.

Теорема 1.4 доказана.

Теорема 1.5. *Пусть ассоциированная мера μ субгармонической на плоскости функции u удовлетворяет условиям*

1) *для некоторого положительного $\delta > 0$*

$$\delta \leq \mu(2t) - \mu(t), \tag{1.47}$$

$$\mu(2t) - \mu(t) \leq 1,\ t > 0; \tag{1.48}$$

2) *для любого* $z \in \mathbb{C}$ *и некоторых* $A > 0, \beta \in (0;1)$

$$\int\limits_0^{\beta|\lambda|} \frac{\mu(\lambda,t)\,dt}{t} \le A. \tag{1.49}$$

Определим последовательность R_n *из соотношений*

$$\mu(R_0) = 1,\ \mu(R_n) - \mu(R_{n-1}) = 1,\ n \in \mathbb{N},$$

а последовательность r_n *из равенств*

$$\int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \ln t\, d\mu(t) = \ln r_n,\ n \in \mathbb{N},\ \int\limits_0^{R_0} \ln t\, d\mu(t) = \ln r_0.$$

Тогда для любой последовательности $\varphi_n \in [0;\pi/2]$ *целая функция*

$$L(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - (-1)^n \frac{\lambda}{r_n e^{i\varphi_n}}\right)$$

удовлетворяет условию

$$|L(\lambda)| \asymp \frac{\operatorname{dist}\,(\lambda,\Lambda)}{1+|\lambda|} e^{u(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\Lambda = \{\lambda_n\}$. *При этом для достаточно малых* $\sigma > 0$ *круги* $B_n(\sigma) := \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| \le \sigma|\lambda_n|\}$, $n = 0, 1, 2,\ \ldots$, *попарно не пересекаются.*

Доказательство теоремы 1.5.

Пусть $|\lambda| \in (R_n; R_{n+1}]$. Условие (1.48) совпадает с условием (1.37) в теореме 1.4, поэтому оценки (1.38)-(1.41) сохраняют силу. Вместо соотношения (1.42) по выбору r_n получим

$$\int\limits_0^{R_{n-1}} \ln \frac{|\lambda|}{t}\, d(\mu(t) - \widetilde{\mu}(t)) = 0.$$

Через μ_k обозначим сужение меры μ на кольцо $S_k := \{w : |w| \in [R_k; R_{k+1}]\}$. Тогда по определению r_n имеем

$$\left| \int\limits_{R_{n-1}<|w|<R_{n+2}} \ln \left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| d(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)) \right| = \left| \sum_{k=n-1}^{n+1} \int\limits_{S_k} \ln \left| \frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k} \right| d\mu_k(w) \right|.$$

При фиксированном $\lambda \notin E(\sigma) = \bigcup_k B_k(\lambda_k, \sigma|\lambda_k|)$ через T_k обозначим $|\lambda - \lambda_k|$, тогда

$$\left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| \, d\mu_k(w) \right| \le \left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\beta|\lambda|}\right| \, d\mu_k(w) \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\beta|\lambda|}{T_k}\right| \, d\mu_k(w) \right| \le -\int\limits_0^{\beta|\lambda|} \ln\frac{t}{\beta|\lambda|} \, d\mu_k(\lambda, t) + \left| \ln\left|\frac{\beta|\lambda|}{T_k}\right| \right|.$$

Интегрируя по частям по условию (1.49) теоремы получим

$$-\int\limits_0^{\beta|\lambda|} \ln\frac{t}{\beta|\lambda|} \, d\mu_k(\lambda, t) = \int\limits_0^{\beta|\lambda|} \frac{\mu_k(\lambda, t)\, dt}{t} \le A.$$

Из условий (1.47), (1.48) следует, что $2R_k \le R_{k+1} \prec R_k$, поэтому

$$|w| \asymp |\lambda|, |\lambda - \lambda_k| \asymp |\lambda|, \;\; \lambda \in S_n \setminus E(\sigma), \; w \in \bigcup_{k=n-1}^{n+1} S_k,$$

и

$$\left|\frac{\beta\lambda}{T_k}\right| \asymp 1,$$

поэтому

$$\left| \int\limits_{B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| \, d\mu_k(w) \right| \prec 1.$$

Очевидно,

$$\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| \asymp 1, \; \lambda \in S_n \setminus E(\sigma), \; w \in \bigcup_{k=n-1}^{n+1} S_k.$$

Следовательно,

$$\left| \int\limits_{\mathbb{C}\setminus B(\lambda,\beta|\lambda|)} \ln\left|\frac{\lambda - w}{\lambda - \lambda_k}\right| \, d\mu_k(w) \right| \prec 1.$$

Из последних двух неравенств вытекает

$$\left| \int\limits_{R_{n-1}<|w|<R_{n+2}} \ln\left|1 - \frac{\lambda}{w}\right| \, d(\mu(w) - \widetilde{\mu}(w)) \right| \prec 1.$$

Таким образом,

$$|\ln|L(\lambda)| - u(\lambda)| = O(1),\ \lambda \notin E(\sigma).$$

Докажем, что круги $B_n(\sigma)$ при $\sigma = 2^{-[\frac{1}{\delta}]-2}$ попарно не пересекаются. Пусть $N = [\frac{1}{\delta}] + 1$, тогда по условию (1.12)

$$\mu(2^N R_n) - \mu(R_n) = \sum_{k=0}^{N-1} (\mu(2^{k+1}R_n) - \mu(2^k R_n)) \geq N\delta > 1,$$

значит, $2^N R_n > R_{n+1}$. Мы предполагаем, что $\varphi_n \in [0; \frac{\pi}{2}]$, поэтому

$$|\lambda_n - \lambda_{n+1}| = |r_n e^{i\varphi_n} + r_{n+1} e^{i\varphi_{n+1}}| \geq \sqrt{r_n^2 + r_{n+1}^2} >$$

$$> r_{n+1} \geq R_n > 2^{-N} R_{n+1} \geq 2^{-N} r_{n+1} = 2\sigma r_{n+1}.$$

Внутри кругов $B_n(\sigma)$ оценки проведем с помощью следующей леммы.

Лемма 1.9. *Пусть ассоциированная мера μ удовлетворяет условию* (1.49). *Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$ гармоническая мажоранта $H(w)$ функции u в круге $B\left(z, \frac{\beta}{3}|z|\right)$ удовлетворяет соотношениям*

$$u(w) \leq H(w) \leq u(w) + A,\ w \in B\left(z, \frac{\beta}{3}|z|\right).$$

Доказательство леммы 1.9.

Возьмем произвольную точку $w \in B := B(z, \frac{\beta}{3}|z|)$ и через $H_1(\zeta)$ обозначим гармоническую мажоранту функции u в круге $B_1 := B(w, \frac{2\beta}{3}|z|)$. Поскольку $B \subset B_1$, то

$$u(w) \leq H(w) \leq H_1(w).$$

По формуле Йенсена

$$H_1(w) = u(w) + \int_0^{\frac{2\beta}{3}|z|} \frac{\mu(w,t)\,dt}{t}.$$

Точка w лежит в круге B, значит $|w - z| \leq \frac{\beta}{3}|z|$ и $|z| \leq \frac{3}{3-\beta}|w|$. Поэтому $\frac{2\beta}{3}|z| < \beta|w|$ и по условию на меру μ

$$\int_0^{\frac{3\beta}{3}|z|} \frac{\mu(w,t)\,dt}{t} \leq \int_0^{\beta|w|} \frac{\mu(w,t)\,dt}{t} \leq A.$$

Лемма 1.9 доказана.

Возьмем $\sigma \le \frac{\beta}{3}$. По оценке функции вне $E(\sigma)$ и по лемме 1.2 имеем

$$\ln|L(\lambda)| - u(\lambda) - \ln|\lambda - \lambda_k| + \ln|\sigma\lambda_k| = O(1), \lambda \in \partial B(\lambda_k, \sigma|\lambda_k|),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

По гармоничности эта оценка продолжается вовнутрь круга

$$|L(\lambda)| \asymp \frac{|\lambda - \lambda_k|}{\sigma|\lambda_k|} e^{u(\lambda)} \asymp \frac{\text{dist }(\lambda, \Lambda)}{1 + |\lambda|} e^{u(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1.5 доказана.

Теорема 1.6. *Пусть ассоциированная мера μ субгармонической функции и представляется в виде*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — неотрицательные борелевские меры с массой $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ с носителями в непересекающихся кольцах $\{z:\ R_n \le |z| \le R'_n\}$, при этом последовательность R_n возрастающая, $2R_n \le R_{n+1}$ и $\frac{R'_n}{R_n} \le c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть, кроме того, мера μ удовлетворяет условию (1.49). Определим последовательность r_n, $n \in \mathbb{N}$, из равенств

$$\int\limits_{R_n}^{R'_n} \ln t\, d\mu(t) = \ln r_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для произвольных φ_n, $w_n = r_n e^{i\varphi_n}$, целая функция

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_n}\right)$$

удовлетворяет условиям

1) *для достаточно малых $\sigma > 0$ круги $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \le \sigma|w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \dots\ ,$ попарно не пересекаются;*

2) *имеет место соотношение*

$$|L(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство теоремы 1.6 полностью повторяет доказательство теоремы 1.5.

Для ассоциированных мер радиальных субгармонических функций условие (1.49) следует из соотношений (1.47)—(1.48), поэтому для радиальных субгармонических функций теоремы 1.5—1.6 верны в следующем виде.

Теорема 1.7. *Пусть ассоциированная мера μ радиальной субгармонической функции u, $u(0) = 0$, удовлетворяет условию: для некоторого $a > 1$*

$$\mu(at) - \mu(t) \asymp 1,\ t > 0.$$

Тогда существует целая функция L с простыми нулями в точках w_n, так что

1) *для достаточно малых $\sigma > 0$ круги $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \le \sigma|w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \dots$, попарно не пересекаются;*

2) *имеет место соотношение*

$$|L(z)| \asymp \frac{\text{dist } (z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1.8. *Пусть ассоциированная мера μ радиальной субгармонической функции u представляется в виде*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — неотрицательные борелевские меры с массой $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ с носителями в непересекающихся кольцах $\{z : \ R_n \le |z| \le R'_n\}$, при этом последовательность R_n возрастающая, $2R_n \le R_{n+1}$ и $\frac{R'_n}{R_n} \le c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Определим последовательность r_n, $n \in \mathbb{N}$, из равенств

$$\int\limits_{R_n}^{R'_n} \ln t \, d\mu(t) = \ln r_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для произвольных φ_n, $w_n = r_n e^{i\varphi_n}$, целая функция

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_n}\right)$$

удовлетворяет условиям

1) *для достаточно малых* $\sigma > 0$ *круги* $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \leq \sigma |w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \ldots$, *попарно не пересекаются;*

2) *имеет место соотношение*

$$|L(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство теорем 1.7, 1.8.

Утверждения этих теорем следует из теорем 1.5, 1.6, так как если σ — некоторая радиальная неотрицательная борелевская мера, $\sigma(\mathbb{C}) = 1$, то по лемме 1.8 для любого $z \neq 0$ и $t \in \left[0; \frac{|z|}{2}\right]$ верно

$$\sigma(z, t) \leq \frac{2t}{\pi |z|}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\frac{|z|}{2}} \frac{\sigma(z, t)\, dt}{t} \leq \frac{1}{\pi}.$$

Теоремы 1.7, 1.8 доказаны.

Глава 2

Представляющие системы экспонент в локально выпуклых пространствах аналитических функций

2.1. Преобразование Фурье–Лапласа функционалов на нормированных пространствах аналитических функций

Пусть E — линейное топологическое подпространство пространства $H(D)$ на некоторой ограниченной выпуклой области плоскости, E^* — сильно сопряженное к нему пространство. Если система экспонент $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, полна в пространстве E, то преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{L} : S \longmapsto \widehat{S}$, определяемое как $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$, $S \in E^*$, линейно и взаимно однозначно отображает пространство E^* в некоторое линейное подпространство $\widehat{E}$ пространства целых функций $H(\mathbb{C})$. Рассматривая в пространстве $\widehat{E}$ наведенную топологию, будем считать, что $\mathcal{L}$ является линейным топологическим изоморфизмом. Результаты об описании пространства $\widehat{E}$ с помощью весовых полунорм оказываются полезными во многих вопросах комплексного анализа. Такого рода теорем для случая, когда E — нормированное пространство, мало. Например, описаны сопряженные для пространства Смирнова ([39], [47], [43]), для пространств Бергмана ([19]). Локально выпуклые пространства, являющиеся проективным пределом нормированных пространств, исследовались чаще. Пространства с весами, зависящими только от расстояния до границы, изучены в работе [49], случай общих весов — в работе [7]. Индуктивные пределы нормированных подпространств пространства $A^\infty(D)$ рассмотрены в работе [60].

В первой части этого параграфа мы рассмотрим канонические проективные и индуктивные пределы равномерно весовых нормированных пространств аналитических функций с наиболее тонкими топологиями. Вторая часть параграфа посвящена локально выпуклым подпространствам $A^\infty(D)$.

Пусть D — выпуклая область комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, и $\varphi(z)$ — выпуклая функция в D, стремящаяся к $+\infty$ вблизи границы. Через $H(D, \varphi)$ обозначим пространство аналитических в D функций f, для которых

$$\lim_{z \longrightarrow \partial D} |f(z)| e^{-\varphi(z)} = 0,$$

с нормой

$$\|f\| = \sup_{z \in D} |f(z)| e^{-\varphi(z)}.$$

Тогда $H(D, \varphi)$ — банахово пространство, в котором система экспонент $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, полна. Через $H_2(D, \varphi)$ обозначим интегрально весовое пространство с нормой

$$\|f\|^2 = \int\limits_{z \in D} |f(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\, dm(z),$$

где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Пусть $\widetilde{\varphi}(\lambda)$ — преобразование Юнга функции φ:

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sup_{z \in D} (\mathrm{Re}\ \lambda z - \varphi(z)),\ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Как известно, $\widetilde{\varphi}$ — выпуклая функция и, если φ — выпуклая, то $\widetilde{(\widetilde{\varphi})} = \varphi$. Пусть

$$K_s(\varphi, z) = \int\limits_{\mathbb{C}} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)} (1 + |\lambda|)^s\, dm(\lambda),\ \ z \in D.$$

Функции $\ln K_s(\varphi, z)$ выпуклы в области D. Пространство $H(D, \ln K_0(\varphi, z))$ для краткости будем обозначать через $H^-(D, \varphi)$.

Утверждение 2.1.1. *Если φ — некоторая функция в ограниченной области D, содержащей 0, то*

1) *преобразование Юнга $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет условию Липщица*

$$|\widetilde{\varphi}(\lambda_1) - \widetilde{\varphi}(\lambda_2)| \le \sup_{z \in D} |z| |\lambda_1 - \lambda_2|,\ \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C};$$

2) *для любого* $q \in (0;1)$

$$qH_D(\lambda) - C'_q \le \widetilde{\varphi}(\lambda) \le H_D(\lambda) + C''_q,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $H_D(\lambda) = \sup_{z\in D} \operatorname{Re} \lambda z$ *— опорная функция области* D, $C'_q, C''_q > 0$ *— некоторые постоянные;*

3) *выполняются оценки*

$$\frac{1}{2\pi} K_{-3}(\varphi, z) \le e^{\varphi(z)} \le \pi^{-1} e^{2\sup_{\lambda\in D}|\lambda|} K_0(\varphi, z),\ z \in D.$$

Доказательство утверждения 2.1.1.

Пусть

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_1) = \operatorname{Re} \lambda_1 z_1 - \varphi(z_1).$$

Тогда

$$\widetilde{\varphi}(\lambda_1) - \widetilde{\varphi}(\lambda_2) = (\operatorname{Re} \lambda_1 z_1 - \varphi(z_1)) - \widetilde{\varphi}(\lambda_2) \le$$

$$\le \operatorname{Re} z_1(\lambda_1 - \lambda_2) \le \sup_{z\in D} |z||\lambda_1 - \lambda_2|,\ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Поменяв местами λ_1, λ_2, получим требуемое неравенство.

Второе утверждение следует из ограниченности снизу выпуклой функции в ограниченной области и ограниченности сверху на компактах.

Левое неравенство в третьем утверждении тривиальное. Правое неравенство следует из пункта 1.

Утверждение 2.1.1 доказано.

Несколько свойств выпуклых функций и преобразования Юнга (в вещественном смысле) сведем в одно утверждение.

Утверждение 2.1.2. *Пусть* $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *— выпуклая функция и*

$$\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y_j \partial y_k} a_j a_k \ge \frac{b}{1+|y|^2}|a|^2,\ a, y \in \mathbb{R}^2,\ |y| \ge R, \tag{2.1.1}$$

с постоянной $b > 12$ *и* $D = \{t \in \mathbb{R}^2 :\ \widetilde{v}(t) = \sup_y((t, y) - v(y)) < \infty\}$*. Положим*

$$K_s(v, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{(t,y)-v(y)}(1+|y|)^s\, dm(y),\ s \in [-6; 6],\ t \in D^\circ,$$

где (t, y) *обозначает евклидово скалярное произведение, а* D° *— внутренность выпуклого множества* D. *Пусть* y_t *— точка достижения супремума*

$$\sup_y((t, y) - v(y)) := \widetilde{v}(t),$$

то есть

$$(t, y_t) - v(y_t) = \widetilde{v}(t).$$

Тогда

1) *существуют постоянные* M_s, *зависящие только от постоянных* b, R *в условии* (2.1.1), *такие что*

$$K_s(v, t) \le M_s \int\limits_{B\left(y_t, \frac{1}{2}(1+|y_t|)\right)} e^{(t,y)-v(y)}(1 + |y|)^s \, dm(y), \; t \in D^\circ, \; s \in [-6; 6];$$

2) *если*

$$|t - \tau| \le \frac{b}{(1 + |y_t|)},$$

то верна оценка

$$|\widetilde{v}(t) - \widetilde{v}(\tau)| \le 2b,$$

в частности, $\tau \in D$.

Доказательство утверждения 2.1.2.

Из теории выпуклых функций известно, что

$$v(y) = \sup_{t \in D}((t, y) - \widetilde{v}(t)), \; y \in \mathbb{R}^2.$$

Если $D^\circ = \emptyset$, то D — некоторый отрезок и на прямых, перпендикулярных этому отрезку, $v(y) \equiv \mathrm{const}$, а это противоречит условию (2.1.1). Таким образом, $D^\circ \ne \emptyset$. Пусть $v(t, y) = \widetilde{v}(t) + v(y) - (t, y)$, тогда при фиксированном t функция $v(t, y)$ выпукла, неотрицательна и $v(t, y_t) = 0$, $\nabla v(y_t) = t$. Положим для $s \ge 0$

$$D_t(s) = \{y \in \mathbb{R}^2 : \; v(t, y) < s\}, \; p_t(s) = V(D_t(s)),$$

где $V(A)$ — площадь области $A \subset \mathbb{R}^2$.

Одно из следствий теоремы Брунна-Минковского утверждает, что для выпуклых областей A, B на плоскости $(V(A+B))^{\frac{1}{2}} \geq (V(A))^{\frac{1}{2}} + (V(B))^{\frac{1}{2}}$ (см. [15, стр. 148]). Из выпуклости функции $v(t,y)$ следует выпуклость областей $D_t(s)$ и включение $\alpha D_t(s_1) + (1-\alpha)D_t(s_2) \subset D_t(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2)$ для всех $\alpha \in [0;1]$, $s_1, s_2 \geq 0$. Поэтому

$$\sqrt{V(D_t(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2))} \geq \sqrt{V(\alpha D_t(s_1) + (1-\alpha)D_t(s_2))} \geq$$

$$\geq \sqrt{V(\alpha D_t(s_1))} + \sqrt{V((1-\alpha)D_t(s_2))} = \alpha\sqrt{V(D_t(s_1))} + (1-\alpha)\sqrt{V(D_t(s_2))}.$$

Таким образом, функция $\sqrt{p_t(s)}$ — вогнутая на $(0;\infty)$. Если $a \in (0;s)$, то

$$\sqrt{p_t(a)} = \sqrt{p_t\left(\left(1-\frac{a}{s}\right)\cdot 0 + \frac{a}{s}s\right)} \geq \frac{a}{s}\sqrt{p_t(s)},$$

то есть

$$p_t(s) \leq p_t(a)\frac{s^2}{a^2}, \;\; s \geq a > 0. \tag{2.1.2}$$

Функцию $K_0(v,t)e^{-\widetilde{v}(t)}$ запишем в виде одномерного интеграла Стилтьеса

$$K_0(v,t)e^{-\widetilde{v}(t)} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-v(t,y)}\,dm(y) = \int\limits_0^\infty e^{-s}\,dp_t(s).$$

Интегрируя последний интеграл по частям и пользуясь монотонностью функции $p_t(s)$ и неравенством (2.1.2), для любого положительного числа a получим

$$K_0(v,t)e^{-\widetilde{v}(t)} = \int\limits_0^a p_t(s)e^{-s}\,ds + \int\limits_a^\infty p(s)e^{-s}\,ds \leq$$

$$\leq p_t(a)\left[\int\limits_0^a e^{-s}\,ds + \int\limits_a^\infty \frac{s^2}{a^2}e^{-s}\,ds\right] \leq \frac{a^2+2a+2}{a^2}p_t(a).$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{D_t(a)} e^{-v(t,y)}\,dm(y) \geq e^{-a}p_t(a), \;\; a \geq 0,$$

следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-v(t,y)}\,dm(y) \le \frac{a^2+2a+2}{a^2} e^a \int\limits_{D_t(a)} e^{-v(t,y)}\,dm(y),\ \ a \ge 0. \tag{2.1.3}$$

Докажем, что для $a = \frac{b\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2}$ при выполнении условия (2.1.1) область $D_t(a) \subset B(y_t, \varepsilon(1+|y_t|))$. По формуле Тейлора

$$v(y) = v(y_t) + (\nabla v(y_t), y - y_t) + \frac{1}{2}(D^2 v(y^*)(y-y_t), y-y_t),$$

где y^* — некоторая точка на отрезке, соединяющем y, y_t, а $D^2 v$ — матрица вторых производных. Поскольку y_t — стационарная точка достижения супремума, то $\nabla v(y_t) = t$, поэтому по условию (2.1.1)

$$v(t,y) = \frac{1}{2}(D^2 v(y^*)(y-y_t), y-y_t) \ge \frac{b|y-y_t|^2}{2(1+|y^*|^2)}.$$

Для точек на окружности $|y-y_t| = \varepsilon(1+|y_t|)$ имеем $1+|y^*| \le 1+|y_t|+|y^*-y_t| \le (1+\varepsilon)(1+|y_t|)$, значит, на этой окружности

$$v(t,y) \ge \frac{b\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2}.$$

Тем самым, $D_t\left(\frac{b\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)^2}\right) \subset B(y_t, \varepsilon(1+|y_t|))$ и по неравенству (2.1.3) оценка для $K_0(v,t)$ доказана.

Элементарными вычислениями убедимся в выполнении оценки

$$\left|\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \ln(1+|y|^2)}{\partial y_j \partial y_k} a_k a_j\right| \le \frac{4|a|^2}{1+|y|^2},\ \ y, a \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1.4}$$

Значит, если $s \in [-3;3]$, то для функции

$$w(y) = v(y) - s\ln(1+|y|^2)$$

по условию (2.1.1) выполняется оценка

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 w(y)}{\partial y_j \partial y_k} a_k a_j \ge \frac{b-12}{1+|y|^2}|a|^2,\ \ y, a \in \mathbb{R}^2.$$

Таким образом, учитывая, что $b > 12$ можем локализовать интеграл $K_0(w,t)$ в круге $B(y'_t, \varepsilon(1+|y'_t|))$, где y'_t — точка достижения супремума $\sup_t((y,t)-\widetilde{w}(y))$. Для получения локализации в круге с центром в точке y_t оценим $|y'_t - y_t|$. Для функции $u(r) = v(y_t + r(y'_t - y_t))$ имеем

$$u'(1) = (\nabla v(y'_t), y'_t - y_t) = \left(t + s\nabla \ln(1+|y|^2)\,\big|_{y=y'_t}, y'_t - y_t\right),$$

$$u'(0) = (\nabla v(y_t), y'_t - y_t) = (t, y'_t - y_t),$$

и по условию (2.1.1)

$$u''(r) = (D^2 v(y)(y'_t - y_t), y'_t - y_t) \geq \frac{b}{1+|y|^2}|y'_t - y_t|^2,\ y = y_t + r(y'_t - y_t).$$

Положим $|y'_t - y_t| = p$, $1 + |y_t| = q$, тогда по формуле Ньютона

$$u'(1) - u'(0) = \int\limits_0^1 u''(r)\,dr$$

получим

$$\frac{2|s|p}{bq} \geq p^2 \int\limits_0^1 \frac{dr}{p^2r^2 + q^2},$$

или, учитывая, что $2|s|/b < 1/2$

$$\operatorname{arctg}\frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $|y'_t - y_t| \leq \frac{1}{2}(1+|y_t|)$. Отсюда можно заключить, что $B(y'_t, \varepsilon(1+|y'_t|)) \subset B\left(y_t, \frac{3\varepsilon+1}{2}(1+|y_t|)\right)$ и, тем самым, доказана возможность локализации.

Из очевидного соотношения $K_{2s}(v,t) \asymp K_0(w,t)$ вытекает требуемое неравенство для функций $K_s(v,t)$ для $|s| \leq 6$.

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы. Возьмем точку $\tau \in D^\circ$, такую что

$$|t - \tau| \leq \frac{b}{(1+|y_t|)}.$$

Пусть $R(s) = v((y_\tau - y_t)s + y_t)$, тогда

$$R'(1) = (\nabla v(y_\tau), y_\tau - y_t) = (\tau, y_\tau - y_t),\ R'(0) = (\nabla v(y_t), y_\tau - y_t) = (t, y_\tau - y_t)$$

и, полагая $|y_\tau - y_t| = p$, $1 + |y_t| = q$, по условию (2.1.1) получим

$$R''(s) = (D^2 v((y_\tau - y_t)s + y_t)(y_\tau - y_t), y_\tau - y_t) \geq \frac{bp^2}{2(p^2 s^2 + q^2)}.$$

Отсюда и из формулы Ньютона

$$R'(1) - R'(0) = \int\limits_0^1 R''(s)\, ds.$$

Для $|\tau - t| < b/q$ имеем

$$\frac{bp}{q} \geq \frac{bp^2}{2} \int\limits_0^1 \frac{ds}{p^2 s^2 + q^2} = \frac{bp}{q} \int\limits_0^{p/q} \frac{ds}{1 + s^2}.$$

То есть

$$\int\limits_0^{p/q} \frac{ds}{1 + s^2} \leq 1,$$

значит, $\frac{p}{q} \leq \frac{\pi}{4}$ и

$$|y_\tau - y_t| \leq (1 + |y_t|).$$

По теореме о среднем $\widetilde{v}(t) - \widetilde{v}(\tau) = (\nabla \widetilde{v}(\tau^*), t - \tau)$, где τ^* — точка на отрезке, соединяющем точки t и τ. По доказанному

$$|y_{\tau^*} - y_t| \leq (1 + |y_t|),$$

значит,

$$|\nabla \widetilde{v}(\tau^*)| = |y_{\tau^*}| \leq 2(1 + |y_t|).$$

Таким образом,

$$|\widetilde{v}(t) - \widetilde{v}(\tau)| \leq 2b.$$

Оценку, требуемую в пункте 2, доказали для точек из $D^\circ \bigcap B\left(t, \frac{b}{1+|y_t|}\right)$. Если круг $B\left(t, \frac{b}{1+|y_t|}\right)$ не лежит в области D°, то какая-то граничная точка $\tau_0 \in \partial D$ лежит в данном круге. Пусть ω — направление внешней нормали к границе области D в этой точке. Тогда $(\tau, s\omega) \leq 0$ для $s > 0$, $\tau \in D$, и

$$v(\omega s) = \sup_{\tau \in D}((t, \omega s) - \widetilde{v}(t)) \leq \sup_{t \in D}(-\widetilde{v}(t)) := v_0.$$

С другой стороны, для любого $\tau \in D^\circ \bigcap B\left(t, \frac{b}{1+|y_t|}\right)$ мы доказали оценку

$$\widetilde{v}(\tau) \le \widetilde{v}(t) + 2b,$$

поэтому, устремив τ из этого пересечения к τ_0, получим оценку снизу

$$v(\omega s) \ge (\tau, \omega s) - \widetilde{v}(\tau) \ge -\widetilde{v}(t) - 2b.$$

Из последних двух оценок следует ограниченность выпуклой на $(0; +\infty)$ функции $v(s\omega)$:

$$|v(\omega s)| \le |v_0| + 2b.$$

Но из условия (2.1.1) вытекает оценка

$$\frac{d^2 v(s\omega)}{d^2 s} \ge \frac{b}{1+s^2}, \ s > R,$$

которая не допускает ограниченности функции $v(s\omega)$.

Утверждение 2.1.2 доказано.

Теорема 2.1.1. *Пусть φ — выпуклая функция на ограниченной выпуклой области комплексной плоскости D, $0 \in D$.*

1. *Пусть S — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D, \varphi)$ и $\widehat{S}(\lambda)$ — преобразование Фурье–Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$|\widehat{S}(\lambda)| \le \|S\|_{H^*(D,\varphi)} e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)}, \ \lambda \in D,$$

тем самым,

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})} \le \|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

2. *Если функция $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяют условию (2.1.1) с постоянной $b > 12$ и целая функция F такова, что*

$$|F(\lambda)| \le C e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)} (1 + |\lambda|)^{-10}, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

то функция F является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(D,\varphi)$. Причем

$$\|S\|_{(H(D,\varphi))^*} \le M\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})},$$

где $\widetilde{\varphi}_a(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - a\ln(1+|\lambda|)$, и константа M зависит только от постоянной b в (2.1.1).

Доказательство теоремы 2.1.1.

Первое утверждение теоремы очевидное.

Для доказательства второго утверждения нам потребуются две леммы.

Лемма 2.1.1. *Пусть $\varphi(x_1 + ix_2)$ — выпуклая функция в ограниченной выпуклой области D и функция $\widetilde{\varphi}(y_1 + iy_2)$ удовлетворяет условию (2.1.1) с постоянной $b > 12$. Тогда для любой функции $f \in H(D,\varphi)$ верна оценка*

$$|f^{(s)}(z)| \le C_s||f||_{H(D,\varphi)}K_s(\varphi, z), \quad z \in D,\ s \in \{1,2,3\},$$

где постоянная C_s зависит только от постоянной b. В частности,

$$|f^{(s)}(z)|\frac{1}{K_{s+1}(\varphi, z)} \longrightarrow 0,\ \text{dist}\ (z,\partial D) \longrightarrow 0.$$

Доказательство леммы 2.1.1.

Для точки $z \in D$ через λ_z обозначим точку достижения супремума

$$\sup_{\lambda}(\text{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)).$$

Пусть $r = r_z = \frac{b}{(1+|\lambda_z|)}$. Из формулы Коши следует

$$|f^{(s)}(z)| \le \frac{(s-1)!}{r^s}\sup_{w\in B(z,r)}|f(w)| \le$$

$$\le \frac{(s-1)!}{r^s}e^{\varphi(z)}\sup_{w\in B(z,r)}|f(w)|e^{-\varphi(w)}\sup_{w\in B(z,r)}e^{\varphi(w)-\varphi(z)}.$$

В силу пункта 2 утверждения 2.1.2 отсюда вытекает

$$|f^{(s)}(z)| \le \frac{(s-1)!}{b^s}e^{2b}||f||_{H(D,\varphi)}(1+|\lambda_z|)^s e^{\varphi(z)}.$$

По пункту 3 утверждения 2.1.1 имеем

$$|f^{(s)}(z)| \le \frac{(s-1)!}{b^s} e^{2b+d} \|f\|_{H(D,\varphi)} (1+|\lambda_z|)^s K_0(\varphi, z),$$

где $d = \max_{z\in\overline{D}} |z|$. Пункт 1 утверждения 2.1.2 позволяет локализовать интеграл, определяющий функцию K_0:

$$|f^{(s)}(z)| \le \frac{(s-1)!}{b^s} e^{2b+d} \|f\|_{H(D,\varphi)} M_0 (1+|\lambda_z|)^s \int\limits_{B(\lambda_z, \frac{1}{2}(1+|\lambda_z|)} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)}\, dm(\lambda) \le$$

$$\le C_s ||f||_{H(D,\varphi)} K_s(z),$$

где

$$C_s = \frac{(s-1)!}{b^s} e^{2b+d} M_0 \max\left\{ \frac{(1+|\lambda_z|)^s}{(1+|\lambda|)^s} :\ \lambda \in B\left(\lambda_z, \frac{1}{2}(1+|\lambda_z|)\right)\right\}.$$

Лемма 2.1.1 доказана.

Лемма 2.1.2. *Пусть φ — выпуклая функция на ограниченной выпуклой области D, функция $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяет условию (2.1.1) с постоянной $b > 12$. Тогда для любой функции $g(z)$, аналитической в области D и удовлетворяющей условию*

$$\sup_{\zeta\in D} \frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi, \zeta)} < \infty,$$

функция $G(z) = \frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)}$, где

$$\varphi_a(\zeta) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}} (\mathrm{Re}\ \lambda\zeta - \widetilde{\varphi}_a(\lambda)),$$

продолженная нулем на $\mathbb{C}\setminus D$, принадлежит $W_2^3(\mathbb{C})$. При этом

$$\|G(z)\|_{W_2^3(\mathbb{C})} \le M_1 \sup_{\zeta\in D} \frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi, \zeta)} \le M\|g\|_{H(D,\varphi)}.$$

Доказательство леммы 2.1.2.

Очевидно,

$$|G(z)| \le \left(\sup_{\zeta\in D} \frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi, \zeta)}\right) \frac{K_0(\varphi, z)}{K_0(\varphi_3, z)}.$$

Поскольку по п.1 утверждения 2.1.2, примененному к $K_0(\varphi, z)$,

$$K_0(\varphi_3, z) = \int\limits_{\mathbb{C}^2} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^3\,dm(\lambda) \geq \frac{C^3}{M_0}(1+|\lambda_z|)^3 K_0(\varphi, z),$$

где λ_z — точка достижения $\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda))$ и

$$C = \min_{|\lambda-\lambda_z|\leq\frac{1}{2}(1+|\lambda_z|)} \frac{1+|\lambda|}{1+|\lambda_z|},$$

то

$$|G(z)| \prec (1+|\lambda_z|)^{-3} \longrightarrow 0$$

при dist $(z, \partial D) \longrightarrow 0$, тем самым, $G(z) \in C(\mathbb{C})$ и

$$\|G\|_{C(\mathbb{C})} \leq M_3 \left(\sup_{\zeta\in D} \frac{|g(\zeta)|}{K_0(\varphi_3, \zeta)}\right).$$

Так же по утверждению 2.1.2 имеем

$$\left|\frac{\partial G(z)}{\partial \overline{z}}\right| = \left|g(z)\frac{\partial K_0(\varphi_3, z)}{\partial \overline{z}}\frac{1}{K_0^2(\varphi_3, z)}\right| \leq \sup_{z\in D}\frac{|g(z)|}{K_0(\varphi, z)}\frac{K_0(\varphi, z)K_1(\varphi_3, z)}{K_0^2(\varphi_3, z)} \prec$$

$$\prec \|g\|_{H(D,\varphi)}\frac{K_4(\varphi, z)K_0(\varphi, z)}{K_3^2(\varphi, z)} \prec (1+|\lambda_z|)^{-2} \longrightarrow 0.$$

Дополнительно, учитывая лемму 2.1.1, получим при dist $(z, \partial D) \longrightarrow 0$

$$\left|\frac{\partial G(z)}{\partial z}\right| = \left|g(z)\frac{\partial K_0(\varphi_3, z)}{\partial z}\frac{1}{K_0^2(\varphi_3, z)}\right| + \left|g'(z)\frac{1}{K_0(\varphi_3, z)}\right| \prec$$

$$\prec \|g\|_{H(D,\varphi)}\left|\frac{K_0(\varphi, z)K_1(\varphi_3, z)}{K_0^2(\varphi_3, z)} + \frac{K_1(\varphi, z)}{K_0(\varphi_3, z)}\right| \prec$$

$$\prec \|g\|_{H(D,\varphi)}\left(\frac{K_4(\varphi, z)K_0(\varphi, z)}{K_3^2(\varphi, z)} + \frac{K_1(\varphi, z)}{K_3(\varphi, z)}\right) \prec \|g\|_{H(D,\varphi)}(1+|\lambda_z|)^{-2} \longrightarrow 0.$$

Производные второго и третьего порядка оцениваются такими же прямыми вычислениями.

Лемма 2.1.2 доказана.

Докажем второй пункт теоремы 2.1.1.

По условию (2.1.1) и соотношению (2.1.4) для всех a, $|a| \leq b/4$, функции $\widetilde{\varphi}_a(\lambda)$ выпуклые. Возьмем произвольную функцию $F \in H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_8)$, очевидно

$$\int\limits_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_8(\lambda)}\,dm(\lambda) < \pi\|F\|^2_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})} < \infty.$$

В пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим одномерное подпространство

$$\Sigma = \{w = (w_1, w_2) : \ w_1 = i\lambda, \ w_2 = -\lambda, \ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

и функцию на этом подпространстве

$$g(w) = F(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{C}, \ w \in \Sigma.$$

Выпуклые функции

$$\Phi_a(w) = \sup_{z \in D}((\mathrm{Re}\ z \cdot \mathrm{Im}\ w_1 + \mathrm{Im}\ z \cdot \mathrm{Im}\ w_2) - \varphi_a(z)), \ w \in \mathbb{C}^2,$$

обладают свойствами

$$\Phi_a(w) = \Phi_a(i\mathrm{Im}\ w), \ w \in \mathbb{C}^2, \tag{2.1.5}$$

$$\Phi_a(w) = \widetilde{\varphi}_a(\lambda), \ w \in \Sigma, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\Phi_a(iy) = \widetilde{\varphi}_a(y_1 - iy_2), \ y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1.6}$$

Из утверждения 2.1.1 и соотношений (2.1.5), (2.1.6) следует, что выполняется условие Липшица

$$|\Phi_a(w') - \Phi_a(w'')| \le \sup_{z \in D} |z||w' - w''|, \ w', w'' \in \mathbb{C}^2. \tag{2.1.7}$$

Применим теорему (см. [56, теорема 15.1.3, стр. 317]). Существует целая функция $f(w)$ на $\mathbb{C}^2$, которая совпадает с g на подпространстве Σ и удовлетворяет оценке

$$\int_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi_8(w)} (1 + |w|^2)^{-3}\, dm(w) \le$$

$$\le C_0 \int_{\Sigma} |g(w)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_8(w)}\, dm(w) \le C_0 \pi \|F\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})}, \tag{2.1.8}$$

где $C_0 = 6\pi \exp(\max_{z \in \overline{D}} |z|)$. Функция $|f(w)|^2$ субгармонична в $\mathbb{C}^2$, поэтому для любого $w \in \mathbb{C}^2$ имеем

$$|f(w)|^2 \le \frac{1}{V} \int_B |f(w + \zeta)|^2\, dm(\zeta) \le \frac{1}{V} \int_Q |f(w + \zeta)|^2\, dm(\zeta),$$

где B — единичный шар в $\mathbb{C}^2$ и V — объем этого шара, Q — единичный куб $\{|\mathrm{Re}\ \zeta_j|, |\mathrm{Im}\ \zeta_j| \leq 1,\ j = 1, 2\}$. Учитывая свойство (2.1.7) получим

$$|f(w)|^2 e^{-2\Phi_8(w)}(1+|w|^2)^{-3} \leq C \int\limits_Q |f(w+\zeta)|^2 e^{-2\Phi_8(w+\zeta)}(1+|w+\zeta|^2)^{-3}\, dm(\zeta), \tag{2.1.9}$$

где

$$C = \frac{C_0}{V} \sup\left\{\left(\frac{1+|w+\zeta|^2}{1+|w|^2}\right)^3 e^{2(\Phi_{10}(w+\zeta)-\Phi_{10}(w))},\ w \in \mathbb{C}^2,\ \zeta \in Q\right\}.$$

В частности, для $x \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x)|^2 e^{-2\Phi_8(x)}(1+|x|^2)^{-3} \leq C \int\limits_Q |f(x+\zeta)|^2 e^{-2\Phi_8(x+\zeta)}(1+|x+\zeta|^2)^{-3}\, dm(\zeta).$$

Проинтегрировав полученное неравенство по $x \in \mathbb{R}^2$ и учитывая свойство (2.1.5) и оценку (2.1.8), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 (1+|x|^2)^{-3}\, dx \leq 2Ce^{2\widetilde{\varphi}_8(0)} \int\limits_{\mathbb{C}^2} |f(w)|^2 e^{-2\Phi_8(w)}(1+|w|^2)^{-3}\, dm(w) \leq$$

$$\leq C_1 \|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})},\ \text{где } C_1 = 2e^{2\widetilde{\varphi}_8(0)}C.$$

По терминологии монографии [55, стр. 288] функция f является элементом пространства L^2_{-3} . Другими словами f является преобразованием Фурье некоторого линейного непрерывного функционала S_0 на пространстве Соболева W_3^2, состоящего из функций $u(x)$ на $\mathbb{R}^2$, для которых

$$\frac{\partial^{(k)} u}{\partial^{(j)} x_1 \partial^{(k-j)} x_2} \in L_2,\ k = 0, 1, 2, 3,\ j = 0, 1,\ \ldots\ , k.$$

В этом пространстве рассматривается норма

$$\|u\|^2 = \sum_{|\alpha| \leq 3} c_\alpha \|D^\alpha\|^2,$$

где c_α — полиномиальные коэффициенты и $\alpha = (j, i)$ — мультииндекс. Из оценок (2.1.8), (2.1.9) и равенства (2.1.5) получим равномерную оценку

$$|f(w)|^2 \prec (1+|w|^2)^3 e^{2\Phi_8(w)} = (1+|w|^2)^3 e^{2\Phi_8(i\mathrm{Im}\ w)}.$$

Если $H(y)=\sup_{x_1+ix_2\in D}(y_1x_1+y_2x_2)$ — опорная функция области D (в смысле $\mathbb{R}^2$), то по п.2 утверждения 2.1.1 и по соотношениям (2.1.5), (2.1.6)

$$|f(w)|^2 \prec (1+|w|^2)^3 e^{2\Phi_8(w)} = (1+|w|^2)^3 e^{2\widetilde{\varphi}_8(y_1-iy_2)} \prec (1+|w|^2)^3 e^{2H(\operatorname{Im} w)}.$$

По теореме Пэли–Винера–Шварца ([55, стр. 220]) из этой оценки следует, что носитель распределения S_0 лежит в $\overline{D}$. Из этого, в частности, следует, что функционал S_0 определен на $W_3^2(G)$ для любой области $G\supset\overline{D}$. Кроме того, для любого $y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$

$$S_y(u)=S_0(u(t)e^{(t,y)}),\ u\in W_2^3$$

будет линейным непрерывным функционалом на W_2^3. При этом имеем

$$S_y(e^{-i(t,x)})=S_0(e^{-i(t,x+iy)})=f(x+iy),\ (x+iy)\in\mathbb{C}^2,$$

и по формуле Парсеваля

$$\|S_y\|^2_{W_2^3}=\int\limits_{\mathbb{R}^2}|f(x+iy)|^2(1+|x|^2)^{-3}\,dx.$$

Разделим это равенство на $(1+|y|^2)^3e^{2\Phi_6(iy)}$ и проинтегрируем по $y\in\mathbb{R}^2$. Учитывая неравенство (2.1.8) получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\|S_y\|^2e^{-2\Phi_8(iy)}(1+|y|^2)^{-3}\,dy=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}|f(x+iy)|^2e^{-2\Phi_6(iy)}(1+|x|^2)^{-3}(1+|y|^2)^{-3}\,dy\,dx\le$$

$$\le\int\limits_{\mathbb{C}^2}|f(w)|^2e^{-2\Phi_8(w)}(1+|w|^2)^{-3}\,dm(w)\le C_0\pi\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}.$$

Отсюда по неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\|S_y\|e^{-\Phi_3(iy)}\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\|S_y\|e^{-\Phi_8(iy)}(1+|y|)^{-5}\,dy\le$$

$$\leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\|^2 e^{-2\Phi_8(iy)} (1+|y|^2)^{-3}\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1+|y|^2)^{-2}\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_0 \pi \|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}. \tag{2.1.10}$$

По лемме 2.1.2 для любой функции g, аналитической в области D и удовлетворяющей условию

$$\sup_{z\in D} \frac{|g(z)|}{K_0(\varphi, z)} < \infty,$$

функция $\frac{|g(z)|}{K_0(\varphi_3,z)}$, продолженная нулем на $\mathbb{C}\setminus D$, принадлежит $W_2^3(\mathbb{C})$ и, в частности, на этой функции определено значение функционала S_y. Пусть

$$S(g) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} S_y \left(\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)} \right) e^{-\Phi_3(iy)}\, dy.$$

Из (2.1.10) следует оценка

$$|S(g)| \leq \left\| \frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)} \right\|_{W_2^3} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|S_y\| e^{-\Phi_3(iy)}\, dy \leq C_0 \pi \left\| \frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)} \right\|_{W_2^3} \|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}.$$

По лемме 2.1.2

$$\left\| \frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)} \right\|_{W_2^3} \leq C(D) \left\| \frac{g(z)}{K_0(\varphi_3, z)} \right\|_{C^3(\mathbb{C})} \leq C_1(D) \|g\|_{H(D,\varphi)},$$

где $C(D),\ C_1(D)$ — постоянные, зависящие только от размеров области D. Таким образом,

$$|S(g)| \leq C_1(D) \|g\|_{H(D,\varphi)} \|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})},$$

S — линейный непрерывный функционал на $H(D, \varphi)$ и

$$\|S\| \leq C_1(D) \|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}.$$

Докажем, что преобразование Фурье–Лапласа этого функционала есть функция F. В начале будем предполагать, что носитель $K = \operatorname{supp} S$ функционала S — компакт в D. Поскольку мы считаем, что $0 \in D$, то найдется $q \in (0; 1)$, такое что выпуклая оболочка носителя K лежит в области qD. Возьмем $q' \in (q; 1)$. По равенству (2.1.6) и пункту 2 утверждения 2.1.1 имеем для $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi_3(iy) = \widetilde{\varphi}_3(y_1 - iy_2) \geq q' H_D(y_1 - iy_2) - C'_{q'} = q' H(y) - C'_{q'},$$

где H — опорная функция области D в вещественном смысле. Поэтому

$$\sup_{t\in K}((y,t)-\Phi_3(iy)) \le \sup_{t\in qD}(y,t)-q'H(y)+C'_{q'}=(q-q')H(y)+C'_{q'}.$$

Таким образом, при $s\in[0;3]$ имеет место равномерная по $t\in q\overline{D}$ сходимость интегралов

$$\int\limits_{|y|\le R} e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}|y|^s\,dy \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}|y|^s\,dy.$$

Это значит, что имеет место сходимость в норме пространства $C^3(q\overline{D})$ функций

$$A_R(t)=\int\limits_{|y|\le R} e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}\,dy \longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{(t,y)-\Phi_3(iy)}\,dy,\ \ R\longrightarrow\infty.$$

Положим $z=t_1+it_2,\ \lambda=y_1-iy_2$, тогда последнее соотношение с учетом (2.1.6) имеет вид

$$A_R(t)\longrightarrow\int e^{\mathrm{Re}\ \lambda z-\widetilde{\varphi}_3(\lambda)}\,dm(\lambda)=K_0(\varphi_3,z),\ \ R\longrightarrow\infty.$$

Таким образом, для любой функции $g\in H(D,\varphi)$ имеет место сходимость в норме пространства W_3^2 $(z=t_1+it_2)$

$$\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}A_R(t)\longrightarrow g(z),\ \ R\longrightarrow\infty.$$

Следовательно,

$$S(g)=\lim_{R\longrightarrow\infty}\int\limits_{|y|\le R} S_y\left(\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}\right)e^{-\Phi_3(iy)}\,dy=$$

$$=\lim_{R\longrightarrow\infty}\int\limits_{|y|\le R} S_0\left(\frac{g(z)e^{(t,y)-\Phi_3(iy))}}{K_0(\varphi_3,z)}\right)dy=\lim_{R\longrightarrow\infty}S_0\left(\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}A_R(t)\right)=$$

$$=S_0\left(\lim_{R\longrightarrow\infty}\frac{g(z)}{K_0(\varphi_3,z)}A_R(t)\right)=S_0(g(z)).$$

В частности,

$$S(e^{\lambda z})=S_0(e^{\lambda z}).$$

Целая функция $S_0(e^{-i(t,w)})$ по построению совпадает с целой функцией $f(w)$ на мнимом подпространстве, а $S_0(e^{\lambda z})$ — сужение этой функции на подпространство Σ. Значит $S(e^{\lambda z}) = F(\lambda)$.

Пусть теперь F — произвольная функция из $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})$, S — функционал на $H(D, \varphi)$, построенный выше. Если $\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda_0) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \widetilde{\varphi}_{10}(\lambda)$, то функция $\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0))$ возрастающая по $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Для $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$ положим $F_\alpha(\lambda) = F(\lambda_0 + \alpha(\lambda - \lambda_0))$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть $R_\varepsilon > 0$, такое что

$$\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|\geq\frac{R_\varepsilon}{2}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda)}\, dm(\lambda) < \varepsilon$$

Тогда

$$\int\limits_{|\lambda-\lambda_0|\geq\frac{R_\varepsilon}{2}} |F_\alpha(\lambda)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda)}\, dm(\lambda) = \frac{1}{\alpha^2} \int\limits_{|w-\lambda_0|\geq\frac{\alpha R_\varepsilon}{2}} |F(w)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_{10}(\lambda_0+\frac{1}{\alpha}(w-\lambda_0))}\, dm(w) \leq$$

$$\leq 4 \int\limits_{|w-\lambda_0|\geq R_\varepsilon} |F(w)|^2 e^{-2\widetilde{\varphi}_{10}(w)}\, dm(w) < 4\varepsilon.$$

Следовательно, интегралы, определяющие норму $\|F_\alpha\|$, сходятся равномерно по $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$. Поскольку при $\alpha \longrightarrow 1$ функции F_α равномерно на компактах стремятся к F, то $F_\alpha \longrightarrow F$ при $\alpha \longrightarrow 1$ в норме пространства $H_2(\widetilde{\varphi})$. Очевидно,

$$|F_\alpha(\lambda)| \prec e^{\alpha H_D(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

и по доказанному выше каждая функция F_α является преобразованием Фурье–Лапласа функционала S_α:

$$S_\alpha(e^{\lambda z}) = F_\alpha(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

и при этом

$$\|S - S_\alpha\| \leq C\|F - F_\alpha\|,$$

поэтому

$$S(e^{\lambda z}) = \lim_{\alpha\longrightarrow 1} S_\alpha(e^{\lambda z}) = \lim_{\alpha\longrightarrow 1} F_\alpha(\lambda) = F(\lambda).$$

Теорема 2.1.1 доказана.

Теорема 2.1.2. *Пусть φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, содержащей точку $z = 0$. Предположим, что сопряженные по Юнгу функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условию типа (2.1.1) с постоянной $b > 12$ и для некоторых постоянных c_n выполняются соотношения*

$$\widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|) + c_n \le \widetilde{\varphi}_n(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к индуктивному пределу нормированных пространств $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, пространством и проективным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$;*

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к проективному пределу нормированных пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, пространством и индуктивным пределом пространств $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство теоремы 2.1.2.

Введем обозначения

$$\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H(D, \varphi_n),\ \mathcal{P} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n).$$

Как известно (см. [17, предложение 5, стр. 66]),

$$\mathcal{H}^* = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H(D, \varphi_n) \right)^* = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H^*(D, \varphi_n)$$

и это алгебраическое равенство есть топологический изоморфизм, если на пространстве справа рассматривать топологию канонического проективного предела. Поэтому утверждение первого пункта теоремы вытекает из теоремы 2.1.1.

Утверждение второго пункта следует из первого. В самом деле, если S — линейный непрерывный функционал на $\mathcal{P}$, то S продолжается до линейного непрерывного функционала на одном из составляющих пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, тогда

$$|\widehat{S}(z)| \le \|S\| \|e^{\lambda z}\| = \|S\| \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} e^{\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)} = \|S\| e^{\varphi_n(z)},$$

то есть $\widehat{S} \in H(D, \varphi_n)$ и отображение $L : \mathcal{P}^* \longrightarrow \mathcal{H}$ непрерывно. Инъективность этого отображения следует из полноты системы экспонент $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ в пространстве $\mathcal{P}$. Докажем сюръективность. Для произвольной функции $f \in \mathcal{H}$ определим линейный функционал S_f на $\mathcal{P}$ по формуле

$$S_f(F) = L^{-1}(F)(f),\ F \in \mathcal{P}.$$

Из непрерывности L^{-1} следует, что S_f — непрерывный функционал. Поскольку при фиксированном $z \in D$ $L^{-1}(e^{\lambda z}) = \delta_z$, то

$$\widehat{S}_f(w) = L^{-1}(e^{\lambda w})(f) = \delta_w(f) = f(w),\ w \in D.$$

Теорема 2.1.2 доказана.

Теорема 2.1.3. *Пусть φ_n, $n \in \mathbb{N}$, — убывающая последовательность выпуклых функций на ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$, содержащей точку $z = 0$. Предположим, что сопряженные по Юнгу функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условию типа (2.1.1) с постоянной $b > 12$ и для некоторых постоянных c_n выполняются соотношения*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) + \ln(1 + |\lambda|) + c_n \le \widetilde{\varphi}_{n+1}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к проективному пределу нормированных пространств $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, пространством и индуктивным пределом пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$;*

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным к индуктивному пределу нормирован-*

ных пространств $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *пространством и проективным пределом пространств* $H(D, \varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 2.1.3.

По [17, предложение 6, стр. 66]

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H(D,\varphi_n)\right)^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H^*(D,\varphi_n)$$

и это алгебраическое равенство есть топологический изоморфизм, если на пространстве справа рассматривать топологию канонического индуктивного предела. Поэтому утверждение теоремы снова вытекает из теоремы 2.1.1.

Теорема 2.1.3 доказана.

Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, и пусть $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел. Обозначим через $H(D, \mathcal{M})$ пространство типа классов Карлемана, состоящее из аналитических в D функций f, для которых

$$\|f\| = \sup_{n\geq 0} \sup_{z\in D} \frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n} < \infty.$$

Тогда $H(D, \mathcal{M})$ — банахово пространство, в котором система $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна. Функция

$$T(r) = \sup_{n\geq 0} \frac{r^n}{M_n},\ r \geq 0,$$

называется функцией следа последовательности $\mathcal{M}$. $H_D(\lambda) = \sup_{z\in D} \operatorname{Re} \lambda z$ — опорная функция области D. Для $a \in \mathbb{R}$ обозначим

$$\psi_a(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - a \ln(1 + |\lambda|)).$$

Всюду далее будем считать, что последовательности удовлетворяют условию "неквазианалитичности"

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty, \tag{2.1.11}$$

которое по теореме Данжуа–Карлемана (см. [67], [76], [75]) равносильно условию на функцию следа

$$\int^{\infty} \frac{\ln T(r)\, dr}{r^2} < \infty. \tag{2.1.12}$$

Положим $M_n = M_0$ для $-n \in \mathbb{N}$ и пусть

$$T_k(r) = \sup_{n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}} \frac{r^n}{M_{n+k}}, \; k \in \mathbb{Z},$$

— функции следа последовательностей со сдвигом $\mathcal{M}_k = (M_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.

Следующие свойства опорных функций и функций следа логарифмически выпуклых последовательностей доказаны в работе [60] (см. леммы 1.1 и 1.2).

Утверждение 2.1.3. 1. *Опорная функция ограниченной выпуклой области удовлетворяет условию Липшица*

$$|H_D(\lambda_1) - H_D(\lambda_2)| \le \sup_{z \in D} |z| \cdot |\lambda_1 - \lambda_2|, \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

2. *При любых $k, m \in \mathbb{Z}$*

$$T_k(r) = r^{m-k} T_m(r), \; r \ge r(k, m).$$

3. *Если последовательность логарифмически выпукла и удовлетворяет условию (2.1.11), то*

3a) *сходятся интегралы*

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln T_k(r)\, dr}{r^2} := \sigma_k, \; k \in \mathbb{Z},$$

в частности,

$$\ln T_k(r) = o(r), \; r \longrightarrow \infty;$$

3b) *функция $\ln T_k(|\lambda|)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|\ln T_k(|\lambda_1|) - \ln T_k(|\lambda_2|)| \le 2\sigma_k |\lambda_1 - \lambda_2|, \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Теорема 2.1.4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку 0, $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (2.1.11). Тогда*

1) если S — линейный непрерывный функционал на $H(D, \mathcal{M})$ и $\widehat{S}(\lambda)$ — преобразование Фурье–Лапласа этого функционала:

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}), \ \lambda \in \mathbb{C},$$

то $\widehat{S} \in H(\mathbb{C}, \psi_0)$ и

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\psi_0)} \le \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})};$$

2) существует $\alpha > 0$, не зависящее от области D и последовательности $\mathcal{M}$, такое что для любой целой функции $F \in H(\mathbb{C}, \psi_\alpha)$ существует единственный линейный непрерывный функционал S на $H(D, \mathcal{M})$, для которого функция F является его преобразованием Фурье–Лапласа, и

$$\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})} \le C\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_\alpha)},$$

где константа $C > 0$ зависит только от области D и последовательности $\mathcal{M}$.

Для доказательства теоремы 2.1.4 нам понадобятся несколько предварительных утверждений.

Для целой функции экспоненциального типа

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\lambda^k, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

через γ_F обозначим функцию, ассоциированную с ней по Борелю

$$\gamma_F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+1}}.$$

Для $q \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $a \in \mathbb{R}$ введем билинейную форму на $H(D, \mathcal{M}) \times H(\mathbb{C}, \psi_a)$:

$$\mathcal{A}_q(f, F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\left(\frac{1}{q}D\right)} f(qz)\gamma_F(z)\, dz, \tag{2.1.13}$$

где $\frac{1}{q}D = \left\{\frac{z}{q},\ z \in D\right\}$.

Лемма 2.1.3. *Найдется константа $C > 0$, такая что для целой функции F, имеющей вид $F = Gg$, где целые функции G, g при некотором $M > 0$ удовлетворяют оценкам*

$$|G(\lambda)| \le Me^{H_D(\lambda)-2\ln(1+|\lambda|)},\ |g(\lambda)| \le M\frac{T_0(|\lambda|)}{1+|\lambda|},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

имеет место оценка

$$|\mathcal{A}_q(f,F)| \le CM^2\|f\|,\ f \in H(D,\mathcal{M}),\ q \in \left(\frac{1}{2};1\right),$$

и существует предел $\lim_{q\nearrow 1}\mathcal{A}_q(f,F)$.

Доказательство леммы 2.1.3.

Функция γ_G будет непрерывной на множестве $\mathbb{C}\setminus D$ и, кроме того,

$$sup_{\zeta\in\mathbb{C}\setminus D}|\gamma_G(\zeta)| \le C_1M. \tag{2.1.14}$$

Если

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\lambda^n,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

то по формулам Коши и по логарифмической выпуклости последовательности $\mathcal{M}$ имеем

$$|g_n| \le \inf_{r>0}\frac{1}{r^n}\max_{|\lambda|=r}|g(\lambda)| \le M\inf_{r>0}\frac{T_0(r)}{r^{n+1}} = \frac{M}{M_{n+1}},\ n = 0,1,2,\ \ldots\ . \tag{2.1.15}$$

В частности,

$$\gamma_F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n g_n\gamma_G^{(n)}(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{C}\setminus\overline{D}.$$

Интегрированием по частям получим

$$\mathcal{A}_q(f,F) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\left(\frac{1}{q}D\right)}\gamma_G(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}g_nq^nf^{(n)}(q\zeta)\,d\zeta.$$

Функции $f_n(q,z) = g_n q^n f^{(n)}(qz)$ равномерно непрерывны на компакте $[\frac{1}{2};1]\times\overline{D}$, а ряд

$$f(q,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(q,z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n q^n f^{(n)}(qz)$$

в силу оценок (2.1.15) равномерно на этом компакте сходится, поэтому существует

$$f(1,z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1,z) = \sum_{n} g_n f^{(n)}(z),$$

причем, так как последовательность $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию (2.1.11), то

$$|f(q,z)| \le M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} \frac{|f^{(n)}(z)|}{M_n} \le C_2 M \|f\|.$$

Таким образом, учитывая (2.1.14), получим существование предела

$$\lim_{q\nearrow 1} \mathcal{A}_q(f,F),$$

и

$$|\mathcal{A}_q(f,F)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\left(\frac{1}{q}D\right)} |\gamma_G(\zeta)| \cdot |f(q,\zeta)|\, |d\zeta| \le CM^2\|f\|.$$

Лемма 2.1.3 доказана.

Лемма 2.1.4. *Существует $\alpha > 0$, такое что для любой ограниченной выпуклой области комплексной плоскости D, содержащей точку $z = 0$, и для любой неубывающей логарифмически выпуклой последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (2.1.11), для билинейной формы, определенной в (2.1.13), существует предел*

$$\mathcal{A}(f,F) = \lim_{q\nearrow 1} \mathcal{A}_q(f,F),\ (f,F) \in H(D,\mathcal{M}) \times H(\mathbb{C},\psi_\alpha),$$

и форма $\mathcal{A}(f,F)$ непрерывна, то есть для некоторой постоянной $C > 0$

$$|\mathcal{A}(f,F)| \le C\|f\|_{\mathcal{M}}\|F\|_{\psi_\alpha},\ f \in H(D,\mathcal{M}),\ F \in H(\mathbb{C},\psi_\alpha).$$

Доказательство леммы 2.1.4.

Функции $u_1(\lambda) = H_D(\lambda)$, $u_2(\lambda) = \ln T_0(|\lambda|)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3. Относительно функции $H_D(\lambda)$ это следует из первого пункта утверждения 2.1.3. Липшицевость функции $\ln T(|\lambda|)$ следует из пункта 3b) утверждения 2.1.3, а условие (1.25) на ассоциированную меру — из формулы Йенсена и из соотношения (2.1.12). Для целой функции f и $\delta > 0$ обозначим $E(\delta, f) := \bigcup_{\zeta\in N(f)} B(\zeta, \delta(1+|\zeta|)^{-1})$. По теореме 1.3 найдется постоянная $B_0 > 0$ и целые функции f_1, f_2, удовлетворяющие условиям: круги $B_\delta(\zeta) = B(\zeta, \delta(1+|\zeta|)^{-1})$, $\zeta \in N(f_1 f_2)$, попарно не пересекаются и для некоторых постоянных C, C' выполняются оценки

$$H_D(\lambda) - B_0 \ln(1+|\lambda|) - C \le \ln|f_1(\lambda)| \le H_D(\lambda),\ \lambda \notin E(\delta, f_1), \tag{2.1.16}$$

$$\ln T_0(|\lambda|) - B_0 \ln(1+|\lambda|) - C' \le \ln|f_2(\lambda)| \le \ln T_0(|\lambda|),\ \lambda \notin E(\delta, f_2), \tag{2.1.17}$$

$$H_D(\lambda) - B_0 \ln(1+|\lambda|) - C \le \ln|f_1'(\lambda)| \le H_D(\lambda),\ \lambda \in N(f_1), \tag{2.1.18}$$

$$\ln T_0(|\lambda|) - B_0 \ln(1+|\lambda|) - C' \ln|f_2'(\lambda)| \le \ln T_0(|\lambda|),\ \lambda \in N(f_2). \tag{2.1.19}$$

Пусть $\zeta_n,\ n \in \mathbb{N}$, — нули функции f_2 и

$$g_0(\lambda) = \frac{f_2(\lambda)}{(\lambda-\zeta_1)(\lambda-\zeta_2)(\lambda-\zeta_3)}.$$

Тогда в силу соотношений (2.1.17), (2.1.19) функция g_0 при некотором $c > 0$ удовлетворяет оценкам

$$-(B_0+3)\ln(1+|\lambda|) - c \le \ln|g_0(\lambda)| - \ln T_0(|\lambda|) \le -3\ln(1+|\lambda|) + c,\ \lambda \notin E(\delta, g_0), \tag{2.1.20}$$

$$-(B_0+3)\ln(1+|\lambda|) - c \le \ln|g_0'(\lambda)| - \ln T_0(|\lambda|) \le -3\ln(1+|\lambda|) + c,\ \lambda \in N(g_0). \tag{2.1.21}$$

Целая функция $L = f_1 g_0$ удовлетворяет соответственно оценкам

$$H_D(\lambda) + \ln T_0(|\lambda|) - (2B_0+3)\ln(1+|\lambda|) - c \le \ln|L(\lambda)|,\ \lambda \notin E(\delta, L), \tag{2.1.22}$$

$$H_D(\lambda) + \ln T_0(|\lambda|) - (2B_0+3)\ln(1+|\lambda|) - c \le \ln|L'(\lambda)|,\ \lambda \in N(L). \tag{2.1.23}$$

Исключительное множество $E(\delta, L)$ состоит из непересекающихся кругов малых радиусов, поэтому можно найти замкнутые спрямляемые кривые Γ_m, $m \in \mathbb{N}$, не пересекающиеся с $E(\delta, L)$, такие что

$$|\Gamma_m| = O\left(\min_{z\in\Gamma_m} |z|\right) \to \infty,\ m \to \infty.$$

Положим $\alpha = 2B_0 + 5$. Возьмем функцию $F \in H(\mathbb{C}, \psi_\alpha)$. В силу оценки (2.1.22) и выбора α выполняется соотношение

$$\left|\frac{F(\lambda)}{L(\lambda)}\right| \prec \frac{1}{(1+|\lambda|)^2},\ \lambda \in \Gamma_m.$$

Тем самым,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} \frac{F(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda - z)L(\lambda)}\right| \longrightarrow 0,\ m \longrightarrow \infty.$$

Это значит, что ряд Лагранжа функции F по функции L сходится к самой функции F:

$$F(\lambda) = \sum_{\zeta\in N(L)} \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)(\lambda-\zeta)} L(\lambda). \tag{2.1.24}$$

Оценим $|F(\zeta)/L'(\zeta)|$, $\zeta \in N(L)$, на основании соотношения (2.1.23):

$$\left|\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\right| \prec \|F\|_{\psi_\alpha}(1+|\zeta|)^{-\alpha+2B_0+3} \prec (1+|\zeta|)^{-2},\ \zeta \in N(L). \tag{2.1.25}$$

Функции $\frac{L(\lambda)}{(\lambda-\zeta)}$, $\zeta \in N(L)$, удовлетворяют условиям леммы 2.1.3. В самом деле, если $f_1(\zeta) = 0$ и ζ', ζ'' — нули функции f_1, отличные от ζ, например, наименьшие по модулю, то положим

$$G(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda-\zeta)(\lambda-\zeta')(\lambda-\zeta'')},\ g(\lambda) = (\lambda-\zeta'')(\lambda-\zeta')g_0(\lambda).$$

Тогда по соотношениям (2.1.16), (2.1.20) имеем оценки

$$|G(\lambda)| \le Me^{H_D(\lambda)-2\ln(1+|\lambda|)},\ |g(\lambda)| \le M\frac{T_0(|\lambda|)}{1+|\lambda|},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

причем с постоянной M, не зависящей от точки $\zeta \in N(L)$. Аналогично, если $g_0(\zeta) = 0$, то положим

$$G(\lambda) = \frac{f_1(\lambda)}{(\lambda-\zeta')(\lambda-\zeta'')},\ g(\lambda) = \frac{(\lambda-\zeta'')(\lambda-\zeta')g_0(\lambda)}{\lambda-\zeta},$$

и для этих функций выполняются такие же оценки. По утверждению леммы 2.1.3

$$\left|\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right)\right| \le CM^2\|f\|_{\mathcal{M}},\ f\in H(D,\mathcal{M}),\ q\in\left(\frac{1}{2};1\right),\ \zeta\in N(L). \quad (2.1.26)$$

Из представления (2.1.24) следует

$$\mathcal{A}_q(f,F) = \sum_{\zeta\in N(L)} \frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda-\zeta}\right),$$

сходимость этого ряда получим из (2.1.25) и (2.1.26):

$$|\mathcal{A}_q(f,F)| \le \sum_{\zeta\in N(L)} \left|\frac{F(\zeta)}{L'(\zeta)}\right| \left|\mathcal{A}_q\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda-\zeta}\right)\right| \le$$

$$\le \mathrm{Const}\cdot M^2\|f\|_{\mathcal{M}}\|F\|_{\psi_\alpha}\sum_{\zeta\in N(L)}\frac{1}{(1+|\zeta|)^2},$$

$$f\in H(D,\mathcal{M}),\ q\in\left(\frac{1}{2};1\right),\ F\in H(\mathbb{C},\psi_\alpha).$$

Переходя к пределу при $q\longrightarrow 1$, получим утверждение леммы 2.1.4.

Лемма 2.1.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.1.4.

1) Пусть $S\in H^*(D,\mathcal{M})$, $f\in H(D,\mathcal{M})$. Тогда

$$|S(f)| \le \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}\cdot\|f\|_{H(D,\mathcal{M})}.$$

Применив последнее неравенство к $f(z)=e^{\lambda z}$, получим

$$|\widehat{S}(\lambda)| \le \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}\cdot e^{H_D(\lambda)}T(|\lambda|) = \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}\cdot e^{\psi_0(\lambda)}.$$

Следовательно,

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\psi_0)} \le \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}.$$

2) Пусть $F\in H(\mathbb{C},\psi_\alpha)$, где α выбрано как в лемме 2.1.4. Тогда по этой лемме выражение

$$S(f)=\mathcal{A}(f,F)$$

— линейный непрерывный функционал на $H(D,\mathcal{M})$, причем

$$\mathcal{A}(e^{\lambda z},F)=\lim_{q\nearrow 1}\mathcal{A}_q(e^{\lambda z},F)=\lim_{q\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\left(\frac{1}{q}D\right)} e^{q\lambda z}\gamma_F(z)\,dz=F(\lambda).$$

Из леммы 2.1.4 также следует оценка нормы этого функционала.

Теорема 2.1.4 доказана.

Из теоремы 2.1.4 выведем теоремы об описании сопряженных для индуктивных и проективных пределов.

Теорема 2.1.5. *Пусть* $\mathcal{M}^{(k)}=\{M_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $k\in\mathbb{N}$, *— неубывающие логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию*

$$M_n^{(k+1)}\ge M_{n+1}^{(k)},\ \ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Обозначим $T_k(r)=\sup_{n\ge 0}\frac{r^n}{M_n^{(k)}}$, $r\ge 0$, *функцию следа последовательности* $\mathcal{M}^{(k)}$ *и пусть*

$$\psi_k(\lambda)=H_D(\lambda)+\ln T_k(|\lambda|),\ \ k\in\mathbb{N}.$$

Предположим, что каждая из последовательностей удовлетворяет условию (2.1.11). *Тогда*

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к индуктивному пределу пространств* $H(D,\mathcal{M}^{(k)})$, $k\in\mathbb{N}$, *и проективным пределом пространств* $H(\mathbb{C},\psi_k)$, $k\in\mathbb{N}$;

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств* $H(\mathbb{C},\psi_k)$, $k\in\mathbb{N}$, *и индуктивным пределом пространств* $H(D,\mathcal{M}^{(k)})$, $k\in\mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 2.1.5.

Очевидно,что

$$\left(\bigcup_k H(D,\mathcal{M}^{(k)})\right)^*=\bigcap H^*(D,\mathcal{M}^{(k)}),$$

(см. [17, предложение 5, стр. 66]) причем это алгебраическое равенство можно понимать как топологический изоморфизм. То, что преобразование Фурье–Лапласа непрерывно отображает сопряженное пространство в проективный предел пространств $H(\mathbb{C}, \psi_k)$ следует из первого пункта теоремы 2.1.4. Сюръективность преобразование Фурье–Лапласа как отображения из сопряженного пространства вытекает из второго пункта теоремы 2.1.4.

Вторую часть данной теоремы получим из леммы 2.1.4

Теорема 2.1.5 доказана.

Теорема 2.1.6. *Пусть* $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_n^{(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, *— неубывающие логарифмически выпуклые последовательности положительных чисел, удовлетворяющие условию*

$$M_n^{(k+1)} \leq M_{n-1}^{(k)}, \; n \in \mathbb{N}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Предположим, что каждая из последовательностей удовлетворяет условию (2.1.11). *Тогда*

1) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к проективному пределу пространств* $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, *и индуктивным пределом пространств* $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$;

2) *преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между сильно сопряженным пространством к индуктивному пределу пространств* $H(\mathbb{C}, \psi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, *и проективным пределом пространств* $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$.

Эта теорема также следует из теоремы 2.1.4 как и теорема 2.1.5.

2.2. Инвариантная оболочка и инвариантное ядро нормированных пространств аналитических функций

Пусть E — некоторое нормированное подпространство в $H(D)$. Инвариантной оболочкой $\mathcal{E}_i$ этого пространства будем называть наименьшее линейное пространство, инвариантное относительно дифференцирования и содержащее пространство E. Инвариантным ядром $\mathcal{E}_p$ будем называть наибольшее линейное пространство, инвариантное относительно дифференцирования и содержащееся в пространстве E.

В данном параграфе мы дадим весовое описание инвариантных оболочки и ядра для пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$.

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 2.2.1. *Пусть $u(\lambda)$ — непрерывная субгармоническая функция на плоскости и*

$$\overline{\lim}_{|\lambda|\to\infty}\frac{u(\lambda)}{|\lambda|}<\infty.$$

Положим

$$u_n(\lambda)=u(\lambda)+n\ln(1+|\lambda|),\ \ \lambda\in\mathbb{C}, n\in\mathbb{Z}.$$

Тогда

1) *наименьший модуль над кольцом многочленов, содержащий пространство $H(\mathbb{C},u)$, совпадает с $\bigcup_{n=1}^{\infty}H(\mathbb{C},u_n)$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор умножения на многочлен действует непрерывно в этом пространстве;*

2) *наибольший модуль над кольцом многочленов, содержащийся в $H(\mathbb{C},u)$ совпадает с $\bigcap_{n=1}^{\infty}H(\mathbb{C},u_{-n})$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор умножения на многочлен действует непрерывно в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 2.2.1.

Пусть X — некоторый модуль над кольцом многочленов, $H(\mathbb{C},u) \subset X$ и $F \in H(\mathbb{C},u_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Если эта функция имеет по меньшей мере n нулей $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_n$, то функция

$$g(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1) \ \dots \ (\lambda - \lambda_n)}$$

принадлежит $H(\mathbb{C},u) \subset X$, значит $F(\lambda) = g(\lambda)(\lambda - \lambda_1) \ \dots \ (\lambda - \lambda_n)$ принадлежит X. В противном случае $F(\lambda) \equiv P(\lambda)e^{\lambda_0 \lambda}$, где P — многочлен степени $k < n$, $m = n - k > 0$. Следовательно, $e^{\lambda_0 \lambda} \in H(\mathbb{C},u_m)$. Возьмем произвольную функцию $f \in H(\mathbb{C},u)$. Если функция $e^{\lambda_0 \lambda} - f(\lambda)$ имеет m нулей $\lambda_1, \lambda_2, \ \dots \ , \lambda_m$, то функция

$$g(\lambda) = \frac{e^{\lambda_0 \lambda} - f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1) \ \dots \ (\lambda - \lambda_m)}$$

принадлежит $H(\mathbb{C},u) \subset X$, значит, $e^{\lambda_0 \lambda} = f(\lambda) + g(\lambda)(\lambda - \lambda_1) \ \dots \ (\lambda - \lambda_m)$ принадлежит X, тем самым и $F(\lambda) \equiv P(\lambda)e^{\lambda_0 \lambda}$ принадлежит X. Если же нулей функции $e^{\lambda_0 \lambda} - f(\lambda)$ меньше m, то $e^{\lambda_0 \lambda} - f(\lambda) = P_1 e^{\lambda_1 \lambda}$, где P_1 — некоторый многочлен степени меньше m. Повторяя рассуждения с функцией $2f$, получим

$$f(\lambda) = e^{\lambda_0 \lambda} - P_1 e^{\lambda_1 \lambda}, \ 2f(\lambda) = e^{\lambda_0 \lambda} - P_2 e^{\lambda_2 \lambda}, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

где P_2 — некоторый многочлен степени меньше m. Тогда

$$e^{\lambda_0 \lambda} - 2P_1(\lambda)e^{\lambda_1 \lambda} + P_2(\lambda)e^{\lambda_2 \lambda} \equiv 0, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Система квазиполиномов $e^{\lambda_0 \lambda}, \ P_1(\lambda)e^{\lambda_1 \lambda}, \ P_2(\lambda)e^{\lambda_2 \lambda}$ линейно независима, если среди показателей $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ есть хотя бы два различных. Таким образом, $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$ и $H(\mathbb{C},u) = \{e^{\lambda_0 \lambda} P(\lambda), \ \deg P < m\}$. Отсюда $u(\lambda) \geq \operatorname{Re} \lambda_0 \lambda + (m-1)\ln(1 + |\lambda|)$ и $e^{\lambda_0 \lambda} \in H(\mathbb{C},u)$, поэтому $F(\lambda) \equiv P(\lambda)e^{\lambda_0 \lambda}$ принадлежит X. Первое утверждение леммы доказано.

Пусть $Y \subset H(\mathbb{C},u)$ — модуль над кольцом многочленов и $F \in Y$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $\lambda^n F(\lambda) \in Y \subset H(\mathbb{C},u)$, значит

$$|\lambda|^n |F(\lambda)| \leq C_n e^{u(\lambda)}, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $F \in \bigcap_n H(\mathbb{C}, u_{-n})$.

Теорема 2.2.1 доказана.

Теорема 2.2.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$. Для выпуклой в D функции φ и $a \in \mathbb{R}$ положим*

$$\widetilde{\varphi}_a(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - a\ln(1 + |\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\varphi_a(z) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\operatorname{Re}\,\lambda z - \widetilde{\varphi}_a(\lambda)),\ z \in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ выполняются условия

$$\sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_n(y)}{\partial y_j \partial y_k} a_j a_k \geq \frac{b_n}{1 + |y|^2}|a|^2,\ a, y \in \mathbb{R}^2,\ |y| \geq R,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.1}$$

Тогда

1) *инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D, \varphi)$ пространства $H(D, \varphi)$ совпадает с $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D, \varphi_n)$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро $\mathcal{H}_p(D, \varphi)$ пространства $H(D, \varphi)$ совпадает с $\bigcap_{-n\in\mathbb{N}} H(D, \varphi_n)$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 2.2.2.

Докажем сначала вспомогательную лемму.

Для $m \in \mathbb{N}$ определим оператор

$$A_m(F) = \frac{1}{\lambda^m}\left(F(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!}\lambda^k\right),\ F \in H(\mathbb{C}).$$

Лемма 2.2.1. *Пусть $u(\lambda)$ — субгармоническая функция на плоскости, такая что любой многочлен принадлежит пространству $H(\mathbb{C}, u)$, и*

$$u_n(\lambda) = u(\lambda) + n\ln(1 + |\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Оператор A_m непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C}, u_n)$ в пространство $H(\mathbb{C}, u_{n-m})$.

Доказательство леммы 2.2.1.

Очевидно, что точечные функционалы $\delta_\lambda : F \longrightarrow F(\lambda)$ являются линейными и непрерывными на каждом пространстве $H(\mathbb{C}, u_k)$ с оценкой нормы

$$\|\delta_\lambda\|_{H^*(\mathbb{C},u_k)} \le e^{u_k(\lambda)}.$$

По формуле Коши для $|\lambda| \le 1$, $s \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ имеем

$$\left|\frac{F^{(s)}(\lambda)}{s!}\right| \le 2\max_{|w|\le 2}|F(w)| \le 2\max_{|w|\le 2}\|\delta_w\|_{H^*(\mathbb{C},u_k)}\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)} \le$$

$$\le 2\exp(\max_{|w|\le 2}u_k(w))\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)} := 2\sigma_k\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)}. \tag{2.2.2}$$

Значит, для функции $F_m = A_m(F)$ при $|\lambda| = 1$ верна оценка

$$|F_m(\lambda)| \le \max_{|w|\le 1}|F(w)| + \sum_{s=0}^{m-1}\frac{|F^{(s)}(0)|}{s!} \le 2(m+1)\sigma_k\|F\|_{H(\mathbb{C},u_k)},$$

которая по принципу максимума продолжается на единичный круг, следовательно,

$$\sup_{|\lambda|\le 1}|F_m(\lambda)|e^{-u_{n-m}(\lambda)} \le \sup_{|\lambda|\le 1}e^{-u_{n-m}(\lambda)}\cdot 2(m+1)\sigma_n\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}. \tag{2.2.3}$$

Для $|\lambda| \ge 1$ из (2.2.2) следует (при $k = n$)

$$|F_m(\lambda)| \le \frac{2^m}{(1+|\lambda|)^m}(|F(\lambda)| + 2m\sigma_n\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}|\lambda|^{m-1}).$$

Поэтому

$$\sup_{|\lambda|\ge 1}|F_m(\lambda)|e^{-u_{n-m}(\lambda)} \le 2^m\sup_{|\lambda|\ge 1}|F(\lambda)|e^{-u_n(\lambda)}+$$

$$+2^{m+1}m\sigma_n\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}\sup_{|\lambda|\ge 1}|\lambda|^{m-1}e^{-u_n(\lambda)} \le 2^m\left(1+2m\sigma_n\|\lambda^{m-1}\|_{H(\mathbb{C},u_n)}\right)\|F\|_{H(\mathbb{C},u_n)}.$$

Отсюда и из (2.2.3) следует непрерывность оператора

$$A_m : H(\mathbb{C}, u_n) \longrightarrow H(\mathbb{C}, u_{n-m}).$$

Лемма 2.2.1 доказана.

Система $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна в пространстве $H(D,\varphi)$, следовательно, преобразование Фурье–Лапласа, которое каждому функционалу $S \in H^*(D,\varphi)$ ставит в соответствие функцию $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$, инъективно отображает $H^*(D,\varphi)$ в пространство целых функций. Образ этого отображения обозначим через $\widehat{H}(D,\varphi)$ и введем в нем наведенную структуру нормированного пространства:

$$\|\widehat{S}\|_{\widehat{H}(D,\varphi)} = \|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

По теореме 2.1.1 любая функция $F \in H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})$ является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого функционала $S \in H^*(D,\varphi)$ и

$$\|S\|_{H^*(D,\varphi)} \le M\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})}.$$

Следовательно, пространство $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})$ непрерывно вложено в пространство $\widehat{H}(D,\varphi)$. Из леммы 2.2.1 следует, что оператор A_m непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})$ в пространство $\widehat{H}(D,\varphi)$.

1. Докажем первый пункт теоремы 2.2.2.

1a. Докажем, что любое инвариантное пространство $Y \supset H(D,\varphi)$ содержит и пространство $\bigcup_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$. Пусть $f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ функция $f \in H(D,\varphi_n)$. Через $\widehat{H}(D,\varphi_n)$ обозначим пространство преобразований Фурье–Лапласа с наведенной структурой гильбертового пространства. По свойствам преобразования Фурье–Лапласа $f(z) = \widehat{S}(z)$ для некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\widehat{H}(D,\varphi_n)$. Вложение

$$H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10+n}) \subset \widehat{H}(D,\varphi_n)$$

непрерывно. Оператор A_{10+n} непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})$ в пространство $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10+n})$. Поэтому функционал

$$S_1(F) = S(A_{10+n}(F)),\ \ F \in H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}),$$

является линейным и непрерывным функционалом на $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})$. Если $g(z) := S_1(e^{\lambda z})$, то

$$|g(z)| \le \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})}\|e^{\lambda z}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})} = \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})}e^{\varphi(z)},\ z\in D,$$

то есть $g \in H(D,\varphi)\subset Y$. Поскольку

$$g^{(10+n)}(z) = \frac{\partial^{10+n}}{\partial z^{10+n}}S\left(\frac{1}{\lambda^{10+n}}\left(e^{\lambda z}-\sum_{s=0}^{n+9}\frac{z^s}{s!}\lambda^s\right)\right) = S(e^{\lambda z}) = f(z),$$

то $f\in Y$. Значит, $\bigcup_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)\subset Y$.

1b. Докажем, что пространство $\bigcup_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$ инвариантно относительно дифференцирования. Пусть $f\in\bigcup_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$. По теореме 2.1.2 (пункт 2) функция f является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого функционала S на проективном пределе пространств $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n)$. В силу непрерывности оператора умножения на λ на этом проективном пределе функционал

$$S_1(F) = S(\lambda^n F),\ F\in\bigcap_n H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n),$$

будет линейным и непрерывным. При этом $\widehat{S}_1(z) = f^{(n)}(z)$. Снова по теореме 2.1.2 $f^{(n)}\in\bigcup_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$.

2. Докажем второй пункт теоремы 2.2.2.

2a. Пусть $X\subset H(D,\varphi)$ — пространство, инвариантное относительно дифференцирования и $f\in X$. Тогда $f^{(m)}\in X\subset H(D,\varphi)$ для любого $m\in\mathbb{N}$. По свойствам преобразования Фурье–Лапласа $f^{(m)}(z) = \widehat{S}(z)$ для некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\widehat{H}(D,\varphi)$. Пусть

$$S_1(F) = S(A_m(F)) = A^*(S)(F),\ F\in H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m}),$$

— линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})$, являющийся образом функционала S при сопряженном операторе A_m^*. Положим $g(z) = \widehat{S}_1(z) = S_1(e^{\lambda z})$. Тогда

$$g^{(m)}(z) = \frac{\partial^m}{\partial z^m}S\left(\frac{1}{\lambda^m}\left(e^{\lambda z}-\sum_{s=0}^{m-1}\frac{z^s}{s!}\lambda^s\right)\right) = S(e^{\lambda z}) = f^{(m)}(z).$$

Следовательно,

$$f(z) = g(z) + p(z),\ z \in D,$$

для некоторого многочлена $p(z)$ степени не выше $m-1$. По определению для всех $z \in D$

$$|g(z)| = |\widehat{S}_1(z)| \le \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})} \|e^{\lambda z}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})} = \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10-m})} e^{\varphi_{10-m}(z)}.$$

Это значит, что $g \in H(D, \varphi_{10-m})$ при любом m. Так как многочлены лежат во всех пространствах $H(D,\varphi_k)$, то $f \in H(D,\varphi_{10-m})$ при любом m и $f \in \bigcap_{-n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$.

2b. То, что пространство $\bigcap_{-n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$ инвариантно относительно дифференцирования доказывается так же, как в пункте 1b.

Теорема 2.2.2 доказана.

Пусть $d(z)$ — расстояние от точки $z \in D$ до границы D. Если весовая функция φ имеет конечный порядок роста в смысле выполнения соотношения

$$\overline{\lim}_{d(z)\longrightarrow 0} \frac{\ln \varphi(z)}{-\ln d(z)} < \infty,$$

то инвариантные оболочка и ядро могут быть описаны более непосредственным образом.

Теорема 2.2.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, φ — положительная выпуклая функция на D, имеющая конечный порядок роста, для которой выполняются условия* (2.2.1). *Положим для $a \in \mathbb{R}$*

$$\psi_a(z) = \varphi(z) - a \ln d(z),\ z \in D.$$

Тогда

1) *инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. Если в этом объединении ввести топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcap_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. *Если в этом пересечении ввести топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 2.2.3.

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.2.2. *Пусть выпуклая область* D *содержит* 0. *Введем обозначения*

$$h(\varphi)=H_D(re^{i\varphi})r^{-1},\ h_0=\min_{\varphi} h(\varphi),\ H_0=\max_{\varphi} h(\varphi),\ r_0=\min_{z\in D}|z|,\ R_0=\max_{z\in D}|z|.$$

Для $q\in(0;1)$ *и* $t>0$ *положим*

$$qD=\{qz:\ z\in D\},\ D_t=\{z:\ d(z)>t\}.$$

Тогда

$$(1-q)r_0\le d(z),\ z\in qD, \tag{2.2.4}$$

$$\frac{h_0}{R_0}t\le h(\varphi)-h_t(\varphi)\le\frac{H_0}{r_0}t,\ 0<t<r_0,\varphi\in\mathbb{R} \tag{2.2.5}$$

где $h_t(\varphi)$ *— опорная функция области* D_t.

Доказательство леммы 2.2.2.

Пусть

$$\inf_{z\in qD} d(z)=|z_0-w_0|,$$

где $z_0\in\partial(qD)$, $w_0\in\partial D$. Через точку w_0 проходит опорная к области D прямая l, перпендикулярная к отрезку $[z_0;w_0]$. Если d — расстояние от начала координат до прямой l, то $|z_0-w_0|=(1-q)d$ с одной стороны, и $\inf_{z\in D}|z|\le d$ с другой стороны, тем самым выполняется неравенство (2.2.4).

Предположим, что D — выпуклый n–угольник с вершинами в точках $r_je^{i\varphi_j}$, ограниченный прямыми l_j, отстоящими от начала координат на расстояние d_j. Через θ_j обозначим направление нормалей к прямым l_j. Опорная функция представляет собой кусочно тригонометрическую функцию

$$h(\varphi)=r_j\cos(\varphi-\varphi_j),\ \varphi\in(\theta_j;\theta_{j+1}).$$

Для $0 < t < r_0$ область D_t есть многоугольник, ограниченный прямыми $l_j - te^{i\theta_j}$, с вершинами в точках $\frac{d_j - t}{d_j} r_j e^{i\varphi_j}$. Опорная функция области D_t вычисляется по формуле

$$h_t(\varphi) = \frac{d_j - t}{d_j} r_j \cos(\varphi - \varphi_j),\ \varphi \in (\theta_j; \theta_{j+1}).$$

Значит,

$$h(\varphi) - h_t(\varphi) = \frac{t}{d_j} r_j \cos(\varphi - \varphi_j),\ \varphi \in (\theta_j; \theta_{j+1}).$$

Отсюда следует соотношение (2.2.5) для произвольных выпуклых многоугольников. В общем случае это соотношение получается предельным переходом с использованием описанных выпуклых n-угольников D_n, таких что $\bigcap\limits_n D_n = \overline{D}$.

Лемма 2.2.2 доказана.

Лемма 2.2.3. *Пусть выпуклая область D содержит 0 и выпуклая функция φ на D неотрицательна. Тогда функция φ имеет конечный порядок роста, то есть*

$$\varphi(z) \leq \frac{A}{(d(z))^\alpha},\ z \in D, \tag{2.2.6}$$

тогда и только тогда, когда сопряженная по Юнгу функция удовлетворяет условию

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) \geq H(\lambda) - B|\lambda|^\beta,\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.2.7}$$

где $H(\lambda)$ — опорная функция области, $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha}$ и $B > 0$— некоторая постоянная.

Доказательство леммы 2.2.3.

Докажем достаточность. Воспользуемся известным неравенством

$$\operatorname{Re} \lambda z \leq H(\lambda) - |\lambda| d(z),\ z \in D,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.2.8}$$

Тогда

$$\varphi(z) = \sup_\lambda (\operatorname{Re} \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda)) \leq \sup_\lambda (-d(z)|\lambda| + B|\lambda|^\beta).$$

Вычислим супремум прямым подсчетом и получим

$$\varphi(z) \le A\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{\alpha},\ z \in D,$$

где $A = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)(B\beta)^{\frac{1}{1-\beta}}$.

Докажем необходимость.

Пусть выполняется неравенство (2.2.6). Тогда

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sup_z(\mathrm{Re}\,\lambda z - \varphi(z)) \ge \sup_z\left(\mathrm{Re}\,\lambda z - A\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{\alpha}\right) =$$

$$= \sup_{q\in(0;1)}\sup_{z\in qD}\left(\mathrm{Re}\,\lambda z - A\left(\frac{1}{d(z)}\right)^{\alpha}\right).$$

Следовательно, в силу неравенства (2.2.4)

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) \ge \sup_{q\in(0;1)}\sup_{z\in qD}\left(\mathrm{Re}\,\lambda z - A\left(\frac{1}{(1-q)r_0}\right)^{\alpha}\right) \ge$$

$$\ge \sup_{q\in(0;1)}\left(qH(\lambda) - A\left(\frac{1}{(1-q)r_0}\right)^{\alpha}\right) = H(\lambda) - \inf_{q\in(0;1)}\left(qH(\lambda) + \frac{Ar_0^{-\alpha}}{q^{\alpha}}\right),$$

где $r_0 = \min_{z\in D}|z|$. Вычислим инфимум и получим

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) \ge H(\lambda) - B|\lambda|^{\beta}, \lambda \in \mathbb{C},$$

где $B = \max\frac{H(\lambda)}{\alpha|\lambda|}(A\alpha r_0^{-\alpha})^{\frac{1}{\alpha+1}}(\alpha+1)$.

Лемма 2.2.3 доказана.

Пусть функция φ имеет конечный порядок роста, и пусть $z \in D$, λ_z — точка достижения супремума $\sup_{\lambda}(\mathrm{Re}\,\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda))$. Если

$$|\lambda_z| \ge \left(\frac{B}{d(z)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}},$$

то по неравенствам (2.2.7), (2.2.8)

$$\mathrm{Re}\,\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) \le -d(z)|\lambda| + B|\lambda|^{\beta} \le 0.$$

Поскольку мы предполагаем неотрицательность функции φ, то отсюда следует, что

$$|\lambda_z| \le \left(\frac{B}{d(z)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} = \left(\frac{B}{d(z)}\right)^{\alpha+1}.$$

Воспользуемся вторым пунктом в утверждении 2.1.2. Можем считать, что $|\lambda_z| \geq 1$, тогда для $\varepsilon = \frac{b}{2B^{\alpha+1}}$ круг $B(z, \varepsilon d(z)^{\alpha+1})$ лежит в D и

$$|\varphi(z) - \varphi(w)| \leq 2b,\ z \in D,\ w \in B(z, \varepsilon(d(z))^{\alpha+1}). \tag{2.2.9}$$

Функция расстояния удовлетворяет условию Липшица

$$|d(z_1) - d(z_2)| \leq |z_1 - z_2|,\ z_1, z_2 \in D,$$

поэтому если $\varepsilon(d(z))^\alpha < \frac{1}{2}$, то

$$|\ln d(w) - \ln d(z)| \leq 2,\ z \in D,\ w \in B(z, \varepsilon(d(z))^{\alpha+1}). \tag{2.2.10}$$

Пусть

$$\mathcal{E}_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H(D, \psi_n),\ \mathcal{E}_p = \bigcap_{-n \in \mathbb{N}} H(D, \psi_n)$$

и $f \in H(D, \psi_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. По формуле Коши имеем

$$|f'(z)| \leq \|f\|_n \frac{1}{\varepsilon} e^{\varphi_n(z)} (d(z))^{-(\alpha+1)} e^{\max_{w \in B(z)}(\varphi(w) - \varphi(z))},$$

где через $\|f\|_n$ обозначена норма в $H(D, \varphi_n)$,

$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} (\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) + n \ln(1 + |\lambda|)),$$

и $B(z) = B(z, \varepsilon(d(z))^{\alpha+1})$. Из (2.2.9) и (2.2.10) вытекает оценка

$$\|f'\|_{n+\alpha+1} \leq \frac{1}{\varepsilon} e^{2(b+|n|)} \|f\|_n,\ f \in H(D, \psi_n).$$

Таким образом, пространства $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{E}_p$ инвариантны относительно дифференцирования и оператор дифференцирования действует непрерывно в этих пространствах в индуктивной и проективной соответственно топологиях. Пусть точка ζ_z — точка достижения супремума $\sup_\lambda(\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda))$. Тогда по пункту 2 утверждения 2.1.2

$$d(z) \geq \frac{b}{1 + |\zeta_z|},\ z \in D,$$

тем самым, при $d(z) \le 1$

$$|\zeta_z| \ge \frac{b}{2d(z)},\ z \in D,\ d(z) \le 1.$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda}(\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) + n\ln(1+|\lambda|)) \ge \varphi(z) + n\ln(1+|\zeta_z|) \ge \psi_n(z) + n\ln\frac{b}{2}.$$

Таким образом, $H(D,\psi_n) \subset H(D,\varphi_n)$ и пространство $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ совпадает с пространством $\mathcal{E}_i$. Аналогично доказывается равенство линейных пространств $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ и $\mathcal{E}_p$.

Теорема 2.2.3 доказана.

Пусть $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^{\infty}$ неубывающая логарифмически выпуклая последовательность. Положим $M_n = M_0$ для $-n \in \mathbb{N}$ и для $k \in \mathbb{Z}$ через $\mathcal{M}_k$ будем обозначать последовательность со сдвигом $(M_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 2.2.4. *Предположим, что последовательность $\mathcal{M}$ удовлетворяет условию неквазианалитичености* (2.1.11)*. Тогда*

1) *инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\mathcal{M})$ пространства $H(D,\mathcal{M})$ совпадает с объединением пространств $H(D,\mathcal{M}_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ пространства $H(D,\mathcal{M})$ совпадает с пересечением пространств $H(D,\mathcal{M}_k)$, $-k \in \mathbb{N}$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 2.2.4.

Система $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна в пространстве $H(D,\mathcal{M})$, следовательно, преобразование Фурье–Лапласа, которое каждому функционалу $S \in H^*(D,\mathcal{M})$ ставит в соответствие функцию $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$, инъективно отображает $H^*(D,\mathcal{M})$ в пространство целых функций. Образ этого отображения обозначим через

$\widehat{H}(D,\mathcal{M})$ и введем в нем наведенную структуру гильбертового пространства:

$$\|\widehat{S}\|_{\widehat{H}(D,\mathcal{M})} = \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})}.$$

По теореме 2.1.4 существует $k_0 \in \mathbb{N}$, такое что любая функция $F \in H(\mathbb{C}, \psi_{k_0})$, где $\psi_\alpha(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - \alpha \ln(1+|\lambda|)$, является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала $S \in H^*(D,\mathcal{M})$ и

$$\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})} \leq C\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_{k_0})}.$$

Следовательно, пространство $H(\mathbb{C},\psi_{k_0})$ непрерывно вложено в пространство $\widehat{H}(D,\mathcal{M})$. Из леммы 2.2.1 следует, что оператор A_m непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C},\psi_{k_0-m})$ в пространство $\widehat{H}(D,\mathcal{M})$.

Докажем первый пункт теоремы 2.2.4. Пусть $Y \supset H(D,\mathcal{M})$ — инвариантное относительно дифференцирования пространство и $f \in \bigcup_{k=1}^{\infty} H(D,\mathcal{M}_k)$. Тогда для некоторого $n \in \mathbb{N}$ функция $f \in H(D,\mathcal{M}_n)$. По свойствам преобразования Фурье–Лапласа $f(z) = \widehat{S}(z)$ для некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $\widehat{H}(D,\mathcal{M}_n)$. Вложение

$$H(\mathbb{C},\psi_{k_0+n}) \subset \widehat{H}(D,\mathcal{M}_n)$$

непрерывно. Оператор A_{k_0+n} непрерывно действует из пространства $H(\mathbb{C},\psi_0)$ в пространство $H(\mathbb{C},\psi_{k_0+n})$. Поэтому функционал

$$S_1(F) = S(A_{k_0+n}(F)),\ F \in H(\mathbb{C},\psi_0),$$

является линейным и непрерывным функционалом на $H(\mathbb{C},\psi_0)$. Если $g(z) := S_1(e^{\lambda z})$, то

$$|g^{(k)}(z)| \leq \|S_1\|_{H^*(\mathbb{C},\psi_0)} \cdot M_k,\ z \in D,\ k = 0,1,2,\ \dots\ .$$

то есть $g \in H(D,\mathcal{M}) \subset Y$. Поскольку

$$g^{(k_0+n)}(z) = \frac{\partial^{k_0+n}}{\partial z^{k_0+n}} S\left(\frac{1}{\lambda^{k_0+n}}\left(e^{\lambda z} - \sum_{s=0}^{k_0+n-1} \frac{z^s}{s!}\lambda^s\right)\right) = S(e^{\lambda z}) = f(z),$$

то $f \in Y$. Значит, $\bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}_k) \subset Y$.

Второй пункт теоремы 2.2.4 непосредственно следует из определения пространств $H(D, \mathcal{M}_k)$.

Теорема 2.2.4 доказана.

2.3. Достаточные множества в индуктивных и проективных пределах весовых пространств целых функций

Пусть $\Psi = (\psi_\alpha)$ — семейство субгармонических функций на плоскости. В пространстве целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{\lambda} |F(\lambda)| e^{-\psi(\lambda)} < \infty, \ \psi \in \Psi,$$

для любого замкнутого подмножества $S \subset \mathbb{C}$ рассмотрим топологию $\tau(S)$, определяемую полунормами

$$p_{S,\psi}(F) = \sup_{\lambda \in S} |F(\lambda)| e^{-\psi(\lambda)}, \ \psi \in \Psi.$$

Если $\tau(S) = \tau(\mathbb{C})$, то множество S называется достаточным для этого пространства.

В этом параграфе мы конструируем дискретные достаточные множества для некоторых пространств. А также будет дана оценка меры "избыточности" построенных достаточных множеств.

Через $\mu(t)$ обозначим считающую функцию дискретного множества S с одной предельной точкой в бесконечности:

$$\mu(t) = \sum_{\lambda \in S, \ |\lambda| \le t} 1, \ t > 0.$$

Множество будем называть регулярным, если его считающая функция удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \ln t \, d\mu(t) = \infty.$$

Через $B(z,t)$ будем обозначать круг с центром в точке z радиуса t. Для целой функции L через $N(L)$ будем обозначать множество ее нулей и для $\delta > 0$ положим

$$E_L(\delta) = \bigcup_{\lambda \in N(L)} B(\lambda, \delta(1+|\lambda|)^{-1}).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) - n\ln(1+|\lambda|) + c_n,\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда для проективного предела $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$ пространств $H(\mathbb{C},\psi_n)$ существует дискретное достаточное множество S, такое что из него можно удалить любое конечное подмножество сохраняя свойство достаточности, а после удаления любого регулярного подмножества оно перестает быть достаточным.

Доказательство теоремы 2.3.1.

Поскольку ψ — субгармоническая функция, удовлетворяющая условию Липшица, то по теореме 1.2 существует целая функция L с простыми нулями λ_n, такими что круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-1})$ для некоторого $\delta > 0$ попарно не пересекаются и сама функция для некоторой постоянной $A > 0$ удовлетворяет соотношениям

$$\ln|L(\lambda)| \le \psi(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\ln|L(\lambda)| \ge \psi(\lambda) - A\ln(|\lambda|+1) - C,\ \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta),$$

$$\ln|L'(\lambda)| \ge \psi(\lambda) - A\ln(|\lambda|+1) - C',\ \lambda \in N(L).$$

Докажем, что множество $S = N(L)$ является достаточным для пространства $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$.

Нужно показать, что для любого натурального числа $m \in \mathbb{N}$ найдутся числа $n \in \mathbb{N}$ и $M > 0$, такие что для любой функции $F \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$

$$|F(\lambda)|e^{-\psi_m(\lambda)} \le M \sup_{\lambda \in S} |F(\lambda)|e^{-\psi_n(\lambda)} := M\|F\|_n,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Итак, возьмем и зафиксируем натуральное число m, возьмем натуральные числа $N \geq m$ и $n \geq N + A + 2$. Пусть $F \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$, тогда

$$|F(\lambda)| \leq \|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_n)} e^{\psi_n(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Значит,

$$|\lambda^N F(\lambda)| \leq \|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_n)} e^{\psi(\lambda)} (1 + |\lambda|)^{-A-2} e^{c_n},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Исключительное множество $E(\delta, L) := \bigcup_n B_n(\delta)$ состоит из непересекающихся кругов малых радиусов, поэтому можно найти замкнутые спрямляемые кривые Γ_j, $j \in \mathbb{N}$, не пересекающиеся с $E(\delta, L)$, такие что

$$|\Gamma_j| = O\left(\min_{z \in \Gamma_j} |z|\right) \to \infty,\ j \to \infty.$$

В силу нижних оценок на функцию L получим, что

$$\frac{|\lambda^N F(\lambda)|}{|L(\lambda)|} \prec (1 + |\lambda|)^{-2},\ \lambda \in \Gamma_j,\ j \in \mathbb{N}$$

Следовательно, равномерно на компактах сходится ряд Лагранжа

$$\lambda^N F(\lambda) = \sum_k \frac{\lambda_k^N F(\lambda_k)}{(\lambda - \lambda_k) L'(\lambda_k)} L(\lambda).$$

В силу нижней оценки на $L'(\lambda_k)$ имеем

$$\frac{|\lambda_k^N F(\lambda_k)|}{|L'(\lambda_k)|} \prec p_{S,\psi_n}(F)(1 + |\lambda_k|)^{-n+A+N}.$$

Отсюда и из представления в виде ряда Лагранжа в силу выбора n следует оценка для $|\lambda - \lambda_k| \geq 1$:

$$|F(\lambda)| \leq \mathrm{Const} \cdot p_{S,\psi_n}(F) |L(\lambda)| |\lambda|^{-N},$$

которая продолжается на все λ по принципу максимума. Отсюда, учитывая оценки сверху на функцию L и выбор числа N, получим

$$|F(\lambda)| e^{-\psi(\lambda) + m \ln(1+|\lambda|)} \leq \mathrm{Const} \cdot p_{S,\psi_n}(F),$$

или

$$\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_m)} \le \mathrm{Const}\cdot p_{S,\psi_n}(F),\ F\in\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi).$$

Таким образом, множество S является достаточным для $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$. Очевидно, что если удалить из него любое конечное подмножество, оно останется достаточным.

Пусть $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — регулярное подмножество S. Тогда функция

$$g(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\right),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

является целой функцией в силу регулярности и выполняется соотношение

$$\ln|\lambda| = o(\ln|g(\lambda)|),\ |\lambda-\mu_n|\ge 1,\ n\in\mathbb{N},\ |\lambda|\to\infty.$$

Таким образом, функция

$$L_1(\lambda)=\frac{L(\lambda)}{g(\lambda)}$$

принадлежит пространству $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$ и, тем самым, множество $S\setminus\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не является даже множеством единственности для этого пространства.

Теорема 2.3.1 доказана.

Бесконечно возрастающую неотрицательную функцию $m(t)$, $t>0$, $(m(0)=0)$, удовлетворяющую условию

$$\sup_t(m(2t)-m(t))\le 1 \tag{2.3.1}$$

будем называть медленно растущей. С каждой медленно растущей функцией свяжем ассоциированную функцию скачков. А именно, определим последовательности R_n, r_n по формулам

$$m(R_0)=1,\ m(R_{n+1})-m(R_n)=1,\ n=0,1,2,\ \dots\ ,$$

$$\int\limits_{R_n}^{R_{n+1}}\ln t\,dm(t)=\ln r_n,\ n=0,1,2,\ \dots\ .$$

Ассоциированной с $m(t)$ функцией скачков назовем функцию $m_0(t)$, $t > 0$, ($m_0(0) = 0$) с единичными скачками в точках r_n, $n = 1, 2, \ \dots$. Из определения следует соотношение

$$|m(t) - m_0(t)| \le 1, \ t \ge 0.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) + n\ln(1 + |\lambda|) + c_n, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}, \ c_n \in \mathbb{R}.$$

И пусть неотрицательная функция $m(t)$, $t > 0$, является функцией медленного роста, $m_0(t)$ — ассоциированная с ней функция скачков. Тогда для индуктивного предела $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ пространств $H(\mathbb{C}, \psi_n)$ существует дискретное достаточное множество $S = \{\lambda_k, \ k \in \mathbb{N}\}$, такое что если из него удалить подмножество $\{\eta_k, \ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty, \tag{2.3.2}$$

то множество $\widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ остается достаточным. Если же $m_0(t) - \eta(t) \le C < \infty$, $t \ge 0$, то множество $S \setminus \{\eta_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ не будет достаточным.

Доказательство теоремы 2.3.2.

В пространстве $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ введем топологию с помощью весовых полунорм. Через $\mathcal{K}$ обозначим совокупность всех непрерывных функций $x(\lambda)$ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющих при любом $n \in \mathbb{N}$ соотношению

$$x(\lambda) \succ e^{\psi_n(\lambda)}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для подмножества $S \subset \mathbb{C}$ через $\tau(S)$ обозначим топологию в пространстве $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$, определяемую полунормами

$$p_x(F) = \sup_{\lambda \in S} \frac{|F(\lambda)|}{x(\lambda)}, \ x \in \mathcal{K}.$$

Заметим, что исходная топология индуктивного предела в $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ совпадает с топологией $\tau(\mathbb{C})$ (см. [48]). Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение 2.3.1. *Пусть $\mathcal{K}_0$ — семейство функций вида $x(\lambda) = e^{\psi(\lambda)+v(\lambda)}$, где $v(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{v(r)}{\ln r} = \infty. \tag{2.3.3}$$

Для замкнутого множества $S \subset \mathbb{C}$ определим топологию $\tau_0(S)$ в пространстве $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ с помощью полунорм p_x, где $x \in \mathcal{K}_0$. Тогда топологии $\tau_0(S)$ и $\tau(S)$ равносильны.

Доказательство утверждения 2.3.1.

Очевидно, $\tau_0(S) \le \tau(S)$. Докажем обратное неравенство. Пусть $x \in \mathcal{K}$, функция

$$y(r) = \min_{|\lambda|=r}(\ln x(\lambda) - \psi(\lambda)),\ r \ge 0,$$

радиальна и удовлетворяет условию $y(r) \ge n \ln r + C_n,\ r > 0$, для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда функция $y(e^t),\ t \in \mathbb{R}$, обладает свойством $y(e^t) \ge nt + C_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$v(e^t) = \sup\{h(t),\ h(t) \le y(e^t),\ t \in \mathbb{R},\ h - \text{выпуклая}\}.$$

Тогда $v(|\lambda|)$ — радиальная субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию (2.3.3) и

$$e^{\psi(\lambda)+v(|\lambda|)} \le x(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Утверждение 2.3.1 доказано.

Искомое достаточное множество будем конструировать в виде множества нулей некоторой целой функции с определенными асимптотическими оценками. Поскольку ψ — субгармоническая функция, удовлетворяющая условию Липшица, то по теореме 1.2 существует целая функция L_1 с простыми нулями λ_n, такими что круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n| + 1)^{-1})$ при некотором $\delta > 0$ попарно не пересекаются и для некоторой постоянной $c > 0$ выполняются соотношения

$$\psi(\lambda) - c \ln(e + |\lambda|) \le \ln |L_1(\lambda)| \le \psi(\lambda),\ \lambda \notin E(\delta, L_1), \tag{2.3.4}$$

где $E(\delta, L_1) := \bigcup_n B_n(\delta)$,

$$\psi(\zeta) - c\ln(e + |\zeta|) \le \ln|L_1'(\zeta)| \le \psi(\zeta),\ \zeta \in N(L_1). \qquad (2.3.5)$$

Пусть

$$u(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{m(t)\,dt}{t},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

тогда u — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (2.3.3).

Определим последовательность R_n по формулам

$$m(R_0) = 1,\ m(R_{n+1}) - m(R_n) = 1,\ n = 0, 1, 2,\ \dots\ ,$$

и возьмем $r_n \in (R_n, R_{n+1})$. Тогда, так как выполняется условие (2.3.1), то по теореме 1.4 целая функция

$$g(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{r_n e^{i\theta_n}}\right),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\theta_n \in [-\pi; \pi)$, $\theta_{n-1} \cdot \theta_n < 0$, $n \in \mathbb{N}$, обладает свойствами: если $\xi_k = r_k e^{i\theta_k}$, то круги $B(\xi_k, \delta(1 + |\xi_k|)^{-1})$ попарно не пересекаются и для некоторой постоянной $d > 0$ выполняются оценки

$$u(\lambda) - d\ln(e + |\lambda|) \le \ln|g(\lambda)| \le u(\lambda),\ \lambda \notin E(\delta, g), \qquad (2.3.6)$$

$$u(\xi) - d\ln(e + |\xi|) \le \ln|g'(\xi)| \le u(\xi),\ \xi \in N(g). \qquad (2.3.7)$$

Мы намерены доказать, что множество нулей S целой функции $L = L_1 g$ будет достаточным множеством для пространства $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$, удовлетворяющим условиям теоремы. Заметим, что по выбору θ_k мы можем считать непересекающимися круги $\{\lambda : |\lambda - z| \le \delta(1 + |z|)^{-1}\}$, $z \in S$. Возьмем подмножество $S' = \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ множества S, удовлетворяющее условию теоремы, и докажем, что множество $\widetilde{S} = S \setminus S'$ — достаточное для $\mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$. Пусть

$$v(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\eta(t)\,dt}{t},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда v — радиальная субгармоническая функция и по теореме 1.4 целая функция

$$h(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\eta_k}\right), \ \lambda \in \mathbb{C},$$

для некоторого $p > 0$ удовлетворяет соотношениям

$$v(\lambda) - p\ln(e + |\lambda|) \le \ln|h(\lambda)| \le v(\lambda), \ \lambda \notin E(\delta, h), \tag{2.3.8}$$

$$v(\eta_n) - p\ln(e + |\eta_n|) \le \ln|h'(\eta_n)| \le v(\eta_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{2.3.9}$$

Пусть $\widetilde{m}(t) = m_0(t) - \eta(t)$, тогда по условию (2.3.2) $\widetilde{m}(t)$ возрастает до бесконечности и пусть

$$\widetilde{u}(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\widetilde{m}(t)\,dt}{t}, \ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.3.10}$$

Тогда $\widetilde{u}(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (2.3.3) и целая функция $\widetilde{L} = L/h$ с множеством нулей $\widetilde{S}$ в силу соотношений (2.3.4) – (2.3.9) удовлетворяет условиям

$$\psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|) \le \ln|\widetilde{L}(\lambda)| \le \psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) + \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|), \ \lambda \notin E(\delta, \widetilde{L}), \tag{2.3.11}$$

$$\psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|) \le \ln|\widetilde{L}'(\lambda)| \le \psi(\lambda) + \widetilde{u}(\lambda) + \widetilde{a}\ln(e + |\lambda|), \ \lambda \in \widetilde{S}, \tag{2.3.12}$$

где $\widetilde{a} = \max(c + d, p)$.

Для доказательства достаточности множества $\widetilde{S}$ по утверждению 2.3.1 нам нужно показать, что для любой радиальной субгармонической функции $\alpha(\lambda)$, удовлетворяющей условию (2.3.3), найдется радиальная субгармоническая функция $\beta(\lambda)$ и число $\varepsilon > 0$, такие что если функция $F \in \mathcal{H}_p(\mathbb{C}, \psi)$ и удовлетворяет оценке

$$|F(\lambda)| \le \varepsilon e^{\psi(\lambda) + \beta(\lambda)}, \ \lambda \in \widetilde{S}, \tag{2.3.13}$$

то эта функция будет удовлетворять оценке

$$|F(\lambda)| \le e^{\psi(\lambda) + \alpha(\lambda)}, \ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.3.14}$$

Пусть $w(\lambda)$ — некоторая радиальная субгармоническая функция на плоскости и ν — мера, ассоциированная с ней по Риссу. В полярных координатах мера ν имеет вид

$$d\nu(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} d(w'(r)r)d\varphi,$$

в частности, функция $w'(r)r$ — неубывающая. Через $\nu(t)$ будем обозначать ν-меру круга $B(0,t)$, тогда

$$\nu(t) = w'(t)t, \ t \geq 0.$$

Применительно к функции $\widetilde{u}$ в формуле (2.3.10) имеем $\widetilde{\mu}(t) \equiv \widetilde{m}(t)$ ($\widetilde{\mu}$ — мера ассоциированная по Риссу с $\widetilde{u}$). Пусть $\alpha(\lambda)$ — субгармоническая функция в (2.3.14) и $d\nu(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} d(\alpha'(r)r)d\varphi$ — ее ассоциированная мера. Положим

$$\nu_1(t) = \min(\widetilde{m}(t), \alpha'(t)t), \ t \geq 0, \quad \alpha_1(\lambda) = \int\limits_1^{|\lambda|} \frac{\nu_1(t)\,dt}{t}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\nu_1(t)$ — возрастающая до бесконечности функция и α_1 радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условиям

$$\alpha_1(\lambda) \leq \min(\widetilde{u}(\lambda), \alpha(\lambda)), \quad \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\alpha_1(t)}{\ln t} = \infty.$$

По теореме 1.4 построим последовательность $\widetilde{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и целую функцию $\widetilde{g}(\lambda)$, удовлетворяющую условиям

$$\widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{d}\ln(e + |\lambda|) \leq \ln|\widetilde{g}(\lambda)| \leq \widetilde{u}(\lambda), \ \lambda \notin E(\delta, \widetilde{g}), \tag{2.3.15}$$

$$\widetilde{u}(\lambda) - \widetilde{d}\ln(e + |\lambda|) \leq \ln|\widetilde{g}'(\lambda)| \leq \widetilde{u}(\lambda), \ \lambda \in N(\widetilde{g}). \tag{2.3.16}$$

Сужение ассоциированной меры функции $\widetilde{u}$ на кольцо $Q_n = \{\widetilde{R}_n \leq |\lambda| < \widetilde{R}_{n+1}\}$ обозначим через γ_n, $n \in \mathbb{N}$. По определению последовательности $\widetilde{R}_n$ имеем $\gamma_n(\mathbb{C}) = 1$. Выберем подпоследовательность натуральных чисел n_j, так чтобы для меры $\nu_0 = \sum_j \gamma_{n_j}$ выполнялось условие $\nu_0(t) \leq \nu_1(t)$, $t \geq 0$. Такую подпоследовательность можно выбрать потому, что $\nu_1(t) \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow \infty$. Пусть

n наибольший номер, такой что $\nu_1(\widetilde{R}_n) < 1$, то есть $\nu_1(\widetilde{R}_j) \geq 1$ для $j \geq n+1$. Можно положить $n_1 = n+1$. Далее исходя из того, что $\nu_1(t) - 1 \longrightarrow \infty$ при $t \longrightarrow \infty$ можно выбрать n_2 и т.д. Функция

$$\alpha_0(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\nu_0(t)\,dt}{t},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

радиальна, субгармонична и

$$\alpha_0(r) \leq \int\limits_1^{r} \frac{\nu_1(t)\,dt}{t} = \alpha_1(r) \leq \alpha(r),\ r \geq 0, \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{\alpha_0(t)}{\ln t} = \infty.$$

Определим еще меры

$$\chi_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{n_{2j+1}}, \quad \chi_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_{n_{2j}},$$

и соответствующие радиальные субгармонические функции

$$\beta_1(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\chi_1(t)\,dt}{t}, \quad \beta_2(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\chi_2(t)\,dt}{t},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

По построению $0 \leq \chi_1(t) - \chi_2(t) \leq 1$, поэтому эти функции удовлетворяют условию (2.3.3), и

$$\beta_1(t) + \beta_2(t) = \alpha_0(t),\ \alpha_0(t) \leq 2\beta_1(t) \leq \alpha_0(t) + \ln(1+t),\ t \geq 0. \tag{2.3.17}$$

По теореме 1.4 целая функция

$$\widetilde{g}_1(\lambda) = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\widetilde{r}_{n_{2j+1}} e^{i\widetilde{\theta}_{n_{2j+1}}}}\right)$$

удовлетворяет условиям

$$\beta_1(\lambda) - \widetilde{b}\ln(e+|\lambda|) \leq \ln|\widetilde{g}_1(\lambda)| \leq \beta_1(\lambda),\ \lambda \notin E(\delta, \widetilde{g}_1), \tag{2.3.18}$$

$$\beta_1(\zeta) - \widetilde{b}\ln(e+|\zeta|)) \leq \ln|\widetilde{g}_1'(\zeta)| \leq \beta_1(\zeta),\ \zeta \in N(\widetilde{g}_1). \tag{2.3.19}$$

Возьмем натуральное число $N = [\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{d}]+4 \geq (\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{d})+3$, где $[a]$ обозначает целую часть числа a, и положим

$$\chi = \sum_{j=N+1}^{\infty} \gamma_{n_{2j+1}}, \quad \beta(\lambda) = \int\limits_0^{|\lambda|} \frac{\chi(t)\,dt}{t}.$$

Тогда $\beta(\lambda)$ — радиальная субгармоническая функция, удовлетворяющая условию (2.3.3), и для некоторой константы C

$$\beta(t) \leq \beta_1(t) - N\ln(1+t) + C,\ t \geq 0. \tag{2.3.20}$$

Пусть функция $F \in \mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$ удовлетворяет оценке (2.3.13) с некоторым положительным числом ε, которое определим позже.

По определению пространства $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$ функция F принадлежит пространству $H(\mathbb{C},\psi_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то есть

$$|F(\lambda)| \leq C_0 e^{\psi(\lambda)+m\ln(1+|\lambda|)},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция

$$\widetilde{F}(\lambda) = \frac{F(\lambda)\widetilde{g}(\lambda)}{\widetilde{g}_1(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C},$$

по соотношениям (2.3.13), (2.3.15), (2.3.18) удовлетворяет оценке

$$\left|\frac{\widetilde{F}(\lambda)}{\widetilde{L}(\lambda)}\right| \leq C_0 e^{(m+\widetilde{b}+\widetilde{a})\ln(e+|\lambda|)-\beta_1(\lambda)},\ \lambda \notin E\left(\delta,\widetilde{L}\widetilde{g}\right).$$

Поскольку исключительное множество $E\left(\delta,\widetilde{L}\widetilde{g}\right)$ есть объединение попарно не пересекающихся кругов, то найдется последовательность замкнутых жордановых кривых Γ_n, таких что

$$\rho_n = \min_{\zeta\in\Gamma_n}|\zeta| \longrightarrow \infty,\ |\Gamma_n| = O(\rho_n),\ n \longrightarrow \infty,\ \Gamma_n \bigcap E\left(\delta,\widetilde{L}\widetilde{g}\right) = \emptyset.$$

Функция β_1 удовлетворяет условию (2.3.3), поэтому

$$\max_{\lambda\in\Gamma_n}\left|\frac{\widetilde{F}(\lambda)}{\widetilde{L}(\lambda)}\right| \longrightarrow 0,\ n \longrightarrow \infty.$$

Таким образом, ряд Лагранжа функции $\widetilde{F}$ по функции $\widetilde{L}$ сходится (поточечно) к самой функции $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(\lambda) = \sum_{\zeta \in N(\widetilde{L})} \frac{\widetilde{F}(\zeta)}{\widetilde{L}'(\zeta)(\lambda - \zeta)} \widetilde{L}(\lambda), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Из (2.3.12), (2.3.13), (2.3.15) и (2.3.18) следует

$$\left| \frac{\widetilde{F}(\zeta)}{\widetilde{L}'(\zeta)} \right| \le \varepsilon e^{\beta(\zeta) - \beta_1(\zeta) + (\widetilde{b} + \widetilde{a}) \ln(e + |\zeta|)}, \ \zeta \in N(\widetilde{L}),$$

и, учитывая соотношение (2.3.20) и выбор числа N, получаем

$$\left| \frac{\widetilde{F}(\zeta)}{L'(\zeta)} \right| \le \varepsilon e^{C} (e + |\zeta|)^{-3}, \ \zeta \in N(\widetilde{L}).$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда Лагранжа и оценка

$$|\widetilde{F}(\lambda)| \le \sum_{\zeta \in \widetilde{S}} \left| \frac{\widetilde{F}(\zeta)}{\widetilde{L}'(\zeta)} \right| |\widetilde{L}(\lambda)| \le \varepsilon e^{C} \sum_{\zeta \in \widetilde{S}} (e + |\zeta|)^{-2} |\widetilde{L}(\lambda)|, \ \lambda \notin E(\delta, \widetilde{L}).$$

И, учитывая определение функции $\widetilde{F}$, получим

$$|F(\lambda)| \le \varepsilon e^{C} \sigma |\widetilde{L}(\lambda)| \frac{|\widetilde{g}_1(\lambda)|}{|\widetilde{g}(\lambda)|}, \ \lambda \notin E(\delta, \widetilde{L}), \ \sigma = \sum_{\zeta \in \widetilde{S}} (e + |\zeta|)^{-2}.$$

Теперь из (2.3.11), (2.3.15), (2.3.18) вытекает оценка

$$|F(\lambda)| \le \varepsilon e^{C} \sigma e^{\psi(\lambda) + \beta_1(\lambda) + (\widetilde{a} + \widetilde{d}) \ln(e + |\lambda|)}, \ \lambda \notin E\left(\delta, \widetilde{L}\widetilde{g}\right),$$

которую можно продолжить на всю плоскость по принципу максимума. Из соотношения (2.3.17) имеем

$$\beta_1(t) \le \frac{1}{2}\alpha_0(t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) \le \alpha(t) - \frac{1}{2}\alpha_0(t) + \frac{1}{2}\ln(1+t), \ t \ge 0.$$

Так как функция α_0 удовлетворяет условию (2.3.3), то для некоторой постоянной C_1

$$\beta_1(t) + (\widetilde{a} + \widetilde{d}) \ln(1+t) \le \alpha(t) + C_1, \ t \ge 0,$$

и, если положить $\varepsilon = \frac{1}{\sigma} e^{-C-C_1-\widetilde{a}-\widetilde{d}}$, то

$$|F(\lambda)| \le e^{\psi(\lambda)+\alpha(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, из оценки (2.3.13) следует оценка (2.3.14). Достаточность множества $\widetilde{S}$ доказана.

Если же считающая функция $\eta(t)$ удаляемого подмножества $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию $m_0(t) - \eta(t) \le C < \infty$, $t \ge 0$, то $\widetilde{L} \in \mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$ и множество $\widetilde{S}$ не будет даже множеством единственности для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi)$.

Теорема 2.3.2 доказана.

2.4. Представляющие системы экспонент в инвариантной оболочке и инвариантном ядре нормированных пространств аналитических функций

Теорема 2.4.1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, φ — выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - n\ln(1 + |\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)),\ z \in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ выполнены условия

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \widetilde{\varphi}_n(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \ge \frac{b_n}{1 + |x|^2}|y|^2,\ y = (y_1, y_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда в инвариантной оболочке

$$\mathcal{H}_i(D, \varphi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \varphi_k)$$

пространства $H(D, \varphi)$ существует представляющая система $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, то есть любая функция $f \in \mathcal{H}_i(D, \varphi)$ представляется в виде ряда по данной си-

стеме экспонент

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z},$$

этот ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D,\varphi_k)$, $k\in\mathbb{N}$. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— множество показателей представляющей системы* $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. *Тогда, если удалить из* Λ *любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из* Λ *любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.*

Доказательство теоремы 2.4.1.

Субгармонические на плоскости функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условиям теоремы 2.3.1. Возьмем достаточное для $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})=\bigcap_{n=1}^{\infty} H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n)$ множество $S=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, построенное как в теореме 2.3.1. Учитывая теорему 2.1.2, из [68, теорема 1.6, стр. 12] следует, что $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ — искомая представляющая система экспонент.

Теорема 2.4.1 доказана.

Теорема 2.4.2. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z=0$, φ *— выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)+n\ln(1+|\lambda|),\ \lambda\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N},$$

$$\varphi_n(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z-\widetilde{\varphi}_n(\lambda)),\ z\in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n>12$ *выполнены условия*

$$\sum_{k,j=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_n(x_1+ix_2)}{\partial x_j\partial x_k}y_jy_k\ge\frac{b_n}{1+|x|^2}|y|^2,\ y=(y_1,y_2),\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Пусть далее положительная функция $m(t)$, $t>0$, *является медленно растущей,* $m_0(t)$ *— ассоциированная с ней функция скачков. Тогда существует система показателей* $\Lambda=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, *такая что система экспонент* $\{e^{z\lambda_k},\ k\in\mathbb{N}\}$ *является представляющей в инвариантном ядре* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)=$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$ *пространства* $H(D,\varphi)$*, то есть любая функция* $f \in \mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *может быть представлена в виде суммы ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$*,* $n \in \mathbb{N}$*. При этом ряды из всех определяющих топологию* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *норм сходится*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k e^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_m)} < \infty,\ m \in \mathbb{N},$$

а ряд из абсолютных величин сходится в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$*,* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \sup_{z\in D} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k} \right| e^{-\varphi_n(z)} = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если из системы показателей Λ *удалить подмножество* $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$*, считающая функция* $\eta(t)$ *которого удовлетворяет условию*

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}\}$ *остается представляющей. Если же* $m_0(t) - \eta(t) \le C < \infty,\ t \ge 0$*, то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.*

Доказательство теоремы 2.4.2.

Субгармонические на плоскости функции $\widetilde{\varphi}_n$ удовлетворяют условиям теоремы 2.3.2. Возьмем достаточное для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_n)$ множество $S = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, построенное как в теореме 2.3.2. Учитывая 2.1.3 и [68, теорема 1.6, стр. 12], любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\varphi)$ может быть представлена в виде интеграла

$$f(z) = \int\limits_S \frac{e^{z\lambda}}{k(\lambda)}\, d\mu(\lambda),\ z \in D,$$

где μ — мера ограниченной вариации, сосредоточенная на множестве S, $k(\lambda) = e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)+v(\lambda)}$ с радиальной субгармонической функцией v, удовлетворяющей условию

$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{v(r)}{\ln r} = \infty.$$

Множество S — дискретное, значит, любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\varphi)$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{z\lambda_k},\ \ z \in D,$$

где $M_k = \mu(\{\lambda_k\})$, $\sup_k M_k = M < \infty$, и ряд сходится в топологии пространства $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$. Поскольку

$$\|e^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_n)} = \sup_{z\in D} e^{\mathrm{Re}\ z\lambda_k - \varphi_n(z)} = e^{\widetilde{\varphi}_n(\lambda_k)} = e^{v_n(\lambda_k)},$$

то

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} M_k e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{z\lambda_k}\right\|_{H(D,\varphi_n)} \le \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} \left\|e^{z\lambda_k}\right\|_{H(D,\varphi_n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{v_n(\lambda_k)} = M \sum_{k=1}^{\infty} e^{n\ln(1+|\lambda_k|^2)-v(\lambda_k)}.$$

По построению последовательность $\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}$, имеет конечную линейную плотность, значит, по свойствам функции v последний числовой ряд сходится. Пользуясь очевидным неравенством

$$|f(z)| \le e^{\varphi_n(z)} \|f\|_{H(D,\varphi_n)},\ \ z \in D,\ \ n \in \mathbb{N},$$

получим

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \sup_{z\in D} \left|\sum_{k=N+1}^{\infty} M_k e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} e^{z\lambda_k}\right| e^{-\varphi_n(z)} \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} |M_k| e^{-\widetilde{\varphi}(\lambda_k)-v(\lambda_k)} \|e^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_n)} \longrightarrow 0.$$

Последние утверждения теоремы 2.4.2 непосредственно следуют из теоремы 2.3.2.

Теорема 2.4.2 доказана.

Теорема 2.4.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию "неквазианалитичности"*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, — "сдвинутые" последовательности. Тогда в инвариантной оболочке $\mathcal{H}_i(D, \mathcal{M}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}^{(k)})$ пространства $H(D, \mathcal{M})$ существует представляющая система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, то есть любая функция $f \in \mathcal{H}_i(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z},$$

ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество показателей представляющей системы $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, если удалить из Λ любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из Λ любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.

Доказательство теоремы 2.4.3.

Обозначим через $T_k(r) = \sup_{n \geq 0} \frac{r^n}{M_n^{(k)}}$, $r \geq 0$, функцию следа последовательности $\mathcal{M}^{(k)}$, $T(r)$ — функцию следа последовательности $\mathcal{M}$, $H_D(\lambda)$ — опорную функцию области D, и пусть $\psi(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|)$ и $\psi_k(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|)$, $k \in \mathbb{N}$. Субгармонические на плоскости функции ψ_k удовлетворяют условиям теоремы 2.3.1. Возьмем достаточное для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C}, \psi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(\mathbb{C}, \psi_k)$ множество $S = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, построенное в теореме 2.3.1. Учитывая теорему 2.1.5, из [68, теорема 1.6, стр. 12] следует, что $\{e^{\lambda_k z}\}_{k=1}^{\infty}$ — искомая представляющая система экспонент.

Теорема 2.4.3 доказана.

Теорема 2.4.4. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию "неквазианалитичности"*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{M_{n+1}} < \infty,$$

и пусть $M_{-n} = M_0,\ n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{M}^{(k)} = \{M_{n-k}\}_{n=0}^{\infty},\ k \in \mathbb{N}$, — "сдвинутые" последовательности. Тогда для положительной медленно растущей функции $m(t),\ t > 0$, существует система показателей $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, такая что система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ является представляющей в инвариантном ядре $\mathcal{H}_p(D, \mathcal{M}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} H(D, \mathcal{M}^{(k)})$ пространства $H(D, \mathcal{M})$, то есть любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D, \mathcal{M})$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D, \mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. Если из системы показателей Λ удалить подмножество $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция $\eta(t)$ которого удовлетворяет условию

$$m_0(t) - \eta(t) \nearrow +\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k \in \widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}\}$ остается представляющей. Здесь $m_0(t)$ — ассоциированная с $m(t)$ функция скачков. Если же $m_0(t) - \eta(t) \le C < \infty,\ t \ge 0$, то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.

Доказательство теоремы 2.4.4.

Обозначим через $T_k(r) = \sup_{n\ge 0} \frac{r^n}{M_n^{(k)}},\ r \ge 0$, функцию следа последовательности $\mathcal{M}^{(k)}$, $T(r)$ — функцию следа последовательности $\mathcal{M}$, $H_D(\lambda)$ — опорную функцию области D, и пусть $\psi(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|)$ и $\psi_k(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T_k(|\lambda|)$, $k \in \mathbb{N}$. Субгармонические на плоскости функции ψ_k удовлетворяют условиям теоремы 2.3.2. Возьмем достаточное для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi) = \bigcup_{k=1}^{\infty} H(\mathbb{C},\psi_k)$ множество $S = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, построенное в теореме 2.3.2, и редкое подмножество $\{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, считающая функция которого удовлетворяет условию (2.3.2). По теореме 2.3.2 множество $\widetilde{S} = S \setminus \{\eta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ остается достаточным для $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$. Учитывая теорему 2.1.6 и [68, теорема 1.6, стр. 12], любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ может быть представлена в виде интеграла

$$f(z) = \int\limits_S \frac{e^{z\lambda}}{k(\lambda)}\, d\mu(\lambda),\ z \in D,$$

где μ — мера ограниченной вариации, сосредоточенная на множестве $\widetilde{S}$, $k(\lambda) = e^{\psi(\lambda)+v(\lambda)}$ с радиальной субгармонической функцией v, удовлетворяющей условию (2.3.3). Множество $\widetilde{S} = \{\zeta_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ — дискретное, значит, любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k e^{-\psi(\zeta_k)-v(\zeta_k)} e^{z\zeta_k},\ z \in D,$$

где $M_k = \mu(\{\zeta_k\})$, $\sup_k M_k = M < \infty$, и ряд сходится в топологии пространства $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$.

Последнее утверждение теоремы 2.4.4 непосредственно следует из теоремы 2.3.2.

Теорема 2.4.4 доказана.

Глава 3

Ряды экспонент в нормированных пространствах аналитических функций

В данной главе будут доказаны теоремы о представлении функций из пространств $H(D, \mathcal{M})$ и $H(D, \varphi)$ в виде рядов экспонент, сходящихся в ослабленной норме.

3.1. Представление рядами экспонент функций из нормированных подпространств $H(D)$

Положим

$$\widetilde{\varphi}_\alpha(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - \alpha \ln(1 + |\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\varphi_\alpha(z) = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} (\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}_\alpha(\lambda)),\ z \in D.$$

Теорема 3.1.1. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при* $\mathrm{dist}\,(z, \partial D) \longrightarrow 0$, *такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 12$ и $R > 0$, выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2,\ y = (y_1, y_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geq R,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \varphi)$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z},\ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi_\alpha)$, где $\alpha = 2A + 13$ и A — константа из теоремы 1.2. Тем самым константа α — универсальная, то есть не зависит от области D и от весовой функции φ.

Для доказательства теоремы 3.1.1 нам понадобится следующее следствие из теоремы 2.1.1.

Лемма 3.1.1. *Пусть φ — выпуклая функция на ограниченной выпуклой области D, $0 \in D$. И пусть функция $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяют условию (2.1.1) с постоянной $b > 12$. Тогда любая функция $f \in H(D, \varphi)$ является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого функционала $S_f \in H^*(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})$, причем*

$$\|S_f\|_{H^*(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})} \le M \|f\|_{H(D,\varphi)}, \tag{3.1.1}$$

где константа M зависит только от постоянной b в (2.1.1).

Доказательство леммы 3.1.1.

Возьмем функцию $f \in H(D, \varphi)$ и определим функционал

$$S_f(F) = S_F(f), \ F \in H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10}).$$

По теореме 2.1.1 S_f — линейный функционал на $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})$, причем

$$|S_f(F)| = |S_F(f)| \le \|S_F\|_{H^*(D,\varphi)} \|f\|_{H(D,\varphi)} \le M \|F\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})} \|f\|_{H(D,\varphi)},$$

значит,

$$\|S_f\|_{H^*(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})} \le M \|f\|_{H(D,\varphi)}.$$

Кроме того, для фиксированного $z \in D$ функция $e^{\lambda z}$ является преобразованием Фурье–Лапласа точечного функционала $\delta_z : g \to g(z)$, поэтому

$$S_f(e^{\lambda z}) = \delta_z(f) = f(z).$$

Лемма 3.1.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.1.1.

Для функции $\widetilde{\varphi}$ по пункту 1 утверждения 2.1.1 выполнены условия теоремы 1.2. Значит, существует целая функция $L(\lambda)$ с простыми нулями λ_n, $n \in \mathbb{N}$, такая что для некоторого $\delta \in (0;1)$ круги $B_\delta(\lambda_n) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются и выполняются соотношения

$$|\ln|L(\lambda)| - \widetilde{\varphi}(\lambda)| \leq A\ln(|\lambda|+1) + C,\ \lambda \notin \bigcup_n B_\delta(\lambda_n),$$

$$|\ln|L'(\lambda_n)| - \widetilde{\varphi}(\lambda_n)| \leq A\ln(|\lambda_n|+1) + C',\ n \in \mathbb{N},$$

при этом постоянная $A > 0$ не зависит от области D и функции $\widetilde{\varphi}$, а постоянные C, C', δ зависят от области D, но не зависят от функции $\widetilde{\varphi}$.

Рассмотрим целую функцию

$$L_1(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ \ldots\ (\lambda-\lambda_{[A]+11})},$$

где $[A]$ — целая часть числа A. Пусть ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, — нули функции L_1. Тогда для некоторой константы $c > 0$ выполняются соотношения:

$$\widetilde{\varphi}(\xi) - (A+[A]+11)\ln(|\xi|+1) - c \leq \ln|L_1(\xi)| \leq$$

$$\leq \widetilde{\varphi}(\xi) + (A-[A]-11)\ln(|\xi|+1) + c,\ \xi \notin \bigcup_k B_\delta(\xi_k), \tag{3.1.2}$$

$$\ln|L_1'(\xi_k)| \geq \widetilde{\varphi}(\xi_k) - (A+[A]+11)\ln(|\xi_k|+1) - c,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.1.3}$$

Пусть $F \in H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{2A+12})$. Найдутся замкнутые спрямляемые кривые Γ_m, $m \in N$, не пересекающиеся с $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_\delta(\xi_k)$, такие что

$$|\Gamma_m| = O\left(\min_{z\in\Gamma_m}|z|\right),\quad m \to \infty.$$

Тогда из (3.1.2) следует, что

$$\left|\frac{F(\xi)}{L_1(\xi)}\right| \prec \frac{1}{(1+|\xi|)},\ \xi \in \Gamma_m.$$

Тем самым,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} \frac{F(\xi)\,d\xi}{(\xi-z)L_1(\xi)}\right| \longrightarrow 0,\ m \longrightarrow \infty.$$

Это значит, что ряд Лагранжа функции F по функции L_1 сходится поточечно к самой функции F:

$$F(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(\xi_k)}{L_1'(\xi_k)(\xi - \xi_k)} L_1(\xi).$$

В частности, для каждого $z \in D$

$$e^{\xi z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\xi_k z}}{L_1'(\xi_k)(\xi - \xi_k)} L_1(\xi). \tag{3.1.4}$$

Пусть $f \in H(D, \varphi)$ и S_f — функционал на $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})$, построенный в лемме 3.1.1, со свойством

$$S_f(e^{\xi z}) = f(z), \;\; z \in D.$$

Из (3.1.2) следует, что $\frac{L_1(\xi)}{\xi - \xi_k} \in H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})$ для всех k, причем

$$\left\| \frac{L_1(\xi)}{\xi - \xi_k} \right\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})} \leq e^c, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

В силу (3.1.3) для каждого $z \in D$ ряд в (3.1.4) сходится в норме пространства $H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})$. Тем самым по построению функционала S_f поточечно для каждого $z \in D$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\xi_k z}}{L_1'(\xi_k)} S_f\left(\frac{L_1(\xi)}{\xi - \xi_k} \right). \tag{3.1.5}$$

Докажем, что ряд в (3.1.5) сходится в норме пространства $H(D, \varphi_{2A+12})$.

Из (3.1.1) следует,что

$$\left| S_f\left(\frac{L_1(\xi)}{\xi - \xi_k} \right) \right| \leq M \|L_1\|_{H(\mathbb{C}, \widetilde{\varphi}_{10})} \cdot \|f\|_{H(D,\varphi)} := M_1 \|f\|_{H(D,\varphi)}, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Учитывая последнюю оценку и (3.1.3), получим

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{\xi_k z}}{L_1'(\xi_k)} S_f\left(\frac{L_1(\xi)}{\xi - \xi_k} \right) \right\|_{H(D, \varphi_{2A+12})} \leq M_1 \|f\|_{H(D,\varphi)} \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \left\| \frac{e^{\xi_k z}}{L_1'(\xi_k)} \right\|_{H(D, \varphi_{2A+12})} \leq$$

$$\leq M_1 \|f\|_{H(D,\varphi)} \cdot e^c \cdot \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(1 + |\xi_k|)^{[A]-A-1}}.$$

Учитывая, что последовательность ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, имеет конечную линейную плотность, получим, что

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{\xi_k z}}{L_1'(\xi_k)} S_f \left(\frac{L_1(\xi)}{\xi - \xi_k} \right) \right\|_{H(D,\varphi_{2A+12})} \longrightarrow 0,\ N \longrightarrow \infty.$$

Теорема 3.1.1 доказана.

Теорема 3.1.2. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при* $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, *такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 4\alpha + 12$ (α — универсальная постоянная из теоремы 3.1.1) и $R > 0$, выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2,\ y = (y_1, y_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geq R,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \varphi_{-\alpha})$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z},\ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi)$.

Доказательство теоремы 3.1.2.

По условию теоремы функция $\widetilde{\varphi}_\alpha$ выпуклая, поэтому $\widetilde{\widetilde{\varphi_{-\alpha}}}(\lambda) = \widetilde{\varphi}_{-\alpha}(\lambda)$. Значит, функция $\varphi_{-\alpha}$ удовлетворяет требованиям теоремы 3.1.1 к функции φ. Остается заметить, что в условиях данной теоремы $(\varphi_{-\alpha})_\alpha = \varphi$.

Теорема 3.1.2 доказана.

Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 более непосредственным образом можно сформулировать для весовых функций конечного порядка.

Теорема 3.1.3. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в* *этой области, стремящейся к бесконечности при* $\mathrm{dist}\,(z, \partial D) \longrightarrow 0$, *такой что* $\widetilde{\varphi}$ *дважды дифференцируема, и для некоторых констант* $b > 12$ *и* $R > 0$, *выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial \widetilde{\varphi}(x_1 + ix_2)}{\partial x_j \partial x_k} y_j y_k \geq \frac{b}{1 + |x|^2} |y|^2,\ y = (y_1, y_2),\ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geq R,$$

при условии: для некоторого $\rho > 0$

$$\varphi(z) \prec \mathrm{dist}^{\,-\rho}(z, \partial D),\ z \in D,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, *обладающая свойством: каждая функция* $f \in H(D, \varphi)$ *представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z},\ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H\left(D, \varphi(z) + \alpha(\rho + 1) \ln \frac{1}{\mathrm{dist}\,(z, \partial D)}\right)$, *где* α *— константа из теоремы* 3.1.1.

Доказательство теоремы 3.1.3.

В силу теоремы 3.1.1 нам достаточно доказать, что для некоторой постоянной C выполняется неравенство

$$\varphi_\alpha(z) \leq \varphi(z) + \alpha(\rho + 1) \ln \left(\frac{1}{\mathrm{dist}\,(z, \partial D)} \right) + C,\ z \in D.$$

Пусть λ_z — точка достижения $\sup_\lambda(\mathrm{Re}\,\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) + \alpha \ln(1 + |\lambda|))$. Для краткости величину $\mathrm{dist}\,(z, \partial D)$ будем обозначать через $d(z)$. По лемме 2.2.3

$$\mathrm{Re}\,\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) + \alpha \ln(1 + |\lambda|) \leq -d(z)|\lambda| + B|\lambda|^\beta + \alpha \ln(1 + |\lambda|),$$

где $\beta = \frac{\rho}{1+\rho}$, $B > 0$ — некоторая постоянная. Если $t \geq 1$, то $\ln(1+t) \leq \ln 2 + \frac{1}{\beta} t^\beta$, поэтому при $|\lambda| \geq 1$

$$\mathrm{Re}\,\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) + \alpha \ln(1 + |\lambda|) \leq -\delta(z)|\lambda| + (B + \frac{\alpha}{\beta})|\lambda|^\beta + \alpha \ln 2.$$

Функция $-dt+(B+\frac{\alpha}{\beta})t^{\beta}$ достигает своего наибольшего значения в точке $T=\left(\frac{d}{B\beta+\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, убывает при $t>T$ и в точке $T_z=\left(\frac{\beta d}{B\beta+\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}>T$ равна 0. Таким образом,

$$\text{Re }\lambda_z z-\widetilde{\varphi}(\lambda_z)+\alpha\ln(1+|\lambda_z|)\le 0,\ \text{если}\ \ |\lambda_z|\ge T_z.$$

Если же $|\lambda_z|\le T_z$, то

$$\text{Re }\lambda_z z-\widetilde{\varphi}(\lambda_z)+\alpha\ln(1+|\lambda_z|)\le\sup_{\lambda}(\text{Re }\lambda z-\widetilde{\varphi}(\lambda))+\alpha(1+T_z)\le$$

$$\le\varphi(z)+\alpha(\rho+1)\ln\frac{1}{d(z)}+1+\alpha(\rho+1)\ln\frac{1}{B\beta+\alpha}.$$

Из последних двух неравенств получаем

$$\varphi_{\alpha}(z)=\text{Re }\lambda_z z-\widetilde{\varphi}(\lambda_z)+\alpha\ln(1+|\lambda_z|)\le\varphi(z)+\alpha(\rho+1)\ln\frac{1}{d(z)}+\text{const}.$$

Теорема 3.1.3 доказана.

Теорему 3.1.2 для весов φ, имеющих конечный порядок роста можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.1.4. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z=0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при $\text{dist}\,(z,\partial D)\longrightarrow 0$, такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b>4\alpha+12$ (α — универсальная постоянная из теоремы 3.1.1) и $R>0$, выполняется соотношение*

$$\sum_{k,j=1}^{2}\frac{\partial\widetilde{\varphi}(x_1+ix_2)}{\partial x_j\partial x_k}y_j y_k\ge\frac{b}{1+|x|^2}|y|^2,\ y=(y_1,y_2),\ x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ |x|\ge R,$$

при условии: для некоторого $\rho>0$

$$\varphi(z)\prec\text{dist}^{\,-\rho}(z,\partial D),\ z\in D,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k\in\mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f\in H\left(D,\varphi(z)-\alpha(\rho+1)\ln\frac{1}{\text{dist}\,(z,\partial D)}\right)$ представляется в виде ряда

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k e^{\lambda_k z},\ z\in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi)$.

Доказательство теоремы 3.1.4.

В силу теоремы 3.1.2 нам достаточно доказать, что для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство

$$\varphi_\alpha(z) \geq \varphi(z) - \alpha(\rho+1)\ln\left(\frac{1}{d(z)}\right) - C, \ z \in D,$$

где $d(z) = \text{dist }(z, \partial D)$. По лемме 2.2.3

$$\text{Re }\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda) \leq -d(z)|\lambda| + B|\lambda|^\beta,$$

где $\beta = \frac{\rho}{1+\rho}$, $B > 0$ — некоторая постоянная. Функция $-dt + Bt^\beta$ достигает своего наибольшего значения в точке $T = \left(\frac{d}{B\beta}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$, убывает при $t > T$ и в точке $T_z = \left(\frac{d}{B}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} > T$ равна 0. Следовательно, поскольку φ неотрицательна, то точка λ_z достижения $\sup_\lambda(\text{Re }\lambda z - \widetilde{\varphi}(\lambda))$ лежит в круге $D(0; T_z)$. Таким образом,

$$\varphi_\alpha(z) \geq \varphi(z) - \alpha\ln(1 + |\lambda_z|) \geq \varphi(z) - \alpha\ln(1 + T_z) \geq \varphi(z) -$$
$$-\alpha(\rho+1)\ln\left(\frac{1}{d(z)}\right) - \text{const}, \ z \in D.$$

Теорема 3.1.4 доказана.

3.2. Представление рядами экспонент функций в нормированных подпространствах $A^\infty(D)$

Теорема 3.2.1. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (2.1.11), и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей точку $z = 0$, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M}_s)$.

Для доказательства теоремы 3.2.1 нам понадобится следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 2.1.4.

Теорема 3.2.2. *Существует такое натуральное число* s*, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел* $\mathcal{M}$*, удовлетворяющей условию* (2.1.11)*, и для любой ограниченной выпуклой области* D*, содержащей точку* $z = 0$*, каждая функция* $f \in H(D, \mathcal{M})$ *является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала* S *на пространстве* $H(\mathbb{C}, \psi_s)$*:*

$$f(z) = \widehat{S}(z) = S\left(e^{\lambda z}\right), \ z \in D,$$

где

$$\psi_s(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - s\ln(1 + |\lambda|)).$$

Доказательство теоремы 3.2.2.

Из леммы 2.1.4 следует, что существует натуральное s, такое что для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей точку $z = 0$, и любой неубывающей логарифмически выпуклой последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (2.1.11), для билинейной формы, определенной в (2.1.13), существует предел

$$\mathcal{A}(f, F) = \lim_{q \nearrow 1} \mathcal{A}_q(f, F), \ (f, F) \in H(D, \mathcal{M}) \times H(\mathbb{C}, \psi_s),$$

и форма $\mathcal{A}(f, F)$ непрерывна, то есть для некоторой постоянной $C > 0$

$$|\mathcal{A}(f, F)| \le C\|f\|_{\mathcal{M}}\|F\|_{\psi_s}, \ f \in H(D, \mathcal{M}), \ F \in H(\mathbb{C}, \psi_s).$$

Число s можно взять равным $2[B_0] + 6$.

Пусть $f \in H(D, \mathcal{M})$. Тогда выражение

$$S_f(F) = \mathcal{A}(f, F), \ F \in H(\mathbb{C}, \psi_s),$$

— линейный непрерывный функционал на $H(\mathbb{C},\psi_s)$, причем

$$\widehat{S}_f(z)=S_f(e^{\lambda z})=\mathcal{A}(f,e^{\lambda z})=\lim_{q\nearrow 1}\mathcal{A}_q(f,e^{\lambda z})=$$

$$=\lim_{q\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\left(\frac{1}{q}D\right)}\frac{f(q\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z}=\lim_{q\nearrow 1}f(qz)=f(z),\ z\in D,$$

и имеет место оценка нормы этого функционала:

$$\|S_f\|_{H^*(\mathbb{C},\psi_s)}\le C\|f\|_{\mathcal{M}},\ f\in H(D,\mathcal{M}).$$

Теорема 3.2.2 доказана.

Доказательство теоремы 3.2.1.

Пусть λ_k, $k\in\mathbb{N}$, — нули целой функции L, построенной в доказательстве леммы 2.1.4, число $s=2[B_0]+6$, $f\in H(D,\mathcal{M})$ и S_f — функционал на $H(\mathbb{C},\psi_s)$, построенный в теореме 3.2.2 со свойством

$$S_f(e^{\lambda z})=f(z),\ z\in D.$$

По построению функционала S_f поточечно для каждого $z\in D$

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}\mathcal{A}\left(f,\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}\right). \tag{3.2.1}$$

Докажем, что ряд сходится равномерно на $\overline{D}$. По соотношению (2.1.26)

$$\left|\mathcal{A}\left(f,\frac{L(\lambda)}{\lambda-\lambda_k}\right)\right|\le C\|f\|_{\mathcal{M}},\ k\in\mathbb{N}. \tag{3.2.2}$$

По условию (2.1.23)

$$\sup_{z\in D}\left|\frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}\right|\le\frac{(1+|\lambda_k|)^{2B_0+3}}{T_0(|\lambda_k|)},\ k\in\mathbb{N}. \tag{3.2.3}$$

По определению функции следа

$$T_0(r)\ge\frac{r^m}{M_m},\ r>0,\ m\in\mathbb{N}. \tag{3.2.4}$$

Применяя это неравенство при $m=s$, получим

$$\sup_{z\in D}\left|\frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)}\right|\prec(1+|\lambda_k|)^{2\{B_0\}-3},\ k\in\mathbb{N}.$$

Учитывая, что последовательность λ_k имеет конечную линейную плотность, получим, что ряд (3.2.1) сходится равномерно.

Тем самым, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} \mathcal{A}\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right), \ z \in D.$$

Пусть

$$F_N(z) = \sum_{k \le N} \frac{e^{\lambda_k z}}{L'(\lambda_k)} \mathcal{A}\left(f, \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right), \ z \in D.$$

Тогда по соотношению (3.2.2)

$$\sup_{z \in D} \left| f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z) \right| \le C \|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k > N} \sup_{z \in D} \frac{|\lambda_k|^n |e^{\lambda_k z}|}{|L'(\lambda_k)|}, \ N \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

и по (3.2.3)

$$\sup_{z \in D} \left| f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z) \right| \le C \|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k > N} \frac{|\lambda_k|^n (1 + |\lambda_k|)^{2B_0 + 3}}{T_0(|\lambda_k|)}, \ N \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}.$$

Применим соотношение (3.2.4) при $m = n + s$:

$$\sup_{z \in D} \left| f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z) \right| \le C_1 M_{n+s} \|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k > N} (1 + |\lambda_k|)^{2\{B_0\} - 3}, \ N \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

значит,

$$\|f(z) - F_N(z)\|_{\mathcal{M}_s} = \sup_{n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}} \frac{1}{M_{n+s}} \sup_{z \in D} \left| f^{(n)}(z) - F_N^{(n)}(z) \right| \le$$

$$\le C_1 \|f\|_{\mathcal{M}} \sum_{k > N} (1 + |\lambda_k|)^{2\{B_0\} - 3} \longrightarrow 0, \ N \longrightarrow \infty.$$

Теорема 3.2.1 доказана.

Теорема 3.2.1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3.2.3. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (2.1.11), и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей точку $z = 0$, найдется система экспонент*

$e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D)$, для которой $f^{(s)} \in H(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M})$.

Доказательство теоремы 3.2.3.

Очевидно, что если $f^{(s)} \in H(D, \mathcal{M})$, то $f \in (D, \mathcal{M}_{-s})$. По теореме 3.2.1 найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, такая что каждая функция $f \in H(D, \mathcal{M}_{-s})$ разлагается в ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ \ z \in D,$$

сходящийся в норме пространства $f \in H(D, \mathcal{M}_0)$.

Теорема 3.2.3 доказана.

Глава 4

Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций

В этой главе рассматриваются гильбертовы пространства целых функций H, удовлетворяющие условиям:

1. Пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$.

2. Пространство H устойчиво относительно деления, то есть если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$. Из этого условия следует в частности, что точечные функционалы отличны от нуля.

Из условия 1 следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром. Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ ([62]).

Система элементов e_k, $k = 1, 2, \ldots$, в гильбертовом пространстве называется безусловным базисом (см. [50]), если она полна и найдутся числа $c, C > 0$, такие что для для любого набора чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ выполняется соотношение

$$c \sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 \|e_k\|^2 \le \left\| \sum_{j=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 \le C \sum_{j=1}^{n} |c_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Известно (см. [50]), что если система e_k, $k = 1, 2, \ldots$, — безусловный базис, то любой элемент пространства H единственным образом представляется в виде ряда

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k,$$

причем

$$c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2 \le \|x\|^2 \le C \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \|e_k\|^2. \tag{4.1}$$

Для данной последовательности комплексных чисел $\{z_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ рассмотрим систему $\{k(\lambda, z_i)\}_{i=1}^{\infty}$. Нас будет интересовать вопрос о том, при каких условиях на последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ соответствующая система из воспроизводящих ядер будет являться безусловным базисом в пространстве H.

4.1. Необходимые условия безусловной базисности системы $\{k(\lambda, z_i)\}_{i=1}^{\infty}$

Теорема 4.1.1. *Если система $\{k(\lambda, z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве H, то существует целая функция L с простыми нулями в точках z_i, $i = 1, 2, \ \dots$, для которой выполняется соотношение.*

$$\frac{1}{P}K(z) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \leq PK(z), \ z \in \mathbb{C}, \tag{4.1.1}$$

где P — некоторая положительная постоянная.

Доказательство теоремы 4.1.1.

Пусть

$$k(\lambda, z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(z) k(\lambda, z_i), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Заметим, что $c_i(z_j) = \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера. Пусть $\{s_j(\lambda)\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ биортогональная система к системе $k(\lambda, z_i)$, то есть $(s_j(\lambda), k(\lambda, z_i)) = \delta_i^j$. Значит, $s_j(z_i) = (s_j(\lambda), k(\lambda, z_i)) = \delta_i^j$. Поэтому

$$\overline{s_j(z)} = (k(\lambda, z), s_j(\lambda)) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(z)(k(\lambda, z_i), s_j(\lambda)) = c_j(z). \tag{4.1.2}$$

Пусть $L(z) = s_1(z)(z - z_1)$. Тогда L — целая функция, обращающаяся в нуль на z_i, $i = 1, 2, \ \dots$. При этом $L(z)(z - z_1)^{-1} = s_1(z) \in H$ и при $j > 1$

$$\frac{L(z)}{z - z_j} = s_1(z) + (z_j - z_1)\frac{s_1(z)}{z - z_j}.$$

По условию устойчивости пространства H эти функции также лежат в H. Кроме того, $L'(z_j) \neq 0$. Допустим противное: для некоторого i $L'(z_i) = 0$. Тогда целая функция $L(z)(z-z_i)^{-1}$ лежит в пространстве H и ортогональна всем $k(\lambda, z_j)$, что невозможно в силу базисности системы $\{k(\lambda, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$. Положим

$$L_j(z) = \frac{L(z)}{L'(z_j)(z-z_j)},\ z \in \mathbb{C},\ j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $L_j(z_i) \equiv s_j(z_i)$ для всех i, j, следовательно, с учетом полноты системы $\{k(\lambda, z_j)\}_{j=1}^{\infty}$ и соотношения (4.1.2)

$$\overline{c_j(z)} = s_j(z) = \frac{L(z)}{L'(z_j)(z-z_j)},\ z \in \mathbb{C},\ j \in \mathbb{N}.$$

Таким образом,

$$k(\lambda, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\overline{L(z)}}{\overline{L'(z_i)(z-z_i)}} k(\lambda, z_i),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, пользуясь (4.1), получим утверждение теоремы.

Теорема 4.1.1 доказана.

Введем одну характеристику для непрерывных на плоскости функций. Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z, r)$ обозначим круг $\{w : \ |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z, r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z,r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f, z, r)$ — расстояние от функции f до пространства гармонических в $B(z, r)$ функций:

$$d(f, z, r) = \inf\{\|f - H\|_r,\ H \text{ — гармонична в } \ B(z, r)\}.$$

Для положительного числа p положим

$$\tau(u, z, p) = \sup\{r : \ d(u, z, r) \le p\}.$$

Имеет место (см. [61, лемма 5]) следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. *Функция $\tau(z) = \tau(u, z, p)$ удовлетворяет условию Липшица: для всех z, w*

$$|\tau(z) - \tau(w)| \le |z - w|.$$

Доказательство леммы 4.1.1.

Функция u равномерно непрерывна на компактах. Пусть $\delta = \delta(p) > 0$, такое что для всех $\zeta_1, \zeta_2 \in B(0, R)$, таких что $|\zeta_1 - \zeta_2| \le \delta$,

$$|u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| \le p.$$

Тогда для всех $z \in B(0, R - p)$

$$\tau(u, z, p) \ge \delta.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и пусть для $z \in B(0, R - p)$ гармоническая в $B(z, \tau(z) - \varepsilon)$ функция h удовлетворяет оценке

$$\sup_{\zeta \in B(z, \tau(z) - \varepsilon)} |u(\zeta) - h(\zeta)| \le p.$$

Тогда для всех $w \in B(z, \delta)$ круг $B(w, \tau(z) - \varepsilon - |w - z|) \subset B(z, \tau(z) - \varepsilon)$ и поэтому

$$\sup_{\zeta \in B(w, \tau(z) - \varepsilon - |w - z|)} |u(\zeta) - h(\zeta)| \le p.$$

Следовательно,

$$\tau(w) \ge \tau(z) - \varepsilon - |w - z|,$$

и в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\tau(w) \ge \tau(z) - |w - z|$$

Поменяв местами w, z, получим

$$|\tau(w) - \tau(w)| \le |z - w|.$$

Лемма 4.1.1 доказана.

В [61, лемма 1.1] показано, что в случае, когда u — непрерывная субгармоническая функция, величина $\tau = \tau(u, \lambda, p)$ вполне определяется условием: если $H(z)$ — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(\lambda, \tau)$, то

$$\max_{z \in \overline{B}(\lambda, \tau)} (H(z) - u(z)) = 2p. \tag{4.1.3}$$

Функция
$$\ln K(z) = 2\sup_{||F||\le 1}\ln|F(z)|$$
является субгармонической и непрерывной на всей плоскости (в силу устойчивости пространства $K(z)>0$). В продолжении этой главы через $\tau(z)$ будем обозначать функцию $\tau(\ln K(w), z, \ln(5P))$, где P — константа из соотношения (4.1.1). Итак,
$$\inf\left\{\sup_{z\in\overline{B}(\lambda,\tau(\lambda))}|\ln K(z)-h(z)|,\ \text{h гармонична в } B(z,\tau(z))\right\} = \ln(5P).$$

Теорема 4.1.2. *Пусть* $L(z)$ *— целая функция с простыми нулями* z_i, $i = 1,2,\ \ldots\ ,$ *при некотором* P *удовлетворяющая двусторонней оценке*
$$\frac{1}{P}K(z)\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|L(z)|^2K(z_i)}{|L'(z_i)|^2|z-z_i|^2}\le PK(z).$$
Тогда

1) *в любом круге* $B(z,2\tau(z))$ *содержится хотя бы один нуль* z_i *функции* L*;*

2) *для любых* $i,j,\ i\ne j$, *выполняется неравенство*
$$|z_i-z_j|\ge\frac{\max(\tau(z_i),\tau(z_j))}{10P^{\frac{3}{2}}};$$

3) *для любого* i *в круге* $B\left(z_i,\frac{\tau(z_i)}{20P^{\frac{3}{2}}}\right)$ *справедливо соотношение*
$$\frac{1}{5^6P^8}K(z)\le\frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2|z-z_i|^2}\le PK(z).$$

Доказательство теоремы 4.1.2.

1. Первый пункт докажем от противного: пусть для некоторого $z\in\mathbb{C}$ в круге $B=B(z,2\tau(z))$ нет ни одного нуля функции $L(\lambda)$. Возьмем точку $\lambda\in B(z,\tau(z))$. Тогда для любого k имеем $\tau(z)\le|z_k-z|/2$ и $|\lambda-z|<\tau(z)\le|z_k-z|/2$, значит
$$|\lambda-z_k|\ge|z_k-z|-|\lambda-z|\ge\frac{1}{2}|z-z_k|,$$

$$|\lambda - z_k| \le |z_k - z| + |\lambda - z| \le \frac{3}{2}|z - z_k|.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} \le \frac{|\lambda - z_k|}{|z - z_k|} \le \frac{3}{2} < 2.$$

Из этого соотношения вытекает двусторонняя оценка, верная для $\lambda \in B(z, \tau(z))$

$$\frac{1}{4}C(z)|L(\lambda)|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2 K(z_k)}{|L'(z_k)|^2 |\lambda - z_k|^2} \le 4C(z)|L(\lambda)|^2,$$

где через $C(z)$ обозначено число

$$C(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K(z_k)}{|L'(z_k)|^2 |z - z_k|^2}.$$

По соотношению (4.1.1), которое по условию теоремы выполняется для функции $L(\lambda)$, получим

$$\frac{1}{4P}C(z)|L(\lambda)|^2 \le K(\lambda) \le 4PC(z)|L(\lambda)|^2.$$

Прологарифмируем это соотношение

$$\left|\ln K(\lambda) - \ln\left(C(z)|L(\lambda)|^2\right)\right| \le \ln(4P) < \ln(5P).$$

Поскольку в круге $B(z, 2\tau(z))$ по предположению нет нулей функции $L(\lambda)$, то функция $h(\lambda) = \ln\left(C(z)|L(\lambda)|^2\right)$ гармонична в круге $B(z, \tau(z))$ и непрерывна в его замыкании. Тогда последняя оценка противоречит определению величины $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, \ln(5P))$.

2. Зафиксируем два различных номера $k,\ n$. По соотношению (4.1.1) функция

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{K(z_n)}}{|L'(z_n)|(z_n - \lambda)} L(\lambda)$$

удовлетворяет верхней оценке

$$|F(\lambda)| \le \sqrt{PK(\lambda)}.$$

А по определению величины $\tau(z_k)$ в круге $B(z_k, \tau(z_k))$ существует гармоническая функция $h_k(\lambda)$, удовлетворяющая оценке

$$|\ln K(\lambda) - h_k(\lambda)| \le \ln(5P), \tag{4.1.4}$$

в частности,

$$\sqrt{K(\lambda)} \leq \sqrt{5P} e^{\frac{h_k(\lambda)}{2}}.$$

Пусть $g_k(\lambda)$ — функция, аналитическая в круге $B(z_k, \tau(z_k))$ и такая что $\operatorname{Re} g_k(\lambda) = h_k(\lambda)/2$. Тогда функция

$$f(z) = F(\tau(z_k)z + \lambda_k)e^{-g_k(\tau(z_k)z+z_k)}$$

аналитична в единичном круге $B(0,1)$ и удовлетворяет верхней оценке

$$|f(z)| \leq \sqrt{5}P,$$

причем $f(0) = 0$. По лемме Шварца выполняется верхняя оценка

$$|f(z)| \leq \sqrt{5}P|z|,$$

значит,

$$|f'(0)| \leq \sqrt{5}P.$$

Вычислив $f'(0)$, получим

$$|F'(z_k)| \leq \sqrt{5}P \frac{e^{\frac{h_k(z_k)}{2}}}{\tau(z_k)}.$$

Отсюда и из соотношения (4.1.4) вытекает

$$|F'(z_k)| \leq 5P^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{K(z_k)}}{\tau(z_k)}.$$

Вычислим по определению значение $F'(z_k)$ и получим

$$\frac{|L'(z_k)|\sqrt{K(z_n)}}{|L'(z_n)||z_k - z_n|} \leq 5P^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{K(z_k)}}{\tau(z_k)}.$$

Индексы k, n произвольные, можем их поменять местами:

$$\frac{|L'(z_n)|\sqrt{K(z_k)}}{|L'(z_k)||z_n - z_k|} \leq 5P^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{K(z_n)}}{\tau(z_n)}.$$

Перемножим последние две оценки и получим

$$\frac{1}{|z_k - z_n|^2} \leq \frac{25P^3}{\tau(z_k)\tau(z_n)},$$

или

$$|z_k - z_n|^2 \geq \frac{\tau(z_k)\tau(z_n)}{25P^3}. \tag{4.1.5}$$

Пусть $\tau(z_k) \geq \tau(z_n)$ и предположим, что неравенство пункта 2 не выполняется, то есть

$$|z_k - z_n| < \frac{\tau(z_k)}{10P^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.1.6}$$

Тогда круг

$$B' = \left\{ |\lambda - z_n| \leq \frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}} \tau(z_k) \right\}$$

лежит в круге $B(z_k, \tau(z_k))$, в котором существует гармоническая функция $h_k(z)$ с оценкой

$$|\ln K(z) - h_k(z)| \leq \ln(5P),$$

значит,

$$\tau(z_n) \geq \frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}} \tau(z_k).$$

Эта оценка вместе с оценкой (4.1.5) дает неравенство

$$|z_k - z_n|^2 \geq \frac{1}{25P^3} \tau(z_k)\tau(z_n) \geq \frac{1}{25P^3} \frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}} \tau(z_k)^2.$$

Так как по смыслу $P > 1$, то

$$\frac{10P^{\frac{3}{2}} - 1}{10P^{\frac{3}{2}}} > \frac{9}{10} > \frac{1}{4},$$

и

$$|z_k - z_n|^2 > \frac{1}{100P^3} \tau^2(z_k)$$

или

$$|z_k - z_n| > \frac{1}{10P^{\frac{3}{2}}} \tau(z_k),$$

что противоречит предположению (4.1.6).

3. Зафиксируем некоторый номер k. Правое неравенство в пункте 3 следует просто из условия теоремы. В круге $B(z_k, \tau(z_k))$ по определению величины $\tau(z_k)$ существует гармоническая функция $h_k(\lambda)$, такая что

$$-\ln(5P) \leq \ln K(\lambda) - h_k(\lambda) \leq \ln(5P). \tag{4.1.7}$$

По условию теоремы

$$K(\lambda) \geq \frac{1}{P}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K(z_n)|L(\lambda)|^2}{|L'(z_n)|^2|\lambda - z_n|^2} \geq \frac{K(z_k)|L(\lambda)|^2}{P|L'(z_k)|^2|\lambda - z_k|^2}$$

или

$$\ln K(\lambda) \geq \ln\frac{K(z_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(z_k)|^2|\lambda - z_k|^2} - \ln P.$$

Следовательно, для $\lambda \in B(z_k, \tau(z_k))$ имеем

$$\ln\frac{K(z_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(z_k)|^2|\lambda - z_k|^2} - \ln P - h_k(\lambda) - \ln(5P) \leq 0,$$

то есть

$$h_k(\lambda) + 2\ln P + \ln 5 - \ln\frac{K(z_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(z_k)|^2|\lambda - z_k|^2} \geq 0.$$

По пункту 2 в круге $B\left(z_k, \frac{1}{10P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_k)\right)$ нет нулей функции $L(\lambda)$ кроме z_k. Следовательно, функция

$$v_k(\lambda) = -\ln\frac{K(z_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(z_k)|^2|\lambda - z_k|^2}$$

гармонична в этом круге. А функция $h_k(\lambda)+v_k(\lambda)+\ln(5P^2)$ гармонична и неотрицательна в нем. По неравенству Харнака в круге $B\left(z_k, \frac{\tau(z_k)}{20P^{\frac{3}{2}}}\right)$ выполняется оценка

$$h_k(\lambda) + v_k(\lambda) + \ln(5P^2) \leq 3(h_k(z_k) + v_k(z_k) + \ln(5P^2)) =$$

$$= 3(h_k(z_k) - \ln K(z_k) + \ln(5P^2)).$$

Из левого неравенства в (4.1.7) имеем $h_k(z_k) \leq \ln K(z_k) + \ln(5P)$, поэтому

$$h_k(\lambda) + v_k(\lambda) \leq 3\ln(5P) + 2\ln(5P^2) = \ln 5^5 P^7.$$

Из правого неравенства в (4.1.7) имеем $h_k(\lambda) \geq \ln K(\lambda) - \ln(5P)$, значит,

$$-v_k(\lambda) \geq \ln K(\lambda) - \ln(5P) - \ln 5^5 P^7 = \ln K(\lambda) - \ln(5^6 P^8).$$

Таким образом,

$$\frac{K(z_k)|L(\lambda)|^2}{|L'(z_k)|^2|\lambda - z_k|^2} \geq \frac{1}{5^6 P^8}K(\lambda).$$

Теорема 4.1.2 доказана.

Теорема 4.1.3. *Пусть z_i, $i = 1, 2, \ \dots \ ,$ — нули функции $L(z)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы:*

$$\frac{1}{P}K(z) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z-z_i|^2} \le PK(z).$$

Тогда для любого конечного множества нулей B, содержащего хотя бы два нуля, найдется индекс n, такой что

$$\sum_{z_i \in B,\, i \ne n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2} \le (4P)^{12}.$$

Доказательство теоремы 4.1.3.

По условию теоремы для любого z выполняется оценка

$$\sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2 |z-z_i|^2} \le PK(z). \tag{4.1.8}$$

Поскольку множество B конечно, то существует такой номер n, что

$$\frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} = \min_{z_i \in B} \left(\frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 \tau^2(z_i)} \right).$$

По пункту 3 теоремы 4.1.2 для точек z, лежащих на границе круга $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$, справедлива оценка

$$\frac{1}{5^6 P^8} K(z) \le 20^2 P^3 \frac{K(z_n)|L(z)|^2}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)}$$

или

$$\frac{K(z)}{|L(z)|^2} \le 4^2 5^8 P^{11} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)}.$$

Отсюда и из оценки (4.1.8) получим

$$4^2 5^8 P^{11} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} \ge \frac{1}{P} \sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z-z_i|^2}.$$

Следовательно, для точек z, лежащих на границе круга $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$,

$$4^2 5^8 P^{12} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2 \tau^2(z_n)} \ge \sum_{z_i \in B} \frac{K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 \tau^2(z_i)} \cdot \frac{\tau^2(z_i)}{|z-z_i|^2}.$$

Учитывая выбор номера n, для точек z на границе $B\left(z_n, \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}\tau(z_n)\right)$ имеем

$$4^2 5^8 P^{12} \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)} \geq \frac{K(z_n)}{|L'(z_n)|^2\tau^2(z_n)} \sum_{z_i \in B} \frac{\tau^2(z_i)}{|z-z_i|^2}$$

или

$$\sum_{z_i \in B} \frac{\tau^2(z_i)}{|z-z_i|^2} \leq 4^2 5^8 P^{12}. \tag{4.1.9}$$

По пункту 2 теоремы 4.1.2 для указанных точек z при $i \neq n$ выполняется оценка

$$|z-z_i| \leq |z-z_n| + |z_n - z_i| = \frac{\tau(z_n)}{20P^{\frac{3}{2}}} + |z_n - z_i| \leq \frac{3}{2}|z_n - z_i|,$$

поэтому из (4.1.9) вытекает требуемая оценка

$$\sum_{z_i \in B,\, i \neq n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_n - z_i|^2} \leq (4P)^{12}.$$

Теорема 4.1.3 доказана.

Следствие. *Пусть z_i, $i = 1, 2, \ \dots \ ,$ — нули функции $L(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы 4.1.3 и $b = \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}$. Тогда для любого конечного множества нулей B, содержащего хотя бы два нуля, найдется индекс n, такой что*

$$\sum_{z_i \in B,\, i \neq n} \int\limits_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z-z_n|^2} \leq 4^{10} P^9. \tag{4.1.10}$$

Доказательство следствия из теоремы 4.1.3.

Поскольку для точек $z \in B(z_i, b\tau(z_i))$ имеем

$$|z - z_n| \geq |z_i - z_n| - |z - z_i| \geq \frac{1}{2}|z_i - z_n|,$$

то

$$\int\limits_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z-z_n|^2} \leq \frac{4\pi b^2 \tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2}.$$

Тогда

$$\sum_{z_i \in B,\, i \neq n} \int\limits_{B(z_i,\, b\tau(z_i))} \frac{dm(z)}{|z-z_n|^2} \leq 4\pi b^2 (4P)^{12} = \frac{4\pi}{400P^3}(4P)^{12} \leq 4^{10} P^9.$$

Следствие доказано.

Теорема 4.1.4. *Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций, устойчивое относительно деления. Предположим, что для всех достаточно больших положительных чисел p найдется число $\delta = \delta(p) > 0$ и последовательность кругов $B(\zeta_j, R_j)$, такая что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in B(\zeta_j, R_j)$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{z \in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda). \tag{4.1.11}$$

и, кроме того,

$$\max_{z \in \overline{B}(\zeta_j, R_j)} \tau(z) = o(R_j), \ \ j \longrightarrow \infty.$$

Тогда в пространстве H безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Доказательство теоремы 4.1.4.

Воспользуемся следующим утверждением (см. [37, стр. 216]).

Лемма о покрытиях шарами. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^p$ покрыто шарами, так что каждая точка $x \in A$ является центром некоторого шара $S(x)$ радиуса $r(x)$. Если $\sup_{x \in A} r(x) < \infty$, то из системы $\{S(x)\}$ можно выделить не более чем счетную систему $\{S(x_k)\}$, покрывающую все множество A и имеющую кратность, не превосходящую некоторого числа $N(p)$, зависящего только от размерности пространства.*

Нетрудно убедиться в том, что $N(2) = 6$.

Проведем доказательство от противного: допустим, что условия теоремы выполнены, но в пространстве H существует безусловный базис из значений воспроизводящего ядра $\{k(\lambda, z_i)\}$. Тогда верны теорема 4.1.1 и теоремы 4.1.2, 4.1.3 о порождающей функции L. Если соотношение (4.1.1) выполняется для постоянной P , то оно выполняется и для большего числа P'. Поэтому можно считать, что неравенство (4.1.11) выполняется для $p = \ln(5P)$ и пусть $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, \ln(5P))$.

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и номер j будем считать таким большим, чтобы выполнялось условие

$$\max_{z\in\overline{B}(\zeta_j,R_j)} \tau(z) < \varepsilon R_j.$$

Рассмотрим систему кругов $B(\lambda, 2\tau(\lambda))$, $\lambda \in B(\zeta_j, R_j)$. По п.1 теоремы 4.1.2 в каждом из этих кругов содержится хотя бы одна из точек z_i и эти круги покрывают весь круг $B(\zeta_j, R_j)$. По лемме о покрытиях шарами можно выделить не более чем счетный набор кругов $B_n = B(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$, покрывающих круг $B(0, R)$, при этом каждая точка этого круга попадает не более чем в $N(2) = 6$ кругов покрытия. В каждом из кругов B_n выберем по одному $z_{i(n)}$. При этом некоторые $z_{i(n)}$ могут оказаться выбранными неоднократно, но по свойствам выделенного покрытия кратность выбора одного показателя не больше шести. Перенумеруем систему выбранных показателей, присвоив им номер круга, в котором данный показатель выбран. Получим набор чисел $\{w_n\}$, в котором каждое число повторяется не более шести раз. К полученному набору применим теорему 4.1.3. Найдется номер m, такой что с учетом кратности будет выполняться оценка

$$\sum_{w_n\neq w_m} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \le 6(4P)^{12}. \tag{4.1.12}$$

В наших обозначениях $w_n \in B_n = B_n(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$. Далее рассмотрим такие n, что $w_m \notin B'_n = B_n(\lambda_n, 3\tau(\lambda_n))$. Тогда для любого $w \in B_n$ имеем $|w - w_m| \ge \tau(\lambda_n)$. Кроме того,

$$|w_n - w_m| \le |w_n - w| + |w - w_m| \le 4\tau(\lambda_n) + |w - w_m| \le 5|w - w_m|,$$

или

$$\frac{1}{|w - w_m|^2} \le \frac{25}{|w_n - w_m|^2},\ w \in B_n,\ w_m \notin B'_n.$$

Интегрируя это неравенство по кругу B_n получим

$$\int_{B_n} \frac{dm(w)}{|w - w_m|^2} \le \frac{100\pi\tau^2(\lambda_n)}{|w_n - w_m|^2},\ w_m \notin B'_n.$$

Так как $w_n \in B(\lambda_n, 2\tau(\lambda_n))$, то по условию (4.1.11) $\tau^2(w_n) \geq \delta^2\tau^2(\lambda_n)$. Таким образом, из последней оценки и из (4.1.12) следует соотношение

$$\sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \int\limits_{B_n} \frac{dm(w)}{|w-w_m|^2} \leq \frac{100\pi}{\delta^2} \sum_{w_n \neq w_m \notin B'_n} \frac{\tau^2(w_n)}{|w_n - w_m|^2} \leq \frac{600(4P)^{12}}{\delta^2} := C. \tag{4.1.13}$$

Если номер n, такой что $w_m \in B'_n$, то для любого $w \in B_n$ имеем

$$|w - w_m| \leq |w - \lambda_n| + |w_m - \lambda_n| \leq 2\tau(\lambda_n) + 3\tau(\lambda_n) = 5\tau(\lambda_n).$$

По выбору номера j имеем $|w - w_m| \leq 5\varepsilon R_j$, то есть круги B_n для рассматриваемых n полностью лежат в круге $B(w_m, 5\varepsilon R_j)$. Это значит, что круги покрытия, номера которых участвуют в суммировании в (4.1.13), покрывают множество $C(R_j) = B(\zeta_j, R_j) \setminus B(w_m, 5\varepsilon R_j)$. Следовательно,

$$\int\limits_{C(R_j)} \frac{dm(w)}{|w-w_m|^2} \leq C.$$

Применим замену переменных $w = \zeta_j + R_j\xi$, $w_m = \zeta_j + R_j\xi_m$,, тогда $\xi_m \in B(0, 1+2\varepsilon)$ и

$$\int\limits_{B(0,1)\setminus B(\xi_m, 5\varepsilon)} \frac{dm(\xi)}{|\xi - \xi_m|^2} \leq C.$$

Число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, устремив ε к нулю, получим противоречие.

Теорема 4.1.4 доказана.

Следующая теорема может служить инструментом для оценок функции $\tau(u, z, p)$.

Теорема 4.1.5. *Пусть субгармоническая на плоскости функция и дважды непрерывно дифференцируема. Если*

$$\frac{1}{b} \leq \frac{\Delta u(w)}{\Delta u(z)} \leq b, \ \forall w \in B\left(z, \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}\right).$$

то

$$\sqrt{\frac{8p}{b\Delta u(z)}} \leq \tau(u, z, p) \leq \sqrt{\frac{8pb}{\Delta u(z)}}.$$

Доказательство теоремы 4.1.5.

Для краткости введем обозначение $\rho(z) = (\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}$. Как уже отмечалось, величину $\tau = \tau(u, z, p)$ можно определить из условия

$$\max_{w \in \overline{B}(z,\tau)} (H_u(w) - u(w)) = 2p,$$

где H_u — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(z, \tau)$. По формуле Грина

$$h_u(w) - u(w) = \int\limits_{B(z,r)} G(w, \zeta)\, d\mu_u(\zeta),$$

где h_u — наименьшая гармоническая мажоранта функции u в круге $B(z, r)$, $G(w, \zeta)$ — функция Грина этого круга и μ_u — ассоциированная мера функции u. В нашем случае $2\pi d\mu_u(\zeta) = \Delta u(\zeta) dm(\zeta)$, значит, величину τ можем определить из условия

$$\max_{w \in \overline{B}(z,\tau)} \int\limits_{B(z,\tau)} G(w, \zeta) \frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}\, dm(\zeta) = 2p.$$

Если положить $r = \sqrt{\frac{8p}{b}} \rho(z)$ $(r \leq \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}})$, то

$$\max_{w \in \overline{B}(z,r)} \int\limits_{B(z,r)} G(w, \zeta) \frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}\, dm(\zeta) \leq b \Delta u(z) \max_{w \in \overline{B}(z,r)} \int\limits_{B(z,r)} G(w, \zeta) \frac{dm(\zeta)}{2\pi}.$$

Функция $v(w) = |w - z|^2$ субгармонична, ее ассоциированная мера тождественно равна $\frac{2}{\pi}$, а наименьшая гармоническая мажоранта в круге $B(z, r)$ тождественно равна r^2, поэтому

$$\max_{w \in \overline{B}(z,r)} \int\limits_{B(z,r)} G(w, \zeta) \frac{dm(\zeta)}{2\pi} = \frac{1}{4} \max_{w \in \overline{B}(z,r)} (r^2 - |w - z|^2) = \frac{r^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\max_{w \in \overline{B}(z,r)} \int\limits_{B(z,r)} G(w, \zeta) \frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}\, dm(\zeta) \leq \frac{br^2}{4} \Delta u(z)$$

и

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int\limits_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}\,dm(\zeta) \le \frac{br^2}{4}\Delta u(z) = 2p.$$

Отсюда следует нижняя оценка для $\tau = \tau(u,z,p)$.

Аналогично, взяв $r = \sqrt{8pb}\rho(z)$, получим оценку:

$$\max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int\limits_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{\Delta u(\zeta)}{2\pi}\,dm(\zeta) \ge \frac{\Delta u(z)}{b} \max_{w\in\overline{B}(z,r)} \int\limits_{B(z,r)} G(w,\zeta)\frac{dm(\zeta)}{2\pi} \ge$$

$$\ge \frac{\Delta u(z)}{b}\cdot\frac{r^2}{4} = 2p.$$

Отсюда следует верхняя оценка для $\tau = \tau(u,z,p)$.

Теорема 4.1.5 доказана.

4.2. Весовые гильбертовы пространства целых функций

В этом параграфе мы рассмотрим более конкретные гильбертовы пространства.

Пусть $\varphi(\lambda)$ — субгармоническая функция на плоскости и

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}):\ ||f||^2 := \int\limits_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)}\,dm(\lambda) < \infty \right\},$$

где dm — плоская мера Лебега. Тогда $\mathcal{F}_\varphi$ является гильбертовым пространством, удовлетворяющим условиям функциональности и устойчивости.

В работе [66] доказано, что если $\varphi(z) = \varphi(|z|)$ — субгармоническая дважды непрерывно дифференцируемая на плоскости функция и для $\rho(z) = (\Delta\varphi(z))^{-\frac{1}{2}}$ выполнены условия:

$$0 < \inf_{r>0} \rho(r) \ \text{ и } \ \rho(r) = o(r),\ \ r\to\infty,$$

а также

$$\rho(r+\rho(r)) = (1+o(1))\rho(r),\ \ r\to\infty \ \text{ и } \ \rho(2r) \asymp \rho(r),\ \ r>0,$$

то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Условие $\rho(2r) \asymp \rho(r),\ \ r > 0$, означает, в частности, что

$$\ln^2|z| = o(\varphi(z)),\ |z| \longrightarrow \infty.$$

В этой же работе построены безусловные базисы из воспроизводящих ядер в пространствах $\mathcal{F}_\varphi$ для весовых функций $(\ln^+|z|)^{1+\beta}$ при $\beta \in (0;1]$.

В следующей теореме докажем существование сколь угодно медленно растущих функций $\varphi(r)$, для которых $\ln r = o(\varphi(r))$, $r \longrightarrow \infty$, и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ нет безусловных базисов из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.1. *Для произвольной положительной неограниченно возрастающей функции $\eta(t)$, $t > 0$, существует радиальная субгармоническая функция $\varphi(z)$, такая что*

$$\varphi(r) = O(\eta(r)\ln r),\ r \longrightarrow \infty,$$

и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Доказательство теоремы 4.2.1.

Мы всегда можем найти положительную неограниченно возрастающую функцию $\gamma(t)$, $t > 0$, такую что $\gamma \le \eta$ и

$$\gamma'(t) \le \frac{\gamma(t)}{t\ln t},\ t > 1. \tag{4.2.1}$$

Например, считая функцию $\eta(t)$ дифференцируемой, можем положить

$$\gamma(t) = \exp\int_2^t \min\left((\ln\eta)'(\tau), \frac{1}{\tau\ln\tau}\right)\,d\tau,\ t > 2.$$

Поэтому достаточно построить $\varphi(r) = O(\gamma(r)\ln r)$, $r \longrightarrow \infty$, которая будет удовлетворять условию теоремы.

1. Схема конструкции радиальной субгармонической функции $\varphi(z)$.

Возьмем дифференцируемую положительную неограниченно возрастающую функцию $\mu(t),\ t > 0$, $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, и положим

$$u(z) = \int\limits_0^{|z|} \frac{\mu(t)}{t}\, dt.$$

Поскольку при $r = |z| \neq 0$

$$\Delta u(z) = u''(r) + \frac{u'(r)}{r} = \frac{\mu'(r)}{r} > 0,$$

то $u(z)$ — дважды дифференцируемая положительная радиальная субгармоническая функция на плоскости. Пусть

$$d\widetilde{\mu}(z) = \frac{\Delta u(z) dm(z)}{2\pi} = \frac{\mu'(|z|) dm(z)}{2\pi |z|}$$

— ассоциированная по Риссу мера функции u. Для меры ν через $\nu(t)$ будем обозначать ν-меру круга $B(0,t)$. Тогда

$$\widetilde{\mu}(t) = \mu(t),\ t > 0.$$

Возьмем неограниченно возрастающую последовательности $T_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющую условию

$$2T_n < T_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Через μ_n обозначим сужение меры $\widetilde{\mu}$ на кольцо

$$S_n = \{z:\ T_n < |z| < 2T_n\},$$

и положим

$$\nu = \sum_n \mu_n.$$

Функция

$$\varphi(z) = \int\limits_0^{|z|} \frac{\nu(t)}{t}\, dt$$

положительна, дифференцируема и субгармонична на плоскости. Накладывая на функцию $\mu(t)$ и на последовательность T_n некоторые условия будем добиваться, чтобы функция φ удовлетворяла условиям теоремы.

2. Обеспечение оценки сверху на функцию φ.

Утверждение 4.2.1. *Пусть функция γ, $\gamma(2) = 2$, удовлетворяет условию (4.2.1),*

$$\gamma_0(t) = \sqrt{\frac{\gamma(t)}{2}}, \quad \mu(t) = \gamma_0(t)\ln^+ t, t > 0,$$

и

$$T_n = \gamma_0^{-1}(n).$$

Тогда $2T_n \le T_{n+1}$ для всех n и

$$\varphi(r) \le \gamma(r)\ln r,\ r > 1.$$

Доказательство утверждения 4.2.1.

Из условия $\gamma(2) = 2$ следует, что $\gamma_0(2) = 1$, значит $T_1 = 2$. Из условия (4.2.1) на функцию γ имеем

$$(\ln\gamma(t))' \le \frac{1}{t\ln t},\ t > 1,$$

значит, для $b > a > 1$ верно

$$\frac{\ln b}{\ln a} \ge \frac{\gamma(b)}{\gamma(a)} = \frac{\gamma_0^2(b)}{\gamma_0^2(a)}.$$

Полагая $a = 2,\ b = T_n$, получим $T_n \ge 2^{n^2}$, полагая $b = T_{n+1},\ a = T_n$ имеем

$$T_{n+1} \ge T_n^{\frac{(n+1)^2}{n^2}} > T_n \cdot T_n^{\frac{2}{n}} \ge 2T_n.$$

Таким образом, последовательность $T_n,\ n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет исходным условиям.

По определению мер μ_n имеем

$$\mu_n(t) = \begin{cases} 0, \quad t < T_n, \\ \mu(t) - \mu(T_n), \quad T_n \le t \le 2T_n, \\ \mu(2T_n) - \mu(T_n), \quad 2T_n < t. \end{cases}$$

Соответственно, если

$$n(r) = \max\{n: \ T_n \le r\}, \ r > 0,$$

то есть $T_{n(r)} \le r < T_{n(r)+1}$, то

$$\nu(r) = \sum_{n=1}^{n(r)-1} (\mu(2T_n) - \mu(T_n)) + \left(\mu(r) - \mu(T_{n(r)})\right), \ T_{n(r)} \le r < 2T_{n(r)}, \qquad (4.2.2)$$

$$\nu(r) = \sum_{n=1}^{n(r)} (\mu(2T_n) - \mu(T_n)), \ 2T_{n(r)} \le r < T_{n(r)+1}. \qquad (4.2.3)$$

Пусть

$$x_2 = \ln(2T_n), \ x_1 = \ln T_n.$$

Тогда, пользуясь условием (4.2.1) на функцию γ, получим

$$\mu(2T_n) - \mu(T_n) = \gamma_0(e^{x_2})x_2 - \gamma_0(e^{x_1})x_1 =$$

$$= (\gamma_0(e^x)x)'(x^*)(x_2 - x_1) \le 2\gamma_0(e^{x^*})(x_2 - x_1),$$

где $x^* \le x_2$. Если $n \le n(r) - 1$, то

$$x^* \le x_2 = \ln(2T_n) < \ln T_{n+1} \le \ln T_{n(r)} \le \ln r.$$

Если $n = n(r)$, но $2T_{n(r)} \le r$, то

$$x^* \le x_2 = \ln(2T_n) \le \ln r.$$

Таким образом,

$$\mu(2T_n) - \mu(T_n) \le 2\gamma_0(r)\ln 2 < 2\gamma_0(r).$$

Аналогично оценивается разность

$$\mu(r) - \mu(T_{n(r)}) < 2\gamma_0(r)$$

при $T_{n(r)} \le r < 2T_{n(r)}$. Отсюда и из равенств (4.2.2)-(4.2.3) получим

$$\nu(r) < 2n(r)\gamma_0(r), \ r > 0.$$

Пусть $\beta(t) = \gamma_0^{-1}(t)$, тогда из $T_{n(r)} \le r$ следует, $\beta(n(r)) \le r$ или $n(r) \le \gamma_0(r)$. Тем самым,

$$\nu(r) < 2\gamma_0^2(r) = \gamma(r),\ r > 0,$$

и

$$\varphi(r) = \int\limits_1^r \frac{\nu(t)\,dt}{t} \le \gamma(r)\ln r, r > 1.$$

Утверждение 4.2.1 доказано.

3. Оценка характеристики τ для функций u и φ.

Утверждение 4.2.2. *Возьмем достаточно малое число $\delta > 0$ и введем в рассмотрение кольца*

$$S_n(\delta) := \{z :\ (1+\delta)T_n \le |z| \le (2-\delta)T_n\}, n \in \mathbb{N}.$$

Для любого $p > 0$ при n, больших некоторого $n(p,\delta)$, имеют место оценки

$$\sqrt{\frac{p}{2}}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}} \le \tau(\varphi, z, p) \le 6\sqrt{p}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}},\ z \in S_n(\delta).$$

Доказательство утверждения 4.2.2.

В предположении (4.2.1) на производную функции γ, такому же условию удовлетворяет и производная функции γ_0. Поэтому при $r > e$

$$\frac{\gamma_0(r)}{r} \le \mu'(r) = \gamma_0'(r)\ln r + \frac{\gamma_0(r)}{r} \le \frac{\gamma_0(r)}{r} + \frac{\gamma_0(r)}{r} \le 2\frac{\gamma_0(r)}{r}.$$

Тем самым $(r = |z|)$,

$$\frac{\gamma_0(r)}{r^2} \le \Delta u(z) = \frac{\mu'(r)}{r} \le 2\frac{\gamma_0(r)}{r^2}. \tag{4.2.4}$$

Так же из условий на функцию γ следует, что при $r > 4$

$$\gamma_0(2r) - \gamma_0(r) = \int\limits_r^{2r} \gamma_0'(t)\,dt \le \gamma_0(2r)\int\limits_r^{2r} \frac{d\ln t}{\ln t} = \gamma_0(2r)\ln\frac{\ln(2r)}{\ln r} \le \frac{\gamma_0(2r)}{2},$$

значит,

$$\gamma_0(2r) \le 2\gamma_0(r).$$

Возьмем произвольную точку $z_0 \in \mathbb{C}$ и числа $\rho, p > 0$. Гармоническая мажоранта $H(z)$ функции $v(z) = |z - z_0|^2$ в круге $B(z_0, \rho)$ равна тождественно ρ^2, а ее ассоциированная мера равна $\frac{2}{\pi} dm(z)$, значит, если $G(z,w)$ — функция Грина круга $B(z_0, \rho)$, то

$$\rho^2 = \max_{z \in B(z_0,\rho)} (H(z) - v(z)) = \frac{2}{\pi} \max_{z \in B(z_0,\rho)} \int\limits_{B(z_0,\rho)} G(z,w)\, dm(w).$$

Отсюда

$$\max_{z \in B(z_0,\rho)} \int\limits_{B(z_0,\rho)} G(z,w)\, dm(w) = \frac{\pi}{2} \rho^2. \tag{4.2.5}$$

Пусть $h(z)$ — гармоническая мажоранта функции u в круге $B(z_0, \rho)$, где $\rho \le \frac{r_0}{2}$ $(r_0 = |z_0|)$. Тогда по левому неравенству в (4.2.4) и равенству (4.2.5)

$$\max_{z \in B(z_0,\rho)} (h(z) - u(z)) = \frac{1}{2\pi} \max_{z \in B(z_0,\rho)} \int\limits_{B(z_0,\rho)} G(z,w) \Delta u(w)\, dm(w) \ge$$

$$\ge \frac{2\gamma_0(\frac{r_0}{2})}{9\pi r_0^2} \max_{z \in B(z_0,\rho)} \int\limits_{B(z_0,\rho)} G(z,w)\, dm(w) = \frac{\gamma_0(\frac{r_0}{2})}{9 r_0^2} \rho^2 \ge \frac{\gamma_0(r_0)\rho^2}{18 r_0^2}.$$

Если r_0, такое что $\gamma_0(r_0) \ge 144p$, то для $\rho = 6r_0 \sqrt{\frac{p}{\gamma_0(r_0)}}$ последняя оценка дает

$$\max_{z \in B(z_0,\rho)} (h(z) - u(z)) \ge 2p.$$

В силу соотношения (4.1.3) это значит, что

$$\tau(u, z_0, p) \le 6\sqrt{p} \frac{r_0}{\sqrt{\gamma_0(r_0)}}.$$

Аналогичными оценками получим, что

$$\max_{z \in B(z_0,\rho)} (h(z) - u(z)) \le \frac{4\gamma_0(r_0)}{r_0^2} \rho^2,$$

и при r_0, таких что $\gamma_0(r_0) \ge p\sqrt{2}$, для $\rho = \frac{r_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{p}{\gamma_0(r_0)}}$ будем иметь

$$\max_{z \in B(z_0,\rho)} (h(z) - u(z)) \le 2p.$$

Тем самым,

$$\tau(u, z_0, p) \geq \sqrt{\frac{p}{2}} \frac{r_0}{\sqrt{\gamma_0(r_0)}}.$$

Итак, мы доказали, что для любого положительного p для $r = |z|$, таких что $r \geq \gamma_0^{-1}(144p)$

$$\sqrt{\frac{p}{2}} \frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}} \leq \tau(u, z, p) \leq 6\sqrt{p} \frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}}. \tag{4.2.6}$$

Как следует из оценок (4.2.6), если n настолько большое, что

$$\frac{6\sqrt{p}}{\sqrt{\gamma_0(T_n)}} < \frac{\delta}{2},$$

то для всех $z \in S_n(\delta)$ круг $B(z, \tau(u, z, p))$ лежит в кольце $S_n = \{z : \ T_n < |z| < 2T_n\}$ и, тем самым, по соотношению (4.1.3)

$$\tau(u, z, p) = \tau(\varphi, z, p).$$

Таким образом, из (4.2.6) следует утверждение 4.2.2.

Утверждение 4.2.2 доказано.

4. Оценка функции Бергмана $K(z)$ пространства $\mathcal{F}_\varphi$.

Утверждение 4.2.3.

$$K(z) \asymp \frac{1}{\tau^2(\varphi, z, 1)} e^{2\varphi(z)}, \ z \in S_n(\delta), \ \ n > n(p, \delta),$$

или, учитывая утверждение 4.2.2,

$$K(z) \asymp \frac{\gamma_0(r)}{r^2} e^{2\varphi(z)}, \ z \in S_n(\delta), \ \ n > n(p, \delta).$$

Доказательство утверждения 4.2.3.

Функция Бергмана $K(z) = k(z, z)$ — это квадрат нормы точечного функционала $||\delta_z||^2$. Оценку сверху можно получить просто с помощью свойств субгармонических функций. Положим $\tau(z) = \tau(\varphi, z, \frac{1}{2})$ и пусть h — гармоническая мажоранта функции φ в круге $B(z) := B(z, \tau(z))$, тогда по соотношению (4.1.3)

$$0 \leq h(w) - \varphi(w) \leq 1, \ \ w \in B(z).$$

В силу субгармоничности $e^{-2h}|F|^2$ для $F \in \mathcal{F}_\varphi$

$$e^{-2h(z)}|F(z)|^2 \le \frac{1}{\pi\tau^2(z)} \int\limits_{B(z)} e^{-2h(w)}|F(w)|^2\, dm(w).$$

Отсюда вытекает оценка

$$K(z) \le \frac{e^2}{\pi\tau(z)^2} e^{2\varphi(z)}.$$

По утверждению 4.2.2 получим оценку сверху

$$K(z) \le \frac{2e^2\gamma_0(r)}{\pi r^2} e^{2\varphi(z)}, \;\; r = |z|,$$

для $z \in S_n(\delta)$, $\;n > n(p, \delta)$.

Докажем нижнюю оценку функции $K(z)$. Прежде всего заметим, что (см. [62, стр. 371])

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n}}{a_n^2},$$

где

$$a_n^2 = ||z^n||^2_{F\in\mathcal{F}_\varphi} = 2\pi \int\limits_0^{\infty} t^{2n+1} e^{-2\varphi(t)}\, dt,$$

или

$$a_n^2 = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2(n+1)x - 2\psi(x)}\, dx,$$

где, как известно (см. [54, стр. 83]) $\psi(x) = \varphi(e^x)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}$. Через $\widetilde{\psi}$ обозначим сопряженную по Юнгу к функции ψ

$$\widetilde{\psi}(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}}(xy - \psi(x)),$$

и через x_n — точку достижения супремума для $y = n + 1$, то есть

$$\psi'(x_n) = n + 1.$$

Прямым подсчетом с учетом (4.2.4) убеждаемся, что если $t = e^x \in \widetilde{S}_m := (T_m; 2T_m)$ для некоторого m, то

$$\psi''(x) = \nu'(t)t = \mu'(t)t \asymp \gamma_0(t).$$

Через $I(r)$, $r=|z|$, обозначим отрезок $\{t:\ |r-t|\le\tau(z)\}$. Возьмем произвольное положительное $\delta<\frac{1}{4}$ и пусть $r=|z|\in\widetilde{S}_k(2\delta):=[(1+2\delta)T_k;(2-2\delta)T_k]$, тогда $I(r)\subset\widetilde{S}_k(\delta)$.

В [12, теорема 2(a)] доказано, что для любого $p>0$

$$a_n^2=2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{2(n+1)x-2\psi(x)}\,dx\asymp\frac{1}{\rho_2(\widetilde{\psi},n+1,p)}e^{2\widetilde{\psi}(n+1)},\ n\in\mathbb{N}.$$

Здесь $\rho_2=\rho_2(\widetilde{\psi},y,p)$ определяется по соотношению (1) из [12]:

$$\rho_2=\sup\left\{t>0:\ \int\limits_{y-t}^{y+t}|\widetilde{\psi}'(\tau)-\widetilde{\psi}'(y)|\,d\tau\le p\right\}.$$

Таким образом,

$$K(z)\succ\frac{1}{r^2}\sum_{r_n\in I(r)}e^{2((n+1)\ln r-\widetilde{\psi}(n+1))}\rho_2(\widetilde{\psi},n+1,p).\tag{4.2.7}$$

Докажем, что при достаточно больших n

$$\rho_2(\widetilde{\psi},n+1,4)\succ\sqrt{\gamma_0(r_n)},\ r_n=e^{x_n}.\tag{4.2.8}$$

Сначала покажем, что если $|t-(n+1)|\le\sqrt{\gamma_0(r_n)}$, то $e^{\widetilde{\psi}'(t)}\in\widetilde{S}_k$. В самом деле, возьмем $t=\psi'(\ln T)$, где $T=T_k$ или $T=2T_k$. Тогда

$$|t-(n+1)|=|\psi'(\ln T)-\psi'(\ln r_n)|=\psi''(t_1)\left|\ln\frac{T}{r_n}\right|,$$

где t_1 находится между $\ln T$ и $\ln r_n$. Значит, $e^{t_1}\in\widetilde{S}_k$ и

$$|t-(n+1)|\succ\gamma_0(e^{t_1})\succ\gamma_0(r_n).$$

Положим $\rho=\sqrt{\gamma_0(r_n)}$. Если $|t-(n+1)|\le\rho$, то по доказанному $e^{\widetilde{\psi}'(t)}\in\widetilde{S}_k$, поэтому

$$\int\limits_{y-\rho}^{y+\rho}|\widetilde{\psi}'(t)-\widetilde{\psi}'(n+1)|\,dt\le\sup_{|t-(n+1)|\le\rho}\widetilde{2}\psi''(t)\rho^2=2\gamma_0(r_n)\cdot\sup_{|t-(n+1)|\le\rho}\widetilde{\psi}''(t)=$$

$$= 2\gamma_0(r_n) \cdot \sup_{|t-(n+1)|\le\rho} \frac{1}{\psi''(\widetilde{\psi}'(t))} \le 2\gamma_0(r_n) \cdot \sup_{|t-(n+1)|\le\rho} \frac{1}{\gamma_0(e^{\widetilde{\psi}'(t)})} \le$$

$$\le \frac{2\gamma_0(2T_k)}{\gamma_0(T_k)} < \frac{2\gamma_0(T_{k+1})}{\gamma_0(T_k)} = \frac{2(k+1)}{k} \le 4.$$

Отсюда следует оценка (4.2.8).

Из (4.2.7) и (4.2.8) следует

$$K(z) \succ \frac{1}{r^2} \sum_{r_n\in I(r)} e^{2((n+1)\ln r-\widetilde{\psi}(n+1))}\sqrt{\gamma_0(r_n)}. \qquad (4.2.9)$$

Через y_r обозначим точку достижения супремума $\sup_{y\in\mathbb{R}}(y\ln r-\widetilde{\psi}(y))$. Тем самым,

$$\psi(\ln r) = y_r \ln r - \widetilde{\psi}(y_r), \qquad \widetilde{\psi}'(y_r) = \ln r.$$

Из свойств функций, двойственных по Юнгу, имеем: если $y(t)$ — точка достижения

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}(yt - \widetilde{\psi}(y)) = \psi(t),$$

то $\widetilde{\psi}'(y(t)) = t$ и

$$ty - \widetilde{\psi}(y) - \psi(t) = -\widetilde{\psi}(y) + \widetilde{\psi}(y(t)) + \widetilde{\psi}'(y(t))(y - y(t)).$$

Представляя функцию $\widetilde{\psi}(y)$ по формуле Тейлора с центром в точке $y(t)$ получим

$$ty - \widetilde{\psi}(y) - \psi(t) = -\frac{\widetilde{\psi}''(y_1)}{2}(y - y(t))^2,$$

где y_1 — некоторая точка между y и $y(t)$. Положим $y = n+1$, предполагая, что $r_n \in I(r)$, $t = \ln r$, соответственно, $y(t) = y_r$, и воспользуемся известными формулами

$$\psi'(\widetilde{\psi}'(x)) \equiv x, \quad \psi''(\widetilde{\psi}'(x))\widetilde{\psi}''(x) \equiv 1.$$

Так как

$$n+1 = \psi'(\ln r_n),\ \ln r_n = \widetilde{\psi}'(n+1),\ \widetilde{\psi}'(y_r) = \ln r,\ \psi'(\ln r) = y_r,$$

то получим

$$(n+1)\ln r-\widetilde{\psi}(n+1)-\psi(\ln r)=-\frac{1}{2\psi''(\widetilde{\psi}'(y_1))}(\psi'(\ln r_n)-\psi'(\ln r))^2.$$

Положим $r_1=e^{\widetilde{\psi}'(y_1)}$. Поскольку y_1 лежит между точками $n+1$ и y_r, то r_1 лежит между точками $e^{\widetilde{\psi}'(n+1)}=r_n$ и $e^{\widetilde{\psi}'(y_r)}=r$. В частности, $r_1\in\widetilde{S}_k$, значит $\psi''(\ln r_1)\asymp\gamma_0(r_1)\leq\frac{1}{2}\gamma_0(r)$. Таким образом,

$$(n+1)\ln r-\widetilde{\psi}(n+1)-\psi(\ln r)\geq-\frac{1}{\gamma_0(r)}(\psi'(\ln r_n)-\psi'(\ln r))^2. \qquad (4.2.10)$$

По теореме о среднем

$$|\psi'(\ln r_n)-\psi'(\ln r)|=\left|\frac{\psi''(\ln t)}{t}\right||r_n-r|,$$

где t — некоторая точка между r_n и r. Значит,

$$|\psi'(\ln r_n)-\psi'(\ln r)|\prec\left|\frac{\gamma_0(t)}{t}\right|\tau(z)\asymp\sqrt{\gamma_0(r)}. \qquad (4.2.11)$$

Подставим эту оценку в (4.2.10) и получим

$$(n+1)\ln r-\widetilde{\psi}(n+1)-\psi(\ln r)\succ-1.$$

Продолжим оценку (4.2.9). Если $N(r)$ — количество натуральных чисел n, таких что $r_n\in I(r)$, то

$$K(z)\succ\frac{N(r)\sqrt{\gamma_0(r)}}{r^2}e^{2\psi(\ln r)}.$$

Если $r_n\in I(r)$, то по оценке (4.2.11)

$$|(n+1)-y_r|=|\psi'(\ln r_n)-\psi'(\ln r)|\prec\sqrt{\gamma_0(r)},$$

значит,

$$N(r)\asymp\sqrt{\gamma_0(r)}.$$

Таким образом,

$$K(z)\succ\frac{\gamma_0(r)}{r^2}e^{2\varphi(r)}.$$

Утверждение 4.2.3 доказано.

5. Оценка характеристики τ для функции $\ln K(z)$.

Положим
$$K_0(z)=\frac{\gamma_0(r)}{r^2}e^{2\varphi(r)},\ \ r=|z|.$$

Из условия (4.2.1) на функцию γ легко получить, что для $b>a>1$
$$\ln\frac{\gamma(br)}{\gamma(ar)}\le\ln\frac{\ln br}{\ln ar},\ r>1,$$
поэтому
$$\lim_{r\longrightarrow\infty}\ln\frac{\gamma_0(\frac{3}{2}r)}{\gamma_0(\frac{1}{2}r)}=\lim_{r\longrightarrow\infty}\ln\frac{\gamma(\frac{3}{2}r)}{\gamma(\frac{1}{2}r)}\le\lim_{r\longrightarrow\infty}\ln\frac{\ln\frac{3}{2}r}{\ln\frac{1}{2}r}=0.$$

Утверждение 4.2.4. *Для достаточно больших n имеют место оценки*
$$\sqrt{\frac{p}{8}}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}}\le\tau(\ln K_0,z,p)\le 6\sqrt{p}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}},\ z\in S_n(\delta),\ \ r=|z|.$$

Доказательство утверждения 4.2.4.

Возьмем произвольное $p>0$ и натуральное N настолько большим, чтоб для всех $r\in\widetilde{S}_n$ при $n\ge N$ выполнялись оценки
$$\ln\frac{\gamma_0(\frac{3}{2}r)}{\gamma_0(\frac{1}{2}r)}<\frac{p}{2},\quad \tau(z):=\tau(\varphi,z,p)<\frac{r}{2}. \tag{4.2.12}$$

Положим $\tau_0(z):=\tau(\ln K_0,z,p)$. Возьмем $r\in\widetilde{S}_n(\delta)$, $n\ge N$, и возьмем положительное $t=\min(\tau_0(z),\frac{r}{2})$. Пусть $2h$ — гармоническая функция в круге $B(z,t)$, ближайшая к функции $\ln K_0$ в этом круге в смысле равномерной нормы. Тогда
$$\sup_{w\in B(z,t)}|2\varphi(w)+\ln\gamma_0(r)-2\ln|w|-2h(w)|\le$$
$$\le\sup_{w\in B(z,t)}|2\varphi(w)+\ln\gamma_0(|w|)-2\ln|w|-2h(w)|+\sup_{w\in B(z,t)}|\ln\gamma_0(r)-\ln\gamma_0(|w|)|\le$$
$$\le\sup_{w\in B(z,t)}|\ln K_0(w)-2h(w)|+\ln\frac{\gamma_0(\frac{3}{2}r)}{\gamma_0(\frac{1}{2}r)}.$$
По выбору N,t имеем
$$\sup_{w\in B(z,t)}|2\varphi(w)+\ln\gamma_0(r)-2\ln|w|-2h(w)|<2p,$$

то есть для гармонической в круге $B(z,t)$ функции $h_1(w) = h(w) - \frac{1}{2}\ln\gamma_0(r) + \ln|w|$ выполняется оценка

$$\sup_{w\in B(z,t)} |\varphi(w) - h_1(w)| < p.$$

Это значит, что $\tau(z) = \tau(\varphi, z, p) \geq t$. Если $t = \tau_0(z)$, то $\tau(z) \geq \tau_0(z)$. Если $t = \frac{r}{2}$, то $\tau(z) \geq \frac{r}{2}$, что противоречит выбору N. В силу утверждения 4.2.2

$$\tau(\ln K_0, r, p) \leq 6\sqrt{p}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}}.$$

Для оценки снизу положим $t = \tau(\varphi, z, \frac{p}{4})$ и через h обозначим гармоническую функцию в круге $B(z,t)$, ближайшую к функции φ в этом круге в смысле равномерной нормы. Тогда

$$\sup_{w\in B(z,t)} |\ln K_0(w) - 2h(w) + 2\ln|w| - \ln\gamma_0(r)| \leq \sup_{w\in B(z,t)} |2\varphi(w) - 2h(w)| +$$

$$+\sup_{w\in B(z,t)} |\ln\gamma_0(|w|) - \ln\gamma_0(r)| < p,$$

так как из (4.2.12) видно, что $t = \tau(\varphi, z, \frac{p}{4}) \leq \tau(\varphi, z, p) < \frac{r}{2}$. То есть для гармонической функции $h_1(w) = 2h(w) - 2\ln|w| + \ln\gamma_0(r)$ выполняется неравенство

$$\sup_{w\in B(z,t)} |\ln K_0(w) - h_1(w)| < p,$$

следовательно,

$$\tau(\ln K_0, z, p) \geq t = \tau\left(\varphi, z, \frac{p}{4}\right) \geq \sqrt{\frac{p}{8}}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}}.$$

Утверждение 4.2.4 доказано.

Из утверждения 4.2.3 следует, что для некоторого $C > 0$ выполняется оценка

$$e^{-C}K_0(z) \leq K(z) \leq e^{C}K_0(z),\ z \in \bigcup_n S_n(\delta).$$

Отсюда, так же как выше, получаем для всех $p > 0$ и для достаточно больших n

$$\tau(\ln K, z, p + C) \geq \tau(\ln K_0, z, p),\ z \in S_n(2\delta),$$

$$\tau(\ln K_0, z, p + C) \geq \tau(\ln K, z, p),\ \ z \in S_n(2\delta).$$

Значит, если $p \geq 2C$, то

$$\tau\left(\ln K_0, z, \frac{p}{2}\right) \leq \tau(\ln K_0, z, p - C) \leq \tau(\ln K, z, p) \leq \tau\left(\ln K_0, z, \frac{3p}{2}\right),$$

и из утверждения 4.2.4 при достаточно больших n

$$\frac{\sqrt{p}}{4}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}} \leq \tau(\ln K, z, p) \leq 6\sqrt{\frac{3p}{2}}\frac{r}{\sqrt{\gamma_0(r)}},\ \ z \in S_n(2\delta),\ \ r = |z|.$$

Остается применить теорему 4.1.4 для кругов $B(\zeta_j, R_j)$, где

$$|\zeta_j| = \frac{3}{2}T_j,\ \ R_j = \left(\frac{1}{4} - \delta\right)T_j,$$

взяв $\delta < \frac{1}{4}$.

Теорема 4.2.1 доказана.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы о безусловных базисах из работы [66].

Теорема 4.2.2. *Пусть ассоциированная мера μ субгармонической на плоскости функции φ удовлетворяет условиям*

1) *для некоторого положительного $\delta > 0$*

$$\delta \leq \mu(2t) - \mu(t),\ \ t > 0, \tag{4.2.13}$$

$$\mu(2t) - \mu(t) \leq 1,\ \ t > 0; \tag{4.2.14}$$

2) *для некоторых $A > 0, \beta \in (0; 1)$ и любого $z \in \mathbb{C}$*

$$\int\limits_0^{\beta|z|} \frac{\mu(z, t)\, dt}{t} \leq A. \tag{4.2.15}$$

Тогда в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Доказательство теоремы 4.2.2.

Предварительно получим оценку функции Бергмана пространства $\mathcal{F}_\varphi$ в случае, когда весовая функция φ удовлетворяет условиям теоремы.

Лемма 4.2.1. *Пусть весовая функция φ удовлетворяет условиям* (4.2.13), (4.2.14) *и* (4.2.15). *Тогда функция Бергмана $K(z) = \|\delta_z\|^2$ пространства $\mathcal{F}_\varphi$ удовлетворяет соотношению*

$$K(z) \asymp \frac{1}{1+|z|^2} e^{2\varphi(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Доказательство леммы 4.2.1.

Оценка сверху доказывается на основании леммы 1.9 и свойства усреднений субгармонических функций.

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 1$. Гармоническую мажоранту функции φ в круге $B\left(z, \frac{\beta}{3}|z|\right)$ обозначим через H, а через g — аналитическую в круге $B\left(z, \frac{\beta}{3}|z|\right)$ функцию, такую что $\operatorname{Re} g = H$. Тогда для любой функции $F \in \mathcal{F}_\varphi$

$$\left|F(z)e^{-2g(z)}\right| \leq \frac{9}{\pi\beta^2|z|^2} \int\limits_{B\left(z, \frac{\beta}{3}|z|\right)} |F(w)|^2 e^{-2H(w))}\, dm(w) \leq \frac{9}{\pi\beta^2|z|^2}\|F\|^2.$$

Отсюда

$$K(z) = \sup_{F\in\mathcal{F}_\varphi} \frac{|F(z)|}{\|F\|^2} \leq \frac{9}{\pi\beta^2|z|^2} e^{2H(z)}.$$

По лемме 1.9 при $|z| \geq 1$

$$K(z) \leq \frac{9}{\pi\beta^2|z|^2} e^{2A} e^{2\varphi(z)}.$$

Для оценки снизу воспользуемся результатами главы 1.

Будем считать, что

$$\varphi(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln\left|1 - \frac{z}{w}\right| \, d\mu(w), \ z \in \mathbb{C}.$$

По мере μ определим последовательности R_n, r_n, $n = 0, 1, 2, \ \ldots$, как в теореме 1.5 рекуррентными соотношениями

$$R_0 = 0, \ \mu(R_{n+1}) - \mu(R_n) = 1, \ n = 0, 1, 2, \ \ldots \ ,$$

$$\int\limits_{R_n}^{R_{n+1}} \ln t \, d\mu(t) = \ln r_n.$$

По этой теореме целая функция

$$f(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_k}\right),$$

где $w_n = (-1)^n r_n$, удовлетворяет соотношению

$$|f(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, W)}{1+|z|} e^{\varphi(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Через S_n обозначим кольца $\{z : R_n \le |z| \le R_{n+1}\}$ и через μ_n обозначим сужение меры μ на множество S_n. Функции

$$f_n(z) = \prod_{k \ne n+2} \left(1 - \frac{z}{w_k}\right),$$

удовлетворяют условию

$$|f_n(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, W_n)}{1+|z|} e^{\varphi(z) - \ln^+ \frac{|z|}{R_{n+1}}}, \ z \in \mathbb{C}, \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.2.16}$$

где $W_n = W \setminus \{w_{n+2}\}$. В самом деле,

$$f_n(z) = f(z) \left(1 - \frac{z}{w_{n+2}}\right)^{-1}$$

и по условиям (4.2.13), (4.2.14) последовательность R_n обладает свойством $2R_n < R_{n+1} \prec R_n$.

Пусть

$$g_n(z) = \frac{f_n(z)}{z - w_n}.$$

Возьмем $\sigma < \frac{\beta}{3}$, так чтобы круги $B_n(\sigma) = \{z : |z - w_n| \le \sigma r_n\}$ не пересекались и докажем, что функции $g_n(z)$ удовлетворяют условиям

$$|g_n(z)| \asymp \frac{1}{1+|z|} e^{\varphi(z)}, \ z \in B_n(\sigma), \tag{4.2.17}$$

$$|g_n(z)| \prec \frac{1}{1+|z|} e^{\varphi(z)}, \ z \in S_n' = \bigcup_{k=n-1}^{n+1} S_k, \ n \in \mathbb{N}, \tag{4.2.18}$$

$$||g_n||_{\mathcal{F}_\varphi} \asymp 1, \ n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.19}$$

По соотношению (4.2.16) на окружности $C_n(\sigma) = \{z : \ |z - w_n| = \sigma r_n\}$ выполняется оценка

$$|\ln |g_n(z)| - (\varphi(z) - \ln \sigma r_n)| \leq C.$$

По лемме 1.9 эта оценка по принципу максимума распространяется на весь круг $B_n(\sigma)$:

$$|g_n(z)| \asymp \frac{1}{1+|z|} e^{\varphi(z)}, \ z \in B_n(\sigma), \ n \in \mathbb{N}.$$

Если $z \in S'_n \setminus B_n(\sigma)$, то $r_n \asymp 1+|z|$, dist $(z, W_n) \leq |z-w_n|$, тем самым, учитывая (4.2.16), получаем

$$|g_n(z)| \prec \frac{1}{1+|z|} e^{\varphi(z)}, \ z \in S'_n \setminus B_n(\sigma), \ n \in \mathbb{N}.$$

Соотношения (4.2.17) и (4.2.18) доказаны. Оценим норму функций g_n в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. Если $|z| \geq R_{n+2}$, то $|w_n| \leq R_{n+1} \leq \frac{R_{n+2}}{2} \leq \frac{|z|}{2}$ и $|z - w_n| \geq \frac{|z|}{2}$, поэтому, учитывая оценку (4.2.16), получим

$$\int\limits_{|z| \geq R_{n+2}} |g_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \, dm(z) \leq 4 \int\limits_{|z| \geq R_{n+2}} \frac{|f_n(z)|^2}{|z|^2} e^{-2\varphi(z)} \, dm(z) \prec 1.$$

Если $|z| \leq R_{n-1}$, то $|w_n - z| \geq |w_n| - |z| \geq R_{n-1}$ и поэтому

$$\int\limits_{|z| \leq R_{n-1}} |g_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \, dm(z) \prec 1.$$

И по оценкам (4.2.17) и (4.2.18)

$$\int\limits_{S'_n} |g_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \, dm(z) \asymp 1.$$

Последние три оценки дают требуемую оценку нормы. Из (4.2.18) и (4.2.19) вытекает нижняя оценка функции Бергмана.

Лемма 4.2.1 доказана.

Пусть ассоциированная мера μ функции φ удовлетворяет условиям (4.2.13), (4.2.14) и (4.2.15). Возьмем R_1, такое что $\mu(R_1) = \alpha \in (0,1)$ (α — произвольное фиксированное число) и через ν обозначим сужение меры μ на внешность круга $B(0, R_1)$, а через u обозначим потенциал меры ν:

$$u(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln \left|1 - \frac{z}{w}\right| \, d\nu(w).$$

Очевидно, что

$$e^{u(z)} \asymp \frac{e^{\varphi(z)}}{1 + |z|^{\alpha}}, \ z \in \mathbb{C}. \tag{4.2.20}$$

Мера ν также удовлетворяет условиям (4.2.13), (4.2.14), (4.2.15) и по теореме 1.5 существует целая функция $L(z)$ с нулями в точках z_n, $n \in \mathbb{N}$, так что круги $B_n(\sigma) = \{z : |z - z_n| \le \sigma |z_n|\}$ для достаточно малых положительных σ попарно не пересекаются и

$$|L(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, Z)}{1 + |z|} e^{u(z)}, \ z \in \mathbb{C}, \tag{4.2.21}$$

то есть

$$|L(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, Z)}{(1 + |z|^{\alpha})(1 + |z|)} e^{\varphi(z)}, \ z \in \mathbb{C}, \tag{4.2.22}$$

через Z обозначено множество нулей функции L. Докажем, что система $K(z, z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, образует безусловный базис в пространстве $\mathcal{F}_{\varphi}$.

Мы будем доказывать безусловную базисность биортогональной системы

$$L_n(z) = \frac{L(z)}{L'(z_n)(z - z_n)},$$

а именно, докажем, что для каждой функции $F \in \mathcal{F}_{\varphi}$ ряд Лагранжа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(z_n) L(z)}{L'(z_n)(z - z_n)}$$

сходится к функции F в норме пространства $\mathcal{F}_{\varphi}$ и выполняется соотношение

$$||F||^2 \asymp \sum_{n=1}^{\infty} |F(z_n)|^2 ||L_n||^2, \ F \in \mathcal{F}_{\varphi}.$$

Лемма 4.2.2. *Имеет место соотношение*

$$||L_n||^2_{\mathcal{F}_\varphi} \asymp \frac{1}{K(z_n)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство леммы 4.2.2.

Возьмем $\sigma < \frac{\beta}{3}$, так чтобы круги $B_n(\sigma) = \{z : |z - z_n| \le \sigma r_n\}$ не пересекались. По соотношению (4.2.21) на окружности $C_n(\sigma) = \{z :\ |z - z_n| = \sigma r_n\}$ выполняется оценка

$$|\ln |L'(z_n)L_n(z)| - (u(z) - \ln \sigma r_n)| \le C.$$

По лемме 1.9 эта оценка по принципу максимума распространяется на весь круг $B_n(\sigma)$:

$$|L'(z_n)L_n(z)| \asymp \frac{1}{1 + |z|}e^{u(z)},\ z \in B_n(\sigma),\ n \in \mathbb{N}.$$

Учитывая (4.2.20), получим

$$|L'(z_n)L_n(z)| \asymp \frac{e^{\varphi(z)}}{(1 + |z|^\alpha)(1 + |z|)},\ z \in B_n(\sigma). \tag{4.2.23}$$

Если $z \in S'_n \setminus B_n(\sigma)$, то $r_n \asymp 1 + |z|$, dist $(z, Z) \le |z - z_n|$, тем самым, учитывая (4.2.21), получаем

$$|L'(z_n)L_n(z)| \prec \frac{1}{1 + |z|}e^{u(z)},\ z \in S'_n \setminus B_n(\sigma),\ n \in \mathbb{N}.$$

Учитывая (4.2.20) и (4.2.23), получим

$$|L'(z_n)L_n(z)| \prec \frac{e^{\varphi(z)}}{(1 + |z|^\alpha)(1 + |z|)},\ z \in S'_n = \bigcup_{k=n-1}^{n+1} S_k,\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.24}$$

Оценим норму функций $L'(z_n)L_n$ в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$. Если $|z| \ge R_{n+2}$, то $|z_n| \le R_{n+1} \le \frac{R_{n+2}}{2} \le \frac{|z|}{2}$ и $|z - z_n| \ge \frac{|z|}{2}$, поэтому, учитывая оценки (4.2.20) и (4.2.21), получим

$$\int\limits_{|z| \ge R_{n+2}} |L'(z_n)L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\, dm(z) \prec \int\limits_{|z| \ge R_{n+2}} \frac{|L(z)|^2 e^{-2u(z)}}{|z - z_n|^2(1 + |z|^\alpha)^2}\, dm(z) \le$$

$$\leq \int\limits_{|z|\geq R_{n+2}} \frac{4|L(z)|^2 e^{-2u(z)}}{|z|^2(1+|z|^\alpha)^2}\,dm(z) \prec \int\limits_{|z|\geq R_{n+2}} \frac{dm(z)}{(1+|z|)^2(1+|z|^\alpha)^2} \prec \frac{1}{1+|z_n|^\alpha},\ n\in\mathbb{N}.$$

Если $|z| \leq R_{n-1}$, то $|z_n - z| \geq |w_n| - |z| \geq R_{n-1}$ и поэтому, учитывая оценки (4.2.20) и (4.2.21), получим

$$\int\limits_{|z|\leq R_{n-1}} |L'(z_n)L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\,dm(z) \prec \int\limits_{|z|\leq R_{n-1}} \frac{|L(z)|^2 e^{-2u(z)}}{|z-z_n|^2(1+|z|^\alpha)^2}\,dm(z) \prec$$

$$\prec \frac{1}{R_{n-1}^2} \int\limits_{|z|\leq R_{n-1}} \frac{dm(z)}{(1+|z|^\alpha)^2} \prec \frac{1}{1+|z_n|^\alpha},\ n\in\mathbb{N}.$$

И по оценкам (4.2.23) и (4.2.24)

$$\int\limits_{S'_n} |L'(z_n)L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\,dm(z) \asymp \int\limits_{S'_n} \frac{dm(z)}{(1+|z|)^2(1+|z|^\alpha)^2} \asymp \frac{1}{1+|z_n|^\alpha},\ n\in\mathbb{N}.$$

Последние три оценки дают требуемую оценку нормы:

$$\|L'(z_n)L_n(z)\|_{\mathcal{F}_\varphi} \asymp \frac{1}{1+|z_n|^\alpha},\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.2.25}$$

Используя гармонические мажоранты и лемму 1.9, можно показать, что

$$|L'(z_n)| \asymp \frac{e^{\varphi(z_n)}}{(1+|z_n|^\alpha)(1+|z_n|)},\ n\in\mathbb{N}. \tag{4.2.26}$$

Из (4.2.25), (4.2.26) и леммы 4.2.1 следует утверждение леммы.

Лемма 4.2.2 доказана.

По определению функции Бергмана и по лемме 4.2.1 для любой функции $F\in\mathcal{F}_\varphi$

$$|F(z)|^2 \leq \|F\|^2_{\mathcal{F}_\varphi} K(z) \prec \frac{e^{2\varphi(z)}}{1+|z|^2},\ z\in\mathbb{C},$$

а по формуле Лагранжа $\forall R>0$

$$F(z) = \sum_{|z_n|<R} \frac{F(z_n)L(z)}{L'(z_n)(z-z_n)} + \frac{L(z)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=R} \frac{F(w)\,dw}{L(w)(w-z)}.$$

Выберем последовательность положительных чисел $T_m \uparrow +\infty$, так чтобы окружности $C(0, T_m)$ не пересекались с исключительным множеством $B(\sigma)$. Тогда для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$, $\forall z \in K$

$$\left| \frac{L(z)}{2\pi i} \int\limits_{|w|=T_m} \frac{F(w)\, dw}{L(w)(w-z)} \right| \prec \max_{z\in K} |L(z)| T_m^{\alpha-1} = o(1),\ m \longrightarrow \infty,$$

таким образом, ряд Лагранжа функции $F \in \mathcal{F}_\varphi$ равномерно на компактах сходится к самой функции F. Нам нужно доказать, что этот ряд сходится в норме пространства $\mathcal{F}_\varphi$.

Имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(z_n)|^2 \|L_n\|^2 \prec \|F\|^2,\ F \in \mathcal{F}_\varphi. \tag{4.2.27}$$

Действительно, по леммам 4.2.1 и 4.2.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(z_n)|^2 \|L_n\|^2 \asymp \sum_{k=1}^{\infty} |F(z_n)|^2 (1+|z_n|^2) e^{-2\varphi(z_n)},\ F \in \mathcal{F}_\varphi.$$

С помощью леммы 1.9 и по свойству субгармоничности имеем

$$|F(z_n)|^2 e^{-2\varphi(z_n)} \prec \frac{9}{\beta^2 r_n^2} \int\limits_{B\left(z_n, \frac{\beta}{3} r_n\right)} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\, dm(z),\ n \in \mathbb{N},\ r_n = |z_n|.$$

Круги $B\left(z_n, \frac{\beta}{3} r_n\right)$ попарно не пересекаются, поэтому суммируя эти неравенства по всем n получим оценку (4.2.27).

Лемма 4.2.3. *Пусть*

$$l_n(z) = L'(z_n) L_n(z) = \frac{L(z)}{z - z_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $\gamma < \min(\alpha, 1-\alpha)$

$$|(l_n, l_m)_{\mathcal{F}_\varphi}| \prec \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha} \left(\frac{R_n}{R_m}\right)^\gamma,\ n, m \in \mathbb{N},\ m \geq n.$$

Доказательство леммы 4.2.3.

Для $m = n$ оценка следует из лемм 4.2.1, 4.2.2 и соотношения (4.2.26). Будем считать, что $m > n$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим множества

$$E_1(k) = \{|z| \le R_{k-1}\},\ E_2(k) = \{|z| \ge R_{k+2}\},\ S'_k = \bigcup_{j=k-1}^{k+1} S_j,$$

$$E(n,m) = \{R_{n+2} \le |z| \le R_{m-1}\}.$$

Плоскость покрывается множествами $E_1(n),\ S'_n,\ S'_m,\ E_2(m),\ E(n,m)$. Множество $E(n,m)$ может оказаться пустым, если $S'(n)\bigcap S'(m) \ne \emptyset$. На множестве $E_1(n)$ имеем $|z - z_n| \ge \frac{|z_n|}{2}$ и $|z - z_m| \ge \frac{|z_m|}{2}$, поэтому по соотношению (4.2.22)

$$\left| \int\limits_{E_1(n)} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \frac{1}{r_n r_m}\int\limits_0^{R_{n-1}} \frac{r\,dr}{(1+r^\alpha)^2} \prec \frac{R_{n-1}^{2(1-\alpha)}}{r_n r_m} \prec$$

$$\prec \frac{1}{R_n^{2\alpha}}\frac{R_n}{R_m} = \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha}\left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{1-\alpha}. \tag{4.2.28}$$

На множестве $E_2(m)$ имеем $|z - z_n| \ge \frac{|z|}{2}$ и $|z - z_m| \ge \frac{|z|}{2}$, поэтому по соотношению (4.2.22) получим

$$\left| \int\limits_{E_2(m)} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \int\limits_{R_{m+2}}^{\infty} \frac{r\,dr}{(1+r^\alpha)^2 r^2} \prec \frac{1}{R_{m+2}^{2\alpha}} \prec \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha}\left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{\alpha}. \tag{4.2.29}$$

Пусть $z \in S'_n$. Если $z \in S'_n \bigcap S'_m$, то в силу (4.2.24)

$$|l_m(z)| \asymp \frac{e^{\varphi(z)}}{(1+|z|^\alpha)(1+|z|)}.$$

В этом случае $m - 1 < n + 2$ и в силу соотношения $2R_n \le R_{n+1} \prec R_n$ $|z| \ge R_{n-1} \succ R_n \succ R_m \succ |z_m|$, следовательно,

$$|l_m(z)| \prec \frac{e^{\varphi(z)}}{(1+|z|^\alpha)(1+|z_m|)}.$$

Если $z \in S'_n \setminus S'_m$, то $|z| \le R_{m-1} \le \frac{1}{2}R_m \le \frac{1}{2}|z_m|$, значит, $|z - z_m| \ge \frac{1}{2}|z_m|$ и по оценке (4.2.22) получим ту же оценку для $|l_m|$. Применяя для $l_n(z),\ z \in S'_n$

оценку (4.2.24), получим

$$\left|\int\limits_{S'_n} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \frac{1}{r_m}\int\limits_{R_{n-1}}^{R_{n+2}} \frac{r\,dr}{(1+r^\alpha)^2 r}.$$

Снова воспользуемся соотношениями $2R_n \le R_{n+1} \prec R_n$

$$\left|\int\limits_{S'_n} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \frac{R_n}{R_n^{2\alpha}R_m} = \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha}\left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{1-\alpha}. \tag{4.2.30}$$

Пусть $z \in S'_m$. Если $z \in S'_n \bigcap S'_m$, то по соотношению (4.2.24)

$$|l_n(z)| \prec \frac{e^{\varphi(z)}}{(1+|z|^\alpha)(1+|z|)}.$$

Если же $z \in S'_m \setminus S'_n$, то $|z| \ge R_{n+2} \ge 2R_{n+1} \ge 2|z_n|$, значит, $|z-z_n| \ge \frac{|z|}{2}$. По оценке (4.2.22) получим ту же оценку для $|l_n(z)|$. Оценивая $|l_m(z)|$ по соотношению (4.2.24), имеем

$$\left|\int\limits_{S'_m} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \int\limits_{R_{m-1}}^{R_{m+2}} \frac{r\,dr}{(1+r^\alpha)^2 r^2} \le \int\limits_{R_{m-1}}^{R_{m+2}} \frac{dr}{r^{1+2\alpha}} \prec \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha}\left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{\alpha}. \tag{4.2.31}$$

Наконец, для $z \in E(n,m)$ имеем $|z-z_n| \ge \frac{|z|}{2}$, $|z-z_m| \ge \frac{|z_m|}{2}$. Проведя такие же выкладки как выше, получим оценки

$$\left|\int\limits_{E(n,m)} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha}\left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{\alpha},\ \alpha < \frac{1}{2},$$

$$\left|\int\limits_{E(n,m)} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha}\left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{1-\alpha},\ \alpha > \frac{1}{2},$$

$$\left|\int\limits_{E(n,m)} l_n(z)\overline{l_m(z)}e^{-2\varphi(z)}\,dm(z)\right| \prec \frac{1}{R_n^\alpha R_m^\alpha}\left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{\alpha}\ln\frac{R_m}{R_n},\ \alpha = \frac{1}{2}.$$

Из этих оценок и соотношений (4.2.28), (4.2.29), (4.2.30) и (4.2.31) следует утверждение леммы 4.2.3.

Лемма 4.2.3 доказана.

Лемма 4.2.4. *Для любой функции $F \in \mathcal{F}_\varphi$ ряд Лагранжа функции F сходится к самой функции в норме пространства $\mathcal{F}_\varphi$ и выполняется соотношение*

$$\|F\|_{\mathcal{F}_\varphi} \prec \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(z_n)|^2}{K(z_n)},\ F \in \mathcal{F}_\varphi.$$

Доказательство леммы 4.2.4.

Пусть $k(z) = \sqrt{K(z)}$,

$$a_{nm} = (k(z_n)L_n(z), k(z_m)L_m(z))_{\mathcal{F}_\varphi} = \frac{k(z_n)k(z_m)}{L'(z_n)\overline{L'(z_m)}}\,(l_n(z), l_m(z))_{\mathcal{F}_\varphi}\,.$$

Возьмем комплексные числа $c_n,\ n = 1,\ \ldots\ , N$ и положим

$$F_N(z) = \sum_{n=1}^{N} c_n L_n(z).$$

Тогда

$$\|F_N\|^2 = \sum_{n,m=1}^{N} \frac{c_n}{k(z_n)} \frac{\overline{c}_m}{k(z_m)} a_{nm}.$$

Если возьмем матрицу

$$A_N = (a_{nm})_{n,m=1}^{N},$$

то

$$\|F_N\|^2 \leq \|A_N\| \sum_{n=1}^{N} \frac{|c_n|^2}{K(z_n)},$$

где $\|A_N\|$ — операторная норма матрицы A_N как линейного оператора в $\mathbb{R}^N$ с евклидовой нормой. По теореме Адамара (см. [16, глава XIV, §1, стр. 387]) собственные числа лежат в кругах

$$\left\{ z:\ |z - a_{kk}| \leq \sum_{m=1, m\neq k}^{N} |a_{km}| \right\},\ k = 1,\ \ldots\ , N,$$

значит,

$$\|A_N\| = \max_k |\lambda_k| \leq \max_k \sum_{m=1}^{N} |a_{km}|,$$

где λ_k — собственные числа матрицы. По леммам 4.2.1, 4.2.3 и соотношению (4.2.26) имеем оценку

$$|a_{nm}| \prec \left(\frac{R_n}{R_m}\right)^{\gamma} \prec 2^{-\gamma|m-n|}.$$

Тем самым,

$$\|F_N\|^2 \prec \sum_{n=1}^{N} \frac{|c_n|^2}{K(z_n)}.$$

Возьмем функцию $F \in \mathcal{F}_\varphi$, натуральные числа $N_1 < N_2$ и в этой оценке положим $c_n = 0$, $n = 1, 2, \ \dots \ , N_1 - 1, N_2 + 1, N_2 + 2, \ \dots \ , N$, и $c_n = F(z_n)$, $n = N_1, N_1 + 1, \ \dots \ , N_2$. По неравенству (4.2.27) получим

$$\left\|\sum_{n=N_1}^{N_2} F(z_n) L_n(z)\right\|^2 \prec \sum_{n=N_1}^{N_2} \frac{|c_n|^2}{K(z_n)} \longrightarrow 0, \ N_1, N_2 \longrightarrow \infty.$$

Следовательно, ряд Лагранжа сходится в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$, а утверждаемое в лемме 4.2.4 неравенство получим предельным переходом.

Лемма 4.2.4 доказана.

Теорема 4.2.2 доказана.

Утверждение теоремы 4.2.2 остается в силе, если ассоциированная мера весовой функции удовлетворяет условиям (4.2.13), (4.2.14) и (4.2.15) только кусочно.

Теорема 4.2.3. *Пусть ассоциированная мера ν субгармонической функции и представляется в виде $\nu = \nu_1 + \mu$, где $\nu_1(\mathbb{C}) \in (0, 1)$ и*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — неотрицательные борелевские меры с массой $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ с носителями в непересекающихся кольцах $\{z : \ R_n \le |z| \le R'_n\}$, при этом последовательность R_n возрастающая, $2R_n \le R_{n+1}$ и $\frac{R'_n}{R_n} \le c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, мера μ удовлетворяет условию (4.2.15), то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Эта теорема доказывается так же как теорема 4.2.2, только на основе теоремы 1.6. вместо теоремы 1.5.

Теорема 4.2.3 позволяет конструировать веса φ сколь угодно медленного роста, так что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.4. *Если ассоциированная мера μ радиальной субгармонической функции u удовлетворяет условию* (4.2.14)*, то найдется радиальная весовая функция φ, сравнимая с u:*

$$u(z) - \ln(|z| + 1) \le \varphi(z) \le u(z), \;\; z \in \mathbb{C},$$

такая что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Доказательство теоремы 4.2.4.

Для упрощения изложения будем считать, что радиальная субгармоническая функции u непрерывно дифференцируема, причем производная выпуклой функции $u(e^x)$ возрастающая. Возьмем $x_0 > 0$, такое что $\mu_u(x_0) \in (0;1)$, сужение меры μ на круг $B(0, x_0)$ обозначим через μ_0 и далее будем рассматривать субгармоническую функцию u_0 с ассоциированной мерой $\mu - \mu_0$. Ассоциированная мера функции u_0 тоже удовлетворяет условию (4.2.14). Пусть $U(x) = u_0(e^x)$, возьмем последовательность $x_n : U'(x_n) = n$. Для определенности будем считать, что $U'(0) < 1$, это значит, что $x_n > 0$. Положим $V_0(x) \equiv 0$,

$$V_n(x) = U(x_n) + U'(x_n)(x - x_n), \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; V(x) = \sup_n V_n(x), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Тогда кусочно-линейная выпуклая функция $V(x)$ удовлетворяет условиям $V(x_n) = U(x_n), \;\; V'(x_n) = U'(x_n)$, поэтому в интервалах (x_n, x_{n+1}) имеем

$$U'(x) - 1 \le U'(x_{n+1}) - 1 = U'(x_n) = V'(x) \le U'(x).$$

Интегрируя это соотношение от x_n до x, получим

$$U(x) - (x - x_n) \le V(x) \le U(x), \;\; x_n \le x \le x_{n+1}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Функция $v(z) = V(\ln|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $v(0) = 0$, — радиальная субгармоническая функция на плоскости. Если $t_n = e^{x_n}$, то

$$u_0(z) - \ln\frac{|z|}{t_n} \le v(z) \le u_0(z),\ t_n \le |z| \le t_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Так как $t_n > 1$, то

$$u_0(z) - \ln(|z|+1) \le v(z) \le u_0(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

Пусть ν — ассоциированная мера функции $v(z)$, y_n — точки излома графика функции $V(x)$ и $r_n = e^{y_n}$. По формуле Йенсена $\nu(r) = u'(r)r = V'(\ln r)$, поэтому $\nu(t_{n+1}+) - \nu(t_n-) = 1$ и

$$\nu = \sum_n \nu_n,$$

где ν_n — единичные массы, равномерно распределенные на окружностях $C(0, r_n)$. По построению и по лемме 1.8 субгармоническая функция φ с ассоциированной мерой $\mu_0 + \nu$ удовлетворяет условию теоремы 4.2.3 и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер. Кроме того,

$$u(z) - \ln(|z|+1) \le \varphi(z) \le u(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 4.2.4 доказана.

4.3. Весовые гильбертовы пространства целых функций, имеющие безусловные базисы

В данном параграфе по целой функции L при некоторых условиях на распределение ее нулей λ_k, $k \in \mathbb{N}$, мы определяем гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L$, такое что в нем система $\{k(\lambda, \lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ оказывается безусловным базисом. Пространства $\mathcal{H}_L$ выглядят искусственными. Но при этом основные пространства с безусловными базисами оказываются изоморфными (как нормированные пространства) соответствующим пространствам $\mathcal{H}_L$.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями, образующими множество $\mathcal{N} = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, и $G_\delta = G_\delta(L) := \{z :\ \mathrm{dist}\ (z, \mathcal{N}) \geq \delta\} = \mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B(\lambda_k, \delta)$. Предположим, что множество нулей удовлетворяет условию:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\neq k} \frac{1}{|\lambda_j - \lambda_k|} := M < \infty. \tag{4.3.1}$$

Заметим, что из этого условия следует разделенность нулей

$$|\lambda_k - \lambda_m| \geq \frac{1}{M} := \sigma > 0,\ k \neq m. \tag{4.3.2}$$

Возьмем гладкую финитную функцию $\alpha(z)$ типа "шапочки", а именно, функцию со свойствами: $\alpha(z)$ — неотрицательная функция с носителем в единичном круге $B(0,1)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \alpha(z)\, dm(z) = 1,$$

где $dm(z)$ — мера Лебега на плоскости. Для удобства будем также считать, что $0 < \alpha(z) \leq 1$, $z \in B(0,1)$, и $\alpha(z) \equiv 1$ в круге $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Возьмем положительное δ и положим

$$\alpha_\delta(z) = \frac{1}{\delta^2}\alpha\left(\frac{z}{\delta}\right),\ z \in \mathbb{C},$$

и пусть φ — гладкая регуляризация функции $\ln|L(\lambda)|$:

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln|L(z)|\alpha_\delta(\lambda - z)\, dm(z),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Как известно, функция φ будет гладкой субгармонической функцией на плоскости, причем $\varphi(\lambda) \geq \ln|L(\lambda)|,\ \lambda \in \mathbb{C}$, а в области G_δ выполняется равенство $\varphi(\lambda) = \ln|L(\lambda)|$. В силу субгармоничности

$$\Delta\varphi(z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(z) \geq 0,\ z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_L$ целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$|F(\lambda)| = o(e^{\varphi(\lambda)}),\ |\lambda| \to \infty,$$
$$\int\limits_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} \Delta\varphi(\lambda)\, dm(\lambda) := \|F\|^2 < \infty.$$

Теорема 4.3.1. $\mathcal{H}$ — *гильбертово пространство.*

Доказательство теоремы 4.3.1.

Докажем предварительно лемму о свойствах функции φ.

Лемма 4.3.1. *Для каждого $k \in \mathbb{N}$ возьмем многочлен*

$$P_k(\lambda) = \prod_{\lambda_j \in B(\lambda_k, 2\delta)} (\lambda - \lambda_j)$$

и положим

$$\widetilde{L}_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{P_k(\lambda)}, \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right| \le e^{\varphi(\lambda)} \le e^{\delta_0 s} \left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right|, \ \lambda \in B_k := B(\lambda_k, \delta), \tag{4.3.3}$$

(*числа δ_0 и s определены ниже*), *и*

$$e^{\varphi(\lambda)} \equiv |L(\lambda)|, \text{ если dist } (\lambda, \mathcal{N}) \ge \delta, \tag{4.3.4}$$

$$\Delta\varphi(\lambda) \equiv 0, \text{ если dist } (\lambda, \mathcal{N}) \ge \delta, \tag{4.3.5}$$

$$\Delta\varphi(\lambda) \ge 1, \text{ если dist } (\lambda, \mathcal{N}) \le \frac{\delta}{2}. \tag{4.3.6}$$

Доказательство леммы 4.3.1.

Свойство (4.3.4) следует из общих свойств регуляризаций и из гармоничности функции $\ln|L(\lambda)|$ вне множества нулей $\mathcal{N}$. Тождество (4.3.5) следует из (4.3.4).

Через $\delta(z)$ обозначим единичную точечную меру Дирака в точке $\lambda = 0$. По известному свойству логарифма модуля голоморфной функции

$$\Delta \ln|L(\lambda)| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta(\lambda - \lambda_k)$$

получим

$$\Delta\varphi(\lambda) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(\lambda - \lambda_k), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

По условию (4.3.2) множество нулей $\{\lambda_k\}$ разделенное, поэтому в последней сумме при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ отличных от нуля слагаемых конечное число, а именно,

$$\Delta\varphi(\lambda) = \sum_{k:\ |\lambda-\lambda_k|\le\delta} \alpha_\delta(\lambda-\lambda_k),\ \ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{4.3.7}$$

Отсюда и из условий на функцию α следует свойство (4.3.6).

Рассмотрим регуляризацию функции $\ln|z|$:

$$\widetilde{\ln}|z| := \int\limits_{\mathbb{C}} \ln|\zeta|\alpha_\delta(\zeta-z)\,dm(\zeta),\ \ z\in\mathbb{C}.$$

Очевидно, $\widetilde{\ln}|z|$ — гладкая радиальная субгармоническая функция, совпадающая с $\ln|z|$ вне круга $B(0,\delta)$, отрицательная в этом круге и достигающая в точке $z=0$ своего минимального значения: если $\delta_1 = \min\{\delta,1\}$, то

$$\widetilde{\ln}|z| \ge \widetilde{\ln}(0) = \int\limits_{\mathbb{C}} \ln|\zeta|\alpha_\delta(\zeta)\,dm(\zeta) \ge$$

$$\ge 2\pi\int\limits_0^{\delta_1} \ln t\,\alpha(t)t\,dt \ge 2\pi\int\limits_0^{\delta_1} t\ln t\,dt = -\pi\delta_1^2\ln\frac{\delta_1}{e} := -\delta_0,\ \ z\in\mathbb{C}. \tag{4.3.8}$$

По условию (4.3.2) круги $B\left(\lambda_k,\frac{\sigma}{2}\right)$ попарно не пересекаются, поэтому сравнением площадей получим оценку $\deg P_k \le s := (4\sigma+\delta)^2\delta^{-2}$.

Функция $\ln\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right|$ гармонична в круге $B(\lambda_k,2\delta)$, следовательно, для $\lambda \in B(\lambda_k,\delta)$

$$\varphi(\lambda) = \ln\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right| - \sum_{|\lambda_j-\lambda_k|\le2\delta}\int\limits_{\mathbb{C}} \ln|z-\lambda_j|\alpha(z-\lambda)\,dm(z) = \ln\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right| -$$

$$-\sum_{|\lambda_j-\lambda_k|\le2\delta}\int\limits_{\mathbb{C}} \ln|\zeta|\alpha(\zeta-(\lambda-\lambda_j))\,dm(\zeta) = \ln\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right| - \sum_{|\lambda_j-\lambda_k|\le2\delta}\widetilde{\ln}|\lambda-\lambda_j|.$$

Значит, в силу (4.3.8)

$$0 \le \varphi(\lambda) - \ln\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right| \le \delta_0\deg P_k \le \delta_0 s.$$

Оценки (4.3.3) доказаны.

Лемма 4.3.1 доказана.

Докажем еще одну лемму.

Лемма 4.3.2. *Точечные функционалы $\delta_z: \ F \to F(z)$ непрерывны в пространстве $\mathcal{H}$, и функция Бергмана $K(z) = \|\delta_z\|^2$ удовлетворяет оценкам: для некоторых положительных констант $c, C > 0$*

$$c\frac{|L(\lambda)|^2}{\mathrm{dist}^{\,2}(\lambda,\mathcal{N})} \le K(\lambda) \le C\frac{|L(\lambda)|^2(\mathrm{dist}\,(\lambda,\mathcal{N})+1)}{\mathrm{dist}^{\,2}(\lambda,\mathcal{N})},\ \lambda\in\mathbb{C}, \tag{4.3.9}$$

в частности,

$$c|L'(\lambda_k)|^2 \le K(\lambda_k) \le C|L'(\lambda_k)|^2,\ k\in\mathbb{N}. \tag{4.3.10}$$

Доказательство леммы 4.3.2.

Функция $L_k(\lambda) = L(\lambda)(\lambda-\lambda_k)^{-1}$ отлична от нуля в круге $B(\lambda_k,\sigma)$. Положим $r = \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\sigma}{2}\right\}$. Для $F\in\mathcal{H}$ функция $\frac{F}{L_k}$ субгармонична в круге $B(\lambda_k, r)$, поэтому

$$\left|\frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|^2 \le \frac{1}{\pi r^2}\int\limits_{B(\lambda_k,r)}\left|\frac{F(z)}{L_k(z)}\right|^2 dm(z). \tag{4.3.11}$$

Если $\lambda\in B(\lambda_k,r)$, $\lambda_j\in B(\lambda_k,2\delta)$, $j\ne k$, то

$$\frac{\sigma}{2} \le |\lambda-\lambda_j| \le \frac{5}{2}\delta.$$

Если $\sigma > 5\delta$, то таких λ_j нет, а в общем случае их не более $s-1$, значит,

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{s-1}|\lambda-\lambda_k| \le |P_k(\lambda)| \le \left(\frac{5\delta}{2}\right)^{s-1}|\lambda-\lambda_k|.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{5\delta}{2}\right)^{-s+1}\frac{1}{\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right|} \le \frac{1}{|L_k(\lambda)|} \le \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1}\frac{1}{\left|\widetilde{L}_k(\lambda)\right|},\ \lambda\in B(\lambda_k,r).$$

Отсюда и из (4.3.10)

$$\left|\frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|^2 \le \frac{1}{\pi r^2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1}\int\limits_{B(\lambda_k,r)}\left|\frac{F(z)}{\widetilde{L}_k(z)}\right|^2 dm(z).$$

Учитывая (4.3.3) и (4.3.6), получим

$$\left|\frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1} e^{2\delta_0 s} \int\limits_{B(\lambda_k,r)} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \Delta\varphi(z)\, dm(z). \qquad (4.3.12)$$

Из разделенности множества нулей $\{\lambda_k\}$ следует, что круги $B\left(\lambda_k, \frac{\sigma}{2}\right)$ попарно не пересекаются, следовательно, можно найти последовательность замкнутых спрямляемых контуров Γ_n, $n \in \mathbb{N}$, не пересекающихся с множеством $G_1 = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_k, \frac{\sigma}{2}\right)$ и обладающих свойствами

$$\min_{z\in\Gamma_n} |z| \to \infty, \quad |\Gamma_n| = O(\min_{z\in\Gamma_n} |z|),\ n \to \infty,$$

здесь $|\Gamma_n|$ обозначает длину контура Γ_n. Возьмем функцию $F \in \mathcal{H}$ и оценим $\frac{|F(z)|}{|L(z)|}$ на контурах Γ_n. Если $z \in \Gamma_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B(\lambda_k, \delta)\right)$, то из (4.3.4) следует

$$\frac{|F(z)|}{|L(z)|} = |F(z)|e^{-\varphi(z)}.$$

Если же для некоторого $k \in \mathbb{N}$ $z \in \Gamma_n \bigcap B(\lambda_k, \delta)$, то $L(z) = \widetilde{L}_k(z)P_k(z)$. Причем, поскольку $z \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_n, \frac{\sigma}{2}\right)$, то $|P_k(z)| \geq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^s$. Значит, по правому неравенству в (4.3.3)

$$\frac{|F(z)|}{|L(z)|} = \frac{|F(z)|}{\left|\widetilde{L}_k(z)\right| |P_k(z)|} \leq \frac{|F(z)|}{\left|\widetilde{L}_k(z)\right|}\left(\frac{2}{\sigma}\right)^s \leq \left(\frac{2}{\sigma}\right)^s e^{\delta_0 s}|F(z)|e^{-\varphi(z)}.$$

Из двух последних оценок получим

$$\left|\int\limits_{\Gamma_n} \frac{F(z)\, dz}{L(z)(z-\lambda)}\right| \leq 2\max_{z\in\Gamma_n} |F(z)|e^{-\varphi(z)} \cdot |\Gamma_n| \left(\min_{z\in\Gamma_n} |z-\lambda|\right)^{-1} = o(1),\ n \to \infty.$$

Следовательно, функции из пространства $\mathcal{H}$ представляются рядом Лагранжа по функции L, сходящимся в каждой точке $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$F(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)} L(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Применим неравенство Коши–Буняковского к этому ряду

$$|F(\lambda)|^2 \leq |L(\lambda)|^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{|\lambda-\lambda_k|^2},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Первую сумму оценим по соотношению (4.3.11):

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|^2 \le \frac{1}{\pi r^2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1} e^{2\delta_0 s}\sum_{k\in\mathbb{N}}\int\limits_{B(\lambda_k,r)} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z) \le$$

$$\le \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1} e^{2\delta_0 s}\|F\|^2. \tag{4.3.13}$$

Для оценки второй суммы покажем, что из условия (4.3.1) следует условие

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|} \le 2M+\frac{2}{\sigma},\ \lambda\notin\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_n,\frac{\sigma}{2}\right). \tag{4.3.14}$$

Если $\lambda\in B\left(\lambda_n,\frac{\sigma}{2}\right)$ для некоторого n, то для $k\ne n$ по условию (4.3.2)

$$|\lambda-\lambda_n| \le \frac{\sigma}{2} \le \frac{1}{2}|\lambda_k-\lambda_n|,$$

значит,

$$|\lambda-\lambda_k| \ge |\lambda_k-\lambda_n|-|\lambda_n-\lambda| \ge \frac{1}{2}|\lambda_k-\lambda_n|.$$

Отсюда для $\lambda\in\partial B\left(\lambda_n,\frac{\sigma}{2}\right)$ по условию (4.3.1)

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|} \le \frac{2}{\sigma}+2\sum_{k\ne n}\frac{1}{|\lambda_n-\lambda_k|} \le \frac{2}{\sigma}+2M := M'.$$

Функция

$$u_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|}$$

субгармонична в области $\mathbb{C}\setminus\left(\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_m,\frac{\sigma}{2}\right)\right)$, ограничена константой M' на ее границе и стремится к нулю в бесконечности. По принципу максимума

$$u_n(\lambda)\le M',\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_m,\frac{\sigma}{2}\right)\right), n\in\mathbb{N},$$

тем самым условие (4.3.14) доказано.

Пусть $d(\lambda)=\mathrm{dist}\,(\lambda,\mathcal{N})=|\lambda_n-\lambda|$, тогда по (4.3.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_k|^2} = \frac{1}{d^2(\lambda)}+\frac{1}{d(\lambda)}\sum_{k\ne n}\frac{d(\lambda)}{|\lambda-\lambda_k|^2} \le \frac{1}{d^2(\lambda)}+\frac{M'}{d(\lambda)} \le$$

$$\leq (M'+1)\frac{d(\lambda)+1}{d^2(\lambda)},\ \lambda \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_n, \frac{\sigma}{2}\right).$$

Отсюда и из (4.3.13) получим

$$|F(\lambda)|^2 \leq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1} e^{2\delta_0 s}(M'+1)\frac{|L(\lambda)|^2(d(\lambda)+1)}{d^2(\lambda)}\|F\|^2,\ \lambda \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_n, \frac{\sigma}{2}\right).$$

Во внутрь непересекающихся кругов $B\left(\lambda_n, \frac{\sigma}{2}\right)$ оценку продолжим по принципу максимума для субгармонической в этом круге функции $\left|\frac{F(\lambda)(\lambda-\lambda_n)}{L(\lambda)}\right|$:

$$|F(\lambda)| \leq \left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1} e^{2\delta_0 s}(M'+1)(\sigma+2)\frac{|L(\lambda)|^2(d(\lambda)+1)}{d^2(\lambda)}\|F\|^2,\ \lambda \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B\left(\lambda_n, \frac{\sigma}{2}\right).$$

Правое неравенство в (4.3.9) доказано с константой

$$C = \frac{M}{\pi r^2}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{-s+1} e^{2\delta_0 s}(M'+1)(\sigma+2).$$

Возьмем некоторую точку $\lambda \in \mathbb{C}$, пусть $\operatorname{dist}(\lambda, \mathcal{N}) = |\lambda-\lambda_n|$ и $L_n(z) = L(z)(z-\lambda_n)^{-1}$. Оценим норму L_n. По левому неравенству в соотношении (4.3.3)

$$\int\limits_{B(\lambda_n,\delta)} |L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z) \leq \int\limits_{B(\lambda_n,\delta)} \frac{|P_n(z)|^2}{|z-\lambda_n|^2}\Delta\varphi(z)\,dm(z).$$

Поскольку при $|\lambda_j-\lambda_n| \leq 2\delta$, $|z-\lambda_n| \leq \delta$ имеем $|\lambda_j - z| \leq 3\delta$, то

$$\frac{|P_n(z)|^2}{|z-\lambda_n|^2} = \frac{1}{|z-\lambda_n|^2}\prod_{j:\ |\lambda_j-\lambda_n|\leq 2\delta} |z-\lambda_j|^2 \leq (3\delta)^{s-1}.$$

Значит,

$$\int\limits_{B(\lambda_n,\delta)} |L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z) \leq (3\delta)^{s-1}\int\limits_{B(\lambda_n,\delta)} \Delta\varphi(z)\,dm(z).$$

Учитывая формулу (4.3.7), получим

$$\int\limits_{B(\lambda_n,\delta)} |L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z) \leq$$

$$\leq (3\delta)^{s-1}\sum_{j:\ |\lambda_j-\lambda_n|\leq 2\delta}\ \int\limits_{B(\lambda_j,\delta)} \alpha_\delta(z-\lambda_j)\,dm(z) \leq (3\delta)^{s-1}s. \tag{4.3.15}$$

Возьмем $k \neq n$. Тогда по левому неравенству в (4.3.3)

$$\int\limits_{B(\lambda_k,\delta)\setminus B(\lambda_n,\delta)} |L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \Delta\varphi(z)\, dm(z) \le \int\limits_{B(\lambda_k,\delta)\setminus B(\lambda_n,\delta)} \frac{|P_k(z)|^2}{|z-\lambda_n|^2} \Delta\varphi(z)\, dm(z).$$

Поскольку при $|\lambda_j - \lambda_k| \le 2\delta$, $|z-\lambda_k| \le \delta$ имеем $|\lambda_j - z| \le 3\delta$, то для $|z-\lambda_n| \ge \delta$

$$|P_k(z)|^2 \le (3\delta)^s.$$

Значит,

$$\int\limits_{B(\lambda_k,\delta)\setminus B(\lambda_n,\delta)} |L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \Delta\varphi(z)\, dm(z) \le (3\delta)^s \int\limits_{B(\lambda_k,\delta)\setminus B(\lambda_n,\delta)} \frac{\Delta\varphi(z)\, dm(z)}{|z-\lambda_n|^2}.$$

Для $z \in B(\lambda_k, \delta) \setminus B(\lambda_n, \delta)$ имеем

$$|\lambda_k - \lambda_n| \le |\lambda_k - z| + |z - \lambda_n| \le \delta + |z-\lambda_n| \le 2|z-\lambda_n|.$$

Поэтому

$$\int\limits_{B(\lambda_k,\delta)\setminus B(\lambda_n,\delta)} |L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \Delta\varphi(z)\, dm(z) \le$$

$$\le 4\cdot(3\delta)^s \int\limits_{B(\lambda_k,\delta)\setminus B(\lambda_n,\delta)} \frac{\Delta\varphi(z)\, dm(z)}{|\lambda_k-\lambda_n|^2} = \frac{4s\cdot(3\delta)^s}{|\lambda_k-\lambda_n|^2}.$$

Отсюда и из (4.3.15) следует

$$\|L_n\|^2 \le \int\limits_{\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B(\lambda_k,\delta)} |L_n(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \Delta\varphi(z)\, dm(z) \le 4s(3\delta)^s \sum_{k\neq n} \frac{1}{|\lambda_k-\lambda_n|^2} + (3\delta)^{s-1}s.$$

Из условия (4.3.1) вытекает

$$\sum_{k\neq n} \frac{1}{|\lambda_k-\lambda_n|^2} = \frac{1}{\sigma}\sum_{k\neq n} \frac{\sigma}{|\lambda_k-\lambda_n|^2} \le \frac{M}{\sigma},$$

поэтому

$$\|L_n\|^2 \le 4Ms\sigma^{-1}(3\delta)^s + (3\delta)^{s-1}s. \tag{4.3.16}$$

В виду того, что

$$K(\lambda) \le \frac{|L_n(\lambda)|^2}{\|L_n\|^2},$$

получаем левую оценку в (4.3.9) с константой $c = \left(4Ms\sigma^{-1}(3\delta)^s + (3\delta)^{s-1}s\right)^{-1}$.

Лемма 4.3.2 доказана.

Закончим доказательство теоремы 4.3.1. Нужно доказать, что $\mathcal{H}_L$ — полное пространство. Пусть $\{F_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}$ — фундаментальная последовательность. Из леммы 4.3.2 следует, что

$$|F_n(\lambda) - F_m(\lambda)| \leq \text{Const}\left|\frac{L(\lambda)\sqrt{d(\lambda)+1}}{d(\lambda)}\right| \|F_n - F_m\|,$$

поэтому данная последовательность фундаментальна в пространстве $C(K)$ для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$. Значит, существует равномерный на компактах предел $\lim_{n\to\infty} F_n := F$. Пусть для данного $\varepsilon > 0$ при $n, m \geq N(\varepsilon)$ верно $\|F_n - F_m\| < \varepsilon$. В неравенстве

$$\int\limits_{|z|\leq R} |F_n(z) - F_m(z)|^2 e^{-2\varphi(z)} \Delta\varphi(z)\, dm(z) < \|F_n - F_m\|^2 < \varepsilon,\ n, m \geq N,\ R > 0,$$

перейдем сначала к пределу по $m \to \infty$, затем по $R \to \infty$:

$$\|F_n(z) - F(z)\|^2 < \varepsilon,\ n \geq N.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим $F_n \to F$ в пространстве $\mathcal{H}$.

Теорема 4.3.1 доказана.

Теорема 4.3.2. *Система* $\left\{l_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ *образует безусловный базис в пространстве* $\mathcal{H}$.

Доказательство теоремы 4.3.2.

Докажем несколько лемм.

Лемма 4.3.3. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |F(\lambda_k)|^2 \|l_k\|^2 \prec \|F\|^2,\ F \in \mathcal{H}.$$

Доказательство леммы 4.3.3.

По неравенству (4.3.16)

$$\|l_k\|^2 = \frac{1}{|L'(\lambda_k)|^2}\|L_k\|^2 \prec \frac{1}{|L'(\lambda_k)|^2},\ k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем $r = \min\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\sigma}{2}\right\}$, тогда выполняется неравенство (4.3.12), которое запишем в виде

$$\left|\frac{F(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\right|^2 \prec \int\limits_{B(\lambda_k,r)} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z),\ k \in \mathbb{N}.$$

Круги $B\left(\lambda_k, \frac{\sigma}{2}\right)$ попарно не пересекаются, поэтому

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|F(\lambda_k)|^2}{|L'(\lambda_k)|^2} \prec \sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{B(\lambda_k,r)} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z) \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{C}} |F(z)|^2 e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z) = \|F\|^2.$$

Лемма 4.3.3 доказана.

Лемма 4.3.4. *Выполняется соотношение*

$$\|F\|^2 \prec \sum_{k\in\mathbb{N}} |F(\lambda_k)|^2 \|l_k\|^2,\ F \in \mathcal{H}.$$

Доказательство леммы 4.3.4.

Пусть $F \in \mathcal{H}$ и

$$F_N(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} F(\lambda_k) l_k(\lambda)$$

— частичная сумма ряда Лагранжа функции F по функции L. Оценим

$$(l_k, l_j)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\mathbb{C}} l_k(z)\overline{l_j(z)}e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z).$$

Если $k = j$, то по (4.3.10) и (4.3.16) имеем

$$(l_k, l_k) = \frac{\|L_k\|^2}{|L'(\lambda_k)|^2} \le \frac{C_1}{K(\lambda_k)}.$$

Пусть $k \neq j$. По свойству (4.3.5)

$$|(l_k, l_j)| = \left| \int\limits_{\text{dist }(z,\mathcal{N})\leq\delta} l_k(z)\overline{l_j(z)}e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} |l_k(z)||l_j(z)|e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z),\ \ k,j\in\mathbb{N}.$$

Введем обозначение

$$S_{m,j,k} = \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} |l_k(z)||l_j(z)|e^{-2\varphi(z)}\Delta\varphi(z)\,dm(z),\ \ k,j,m\in\mathbb{N},$$

и последнее соотношение запишем в виде

$$|(l_k, l_j)| \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} S_{m,j,k}. \tag{4.3.17}$$

По оценкам (4.3.3) и (4.3.10) получим

$$S_{m,j,k} \leq \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} \frac{|L(z)|^2}{|z-\lambda_k||z-\lambda_j|}\cdot\frac{1}{|L'(\lambda_k)||L'(\lambda_j)|}\cdot\frac{\Delta\varphi(z)\,dm(z)}{\left|\widetilde{L}_m(z)\right|^2} \leq$$

$$\leq C \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} \frac{|L(z)|^2}{|z-\lambda_k||z-\lambda_j|}\cdot\frac{1}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}}\cdot\frac{\Delta\varphi(z)\,dm(z)}{\left|\widetilde{L}_m(z)\right|^2},\ \ k,j,m\in\mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая определение функций $\widetilde{L}_m(z)$, имеем

$$S_{m,j,k} \leq \frac{C}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}} \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} \frac{|P_m(z)|^2}{|z-\lambda_k||z-\lambda_j|}\Delta\varphi(z)\,dm(z),\ \ k,j,m\in\mathbb{N}.$$

Многочлен $P_m(z) = \prod\limits_{n:\ |z-\lambda_n|\leq 2\delta}(z-\lambda_n)$, как уже отмечалось, имеет степень не выше $s = (4\sigma+\delta)^2\delta^{-2}$.

Рассмотрим три возможных взаиморасположения точек $\lambda_m, \lambda_j, \lambda_k$.

1. Пусть $I_0(k,j) = \{m:\ |\lambda_j-\lambda_m|,\ |\lambda_k-\lambda_m|\leq 2\delta\}$. Тогда для $z\in B(\lambda_m,\delta)$ и $m\in I_0(k,j)$, $z\in B(\lambda_m,\delta)$

$$\left|\frac{P_m^2(z)}{(z-\lambda_k)(z-\lambda_j)}\right| = |z-\lambda_k||z-\lambda_j| \prod_{n:\ |\lambda_m-\lambda_n|\leq 2\delta,\ n\neq k,j} |z-\lambda_n|^2 \leq (3\delta)^{2(s-1)}.$$

Значит, по формуле (4.3.7)

$$S_{m,j,k} \le \frac{C(3\delta)^{2(s-1)}}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}} \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} \sum_{n:\ |z-\lambda_n|\le\delta} \alpha(z-\lambda_n)\,dm(z) \le$$

$$\le \frac{C(3\delta)^{2(s-1)}s}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}}.$$

Поскольку в силу разделенности нулей в множестве $I_0(k,j)$ индексов конечное число (не более s), то

$$\sum_{m\in I_0(k,j)} S_{m,j,k} \le \frac{C_0}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}}.$$

Множество $I_0(k,j)$ может быть пустым, тогда

$$\sum_{m\in I_0(k,j)} S_{m,j,k} = 0.$$

Если $I_0(k,j) \ne \emptyset$, то $|\lambda_k - \lambda_j| \le 4$, поэтому последнее неравенство можем записать в виде

$$\sum_{m\in I_0(k,j)} S_{m,j,k} \le \frac{4C_0}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_k-\lambda_j|}. \tag{4.3.18}$$

2.1. Пусть $I_1'(k,j) = \{m :\ |\lambda_j - \lambda_m| > 2\delta,\ |\lambda_k - \lambda_m| \le 2\delta\}$. Тогда для $z \in B(\lambda_m,\delta)$ и $m \in I_1'(k,j)$

$$\left|\frac{P_m^2(z)}{z-\lambda_k}\right| = |z-\lambda_k| \cdot \prod_{n:\ |\lambda_m-\lambda_n|\le 2\delta,\ n\ne k} |z-\lambda_n|^2 \le (3\delta)^{2s-1},$$

значит,

$$S_{m,j,k} \le \frac{C(3\delta)^{2s-1}}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}} \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} \frac{\Delta\varphi(z)\,dm(z)}{|z-\lambda_j|}.$$

Поскольку для данного расположения точек $\lambda_m, \lambda_j, \lambda_k$ для $z \in B(\lambda_m,\delta)$ выполняются неравенства $|z-\lambda_m| \le \delta \le \frac{1}{2}|\lambda_m - \lambda_j|$, то по формуле (4.3.7)

$$S_{m,j,k} \le \frac{2C(3\delta)^{2s-1}}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_j-\lambda_m|} \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} \sum_{n:\ |z-\lambda_n|\le\delta} \alpha(z-\lambda_n)\,dm(z) \le$$

$$\le \frac{2C(3\delta)^{2s-1}s}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_j-\lambda_m|}.$$

Кроме того, для $m \in I_1'(k,j)$ имеем $|\lambda_j-\lambda_k| \le |\lambda_j-\lambda_m|+|\lambda_m-\lambda_k| \le |\lambda_j-\lambda_m|+2\delta \le 2|\lambda_j-\lambda_m|$. Тем самым,

$$S_{m,j,k} \le \frac{4C(3\delta)^{2s-1}s}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_j-\lambda_k|}.$$

В множестве $I_1'(k,j)$ индексов m тоже конечное число, поэтому

$$\sum_{m\in I_1'(k,j)} S_{m,j,k} \le \frac{C_1'}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_j-\lambda_k|}. \tag{4.3.19}$$

2.2. Пусть $I_1''(k,j)=\{m:\ |\lambda_j-\lambda_m|\le 2\delta,\ |\lambda_k-\lambda_m|>2\delta\}$. Точно так же, как (4.3.19), получим

$$\sum_{m\in I_1''(k,j)} S_{m,j,k} \le \frac{C_1''}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_j-\lambda_k|}. \tag{4.3.20}$$

Если множество $I_1'(k,j)=\emptyset$ или $I_1''(k,j)=\emptyset$, то соответствующая сумма равна 0.

3. Пусть $I_2(k,j)=\{m:\ |\lambda_j-\lambda_m|>2\delta,\ |\lambda_k-\lambda_m|>2\delta\}$. Для $m\in I_2(k,j)$ и $z\in B(\lambda_m,\delta)$ имеем $|z-\lambda_j|\ge|\lambda_j-\lambda_m|-|\lambda_m-z|\ge|\lambda_j-\lambda_m|-\delta\ge\frac{1}{2}|\lambda_j-\lambda_m|$ и $|z-\lambda_k|\ge\frac{1}{2}|\lambda_j-\lambda_m|$. Поэтому

$$S_{m,j,k} \le \frac{C(3\delta)^{2s}}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}} \int\limits_{B(\lambda_m,\delta)} \frac{\Delta\varphi(z)\,dm(z)}{|\lambda_m-\lambda_j||\lambda_m-\lambda_k|} \le$$

$$\le \frac{C(3\delta)^{2s}s}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_m-\lambda_j||\lambda_m-\lambda_k|}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{|\lambda_m-\lambda_j||\lambda_m-\lambda_k|} = \frac{1}{|\lambda_k-\lambda_j|}\left|\frac{1}{\lambda_j-\lambda_m}-\frac{1}{\lambda_k-\lambda_m}\right|,$$

то по условию (4.3.1)

$$\sum_{m\in I_2(k,j)} S_{m,j,k} \le \frac{(3\delta)^{2s}s}{c\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}} \sum_{m\ne k,j} \frac{1}{|\lambda_m-\lambda_j||\lambda_m-\lambda_k|} \le$$

$$\le \frac{C_2}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_k - \lambda_j|}.$$

Отсюда и из оценок (4.3.17), (4.3.18), (4.3.19), (4.3.20) получим для $k \neq j$

$$|(l_k, l_j)| \le \frac{C}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}|\lambda_k - \lambda_j|}.$$

Учитывая разделенность нулей, имеем

$$|(l_k, l_j)| \le \frac{C_0}{\sqrt{K(\lambda_k)K(\lambda_j)}(|\lambda_k - \lambda_j| + 1)}, \; k, j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\mathcal{A}_N$ — матрица с элементами $a_{k,j} = \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_j| + 1}$, $k, j = 1, \; \dots \; , N$, и $b_N = \left(\frac{F(\lambda_k)}{\sqrt{K(\lambda_k)}}\right)_{k=1}^{N}$. Тогда

$$\|F_N\|^2 = \left|\sum_{k,j} F(\lambda_k)\overline{F(\lambda_j)}(l_k, l_j)\right| \le C_0 \sum_{k,j} \frac{F(\lambda_k)}{\sqrt{K(\lambda_k)}} \frac{\overline{F(\lambda_j)}}{\sqrt{K(\lambda_j)}} \frac{1}{|\lambda_k - \lambda_j| + 1} =$$

$$= C_0|(\mathcal{A}_N b_N, b_N)| \le \|\mathcal{A}_N\| \|b_N\|^2.$$

Во второй строке имеются в виду евклидово скалярное произведение, евклидова норма $\|b_N\|$ в $\mathbb{R}^N$ и операторная норма матрицы. Тогда (см. [16, стр. 387])

$$\|\mathcal{A}_N\|^2 \le \max_k \sum_{j=1}^{N} |a_{k,j}|.$$

По условию (4.3.1)

$$\|\mathcal{A}_N\|^2 \le M + 1.$$

следовательно,

$$\|F_N\|^2 \le C_0\sqrt{M+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|F(\lambda_k)|^2}{K(\lambda_k)}.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ получим утверждение леммы 4.3.4.

Лемма 4.3.4 доказана.

Из лемм 4.3.3 и 4.3.4 следует утверждение теоремы 4.3.2.

Теорема 4.3.2 доказана.

Теорема 4.3.3. *Пусть множество нулей* $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ *целой функции* L *удовлетворяет условию* (4.3.1). *Тогда система значений воспроизводящего ядра* $\{K(\lambda, \lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ *пространства* $\mathcal{H}_L$ *образует безусловный базис в этом пространстве.*

Доказательство теоремы 4.3.3.

Это утверждение следует из биортогональности систем $\{K(\lambda, \lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ и $\left\{l_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda - \lambda_n)},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.

Теорема 4.3.3 доказана.

Теорема 4.3.4. *Пространство Пэли* P*, состоящее из целых функций экспоненциального типа* π *с нормой*

$$\|F\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(iy)|^2\, dy < \infty,$$

пространство $\widehat{E}_2(D)$ *целых функций, представимых в виде*

$$F(\lambda) = \int\limits_{\partial D} e^{\lambda z} \overline{f(z)}\, ds(z),$$

где D *— выпуклый многоугольник,* $f \in E_2(D)$*:*

$$\|f\|^2 = \int\limits_{\partial D} |f(z)|^2\, ds(z) < \infty,$$

пространство $\widehat{B}_2(D)$ *на выпуклом многоугольнике* D *изоморфны как нормированные пространства соответствующим пространствам* $\mathcal{H}_L$*, где* L *— целая функция, порождающая базис.*

Доказательство теоремы 4.3.4.

Рассмотрим классический базис в пространстве Пэли P, построенный по системе $\{ni,\ n \in \mathbb{N}\}$. Порождающей является функция $\sin \pi i z$. Пусть $F \in P$ и

$$F(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} e^{\lambda t} \overline{f(t)}\, dt.$$

Для любого числа $d>0$ по субгармоничности

$$|F(iy)|^2 \le \frac{1}{\pi d^2}\int\limits_{B(iy,d)} |F(z)|^2 dm(z) \le \frac{1}{\pi d^2}\int\limits_{Q(iy,d)} |F(z)|^2\, dm(z),$$

где $Q(iy,d)$ квадрат с центром в точке iy со сторонами, параллельными осям координат и имеющими длину $2d$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(iy)|^2\, dy \le \frac{1}{\pi d^2}\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{Q(0,d)} |F(x+it+iy)|^2\, dx\, dt \right) dy =$$

$$= \frac{1}{\pi d^2}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{-d}^{d} |F(x+iy)|^2\, dx\, dy = \frac{1}{\pi d^2}\int\limits_{|\mathrm{Re} z|\le d} |F(z)|^2\, dm(z).$$

С другой стороны, для любого x

$$F(x+iy) = \int\limits_{-1}^{1} \overline{f(t)} e^{xt} e^{iyt}\, dt,$$

значит,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2\, dy = \int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^2 e^{2xt}\, dt \le e^{2|x|}\int\limits_{\mathbb{R}} |F(iy)|^2\, dy.$$

Отсюда

$$\int\limits_{|\mathrm{Re} z|\le d} |F(z)|^2\, dm(z) \le 2de^{2d}\int\limits_{\mathbb{R}} |F(iy)|^2\, dy.$$

Таким образом, исходная норма в пространстве P эквивалентна каждой из норм

$$\|F\|_d^2 = \int\limits_{|\mathrm{Re} z|\le d} |F(z)|^2\, dm(z),$$

с $d>0$. При $\sigma=\delta=1$ множество $G=\{\lambda:\ \mathrm{dist}\ (\lambda, i\mathbb{Z})\le\delta\}$ содержится в полосе $\{z:\ |\mathrm{Re}\ z|\le 2\delta\}$ и содержит в себе некоторую полосу $\{z:\ |\mathrm{Re}\ z|\le 2d\}$, поэтому если φ построена регуляризацией $\ln|\sin\pi iz|$, то

$$\alpha_1\|F\|_d^2 \le \int\limits_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)}\Delta\varphi(\lambda)\, dm(\lambda) \le \alpha_2\|F\|_{2\delta}^2.$$

Изоморфность P и $\mathcal{H}_L$ доказана. Случаи пространств $\widehat{E}_2(D)$ и $\widehat{B}_2(D)$ рассматриваются так же.

Теорема 4.3.4 доказана.

Глава 5

О безусловных базисах из экспонент в весовых пространствах на отрезке вещественной оси

Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I,h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\,dt} < \infty.$$

Оно является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g) = \int_I f(t)\overline{g}(t)e^{-2h(t)}\,dt.$$

Для любого линейного непрерывного функционала S на $L^2(I,h)$ через $\widehat{S}(\lambda)$ обозначим преобразование Фурье–Лапласа этого функционала

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Через $\widehat{L}^2(I,h)$ обозначим пространство преобразований Фурье–Лапласа функционалов на $L^2(I,h)$.

В работах [43], [44], [45] получено весовое описание пространства $\widehat{L}^2(I,h)$. Доказано, что пространство $\widehat{L}^2(I,h)$ изоморфно (как банахово пространство) пространству целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$|F(z)| \le C_F\sqrt{K(z)},\ z \in \mathbb{C}.$$

$$||F||^2 = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}\,d\widetilde{h}'(x)\,dy < \infty, \tag{5.1}$$

где

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - h(t))$$

— сопряженная по Юнгу к функции h и

$$K(x) = ||e^{(x+iy)t}||^2_{\widehat{L}^2(I,h)} = \int\limits_I e^{2xt-2h(t)}\,dt.$$

Нетрудно убедиться в том, что если $k(\lambda, w)$ — воспроизводящее ядро пространства $\widehat{L}^2(I,h)$ в котором рассматривается структура гильбертова пространства, наведенная из $L^2(I,h)$, то

$$k(\lambda, w) \equiv (e^{z\lambda}, e^{zw}),\ \lambda,\ w \in \mathbb{C}.$$

Тем самым, если система экспонент $\{e^{\lambda_k\lambda},\ k \in \mathbb{N}\}$ образует безусловный базис в пространстве $L^2(I,h)$, то система $\{k(\lambda,\lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ будет безусловным базисом в пространстве $\widehat{L}^2(I,h)$.

5.1. Необходимые условия безусловной базисности системы экспонент

Следующая теорема представляет собой уточнение теоремы 4.1.4 на случай пространств $\widehat{L}^2(I,h)$.

Теорема 5.1.1. *Пусть для достаточно больших $p > 0$ найдется некоторое число $\delta = \delta(p) > 0$ со свойством: существует последовательность $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, такая что интервалы*

$$I_k = \{x:\ |x - x_k| \le 2\tau(\ln K(z), x_k, p)\}$$

попарно не пересекаются и

$$\min_{x\in I_k} \tau(\ln K(z), x, p) \ge \delta(p)\tau(\ln K(z), x_k, p).$$

Пусть далее для любого $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[m; s]$, $s > m$, $s, m \in \mathbb{Z}$, со свойствами

1) *если* $I_{m,s} = \bigcup\limits_{m\le k\le s} I_k$, $I^0_{m,s}$ *— наименьший отрезок вещественной оси, содержащий* $I_{m,s}$, $d_{m,s}$ *— сумма длин интервалов, составляющих* $I_{m,s}$, *а* $d^0_{m,s}$ *— длина отрезка* $I^0_{m,s}$, *то* $d_{m,s} \ge (1-\varepsilon)d^0_{m,s}$;

2) *выполняется оценка* $\max_{k\in[m,s]} \tau(\ln K(z), x_k, p) \le \varepsilon d^0_{m,s}$.

Тогда в пространстве $L^2(I,h)$ *безусловного базиса из экспонент не существует.*

Доказательство теоремы 5.1.1.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 5.1.1. *Пусть*

$$K(\lambda) = ||e^{\lambda z}||^2_{L^2(I,h)}$$

и $\delta_\lambda :\ F \longrightarrow F(\lambda)$ *— точечный функционал в пространстве* $\widehat{L}^2(I,h)$. *Тогда* δ_λ *— линейный непрерывный функционал на* $\widehat{L}^2(I,h)$ *и*

$$K(\lambda) = ||\delta_\lambda||^2_{\left(\widehat{L}^2(I,h)\right)^*},$$

то есть $\sqrt{K(\lambda)}$ *— функция Бергмана пространства* $\widehat{L}^2(I,h)$. *Кроме того,* $\ln K(\lambda)$ *— непрерывная субгармоническая функция на комплексной плоскости.*

Доказательство леммы 5.1.1.

С одной стороны, если $F \in \widehat{L}^2(I,h)$, то $F = \widehat{S}$ для некоторого функционала $S \in \left(L^2(I,h)\right)^*$, значит,

$$\delta_\lambda(F) = F(\lambda) = S(e^{\lambda z}),$$

поэтому

$$|\delta_\lambda(F)| = |S(e^{\lambda z})| \le ||S||_{(L^2(I,h))^*}||e^{\lambda z}||_{L^2(I,h)} = ||F||_{\widehat{L}^2(I,h)}\sqrt{K(\lambda)}.$$

Тем самым,

$$||\delta_\lambda||_{\left(\widehat{L}^2(I,h)\right)^*} \le \sqrt{K(\lambda)},\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

С другой стороны, при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ функция $e^{\lambda z} \in L^2(I,h)$ и порождает некоторый линейный непрерывный функционал $E \in (L^2(I,h))^*$. Имеем

$$\delta_\lambda\left(\widehat{E}\right) = \widehat{E}(\lambda) = E(e^{\lambda z}) = \left(e^{\lambda z}, e^{\lambda z}\right)_{L^2(I,h)} =$$

$$= ||e^{\lambda z}||^2_{L^2(I,h)} = \sqrt{K(\lambda)}||e^{\lambda z}||_{L^2(I,h)} = \sqrt{K(\lambda)}||E||_{(L^2(I,h))^*} = \sqrt{K(\lambda)}||\widehat{E}||_{\widehat{L}^2(I,h)}.$$

Субгармоничность функции $\ln K(\lambda)$ следует из того, что она является верхней огибающей семейства субгармонических функций

$$\{\ln|F(\lambda)|,\ F \in \widehat{L}^2(I,h),\ ||F||_{\widehat{L}^2(I,h)} \le 1\}.$$

Лемма 5.1.1 доказана.

Проведем доказательство теоремы 5.1.1 методом от противного: допустим, что в пространстве $L^2(I,h)$ существует безусловный базис из экспонент $\{e^{z_k t}\}_{k=1}^\infty$. Тогда, учитывая лемму 5.1.1, по теореме 4.1.1 существует целая функция L, удовлетворяющая оценкам (4.1.1), которую будем называть порождающей функцией безусловного базиса. Значит, для нее выполнены теоремы 4.1.2 и 4.1.3. Сохраним введенные в этих теоремах обозначения. В частности, через $\tau(\lambda)$ обозначена функция $\tau(\ln K(z), \lambda, \ln(5P))$, при этом

$$K(z) = ||e^{zt}||^2 = \int\limits_I |e^{zt}|^2 e^{-2h(t)}\,dt = \int\limits_I e^{2\mathrm{Re}\,zt-2h(t)}\,dt = K(\mathrm{Re}\,z),$$

а постоянная P — из свойств базиса (соотношение (4.1.1)). Число $\delta(\ln(5P))$ будем обозначать просто δ. Положим $\tau(\ln K(z), x_k, \ln(5P)) = \tau_k$,

$$Q_{k,n} = \{x+iy:\ x \in I_k,\ 4n\tau_k \le y < 4(n+1)\tau_k\},\ k = 0,1,2,\ \ldots\ ,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку квадрат $Q_{k,n}$ содержит круг $B(x_k + i(4n+2)\tau_k, 2\tau_k)$, то по п. 1 теоремы 4.1.2 в каждом из этих квадратов находится по крайней мере один нуль функции L. Выберем по одному нулю $z_{k,n}$ в каждом из квадратов $Q_{k,n}$.

Возьмем положительное ε и отрезок $[m,s]$, о котором говорится в условии теоремы. Для большого натурального числа M рассмотрим множество нулей

$B = \{z_{k,n} : \ k \in [m,s], \ |n| \le M\}$. Применим теорему 4.1.3 к этому множеству нулей и найдем соответствующий индекс. Нуль с этим индексом обозначим через $\lambda^* = x^* + iy^*$. Не уменьшая общности будем считать, что $y^* \le 0$. Точка λ^*, таким образом, является одним из нулей и зависит от параметров m, s, M.

Для каждого $k \in [m,s]$ положим

$$n(k) = \left[\frac{y^*}{4\tau_k} + \frac{4}{3}\right],$$

где $[t]$ — означает целую часть t. Пусть $\tau_{k,n} = \tau(z_{k,n})$. Если $n \ge n(k)$, то квадрат $Q_{k,n}$ и круг $B_{k,n} = B(z_{k,n}, p\tau_{k,n})$, $p = \frac{1}{20P^{\frac{3}{2}}}$, лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z \ge y^* + \tau_k$. В самом деле, по определению числа $n(k)$, если $\lambda \in Q_{k,n}$, то

$$Im\,\lambda \ge 4n\tau_k \ge 4n(k)\tau_k \ge y^* + \frac{4}{3}\tau_k.$$

Если $x \in I_k$, то по лемме 4.1.1

$$\tau(x) \le \tau(x_k) + |x_k - x| \le 3\tau_k,$$

поэтому для точек $\lambda \in B_{k,n}$ имеем (заметим, что $p < 1/20$)

$$\operatorname{Im} \lambda \ge \operatorname{Im} z_{k,n} - p\tau_{k,n} \ge \operatorname{Im} z_{k,n} - 3p\tau_k \ge y^* + \tau_k.$$

Если точка λ лежит в полуплоскости $\operatorname{Im} z \ge y^* + \tau_k$, то

$$|\lambda - \lambda^*| \ge \operatorname{Im}(\lambda - \lambda^*) \ge \tau_k$$

или

$$\tau_k \le |\lambda - \lambda^*|.$$

Таким образом, если точки λ, w лежат в $A = Q_{k,n} \bigcup B_{k,n}$, $n \ge n(k)$, то

$$|\lambda - \lambda^*| \le |w - \lambda^*| + |\lambda - w| \le |w - \lambda^*| + (4\sqrt{2} + 3p)\tau_k \le 7|w - \lambda^*|$$

(снова пользуемся тем, что $p < 1/20$). Следовательно,

$$\alpha := \max_{z \in A} \frac{1}{|z - \lambda^*|^2} \le 49 \min_{z \in A} \frac{1}{|z - \lambda^*|^2} := 49\beta.$$

Отсюда, поскольку по условию теоремы $\tau_{k,n}^2 \ge \delta^2\tau_k^2$, то имеем

$$\int\limits_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2} \le 16\alpha\tau_k^2 \le \frac{16\alpha\tau_k^2}{\beta\pi(p\tau_{k,n})^2}\beta\pi(p\tau_{k,n})^2 \le \frac{784}{\pi p^2\delta^2}\int\limits_{B_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2}.$$

Просуммируем полученные неравенства сначала по всем $n(k) \le n \le M$ при фиксированном k, затем по всем $k \in [m,s]$:

$$\sum_{k=m}^{s}\sum_{n=n(k)}^{M}\int\limits_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2} \le \frac{784}{\pi p^2\delta^2}\sum_{k=m}^{s}\sum_{n=n(k)}^{M}\int\limits_{B_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2}.$$

Точка λ^* выбрана по теореме 4.1.3, значит, в силу соотношения (4.1.10)

$$\sum_{k=m}^{s}\sum_{n=n(k)}^{M}\int\limits_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2} \le \frac{784}{\pi p^2\delta^2}4^{10}P^9 := C. \tag{5.1.1}$$

По определению квадратов $Q_{k,n}$

$$\bigcup_{n=n(k)}^{M} Q_{k,n} = \{x+iy:\ x\in I_k,\ 4n(k)\tau_k \le y \le 4(M+1)\tau_k\}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=n(k)}^{M}\int\limits_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2} = \int\limits_{I_k}\int\limits_{4n(k)\tau_k}^{4(M+1)\tau_k} \frac{dy\,dx}{|z-\lambda^*|^2}.$$

По определению номера $n(k)$ имеем $4n(k)\tau_k < y^* + 6\tau_k$. В последнем интеграле произведем замену переменных $w = z - y^*$. Мы предполагаем, что $y^* \le 0$, в силу выбора номера $n(k)$ будем иметь

$$\sum_{n=n(k)}^{M}\int\limits_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2} \ge \int\limits_{I_k}\int\limits_{6\tau_k}^{4(M+1)\tau_k} \frac{dm(w)}{|w-x^*|^2}.$$

Если бы оказалось, что $y^* > 0$, то точно так же мы бы получили оценку

$$\sum_{n=-M}^{-n(k)}\int\limits_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2} \ge \int\limits_{I_k}\int\limits_{-4(M+1)\tau_k}^{-6\tau_k} \frac{dm(w)}{|w-x^*|^2},$$

которая в силу четности подинтегральной функции по y эквивалентна предыдущей оценке. Просуммируем эти оценки по всем $k \in [m, s]$:

$$\sum_{k=m}^{s} \sum_{n=n(k)}^{M} \int\limits_{Q_{k,n}} \frac{dm(z)}{|z-\lambda^*|^2} \geq \sum_{k=m}^{s} \int\limits_{I_k} \int\limits_{6\tau_k}^{4(M+1)\tau_k} \frac{dm(w)}{|w-x^*|^2}.$$

Воспользуемся оценкой (5.1.1):

$$\sum_{k=m}^{s} \int\limits_{I_k} \int\limits_{6\tau_k}^{4(M+1)\tau_k} \frac{dm(w)}{|w-x^*|^2} \leq C.$$

По определению $x^* = \operatorname{Re}\lambda^*$ и λ^* — одна из точек $z_{k,n}$, $k \in [m, s]$, $|n| \leq M$. Таким образом, при фиксированном отрезке $[m, s]$ число x^* при изменении числа M может меняться в пределах отрезка $I^0_{m,s}$. Тем самым, можно выбрать последовательность M_n, уходящую в $+\infty$ или $-\infty$, так что соответствующие значения x^*_n будут сходиться к некоторому предельному значению x^*. Учитывая ограниченность интегралов можно перейти к пределу:

$$\sum_{k=m}^{s} \int\limits_{I_k} \int\limits_{6\tau_k}^{+\infty} \frac{dm(w)}{|w-x^*|^2} \leq C. \tag{5.1.2}$$

Воспользуемся очевидными оценками: при $p \in [0; 1)$

$$p\int\limits_{p}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \geq p\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}p \geq \frac{1}{2}p,$$

и при $p \geq 1$

$$p\int\limits_{p}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \geq p\int\limits_{p}^{\infty} \frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Значит, при любых $p \geq 0$ имеем

$$p\int\limits_{p}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \geq \frac{1}{2}\min(p, 1).$$

Отсюда для любого $a \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$ получаем

$$\int\limits_{a}^{\infty} \frac{dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{|x|} \int\limits_{\frac{a}{|x|}}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \geq \frac{1}{2a} \min\left(\frac{a}{|x|}, 1\right) = \frac{1}{2} \min\left(\frac{1}{|x|}, \frac{1}{a}\right).$$

Таким образом, выполняется оценка

$$\int\limits_{6\tau_k}^{+\infty} \frac{dy}{(x-x^*)^2+y^2} \geq \frac{1}{2} \min\left(\frac{1}{|x-x^*|}, \frac{1}{6\tau_k}\right).$$

Отсюда и из (5.1.2) получаем соотношение

$$\sum_{k=m}^{s} \int\limits_{I_k} \min\left(\frac{1}{|x-x^*|}, \frac{1}{6\tau_k}\right) dx \leq 2C. \tag{5.1.3}$$

Через I_k^*, $k \in [m,s]$, обозначим интервал $(x^* - 6\tau_k; x^* + 6\tau_k)$. Множество всех индексов $k \in [m,s]$ разобьем на две части $A_1 = \{k \in [m,s] : \ I_k \bigcap I_k^* = \emptyset\}$ и $A_2 = \{k \in [m,s] : \ I_k \bigcap I_k^* \neq \emptyset\}$. Через d_j обозначим суммарную длину всех интервалов I_k по $k \in A_j$, $j = 1, 2$. Если $k \in A_2$, то $|x_k - x^*| \leq 8\tau_k$, значит весь интервал I_k лежит в отрезке $\{x : \ |x - x^*| \leq 10\tau_k\}$. Другими словами, все интервалы I_k, $k \in A_2$ лежат в отрезке $\{x : \ |x - x^*| \leq 10\tau^*\}$, где $\tau^* = 10 \max_{k\in[m,s]} \tau_k$. Это значит $d_2 \leq 20\tau^*$ и по условию 2) доказываемой теоремы имеем

$$d_2 \leq 20\varepsilon d^0_{m,s}, \ d_1 = d_{m,s} - d_2 \geq (1-20\varepsilon) d^0_{m,s}. \tag{5.1.4}$$

Множество индексов A_1 разобьем на две части A_1^+ — те индексы из A_1, для которых $x_k \geq x^*$, а A_1^- — остальные индексы из A_1. Через $d_1^\pm$ обозначим суммарную длину интервалов I_k с индексами из $A_1^\pm$. Одна из этих величин не меньше, чем половина d_1, пусть $d_1^+ \geq \frac{d_1}{2}$. Тогда из (5.1.4)

$$d_1^+ \geq \frac{1-20\varepsilon}{2} d^0_{m,s},$$

в частности, если $I^0_{m,s} = (A; B)$, то

$$B - x^* \geq d_1^+ \geq \frac{1-20\varepsilon}{2} d^0_{m,s}. \tag{5.1.5}$$

Интервалы I_k, $k \in A_1^+$ сдвинем к правому краю интервала $(A; B)$, так чтобы полученные интервалы I_k' заполнили интервал $(B - d_1^+; B)$. Длина интервала $(x^*; B - d_1^+)$ не превосходит суммарной длины интервалов I_k, $k \in A_2$, и линейной лебеговой меры множества $I_{m,s}^0 \setminus I_{m,s}$. Из условия 1) теоремы и из оценки (5.1.5) имеем

$$|B - d_1^+ - x^*| \leq 21\varepsilon d_{m,s}^0. \tag{5.1.6}$$

Продолжим оценку (5.1.3). Поскольку для $k \in A_1^+$

$$\int\limits_{I_k} \frac{dx}{|x - x^*|} \geq \int\limits_{I_k'} \frac{dx}{|x - x^*|},$$

то

$$\sum_{k \in A_1^+} \int\limits_{I_k} \min\left(\frac{1}{|x - x^*|}, \frac{1}{6\tau_k}\right) dx = \sum_{k \in A_1^+} \int\limits_{I_k} \frac{dx}{|x - x^*|} \geq \sum_{k \in A_1^+} \int\limits_{I_k'} \frac{dx}{|x - x^*|}.$$

По соотношению (5.1.3) получаем

$$\sum_{k \in A_1^+} \int\limits_{I_k'} \frac{dx}{|x - x^*|} \leq 2C$$

или

$$\int\limits_{B - d_1^+}^{B} \frac{dx}{|x - x^*|} \leq 2C.$$

Из оценок (5.1.4) и (5.1.6) имеем

$$\ln \frac{1 - 20\varepsilon}{42\varepsilon} \leq 2C.$$

В силу произвольной малости ε это невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему 5.1.1.

Теорема 5.1.1 доказана.

Следующая теорема доказана в работе [13] (теорема 4).

Теорема 5.1.2. *Пусть I — произвольный ограниченный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале. Предположим, что для некоторого*

$p > 0$ существуют последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел τ_m, $m = 1, 2, \ \dots \ $, таких что

1) *для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$*

$$\delta\tau_m \leq \tau(\ln K(z), x, p) \leq \tau_m, \ m = 1, 2, \ \dots \ ,$$

2) *имеет место соотношение*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{\tau_m} = \infty,$$

тогда в пространстве $L^2(I, h)$ безусловного базиса из экспонент не существует.

Эта теорема вытекает из теоремы 5.1.1. По [12, лемма 5] при $q \geq p > 0$ имеют место двусторонние оценки

$$\tau(u, y, q) \geq \tau(u, y, p) \geq \frac{p}{16q}\tau(u, y, q).$$

Значит, если требуемая в теореме 5.1.2 последовательность интервалов существует для некоторого $p > 0$, то такая последовательность существует для любого числа $p > 0$. Каждый из интервалов $[a_m; b_m]$ в теореме 5.1.2 следует представить в виде объединения непересекающихся интервалов вида $\{x : |x - y| \leq 2\tau(y)\}$. Полностью покрыть интервал $[a_m; b_m]$ может не получиться, но покрыть, так чтобы покрылось больше половины длины, можно. Тогда в качестве множества $I_{m,s}$ в теореме 5.1.1 будет объединение интервалов из $[a_m; b_m]$. Отрезками $I^0_{m,s}$ будут они же, вернее их замыкания. Поэтому условие 1) теоремы 5.1.1 выполняется тривиально. А условие 2) вытекает из условия 2) в теореме 5.1.2.

Функция $u(z) = \ln K(z)$ гладкая, поэтому с помощью теоремы 4.1.5 последнюю теорему можно сформулировать в терминах производных.

Теорема 5.1.3. *Пусть функция $u(x) = \ln K(x)$ удовлетворяет условию: для достаточно больших $p > 0$ и некоторого $b > 0$ существует последовательность интервалов $(a_n; b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, такая что для всех*

$x \in (a_n, b_n)$

$$\frac{1}{b} \le \frac{u''(x)}{u''(y)} \le b, \ \forall y: \ |x-y| \le \sqrt{8bp}(u''(x))^{-\frac{1}{2}}, \tag{5.1.7}$$

при этом

$$\frac{(b_n - a_n)^2}{u''(a_n)} \to \infty.$$

Тогда в пространстве $L^2(I,h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Доказательство теоремы 5.1.3.

По теореме 4.1.5 в интервалах $(a_n; b_n)$ выполняется соотношение

$$\sqrt{\frac{8p}{bu''(x)}} \le \tau(\ln K, z, p) \le \sqrt{\frac{8pb}{u''(x)}},$$

значит

$$\sqrt{\frac{1}{b}}\frac{\tau(\ln K, z, p)}{\tau(\ln K, z, p)} \le \sqrt{b}, \ x, y \in (a_n; b_n).$$

Применив теорему 5.1.2, получим требуемое утверждение.

Теорема 5.1.3 доказана.

Следствие. *Если условие (5.1.7) выполняется для всех достаточно больших x и*

$$u''(x)x^2 \to \infty, \ x \to \infty,$$

то в пространстве $L^2(I,h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Данное следствие означает, что в пространствах $L^2((-1;1),h)$ с весовой функции h регулярного роста удовлетворяющей условию: при всех $\alpha > 0$

$$e^{h(t)}(1-|t|)^\alpha \to \infty \text{ при } \ t \to \pm 1,$$

безусловных базисов нет. Пространства с весами более медленного роста требуют дополнительных исследований.

5.2. Пространства с весами степенного роста

В данном параграфе будем рассматривать пространства $L^2((-1;1),h)$ с весовой функцией

$$h(t) = -\alpha\ln(1-|t|),\ t \in (-1;1),\ \alpha > 0. \tag{5.2.1}$$

Теорема 5.2.1. *В пространстве $L^2((-1;1),h)$ с весовой функцией (5.2.1) безусловных базисов из экспонент не существует.*

Доказательство теоремы 5.2.1.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть система $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$ образует безусловный базис в пространстве $L^2((-1;1),h)$ и $L(\lambda)$ — порождающая функция этого базиса. По прежнему будем использовать обозначение $\tau(\lambda) := \tau(\ln K(z), \lambda, \ln(5P))$, где P — константа из соотношения (4.1.1). Нетрудно убедиться, что для весовой функции (5.2.1)

$$\tau(z) \asymp |\mathrm{Re}\ z| + 1. \tag{5.2.2}$$

Из неотрицательности h следует, что для любого $q > 0$

$$\int\limits_{-q}^{q} d\widetilde{h}'(x) > 0. \tag{5.2.3}$$

В работе [44] доказано, что в пространстве $\widehat{L}_2(I,h)$ можно ввести эквивалентную норму

$$||F||^2 = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)}\rho_{\widetilde{h}}(x)\, d\widetilde{h}'(x)\, dy, \tag{5.2.4}$$

где

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{t\in I}(xt - h(t)),\ x \in \mathbb{R},$$

— сопряженная по Юнгу к функции $h(t)$, а число $\rho = \rho_{\widetilde{h}}(x)$ определяется как супремум всех $t > 0$, для которых

$$\int\limits_{x-t}^{x+t} |\widetilde{h}'_+(y) - \widetilde{h}'_+(x)|\, dy \le 1. \tag{5.2.5}$$

Лемма 5.2.1. *Пусть* $h(t) = -\alpha \ln(1 - |t|),\ t \in (-1; 1),\ \alpha > 0.$ *Тогда*

$$K(x) \asymp e^{2|x| - (2\alpha+1)\ln(|x|+1)},\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.2.6}$$

$$\widetilde{h}(x) \asymp |x| - \alpha \ln(|x| + 1),\ x \in \mathbb{R}, \tag{5.2.7}$$

$$\rho_{\widetilde{h}}(x) \asymp |x| + 1,\ x \in \mathbb{R}. \tag{5.2.8}$$

Доказательство леммы 5.2.1.

Функция $K(x)$ — четная, поэтому вычисления проведем для $x > 0$. Асимптотическое представление для $K(x)$ следует из соотношения

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{2xt}(1 - |t|)^{2\alpha}\, dt = \int\limits_{-1}^{0} e^{2xt}(1 + t)^{2\alpha}\, dt + e^{2x} \int\limits_{0}^{1} e^{-2x(1-t)}(1 - t)^{2\alpha}\, dt =$$

$$= O(1) + \frac{e^{2x}}{(2x)^{2\alpha+1}} \int\limits_{0}^{2x} e^{-y} y^{2\alpha}\, dy = \frac{e^{2x + b_\alpha}}{x^{2\alpha+1}}(1 + o(1)),\ \ x \to \infty,$$

где

$$b_\alpha = \ln \frac{1}{2^{2\alpha+1}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y} y^{2\alpha}\, dy.$$

Из положительности и непрерывности $K(x)$ следует соотношение (5.2.6).

Функция $\widetilde{h}(x)$ для больших $|x|$ вычисляется непосредственно по определению:

$$\widetilde{h}(x) = |x| - \alpha \ln |x| + a_\alpha,\ |x| \geq X(\alpha).$$

Из положительности и непрерывности $\widetilde{h}(x)$ следует соотношение (5.2.7).

Для функции $u(x) = x - \alpha \ln x$ из определяющего соотношения (5.2.5) при больших $x > 0$ для положительных α вычислим $\rho_u(x)$:

$$\rho_u(x) = \sqrt{1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}}x,\ x > X_1(\alpha).$$

Отсюда и из положительности и непрерывности $\rho_{\widetilde{h}}(x)$ следует соотношение (5.2.8).

Лемма 5.2.1 доказана.

Введем вспомогательную функцию

$$A(z) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(i\tau)|^2\,d\tau}{|i\tau - z|^2 + 1},\ z \in \mathbb{C},$$

а функцию $B(z)$ определим из соотношения

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(|\mathrm{Re}\ z| + 1)^2}{A(\lambda_k)(|\lambda_k - z|^2 + |\mathrm{Re}\ \lambda_k|^2 + 1)} = \frac{1}{B(z)},\ z \in \mathbb{C}. \tag{5.2.9}$$

Сначала докажем лемму с оценками производной порождающей функции.

Лемма 5.2.2. 1. *Для любого $q > 0$ выполняется оценка*

$$\sup_{|Re\ \lambda_k|<q} \frac{|L'(\lambda_k)|^2}{A(\lambda_k)K(\lambda_k)} < \infty.$$

2. *Имеет место соотношение*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{|L'(\lambda_k)|^2}{K(\lambda_k)A(\lambda_k)} > 0.$$

Доказательство леммы 5.2.2.

Положим

$$L_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda - \lambda_k)}.$$

Тогда, как показано в 4.1, $L_k = \widehat{S}_k$, где $\{S_k\}$ — система функционалов, биортогональная к системе $\{e^{\lambda_k t}\}$. Докажем, что тогда при $|x| \le q$ выполняются неравенства

$$e^{-2q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |L_k(iy)|^2\,dy \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |L_k(x+iy)|^2\,dy \le e^{2q} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |L_k(iy)|^2\,dy. \tag{5.2.10}$$

Пусть функционал S_k определяется функцией $\varphi_k \in L^2((-1;1),h)$:

$$S_k(f) = (f, \varphi_k)_{L^2((-1;1),h)}.$$

Тогда

$$L_k(x+iy) = \int\limits_{-1}^{1} \overline{\varphi}_k(t)e^{(x+iy)t-2h(t)}\,dt = \int\limits_{-1}^{1} e^{iyt}\left(\overline{\varphi}_k(t)e^{xt-2h(t)}\right)\,dt,\ x \in \mathbb{R}.$$

По теореме Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L_k(x+iy)|^2\,dy = 2\pi \int_{-1}^{1} |\varphi_k(t)e^{-2h(t)}|^2 e^{2xt}\,dt,\ \ x \in \mathbb{R},$$

в частности, для $x = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L_k(iy)|^2\,dy = 2\pi \int_{-1}^{1} |\varphi_k(t)e^{-2h(t)}|^2\,dt.$$

Из последних двух равенств вытекает соотношение (5.2.10).

1. Докажем первую оценку. Поскольку $K(\lambda) = ||\delta_\lambda||^2_{\left(\widehat{L}^2((-1;1),h)\right)^*}$ и

$$\left|\left|\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}\right|\right|^2_{\widehat{L}^2((-1;1),h)} = \frac{1}{K(\lambda_k)},$$

то

$$|L_1(\lambda)|^2 \le ||\delta_\lambda||^2_{\left(\widehat{L}^2((-1;1),h)\right)^*}||L_1||^2_{\widehat{L}^2((-1;1),h)} = \frac{K(\lambda)}{K(\lambda_1)}.$$

Тем самым,

$$|L(\lambda)|^2 \prec (1+|\lambda|^2)K(\lambda). \tag{5.2.11}$$

Из (5.2.6) имеем

$$K(x) \prec \frac{e^{2|x|}}{|x|+1}.$$

Поэтому из (5.2.11) следует, что для любого $c \in \mathbb{R}$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda > c$

$$|L(\lambda)e^{-\lambda}|^2 \prec \frac{(|\lambda|+1)^2}{|x|+1},\ \ \lambda = x+iy.$$

Длина дуги γ полуокружности $C := \{\lambda : |\lambda - c| = R,\ \mathrm{Re}\,\lambda > c\}$, находящейся выше параболы $y = (x-c)^2$ есть $o(R)$ при $R \to \infty$. Проекция $C \setminus (\gamma \bigcup \overline{\gamma})$ на вещественную ось есть интервал (x_R, R), где x_R — положительное решение уравнения $x^2 + x^4 = R^2$. Нам достаточно того, что $x_R \asymp \sqrt{R}$. Пусть G — область, ограниченная полуокружностью C и вертикалью $\mathrm{Re}\,\lambda = c$. По формуле Коши для функции $g(\lambda) = L(\lambda)e^{-\lambda}$ и для любого $\lambda \in G$

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{g(z)\,dz}{(z-\lambda)^2}.$$

Из оценок выше имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma\bigcup\overline{\gamma}} \frac{g(z)\,dz}{(z-\lambda)^2}\right| \prec \frac{o(R)}{R} = o(1),\ R\to\infty,$$

$$\left|\int\limits_{C\setminus(\gamma\bigcup\overline{\gamma})} \frac{g(z)\,dz}{(z-\lambda)^2}\right| \prec \sup_{z\in C\setminus(\gamma\bigcup\overline{\gamma})} \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{Re}\ z|+1}} = \frac{1}{\sqrt{x_R}} = o(1),\ R\to\infty.$$

Таким образом,

$$g'(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\ z=c} \frac{g(z)\,dz}{(z-\lambda)^2},\ \mathrm{Re}\ \lambda > c.$$

Отсюда для λ_k, лежащих в полуплоскости $\mathrm{Re}\ \lambda > c$, получим формулу

$$L'(\lambda_k) = \frac{e^{\lambda_k}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(c+iy)e^{-c-iy}\,dy}{(c+iy-\lambda_k)^2},\ x_k := \mathrm{Re}\ \lambda_k > c. \tag{5.2.12}$$

Аналогично, в левой полуплоскости

$$L'(\lambda_k) = -\frac{e^{-\lambda_k}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{L(c+iy)e^{c+iy}\,dy}{(c+iy-\lambda_k)^2},\ x_k := \mathrm{Re}\ \lambda_k < c. \tag{5.2.13}$$

По п. 3 теоремы 4.1.2 с учетом (5.2.2) при $|x_k| \le q$ для некоторого $d = d(q) > 0$ в кругах $B(\lambda_k, d)$ выполняется оценка

$$\frac{|L(\lambda)|^2}{|\lambda-\lambda_k|^2} \le |L'(\lambda_k)|^2 \frac{PK(\lambda)}{K(\lambda_k)}.$$

В силу ограниченности $K(\lambda) = K(\mathrm{Re}\ \lambda)$ снизу и сверху в полосах $|\mathrm{Re}\ \lambda| \le q$ выполнено неравенство

$$\frac{|L(\lambda)|^2}{|\lambda-\lambda_k|^2} \le B|L'(\lambda_k)|^2,\ |Re\lambda_k| \le q,\ \lambda\in B(\lambda_k, d), \tag{5.2.14}$$

где $B = B(q) > 0$ — некоторая постоянная.

1а. Если $\mathrm{Re}\ \lambda_k > \frac{d}{2}$, то по формуле (5.2.12), примененной для $c = 0$, получим

$$|L'(\lambda_k)| \le \frac{1}{2\pi} e^q \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(iy)|\,dy}{|iy-\lambda_k|^2}.$$

По неравенству Коши–Буняковского

$$|L'(\lambda_k)|^2 \le \frac{1}{4\pi^2} e^{2q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(iy)|^2\,dy}{|iy-\lambda_k|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|iy-\lambda_k|^2}.$$

Поскольку $\mathrm{Re}\,\lambda_k > \frac{d}{2}$, то

$$|iy-\lambda_k|^2 \ge \frac{1}{2}\min\left(\frac{d^2}{4},1\right)(|iy-\lambda_k|^2+1)$$

и по той же причине

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|iy-\lambda_k|^2} \le \frac{2\pi}{d}.$$

Таким образом,

$$|L'(\lambda_k)|^2 \le C(q,d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(iy)|^2\,dy}{|iy-\lambda_k|^2+1} = C(q,d)A(\lambda_k),\ \frac{d}{2} \le \mathrm{Re}\,\lambda_k \le q. \quad (5.2.15)$$

1b. Пусть теперь $0 \le \mathrm{Re}\,\lambda_k \le \frac{d}{2}$. Применим равенство (5.2.12) для $c=-d$

$$|L'(\lambda_k)| \le \frac{1}{2\pi} e^{x_k+d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(-d+iy)|\,dy}{|-d+iy-\lambda_k|^2}.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$|L'(\lambda_k)|^2 \le \frac{1}{4\pi^2} e^{2q+2d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(-d+iy)|^2\,dy}{|-d+iy-\lambda_k|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|-d+iy-\lambda_k|^2}.$$

Поскольку $x_k = \mathrm{Re}\,\lambda_k \ge 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|-d+iy-\lambda_k|^2} = \frac{\pi}{d+x_k} \le \frac{\pi}{d},$$

поэтому

$$|L'(\lambda_k)|^2 \le \frac{1}{4d\pi} e^{2q+2d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(-d+iy)|^2\,dy}{|-d+iy-\lambda_k|^2}.$$

Используя (5.2.10), можно перейти к интегралу по мнимой оси:

$$|L'(\lambda_k)|^2 \le \frac{1}{4d\pi} e^{2(q+2d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(iy)|^2\,dy}{|iy-\lambda_k|^2}.$$

Положим $M = \frac{B}{4d\pi} e^{2(q+2d)}$, где B — постоянная из неравенства (5.2.14), и пусть $\varepsilon = \min\left(d, \frac{1}{4M}\right)$, тогда отрезок $(i(y_k - \varepsilon); i(y_k + \varepsilon))$ $(y_k = \operatorname{Im}\lambda_k)$ лежит в круге $B(\lambda_k, d)$ и на нем выполняется оценка (5.2.14). Поэтому

$$\frac{1}{4d\pi} e^{2(q+2d)} \int\limits_{y_k-\varepsilon}^{y_k+\varepsilon} \frac{|L(iy)|^2\,dy}{|iy-\lambda_k|^2} \le \frac{|L'(\lambda_k)|^2}{2}$$

и

$$|L'(\lambda_k)|^2 \prec 2 \int\limits_{|y-y_k|\ge\varepsilon} \frac{|L(iy)|^2\,dy}{|iy-\lambda_k|^2},\ k \in \mathbb{N}.$$

При $|y - y_k| > \varepsilon$ имеем $|iy-\lambda_k|^2 \ge C(\varepsilon)(|iy-\lambda_k|^2+1)$, поэтому

$$|L'(\lambda_k)|^2 \prec \int\limits_{|y-y_k|\ge\varepsilon} \frac{|L(iy)|^2\,dy}{|iy-\lambda_k|^{+1}} \le A(\lambda_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Отсюда с учетом (5.2.15) и ограниченности $K(x)$ в полосе $|x| \le q$ получаем доказательство первого утверждения леммы 5.2.2 для $\operatorname{Re}\lambda_k \ge 0$. Для $\operatorname{Re}\lambda_k \le 0$ оценка доказывается так же с применением (5.2.13).

2. Докажем второе утверждение леммы 5.2.2.

По формуле (5.1) имеем $(\lambda = x + iy)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}\right|^2 \frac{dy\,d\widetilde{h}'(x)}{K(x)} \asymp \frac{1}{K(\lambda_k)},\ k \in \mathbb{N}. \tag{5.2.16}$$

Из этого соотношения при всех k имеем $(\lambda = x + iy)$:

$$|L'(\lambda_k)|^2 \succ K(\lambda_k) \int\limits_{|x|\le 1} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(\lambda)|^2\,dy}{|\lambda-\lambda_k|^2}\right) \frac{d\widetilde{h}'(x)}{K(x)},\ k \in \mathbb{N}.$$

По (5.2.10) отсюда получим

$$|L'(\lambda_k)|^2 \succ K(x_k) \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(iy)|^2\,dy}{|iy-\lambda_k|^2}\right) \int\limits_{|x|<1} \frac{d\widetilde{h}'(x)}{K(x)},\ k \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения (5.2.3) и ограниченности $K(x)$ на компактах

$$|L'(\lambda_k)|^2 \succ K(x_k)A(\lambda_k),\ k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 5.2.2 доказана.

В следующей лемме докажем оценку порождающей функции и верхнюю оценку ее производной.

Лемма 5.2.3. 1. *Выполняется оценка сверху модуля порождающей функции*

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{|L(\lambda)|^2}{A(\lambda)K(\lambda)(|Re\ \lambda|+1)^2} < \infty.$$

2. *Выполняется оценка*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|L'(\lambda_k)|^2}{A(\lambda_k)K(\lambda_k)} < \infty.$$

Доказательство леммы 5.2.3.

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Утверждение 5.2.1. *Пусть* $\sigma \in (0;1)$, $M \geq 1$, $z = t + is$, $t \geq 0$, *и*

$$Q(z,\sigma,M) := \{\zeta :\ t - \sigma(t+1) \leq Re\ \zeta \leq M(t+1),\ |Im\ \zeta - s| \leq M(t+1)\}.$$

Тогда для некоторой константы $C = C(\sigma, M)$ *и для любых* $z_1, z_2 \in Q(z,\sigma,M)$

$$\frac{1}{C^2}A(z_1) \leq A(z_2) \leq C^2 A(z_1).$$

Можно взять $C = \frac{10M^2}{(1-\sigma)}$.

Если $Q^*(z,\sigma,M)$ *— прямоугольник, симметричный* $Q(z,\sigma,M)$ *относительно мнимой оси, то*

$$\frac{1}{C^2}A(z_1) \leq A(z_2) \leq C^2 A(z_1),\ z_1, z_2 \in Q^*(z,\sigma,M).$$

Доказательство утверждения 5.2.1.

Поскольку $Q(z,\sigma,M) \subset B(z, \sqrt{2}M(t+1))$, то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ и $\zeta = u + iv \in Q(z,\sigma,M)$

$$|\zeta - i\tau|^2 + 1 \leq 2|z - i\tau|^2 + 2|\zeta - z|^2 + 1 \leq 2|s-\tau|^2 + 2t^2 + 1 + 4M^2(t+1)^2 \leq$$

$$\leq 10M^2(|z - i\tau|^2 + 1).$$

По определению функции A получаем

$$A(z) \le 10M^2 A(\zeta),\ \zeta \in Q(z,\sigma,M). \tag{5.2.17}$$

Оценим снизу $|\zeta - i\tau|$ при любом τ. Если $u = \mathrm{Re}\zeta \ge t$, то $(t+1) \le (u+1)$. Если $u \le t$, то $(t+1) \le (|u|+1) + |u-t| \le (|u|+1) + \sigma(t+1)$, значит, в любом случае

$$(t+1) \le \frac{1}{1-\sigma}(|u|+1).$$

Отсюда для любого $\tau \in \mathbb{R}$

$$|z-i\tau|^2+1 \le 2|\zeta-i\tau|^2+4M^2(t+1)^2+1 \le 2|v-\tau|^2+2u^2+1+\frac{4M^2}{(1-\sigma)^2}(|u|+1)^2 \le$$

$$\le \frac{10M^2}{(1-\sigma)^2}(|\zeta - i\tau|^2+1),$$

тем самым,

$$A(\zeta) \le \frac{10M^2}{(1-\sigma)^2} A(z).$$

Это неравенство вместе с (5.2.17) дает требуемое утверждение.

Утверждение 5.2.1 доказано.

1. Доказательство первой оценки в лемме 5.2.3 проведем для $\mathrm{Re}\ \lambda \ge 0$, для $\mathrm{Re}\ \lambda \le 0$ доказывается аналогично.

Из первого пункта теоремы 4.1.2 следует, что можно найти такое $D > 0$, что в каждом квадрате

$$Q_m = \left\{ z:\ |\mathrm{Re}\ z| \le \frac{D}{2},\ 2mD \le \mathrm{Im}\ z < 2(m+1)D \right\},\ m \in \mathbb{Z},$$

найдется хотя бы один показатель из системы $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Обозначим один из показателей, лежащих в квадрате Q_m, через $z_m = s_m + it_m$. Из соотношения (4.1.1) имеем

$$|L(\lambda)|^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{K(z_m)}{|L'(z_m)|^2|\lambda - z_m|^2} \prec K(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пользуясь доказанной в п.1 леммы 5.2.2 оценкой сверху $|L'(\lambda_k)|$ получим

$$|L(\lambda)|^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{A(z_m)|\lambda - z_m|^2} \prec K(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

тем более верна оценка

$$|L(\lambda)|^2 \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{A(z_m)(|\lambda - z_m|^2+1)} \prec K(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C}. \tag{5.2.18}$$

Если $t\in[mD;(m+1)D]$, $m\in\mathbb{Z}$, то для любого $\zeta\in\mathbb{C}$

$$\frac{1}{4(D^2+1)}(|\zeta - it|^2+1) \le |\zeta - z_m|^2+1 \le 4(D^2+1)(|\zeta - it|^2+1).$$

Полагая $\zeta = i\tau$, получим

$$\frac{1}{4(D^2+1)}\frac{|L(i\tau)|^2}{|i\tau - it|^2+1} \le \frac{|L(i\tau)|^2}{|i\tau - z_m|^2+1} \le$$

$$\le 4(D^2+1)\frac{|L(i\tau)|^2}{|i\tau - it|^2+1},\ m\in\mathbb{Z},\ t\in[mD;(m+1)D].$$

После интегрирования по τ имеем

$$\frac{1}{4(D^2+1)}A(it) \le A(z_m) \le 4(D^2+1)A(it),\ m\in\mathbb{Z},\ t\in[mD;(m+1)D].$$

Полагая $\zeta = \lambda$,

$$\frac{1}{A(z_m)(|\lambda - z_m|^2+1)} \ge$$

$$\ge \frac{1}{16(D^2+1)^2}\frac{1}{A(it)(|\lambda - it|^2+1)},\ m\in\mathbb{Z},\ t\in[mD;(m+1)D].$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{A(z_m)(|\lambda - z_m|^2+1)} \ge \frac{1}{16D(D^2+1)^2}\int\limits_{Dm}^{D(m+1)} \frac{dt}{A(it)(|\lambda - it|^2+1)},\ m\in\mathbb{Z},$$

и, продолжая (5.2.18), имеем

$$|L(\lambda)|^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{A(it)(|\lambda - it|^2+1)} \prec K(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{C}. \tag{5.2.19}$$

Для $\lambda = x+iy$ по неравенству Коши–Буняковского

$$\frac{\pi}{\sqrt{|x|^2+1}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|\lambda - it|^2+1} \le$$

$$\leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A(it)\,dt}{|\lambda - it|^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{A(it)(|\lambda - it|^2 + 1)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

тем самым,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{A(it)(|\lambda - it|^2 + 1)} \geq \frac{\pi^2}{|x|^2 + 1} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A(it)\,dt}{|\lambda - it|^2 + 1} \right)^{-1}.$$

Подставляя эту оценку в (5.2.19), получим

$$|L(\lambda)|^2 \prec (|\mathrm{Re}\ \lambda| + 1)^2 K(\lambda) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A(it)\,dt}{|\lambda - it|^2 + 1},\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{5.2.20}$$

Рассмотрим функцию

$$H(\zeta) := \frac{\tau + 2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|L(it)|^2\,dt}{|\zeta + 2 - it|^2},\ \tau = \mathrm{Re}\ \zeta > -2. \tag{5.2.21}$$

Эта функция гармонична при $\tau = \mathrm{Re}\ \zeta > -2$, и, поскольку при $\mathrm{Re}\ \zeta \geq -1$

$$|\zeta - it|^2 + 1 \leq |\zeta + 2 - it|^2 \leq 8(|\zeta - it|^2 + 1),$$

то

$$\frac{\pi}{(\tau + 2)} H(\zeta) \leq A(\zeta) \leq \frac{8\pi}{\tau + 2} H(\zeta),\ \tau = \mathrm{Re}\ \zeta > -1. \tag{5.2.22}$$

В частности, при $\zeta = is$ $(\tau = 0)$

$$\frac{\pi}{2} H(is) \leq A(is) \leq 4\pi H(is),\ s \in \mathbb{R}. \tag{5.2.23}$$

При $\mathrm{Re}\ \lambda \geq 0$

$$|\lambda - it|^2 + 1 \leq |\lambda + 1 - it|^2 \leq 2(|\lambda - it|^2 + 1),\ t \in \mathbb{R},$$

поэтому, учитывая (5.2.23), имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{A(it)\,dt}{|\lambda - it|^2 + 1} \leq \frac{8\pi^2}{(x + 1)} \left(\frac{x + 1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{H(it)\,dt}{|\lambda + 1 - it|^2} \right),\ \lambda = x + iy,\ x \geq 0.$$

В скобках в правой части стоит интеграл Пуассона для полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > -1$ с граничными значениями $H(z+1)$. По формуле Пуассона

$$\frac{x+1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{H(it)\,dt}{|\lambda+1-it|^2} = H(\lambda+1),$$

поэтому, учитывая (5.2.22), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{A(it)\,dt}{|\lambda-it|^2+1} \leq \frac{8\pi(x+3)}{(x+1)}A(\lambda+1).$$

Подставим эту оценку в (5.2.20), получим

$$|L(\lambda)|^2 \prec (|\mathrm{Re}\,\lambda|+1)^2K(\lambda)A(\lambda+1),\ \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0.$$

Остается учесть, что по утверждению 5.2.1 $A(\lambda+1) \asymp A(\lambda)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$. Для $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$ оценка доказывается аналогично.

Первая оценка леммы 5.2.3 доказана.

2. Доказательство верхней оценки для производных проведем для $\lambda_k \geq 0$ (для $\lambda_k < 0$ доказательство аналогичное).

По п. 3 теоремы 4.1.2 и по соотношению (5.2.2) для некоторого $\delta \in (0;1)$ и $C > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ имеет место

$$|L'(\lambda_k)|^2 \leq C\frac{K(\lambda_k)|L(\lambda)|^2}{K(\lambda)|\lambda-\lambda_k|^2},\ \lambda \in B(\lambda_k, \delta(|x_k|+1)).$$

По доказанному п. 1 данной леммы оценим сверху $|L|$ и получим для λ на окружности $C(\lambda_k, \delta(|x_k|+1))$

$$|L'(\lambda_k)|^2 \leq C_1\frac{K(\lambda_k)A(\lambda)(|x|+1)^2}{(|x_k|+1)^2},\ \lambda \in C(\lambda_k, \delta(|x_k|+1)),\ k \in \mathbb{N}.$$

Для $\lambda \in C(\lambda_k, \delta(|x_k|+1))$ очевидно, что $(|x|+1) \leq (1+\delta)(|x_k|+1)$, поэтому

$$|L'(\lambda_k)|^2 \leq C_2K(\lambda_k)A(\lambda),\ \lambda \in C(\lambda_k, \delta(|x_k|+1)),\ k \in \mathbb{N}.$$

Остается применить утверждение 5.2.1.

Лемма 5.2.3 доказана.

Лемма 5.2.4. *Пусть функция $B(z)$ определена из соотношения (5.2.9). Тогда для всех $\varepsilon > 0$ вне кругов $B_k(\varepsilon) := B(\lambda_k, \varepsilon(|Re\ \lambda_k| + 1))$ выполняется оценка снизу*

$$|L(\lambda)|^2 \succ K(\lambda)B(\lambda)(|Re\ \lambda| + 1)^2,\ \lambda \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k(\varepsilon).$$

Оценка сверху

$$|L(\lambda)|^2 \prec K(\lambda)B(\lambda)(|Re\ \lambda| + 1)^2,\ \lambda \in \mathbb{C},$$

выполняется на всей плоскости, причем $A(z) \asymp B(z),\ z \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k(\delta)$.

Доказательство леммы 5.2.4.

Из оценок на $L'(\lambda_k)$, полученных в леммах 5.2.2 и 5.2.3, и из соотношения (4.1.1) следует

$$|L(z)|^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{A(\lambda_k)|z-\lambda_k|^2} \asymp K(z),\ z \in \mathbb{C},$$

а из пункта 3 теоремы 4.1.2 имеем: для некоторого $\delta > 0$ в кругах $B_k(\delta) := B(\lambda_k, \delta(|\mathrm{Re}\ \lambda_k| + 1))$

$$\frac{|L(z)|^2}{A(\lambda_k)|z-\lambda_k|^2} \asymp K(z),\ z \in B_k(\delta),\ k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку при $z \notin B_k\left(\frac{\delta}{2}\right)$

$$|z-\lambda_k|^2 \asymp |z-\lambda_k|^2 + |\mathrm{Re}\ \lambda_k|^2 + 1,\ z \notin B_k\left(\frac{\delta}{2}\right),\ k \in \mathbb{N},$$

то

$$|L(z)|^2 \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{A(\lambda_k)(|z-\lambda_k|^2 + |\mathrm{Re}\ \lambda_k|^2 + 1)} \asymp K(z),\ z \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\left(\frac{\delta}{2}\right), \tag{5.2.24}$$

и

$$\frac{|L(z)|^2}{A(\lambda_k)(|z-\lambda_k|^2 + |\mathrm{Re}\ \lambda_k|^2 + 1)} \asymp K(z),\ z \in B_k(\delta) \setminus B_k(\delta/2),\ k \in \mathbb{N}. \tag{5.2.25}$$

С помощью функции $B(z)$, определенной равенством (5.2.9), соотношение (5.2.24) запишется в виде

$$|L(z)|^2 \asymp K(z)B(z)(|\mathrm{Re}\ z| + 1)^2,\ z \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\left(\frac{\delta}{2}\right), \tag{5.2.26}$$

а из (5.2.25) с учетом утверждения 5.2.1 получим

$$|L(z)|^2 \asymp K(z)A(z)|(|\mathrm{Re}\ z|+1)^2,\ z \in B_k(\delta)\setminus B_k(\delta/2),\ k\in\mathbb{N}.$$

В частности, из этих двух соотношений получим

$$B(z) \asymp A(z),\ z \in B_k(\delta)\setminus B_k(\delta/2),\ k\in\mathbb{N}.$$

Из утверждения 5.2.1 и аналогичного свойства функции $B(z)$ в кругах $B_k(\delta)$ последнее свойство распространяется на весь круг:

$$B(z) \asymp A(z),\ z \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k(\delta). \tag{5.2.27}$$

По первому пункту леммы 5.2.3 получаем, что верхняя оценка в (5.2.26) выполняется на всей плоскости.

Лемма 5.2.4 доказана.

Докажем еще одно вспомогательное утверждение о свойствах функции $B(z)$.

Утверждение 5.2.2. *Пусть функция $B(z)$ определена из равенства (5.2.9), а прямоугольники $Q(z,\sigma,M)$ и $Q^*(z,\sigma,M)$, $\sigma\in(0;1)$, $M\ge 1$, $z=t+is$, $t\ge 0$, определены как в утверждении 5.2.1. Тогда для любых $z_1,z_2\in Q(z,\sigma,M)$ или $z_1,z_2\in Q^*(z,\sigma,M)$ выполняются оценки*

$$\frac{1}{C^2}B(z_1)\le B(z_2)\le C^2B(z_1).$$

где C некоторая постоянная, зависящая от σ и M. Можно взять $C=\frac{16M}{(1-\sigma)}$.

Доказательство утверждения 5.2.2.

Это утверждение доказывается так же, как утверждение 5.2.1 элементарными оценками $|z_j-\lambda_k|^2+|\mathrm{Re}\ \lambda_k|^2+1$, $j=1,2$, $k\in\mathbb{N}$.

Возьмем $z_1,z_2\in Q(z,\sigma,M)$, $t=\mathrm{Re}\ z\ge 0$, и некоторое $k\in\mathbb{N}$. Поскольку $Q(z,\sigma,M)\subset B(z,\sqrt{2}M(t+1))$, то

$$|z_1-\lambda_k|^2+|x_k|^2+1\le |z_2-\lambda_k|^2+8M^2(|t|+1)^2+|x_k|^2+1.$$

Возьмем $\sigma' \in (\sigma; 1)$, например, $\sigma' = (1+\sigma)/2$ и предположим, что $\lambda_k \in Q(z, \sigma', M+\sigma')$. Тогда по определению прямоугольников $Q(z,\sigma,M)$

$$t - \sigma'(t+1) \le x_k, \text{ и } (t+1)^2 \le \frac{2}{(1-\sigma')^2}(|x_k|^2+1).$$

Следовательно,

$$|z_1 - \lambda_k|^2 + |x_k|^2 + 1 \le |z_2 - \lambda_k|^2 + \left(\frac{16M^2}{(1-\sigma')^2} + 1\right)(|x_k|^2+1) \le$$

$$\le \frac{128M^2}{(1-\sigma)^2}(|z_2-\lambda_k|^2 + |x_k|^2 + 1).$$

Если же $\lambda_k \notin Q(z,\sigma',M+\sigma')$, то $|\lambda_k - z_2| \ge |\mathrm{Re}\,(\lambda_k - z_2)| \ge (\sigma'-\sigma)(t+1)$, поэтому

$$|z_1 - \lambda_k|^2 + |x_k|^2 + 1 \le \left(\frac{8M^2}{(\sigma'-\sigma)^2} + 1\right)|z_2-\lambda_k|^2 + (|x_k|^2+1) \le$$

$$\le \frac{16M^2}{(\sigma'-\sigma)^2}(|z_2-\lambda_k|^2 + |x_k|^2+1) \le \frac{64M^2}{(1-\sigma)^2}(|z_2-\lambda_k|^2+|x_k|^2+1).$$

Утверждение 5.2.2 доказано.

Лемма 5.2.5. *Для $\delta_1, \delta_2, M > 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}_+$ через $Q(x_0,\delta_1,\delta_2,M)$ обозначим прямоугольник*

$$Q = \{x+iy:\ \delta_1 x_0 \le x \le \delta_2 x_0,\ |y| \le Mx_0\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать достаточно малое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, достаточно большие $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, $M = M(\delta_1,\delta_2,\varepsilon) > 0$, так что при $x_0 > X(\delta_1,\delta_2,\varepsilon)$ будет выполняться соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus Q(x_0,\delta_1,\delta_2,M)} |k(x+iy,x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)}\rho_{\widetilde{h}}(x)\,d\widetilde{h}'(x)\,dy \le \varepsilon k(x_0,x_0).$$

Доказательство леммы 5.2.5.

Возьмем положительное x_0 и представим ось абсцисс в виде объединения промежутков

$$I_1 = \{x:\ x > \delta_2 x_0\},\ I_2 = \{x:\ -\delta_1 x_0 \le x < \delta_1 x_0\},$$

$$I_3 = \{x:\ -2x_0 < x < -\delta_1 x_0\},\ I_4 = \{x:\ x \le -2x_0\},$$

$$I = \{x:\ \delta_1 x_0 \le x \le \delta_2 x_0\}.$$

Тогда дополнение к прямоугольнику $Q(x_0, \delta_1, \delta_2, M)$ разложится на объединение двух полуплоскостей $Q_1 = I_1 \times \mathbb{R}$ и $Q_4 = I_4 \times \mathbb{R}$, двух вертикальных полос $Q_2 = I_2 \times \mathbb{R}$ и $Q_3 = I_3 \times \mathbb{R}$ и двух полуполос $Q_+ = I \times \{y > Mx_0\}, Q_- = I \times \{y < -Mx_0\}$. Заметим, что функция $k(x+iy, x_0)$ при фиксированном x является преобразованием Фурье функции $e^{(x+x_0)t-2h(t)}$ и по теореме Планшереля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(x+iy, x_0)|^2\, dy = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} e^{2(x+x_0)t-4h(t)}\, dt.$$

Как доказано в [12] для любой выпуклой функции $u(t)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{yt-u(t)}\, dt \asymp \frac{e^{\widetilde{u}(y)}}{\rho_{\widetilde{u}}(y)},\ y \in \mathbb{R}.$$

Отсюда по лемме 5.2.1 имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(x+iy, x_0)|^2\, dy \asymp \frac{e^{4\widetilde{h}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}}{\rho_{\widetilde{h}}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)} \asymp \frac{e^{4\widetilde{h}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}}{|x+x_0|+1},$$

значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |k(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, dy \prec \frac{x_0(|x|+1) e^{4\widetilde{h}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-2\widetilde{h}(x)-2\widetilde{h}(x_0)}}{|x+x_0|+1} K(x_0).$$

В полуплоскости Q_1 получим оценку при $\delta_2 \to \infty$ равномерно по x_0

$$\int\limits_{Q_1} |k(x+iy, x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, dy\, d\widetilde{h}'(x) \prec K(x_0) \int\limits_{\delta_2}^{\infty} \frac{dy}{(y+1)y} = o(K(x_0)).$$

Если $\delta_1 \le \frac{1}{2}$ и $|x| \le \delta_1 x_0$, то имеем

$$\frac{x_0(|x|+1) e^{4\widetilde{h}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-2\widetilde{h}(x)-2\widetilde{h}(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec \frac{x_0(x_0+1)^{2\alpha}(|x|+1)^{2\alpha+1}}{(|x+x_0|+1)^{4\alpha+1}} \prec \frac{(|x|+1)^{2\alpha+1}}{(|x+x_0|+1)^{2\alpha}},$$

поэтому в полосе Q_2 имеем при $\delta_1 \to 0$ равномерно по $x_0 > 1$

$$\int\limits_{Q_2} |k(x+iy,x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, dy\, d\widetilde{h}'(x) \prec \frac{K(x_0)}{x_0^{2\alpha}} \int\limits_{-\delta_1 x_0}^{\delta_1 x_0} (|x|+1)^{2\alpha-1}\, dx = o(K(x_0)).$$

При фиксированном $\delta_1 \le \frac{1}{2}$ для $-2x_0 \le x \le -\delta_1 x_0$ получим

$$\frac{x_0(|x|+1)e^{4\widetilde{h}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-2\widetilde{h}(x)-2\widetilde{h}(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec e^{-2\delta_1 x_0}(x_0+1)^{4\alpha+2},$$

поэтому в полосе Q_3 при $x_0 \to \infty$ имеем

$$\int\limits_{Q_3} |k(x+iy,x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, dy\, d\widetilde{h}'(x) \prec K(x_0) e^{-2\delta_1 x_0}(x_0+1)^{4\alpha+3} = o(K(x_0)).$$

При фиксированном $\delta_1 \le \frac{1}{2}$ для $x \le -2x_0$ имеем

$$\frac{x_0(|x|+1)e^{4\widetilde{h}\left(\frac{x+x_0}{2}\right)-2\widetilde{h}(x)-2\widetilde{h}(x_0)}}{|x+x_0|+1} \prec e^{-4x_0}(x_0+1)^{2\alpha+1}(|x|+1)^{-2\alpha},$$

поэтому в полосе Q_4 при $x_0 \to \infty$ верна оценка

$$\int\limits_{Q_4} |k(x+iy,x_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, dy\, d\widetilde{h}'(x) \prec$$

$$\prec K(x_0) e^{-4x_0}(x_0+1)^{2\alpha+1} \int\limits_{2x_0}^{+\infty} (|x|+1)^{-2\alpha-2}\, dx = o(K(x_0)).$$

Выбрав нужным образом δ_1 и δ_2, перейдем к оценкам интегралов по полуполосам $Q_\pm$. Для этого будем пользоваться следующим представлением для воспроизводящего ядра при $z = x+iy \ne w = x_0 + iy_0$

$$k(z,w) = \int\limits_{-1}^{1} e^{zt+\overline{w}t-2h(t)}\, dt = \int\limits_{-1}^{1} e^{2(xt-h(t))}\, d\frac{e^{(\overline{w}-\overline{z})t}}{\overline{w}-\overline{z}} =$$

$$= \frac{2}{\overline{w}-\overline{z}} \int\limits_{-1}^{1} e^{zt+\overline{w}t-2h(t)}(x-h'(t))\, dt.$$

По неравенству Коши–Буняковского отсюда получим

$$|k(z,w)|^2 \le \frac{4}{|w-z|^2} \int\limits_{-1}^{1} e^{2xt-2h(t)}|x-h'(t)|\,dt \cdot \int\limits_{-1}^{1} e^{2x_0t-2h(t)}|x_0-h'(t)|\,dt.$$

Функция $h'(t)$ меняет знак только в точке $t=0$, поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1} e^{2xt-2h(t)}|x-h'(t)|\,dt \le \int\limits_{-1}^{1} e^{2xt-2h(t)}|x|\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} e^{2xt}\,de^{-2h(t)} \le$$

$$\le |x|K(x) + 1 + xK(x) \le 3K(x)|x|,$$

когда $K(x) \ge 1$. Из последних двух оценок следует, что

$$|k(z,w)|^2 \le \frac{36|x||x_0|}{|w-z|^2} K(x)K(x_0).$$

Отсюда и из оценок в лемме 5.2.1 получим

$$\int\limits_{Q_+} |k(x+iy,x_0)|^2 e^{-\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}\,dy\,d\widetilde{h}(x) \le$$

$$\le 36K(x_0)x_0 \int\limits_{I}\int\limits_{Mx_0}^{\infty} \frac{x}{((x-x_0)^2+y^2)(x+1)^2}\,dy\,dx \prec \frac{1}{M}K(x_0).$$

Таким образом, выбирая число M достаточно большим мы можем считать интеграл по полуполосе Q_+ достаточно малым. Также оценивается интеграл по полуполосе Q_-.

Лемма 5.2.5 доказана.

Легко видеть, что точно так же доказывается следующая лемма.

Лемма 5.2.6. *Для* $\delta_1,\delta_2,M > 0$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ *через* $Q(x_0,y_0,\delta_1,\delta_2,M)$ *обозначим прямоугольник*

$$Q = \{x+iy:\ \delta_1 x_0 \le x \le \delta_2 x_0,\ |y-y_0| \le Mx_0\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *можно подобрать достаточно малое число* $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, *достаточно большие* $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, $M = M(\delta_1,\delta_2,\varepsilon) > 0$, *так что при*

$x_0 > X(\delta_1, \delta_2, \varepsilon)$ *будет выполняться соотношение*

$$\int\limits_{\mathbb{C}\setminus Q(x_0,y_0,\delta_1,\delta_2,M)} |k(x+iy, x_0+iy_0)|^2 e^{-2\widetilde{h}(x)} \rho_{\widetilde{h}}(x)\, d\widetilde{h}'(x)\, dy \le \varepsilon K(x_0, x_0).$$

Лемма 5.2.7. *Пусть система* $\{e^{\lambda_k t}\}$ *образует безусловный базис в пространстве* $L_2((-1;1), -\alpha\ln(1-|t|))$, $\alpha > 0$. *Тогда существуют числа* $\delta_1 = \delta_1(\alpha) \in (0,1)$ *и* $\delta_2 = \delta_2(\alpha) > 0$, $M = M(\alpha) > 0$, *такие что при достаточно больших* $x_0 > 0$ *для любого* y_0 *в каждом прямоугольнике* $Q = \{z = x+iy:\ \delta_1 x_0 \le x \le \delta_2 x_0,\ |y-y_0| \le Mx_0\}$ *и* $Q^- = \{z = x+iy:\ -\delta_2 x_0 \le x \le -\delta_1 x_0,\ |y-y_0| \le Mx_0\}$ *находится хотя бы один показатель* λ_k.

Доказательство леммы 5.2.7.

Система $k(z, \lambda_j)$ образует безусловный базис в пространстве $\widehat{L}_2((-1;1), -\alpha\ln(1-|t|))$, то есть для некоторого числа $P > 0$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|F(\lambda_k)|^2}{K(\lambda_k)} \le ||F||^2 \le P\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|F(\lambda_k)|^2}{K(\lambda_k)}. \tag{5.2.28}$$

В этом соотношении норму можно считать определенной по формуле (5.1) или (5.2.4). Возьмем достаточно малое положительное ε, степень малости определим позже. По этому числу ε на основе леммы 5.2.6 найдем числа $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2}), \delta_2$ и M, для которых выполняется утверждение леммы 5.2.6.

Предположим, что для некоторых $x_0 \in \mathbb{R}_+, y_0$ в прямоугольнике $Q :=$ $Q\left(x_0, y_0, \delta_1 + \frac{1}{4}, \delta_2 + \frac{1}{4}, M + \frac{1}{4}\right)$ нет показателей λ_j.

Величины $\tau(z)$ и $\rho_{\widetilde{h}}(z)$ сравнимы с $|\mathrm{Re} z| + 1$. Учитывая пункт 1 теоремы 4.1.2 можно утверждать, что найдется число $\sigma > 0$, такое что круги $B_j = B(\lambda_j, \sigma(|\mathrm{Re}\lambda_j|+1))$ попарно не пересекаются и лежат вне прямоугольника Q. По определению величины τ в каждом круге B_j существует гармоническая функция H_j, отстоящая от функции $\ln K$ не более чем на $\ln(5P)$. По свойствам субгармонических функций для любой целой функции F выполняется неравен-

ство
$$|F(\lambda_j)|^2 e^{-2H_j(\lambda_j)} \leq \frac{1}{\pi\sigma^2(|\mathrm{Re}\lambda_j|+1)^2} \int\limits_{B_j} |F(z)|^2 e^{-2H_j(z)}\, dm(z),$$
где $dm(z)$ — плоская мера Лебега. Поскольку в круге B_j $|\mathrm{Re}\lambda_j|+1 \asymp |\mathrm{Re}z|+1$, то
$$|F(\lambda_j)|^2 e^{-2H_j(\lambda_j)} \prec \int\limits_{B_j} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)(|x|+1)^2}\, dx\, dy \prec \int\limits_{B_j} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}\, d\widetilde{h}'(x)\, dy.$$
Просуммируем эти оценки по всем j:
$$\sum_j \frac{|F(\lambda_j)|^2}{K(\lambda_j)} \prec \int\limits_{\mathbb{C}\setminus Q} \frac{|F(x+iy)|^2}{K(x)}\, d\widetilde{h}'(x)\, dy.$$
Применим эту оценку к функции $F(z) = k(z, x_0+iy_0)$. Получим по лемме 5.2.6, что за счет выбора размеров прямоугольника Q можно считать выполненным неравенство
$$\sum_j \frac{|F(\lambda_j)|^2}{K(\lambda_j)} \leq \varepsilon k(x_0, x_0) = \varepsilon ||k(z, x_0+iy_0)||^2.$$
Если $\varepsilon < \frac{1}{P}$, то это противоречит (5.2.28).

Лемма 5.2.7 доказана.

Закончим доказательство теоремы 5.2.1.

Из леммы 5.2.7 следует, что для некоторых $\sigma \in (0;1)$ и $M \geq 1$ в каждом прямоугольнике $Q(z,\sigma,M)$ для достаточно больших $\mathrm{Re}\ z \geq 0$ находится по крайней мере один показатель λ_k (прямоугольник определен как в утверждении 5.2.1). Не уменьшая общности будем считать, что это верно для всех прямоугольников $Q(z,\sigma,M)$ с $\mathrm{Re}\ z > 0$. По соотношению (5.2.27) $A(\lambda_k) \asymp B(\lambda_k)$ и по утверждениям 5.2.1 и 5.2.2 $A(\lambda) \asymp B(\lambda)$, $\lambda \in Q(z,\sigma,M)$, для всех z, $\mathrm{Re}\ z > 0$, причем постоянные в асимптотических неравенствах зависят только от σ, M. Такими прямоугольниками можно покрыть всю правую полуплоскость. Таким образом,
$$A(\lambda) \asymp B(\lambda),\ \mathrm{Re}\ \lambda \geq 0.$$

По первой оценке в лемме 5.2.4 получим, что для любого $\varepsilon > 0$, $\lambda = x + iy$

$$|L(\lambda)|^2 \succ K(x)A(\lambda)(x+1)^2, \ \lambda \notin B_k(\varepsilon), \ x \geq 0.$$

По формуле (5.1) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_k)(\lambda-\lambda_k)}\right|^2 \frac{dy\, d\widetilde{h}'(x)}{K(x)} \asymp \frac{1}{K(\lambda_k)}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Из последнего соотношения и утверждения п.2 леммы 5.2.3 вытекает оценка ($\lambda = x + iy$)

$$\int\limits_{\mathbb{C}_+ \setminus \bigcup B_k(\varepsilon)} \frac{A(\lambda)(x+1)^2}{|\lambda-\lambda_k|^2}\, dy\, d\widetilde{h}'(x) \prec A(\lambda_k), \ k \in \mathbb{N}.$$

Возьмем показатель λ_k с достаточно большой реальной частью. Учитывая свойство функции $A(z)$, описанное в утверждении 5.2.1, получим ($\lambda_k = x_k + y_k$)

$$\int_0^{\frac{x_k}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x+iy)(x+1)^2}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\, dy\, d\widetilde{h}'(x) \prec A(\lambda_k), \ x_k > 0.$$

Отсюда, используя гармоническую функцию $H(\zeta)$, определенную соотношением (5.2.21), имеем

$$\int_0^{\frac{x_k}{2}} \left(\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(x+iy)}{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2}\, dy\right) d\widetilde{h}'(x) \prec A(\lambda_k), \ x_k > 0.$$

В скобках стоит интеграл Пуассона для правой полуплоскости от функции $H(x+z)$, поэтому

$$\int_0^{\frac{x_k}{2}} H(x+\lambda_k)\, d\widetilde{h}'(x) \prec A(\lambda_k), \ x_k > 0.$$

По соотношению (5.2.22)

$$\int_0^{\frac{x_k}{2}} (x+x_k)A(x+\lambda_k)\, d\widetilde{h}'(x) \prec A(\lambda_k), \ x_k > 0,$$

а по утверждению 5.2.1 $A(x+\lambda_k) \asymp A(\lambda_k)$ при $x \le \frac{x_k}{2}$, значит,

$$\int\limits_0^{\frac{x_k}{2}} (x+x_k)\, d\widetilde{h}'(x) \prec 1,\ x_k > 0.$$

Следовательно,

$$x_k \prec 1, x_k > 0.$$

Случай $x_k < 0$ рассматривается аналогично. Таким образом, $x_k \asymp 1, k \in \mathbb{N}$. Получили противоречие (см. [52]).

Теорема 5.2.1 доказана.

5.3. Слабовесовые пространства на отрезке

В данном параграфе мы построим примеры выпуклых функций h на интервале $(-1;1)$ сколь угодно медленного роста на концах интервала, таких что в пространстве $L^2((-1;1),h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Теорема 5.3.1. *Для любой непрерывной интегрируемой положительной функции W на интервале $(-1;1)$, стремящейся к 0 при $|t| \to 1$ существует выпуклая функция h, такая что $e^{h(t)} \le \frac{1}{W(t)}$ при $|t| < 1$ и в пространстве $L^2((-1;1),h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.*

Доказательство теоремы 5.3.1.

Начнем с конструкции сопряженной функции $\widetilde{h}$.

Возьмем произвольную положительную непрерывную монотонно возрастающую неограниченную функцию $\alpha(t)$ на $[1;\infty)$, удовлетворяющую условию: для некоторой постоянной $A \in (1;2)$

$$\alpha(2t) \le A\alpha(t),\ t > 1. \tag{5.3.1}$$

Эта функция будет удовлетворять условию: для $y \ge x$ и $\delta = \frac{\ln A}{\ln 2}$

$$\alpha(y) \le A \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\delta} \alpha(x),\ x > 1. \tag{5.3.2}$$

В самом деле, пусть $n = \left[\log_2 \frac{y}{x}\right] + 1$ (здесь квадратные скобки обозначают целую часть), тогда из (5.3.1) и монотонности α следует неравенство

$$\alpha(y) \le \alpha(2^n x) \le A^n \alpha(x) \le A \cdot A^{\log_2 \frac{y}{x}} \alpha(x) = A \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^{\delta} \alpha(x).$$

Полагая $x = 1$ и учитывая, что $\delta < 1$, получим сходимость несобственного интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\alpha(t)\,dt}{t^2} < \infty.$$

Таким образом, корректно определяется функция

$$v(x) = \int_1^x \left(\int_t^{\infty} \frac{\alpha(s)\,ds}{s^2} \right) dt,\ x \ge 1,$$

которая будет вогнутой на $[1;\infty)$. В самом деле,

$$v''(x) = -\frac{\alpha(x)}{x^2} < 0.$$

Определим последовательность неотрицательных чисел T_n:

$$T_1 = 1,\ T_{n+1} = \max(\alpha^{(-1)}(n^2), 2T_n),\ n \in \mathbb{N}, \tag{5.3.3}$$

где $\alpha^{(-1)}$ — обратная функция к α. Последовательность T_n возрастает до бесконечности. Пусть для $n \in \mathbb{N}$,

$$\chi_n(t) = \begin{cases} 0, & t < T_n, \\ 1, & T_n \le t \le 2T_n, \\ 0, & 2T_n < t. \end{cases}$$

— характеристическая функция отрезка $I_n = [T_n; 2T_n]$ и

$$\beta_n(t) = \sqrt{\alpha(t)}\chi_n(t), \quad \beta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t),\ t > 1.$$

Положим

$$u(x) = \int_1^x \left(\int_t^{\infty} \frac{\beta(s)\,ds}{s^2} \right) dt,\ x \ge 1.$$

Лемма 5.3.1. *Функция $u(x)$ — вогнутая, неотрицательная, линейная вне отрезков I_n и монотонно возрастающая до бесконечности. Для некоторой константы $c > 0$ имеет место оценка*

$$u(x) \le c\alpha(x),\ x \ge 1.$$

Производная $u'(x)$ убывает до нуля.

Доказательство леммы 5.3.1.

Функция α монотонно возрастает до бесконечности, значит, для любого $M > 0$ с некоторого номера m на отрезках $I_k,\ k \ge m$, выполняется неравенство $\beta(t) \ge M$. Тогда для $t \in [T_k; \frac{3}{2}T_k]$ имеем

$$u'(t) = \int\limits_t^\infty \frac{\beta(s)\,ds}{s^2} \ge M \int\limits_{\frac{3}{2}T_k}^{2T_k} \frac{ds}{s^2} = \frac{M}{6T_k}.$$

Следовательно,

$$u\left(\frac{3}{2}T_m\right) = u(T_m) + \int\limits_{T_m}^{\frac{3}{2}T_m} u'(s)\,ds \ge \frac{M}{12}.$$

Поскольку функция u по определению возрастающая, то она возрастает до бесконечности.

Оценим производную u' сверху. Пусть

$$B_k = \int\limits_{T_k}^{T_{k+1}} \frac{\beta(t)\,dt}{t^2} = \int\limits_{T_k}^{2T_k} \frac{\sqrt{\alpha(t)}\,dt}{t^2},\ k \in \mathbb{N}.$$

Тогда по условию (5.3.1)

$$B_k \le \frac{\sqrt{\alpha(2T_k)}}{2T_k} \le \frac{\sqrt{A\alpha(T_k)}}{2T_k}. \tag{5.3.4}$$

Пусть $x \in [2T_n, T_{n+1}]$. Тогда

$$u'(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\beta(t)\,dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^\infty B_k \le \sqrt{A} \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\sqrt{\alpha(T_k)}}{2T_k}.$$

Воспользуемся соотношением (5.3.2), полагая $y = T_k,\ k \geq n+1$, и $x = T_{n+1}$:

$$\alpha(T_k) \leq A \cdot \left(\frac{T_k}{T_{n+1}}\right)^{\delta} \cdot \alpha(T_{n+1}).$$

Продолжим оценку u':

$$u'(x) \leq \frac{A\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{2T_{n+1}^{\frac{\delta}{2}}} \sum_{k=n+1}^{\infty} T_k^{\frac{\delta}{2}-1}.$$

По определению последовательности T_k верна оценка

$$T_k \geq 2^{k-(n+1)} T_{n+1},$$

значит, для $\varepsilon = 1 - \frac{\delta}{2} > 0$ и $x \in [2T_n; T_{n+1}]$ имеем

$$u'(x) \leq \frac{A\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{2T_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (2^{\varepsilon})^{n+1-k} = \frac{A\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{2T_{n+1}} \cdot \frac{2^{\varepsilon}}{2^{\varepsilon}-1} := A_1 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}}.$$

Если $x \in [T_n; 2T_n]$, то по последнему неравенству и по (5.3.4)

$$u'(x) = \int_x^{2T_n} \frac{\beta(t)\,dt}{t^2} + u'(2T_n) \leq B_n + u'(2T_n) \leq \frac{\sqrt{A}}{2}\frac{\sqrt{\alpha(T_n)}}{T_n} + A_1 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}}.$$

По определению (5.3.3) последовательности T_n

$$T_{n+1} = \alpha^{(-1)}(n^2)$$

или

$$T_{n+1} = 2T_n.$$

В любом случае

$$n \leq \sqrt{\alpha(T_{n+1})}. \tag{5.3.5}$$

В первом случае $\sqrt{\alpha(T_{n+1})} = n$, поэтому для $n \geq 2$

$$\sqrt{\alpha(T_{n+1})} \leq 2(n-1) \leq 2\sqrt{\alpha(T_n)}.$$

Во втором случае воспользуемся свойством (5.3.1)

$$\sqrt{\alpha(T_{n+1})} = \sqrt{\alpha(2T_n)} \leq \sqrt{A}\sqrt{\alpha(T_n)}.$$

Следовательно, для всех $n \geq 2$

$$\sqrt{\alpha(T_{n+1})} \leq 2\sqrt{\alpha(T_n)}. \tag{5.3.6}$$

Таким образом, для $x \in [2T_n; 2T_{n+1}]$ при некоторой постоянной A_0 выполняется оценка

$$u'(x) \leq A_0 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Оценим $u(x)$ сверху. Пусть $x \in [2T_n; 2T_{n+1}]$, тогда

$$u(x) = \int_1^x u'(t)\,dt = u(2) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{2T_k}^{2T_{k+1}} u'(t)\,dt + \int_{2T_n}^{x} u'(t)\,dt \leq$$

$$\leq u(2) + 2A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{\alpha(T_{k+1})}}{T_{k+1}}(T_{k+1} - T_k) + A_0 \frac{\sqrt{\alpha(T_{n+1})}}{T_{n+1}}(x - 2T_n) \leq$$

$$\leq u(2) + 2A_0 \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\alpha(T_{k+1})} + 2A_0\sqrt{\alpha(T_{n+1})} \leq$$

$$\leq u(2) + 2A_0(n-1)\sqrt{\alpha(T_n)} + 2A_0\sqrt{\alpha(T_{n+1})},\ n \in \mathbb{N}.$$

По неравенствам (5.3.5) и (5.3.6) отсюда следует, что

$$u(x) \leq c\alpha(x)$$

для некоторой константы $c > 0$, $x \geq 1$.

Лемма 5.3.1 доказана.

Нормируя при необходимости функцию α будем считать, что

$$u'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k < 1.$$

Тогда функция

$$\widetilde{h}(x) = |x| - u(|x|),\ |x| \geq 1, \quad \widetilde{h}(x) = 1,\ |x| \leq 1,$$

будет выпуклой функцией на $\mathbb{R}$, убывающей на $\mathbb{R}_-$ и возрастающей на положительной полуоси. Положим

$$h(t) = sup_{x\in\mathbb{R}}(xt - \widetilde{h}(x)),\ |t| < 1,$$

и докажем, что при подходящем выборе α функция h удовлетворяет условиям теоремы 5.3.1.

Проведем оценку характеристики τ.

Лемма 5.3.2. *Если функция α удовлетворяет условию (5.3.1) и функции u, $\widetilde{h}$ определены по этой функции α, то для $q < \frac{1}{4}$ и для любого $p > 0$ в интервалах $J_n = [(1+q)T_n; (2-q)T_n]$ верна оценка*

$$\tau(\widetilde{h}, x, p) \asymp x(\alpha(x))^{-\frac{1}{4}} = o(x), \;\; x \in J_n, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство леммы 5.3.2.

Через $\rho(\widetilde{h}, x, p)$ обозначим наибольшее число $r > 0$, такое что

$$\int\limits_{-r}^{r} |\widetilde{h}'(x+t) - \widetilde{h}'(x)|\, dt \le p.$$

Известно, что выполняются асимптотические оценки $\tau(\widetilde{h}, x, p) \asymp \rho(\widetilde{h}, x, p)$, $x \in \mathbb{R}$ (см. [12]), поэтому в доказательстве будем рассматривать характеристику ρ. Если $x \in J_n$ и $\rho < qT_n$, то

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} |\widetilde{h}'(x+t) - \widetilde{h}'(x)|\, dt \ge \min_{T_n \le y \le 2T_n} |u''(y)|\rho^2.$$

Значит,

$$\rho(\widetilde{h}, x, p) \le \sqrt{p(\min_{T_n \le y \le 2T_n} |u''(y)|)^{-1}}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} |\widetilde{h}'(x+t) - \widetilde{h}'(x)|\, dt \le \max_{T_n \le y \le 2T_n} |u''(y)|\rho^2.$$

Значит,

$$\rho(\widetilde{h}, x, p) \ge \sqrt{p(\max_{T_n \le y \le 2T_n} |u''(y)|)^{-1}}.$$

По свойству (5.3.1) функции α отсюда получаем утверждение леммы 5.3.2.

Лемма 5.3.2 доказана.

Лемма 5.3.3. *Если функция α удовлетворяет условию (5.3.1) и функции u, $\widetilde{h}$ определены по этой функции α, то для $q < \frac{1}{4}$ и для любого $p > 0$ в интервалах $J_n = [(1+q)T_n; (2-q)T_n]$ верна оценка*

$$\tau(\ln K, x, p) \asymp x(\alpha(x))^{-\frac{1}{4}} = o(x),\ x \in J_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тем самым, по теореме 5.1.2 в пространстве $L^2((-1;1), h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Доказательство леммы 5.3.3.

В работе [12] доказано (теорема 2(a)) утверждение

$$K(x) \asymp \frac{1}{\rho(\widetilde{h}, x, p)} e^{2\widetilde{h}(x)},$$

которое теперь мы можем записать в виде

$$K(x) \asymp \frac{\sqrt[4]{\alpha(x)}}{x} e^{2\widetilde{h}(x)}.$$

Положим

$$a(x) = \frac{\sqrt[4]{\alpha(x)}}{x},\ x \geq 1.$$

Тогда для $x \in J_n$ по свойству (5.3.1) для некоторой константы $C > 0$

$$|\ln a(x) - \ln T_n| \leq C.$$

Положим $u_1(x) = \widetilde{h}(x)$, $u_2(x) = \ln K(x) - \ln a(T_n)$. Тогда в интервале J_n

$$|u_1(x) - u_2(x)| = |\widetilde{h}(x) - \ln K(x) + \ln a(T_n)| \leq C.$$

По лемме 4 в работе [12] отсюда следует, что

$$\frac{p}{(p+C)} \rho(u_1, y, p) \leq \rho(u_2, y, p) \leq \frac{(p+C)}{p} \rho(u_1, y, p).$$

Значит, по лемме 5.3.2

$$\rho(\ln K, x, p) \asymp \rho(\widetilde{h}, x, p) \asymp x(\alpha(x))^{-\frac{1}{4}} = o(x),\ x \in J_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 5.3.3 доказана.

Завершим доказательство теоремы 5.3.1.

Переходя при необходимости к функции $W(t) := \min(W(t), W(-t))$ можем считать, что весовая функция W положительная, четная и $W(t) \longrightarrow 0$, $|t| \to 1$. Далее переходя при необходимости к функции

$$W(t) := \min_{|\tau|\le t} W(\tau),$$

можем считать функцию монотонной на интервалах $(-1;0), (0;1)$. Наконец, нормируя постоянным множителем, будем считать, что $W(t) \le 1$. Таким образом, функция

$$a(t) = \ln \frac{1}{W(t)}, \ |t| < 1,$$

положительная, четная и монотонная на $(0;1)$. Положим

$$\widetilde{a}(x) = \sup_{|t|<1}(xt - a(t)), \ x \in \mathbb{R}.$$

Функция $\widetilde{a}(x)$ выпуклая на $\mathbb{R}$, четная и обладает легко проверяемыми свойствами

$$0 < \ln a(0) \le \widetilde{a}(x) < |x|, \qquad \lim_{|x|\longrightarrow\infty} \frac{\widetilde{a}(x)}{|x|} = 1.$$

При этом функция $b(x) = x - \widetilde{a}(x)$ вогнутая и неограничена в $\mathbb{R}_+$. В самом деле, если t_x — точка достижения супремума в определении $\widetilde{a}$, то

$$b(x) = a(t_x) + (1 - t_x)x,$$

и если $|t_x| \le d < 1$ при $x \in \mathbb{R}_+$, то $b(x) \ge (1-d)x \longrightarrow \infty$, а если $\overline{\lim}_{x\longrightarrow\infty} t_x = 1$, то $b(x) \ge a(t_x) \longrightarrow \infty$. Из вогнутости следует, что $b'(x)$ убывающая функция, а из неограниченности получим, что $b'(x)$ неотрицательная функция. Значит, функция $b(x)$ возрастает до бесконечности. Положим

$$h_0(t) = \sup_x (xt - \widetilde{a}(x)), \ |t| < 1.$$

Тогда функция h выпукла на $(-1;1)$ и

$$e^{h_0(t)} \le a(t) = \frac{1}{W(t)}, \ |t| < 1.$$

Нам остается найти выпуклую функцию $\widetilde{h}(x) \ge \widetilde{a}(x)$ на $\mathbb{R}$, имеющую конструкцию, описанную выше. Тогда функция

$$h(t) = \sup_x (xt - \widetilde{h}(x)) \le \sup_x (xt - \widetilde{a}(x)) = h_0(t) \le a(t) \le \frac{1}{W(t)}$$

и по лемме 5.3.3 в пространстве $L^2((-1;1),h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Определим функцию $\alpha(x)$ рекуррентными соотношениями на отрезках $[2^n;2^{n+1}]$. Возьмем число $A \in (1;2)$. Пусть $l_0(x)$ линейная функция, такая что $l_0(1) = b(1),\ l_0(2) = \min(b(2), \sqrt{A}b(1))$ и для $x \in [1;2]$ положим $\alpha(x) = l_0(x)$. В силу вогнутости $b(x)$ имеем $\alpha(x) \ge b(x)$, $x \in [1;2]$. Если на отрезках $[2^k;2^{k+1}]$ при $k \le n-1$ функцию α уже определили, то через l_n обозначим линейную функцию, такую что $l_n(2^n) = \alpha(2^n)$, $l_n(2^{n+1}) = \min(b(2^{n+1}), \sqrt{A}\alpha(2^n)$ и положим для $x \in [2^n;2^{n+1}]$ $\alpha(x) = l_n(x)$. Функция α, определенная таким образом, будет непрерывной и возрастающей до бесконечности и удовлетворять неравенству $\alpha(x) \le b(x)$. В самом деле, если для некоторой последовательности n_k окажется $\alpha(2^{n_k}) = b(2^{n_k})$, то

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \alpha(x) = \lim_{k \longrightarrow \infty} b(2^{n_k}) = \infty,$$

а если начиная с номера m $\alpha(2^n) = \sqrt{A}\alpha(2^{n-1})$, то $\alpha(2^n) = A^{\frac{n-m}{2}}\alpha(2^m) \longrightarrow \infty$ при $n \longrightarrow \infty$.

Функция α удовлетворяет условию (5.3.1). Возьмем $x \in [2^n;2^{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\alpha(2x) \le \alpha(2^{n+2}) \le \sqrt{A}\alpha(2n+1) \le A\alpha(2n) \le A\alpha(x).$$

По функции α построим как описано выше вогнутую возрастающую функцию u на $[1;\infty)$ и выпуклую функцию $\widetilde{h}$ на $\mathbb{R}$. По лемме 5.3.1 мы можем нормировать функцию $u(x)$ постоянным множителем, так что

$$u(x) \le \alpha(x),\ x \ge 1.$$

По построению функция $\widetilde{h}(x) = x - u(x) \ge x - b(x) = \widetilde{a}(x)$.

Теорема 5.3.1 доказана.

Заключение

В диссертации получены следующие основные результаты.

1) Доказана теорема о существовании целой функции, логарифмически приближающей достаточно гладкую субгармоническую функцию и имеющей разделенное множество нулей.

2) Доказана теорема о существовании целой функции, логарифмически приближающей субгармоническую функцию, удовлетворяющей условию Липшица.

3) По нормированному равномерно весовому пространству $H(D,\varphi)$ определяются специальный индуктивный предел $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ нормированных пространств и специальный проективный предел $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ нормированных пространств. Доказано, что $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ — это наименьшее локально выпуклое пространство, содержащее $H(D,\varphi)$ и инвариантное относительно дифференцирования, а $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ — это наибольшее локально выпуклое пространство, содержащееся в $H(D,\varphi)$ и инвариантное относительно дифференцирования. В пространствах $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ и $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ построены представляющие системы экспонент и дана оценка избыточности этих систем. Аналогичные результаты получены для пространства $H(D,\mathcal{M})$.

4) Для пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$ построены системы экспонент, сходящиеся в ослабленной норме.

5) Получены условия, при которых отсутствуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер в функциональных гильбертовых пространствах целых функций, устойчивых относительно деления.

6) Доказано существование сколь угодно медленно растущих функций $\varphi(r)$, для которых $\ln r = o(\varphi(r))$, $r \longrightarrow \infty$, и в пространстве типа Фока $\mathcal{F}_\varphi$, $\varphi(\lambda) = \varphi(|\lambda|)$, нет безусловных базисов из воспроизводящих ядер.

7) Построены безусловные базисы из воспроизводящих ядер в пространствах типа Фока $\mathcal{F}_\varphi$ в случае нерадиальной весовой функции φ, сравнимой с

$\ln^2(|z|+1)$. Метод построения позволяет получать безусловные базисы из воспроизводящих ядер в пространствах с весами, растущими медленнее $\ln^2(|z|+1)$.

8) Доказано, что в пространстве $L^2((-1;1),h)$ с весовой функцией $h(t) = -\alpha\ln(1-|t|),\ t\in(-1;1),\ \alpha>0$, безусловных базисов из экспонент не существует. Построены примеры выпуклых функций h на интервале $(-1;1)$ сколь угодно медленного роста на концах интервала, таких что в пространстве $L^2((-1;1),h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и дополняют исследования задач о представляющих системах экспонент в локально выпуклых пространствах и их избыточности, а также о безусловных базисах из экспонент и воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах. Интерес к данным представлениям связан в первую очередь с их потребностью в таких областях как (не)квазианалитичность, спектральный синтез, теория уравнений свертки, исследование систем собственных функций дифференциальных операторов, интерполяции и др.

Литература

1. Абанин А. В., Слабо достаточные множества и абсолютно представляющие системы. Дисс. … докт. физ.-матем. наук. (Ростов-на-Дону, 1995).

2. Абанин А. В., "Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы" , Математические заметки, **57** (1995), №4, 483–492.

3. Абанин А. В., "Характеризация минмимальных систем показателей представляющих систем обобщенных экспонент" , Изв. вузов. Матем., 1991, №2, 3–12.

4. Абанин А. В., Налбандян Ю. С., "Абсолютно представляющие системы экспонент минимального типа в пространствах функций с заданным ростом вблизи границы" , Изв. вузов. Матем., (1993), №10, 73–76.

5. Abanin A. V., Le Hai Khoi, Nalbandyan Yu. S., "Minimal absolutely representing systems of exponentials for $A^{-\infty}(\Omega)$" , J.Approx.Theory, **163** (2011), №10, 1534–1545.

6. Абанин А. В., Варзиев В. А., "Достаточные множества в весовых пространствах Фреше целых функций" , Сиб. матем. журн., **54** (2013), №4, 725–741.

7. Абузярова Н. Ф., Юлмухаметов Р. С., "Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций" , Сиб. матем. журнал, **42** (2001), №1, 3–17.

8. Авдонин С. А., "К вопросу о базисах Рисса из показательных функций в L^2" , Зап. научн. сем. ЛОМИ, **39** (1974), 176—177.

9. Азарин В. С., "О лучах вполне регулярного роста целой функции" , Математический сборник, **79(121)** (1969), №4(8), 464–476.

10. Бари Н. К., "О базисах в гильбертовом пространстве" , Доклады Академии наук, **54** (1946), 383–386.

11. Башмаков Р. А., Системы экспонент в весовых гильбертовых пространствах на $\mathbb{R}$. Диссертация ... кандидата физико-математических наук. (Уфа, 2006).

12. Башмаков Р. А., Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа" , Уфимский математический журнал, **2** (2010), №1, 3–16.

13. Башмаков Р. А., Махота А. А., Трунов К. В., "Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент" , Уфимский математический журнал, **7** (2015), №2, 19–34.

14. Башмаков Р. А., Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "Представляющие системы экспонент в весовых подпространствах $H(D)$" , Комплексный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **153**, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 13–28.

15. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А., Геометрические неравенства. — Л.: "Наука 1980. 288 с.

16. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц. — М.: Изд.-во "Наука". Гл. редакция физ.-мат. лит., 1988. 552с.

17. Жозе Себаштьян-и-Силва, "О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях" , Математика, **1** (1957), №1, 60–77.

18. Иванов С. А., Авдонин С. А., "Теорема Левина–Головина для пространств Соболева" , Матем. заметки, **68** (2000), №2, 163–172.

19. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана" , Изв. РАН. Сер. матем., **68** (2004), №1, 5–42.

20. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "Об отсутствии безусловных базисов из экспонент в пространствах Бергмана на областях, не являющихся многоугольниками", Изв. РАН. Сер. матем., **71** (2007), №6, 69–90.

21. Исаев К. П., "Базисы Рисса из экспонент в пространствах Бергмана на выпуклых многоугольниках", Уфимский математический журнал, **2** (2010), №1, 71–86.

22. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах", Уфимский математический журнал, **3** (2011), №1, 3–15.

23. Исаев К. П., Трунов К. В., "Распределение показателей безусловного базиса из экспонент в пространствах со степенным весом", Уфимский математический журнал, **4** (2012), №1, 63–70.

24. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций", Уфимский математический журнал, **5** (2013), №3, 67–77.

25. Исаев К. П., Луценко А. В., Юлмухаметов Р. С., "О безусловных базисах из экспонент в слабовесовых пространствах на отрезке", Уфимский математический журнал, **8** (2016), №4, 90–99.

26. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., Юнусов А. А., "О безусловных базисах из экспонент в весовых пространствах на интервале вещественной оси", Алгебра и анализ, **28** (2016), №5, 195–219.

27. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "О безусловных базисах из воспроизводящих ядер в пространствах типа Фока", Функц. анализ и его прил., **51** (2017), №4, 50–61.

28. Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С., "Представление рядами экспонент функций в локально выпуклых подпространствах $A^\infty(D)$", Уфимский математический журнал, **9** (2017), №3, 50–62.

29. Исаев К. П., Луценко А. В., Юлмухаметов Р. С., "Безусловные базисы в слабовесовых пространствах целых функций", Алгебра и анализ, **30** (2018), №2, 145–162.

30. Исаев К. П., "Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $A^\infty(D)$", Изв. вузов. Матем., 2019, №1, 29–41.

31. Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С., "Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $H(D)$, Изв. РАН. Сер. матем., **83** (2019), №2, 40–60.

32. Исаев К. П., "Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций", Комплексный анализ. Целые функции и их применения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **161**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 3–64.

33. Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С., Представление рядами экспонент функций в нормированных подпространствах $A^\infty(D)$", Комплексный анализ. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **162**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 42–56.

34. Кадец М. И., "Точное значение постоянной Палея–Винера", Докл. АН СССР, **155** (1964), №6, 1253–1254.

35. Кацнельсон В. Э., “О базисах из показательных функций в L_2", Функц. анализ и его прил., **5** (1971), №1, 37–47.

36. Коробейник Ю. Ф., "Представляющие системы", УМН, **36** (1981), №1(217), 73–126.

37. Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала. — М.: Изд.-во "Наука". Гл. редакция физ.-мат. лит., 1966. 516с.

38. Левин Б. Я., "О базисах показательных функций в L_2" , Записки Харьковского математического общества, **27** (1961), №4, 39–48.

39. Левин Б. Я., Любарский Ю. И., "Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент" , Изв. АН СССР. Сер. матем., **39** (1975), №3, 657–702.

40. Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент. — М.: Изд.-во "Наука". Гл. редакция физ.-мат. лит. , 1976. 536с.

41. Леонтьев А. Ф., "Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы" , Изв. АН СССР. Сер. матем., **44** (1980), №6, 1308–1328.

42. Луценко В. И., Безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова. — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, 1992.

43. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С., "Обобщение теоремы Винера–Пэли на функционалы в пространствах Смирнова" , Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения, Сб. ст. Посвящается 100-летию со дня рождения Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, **200** (1993), 271–280.

44. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С., "Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства" , Математические заметки, **48** (1990), №5, 80–87.

45. Луценко В. И., "Теорема Пэли–Винера на неограниченном интервале" , Исследования по теории приближений. Уфа. 1989. Стр. 79–85.

46. Любарский Ю. И., "Ряды экспонент в пространстве Смирнова и интерпо-

ляция целыми функциями специальных классов" , Изв. АН СССР. Сер. матем., **52** (1988), №3, 559–580.

47. Любарский Ю. И., "Теорема Винера—Пэли для выпуклых множеств" , Изв. АН АрмССР. Математика, **23** (1988), №2, 162–172.

48. Напалков В. В., "О сравнении топологии в некоторых пространствах целых функций" , Доклады АН СССР, **264** (1982), №4, 827–830.

49. Напалков В. В., "Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы" , Изв. АН СССР. Сер. матем., **51** (1987), №2, 287–305.

50. Никольский Н. К., Павлов Б. С., Хрущев С. В., "Безусловные базисы из экспонент и воспроизводящих ядер. I" , Препринт ЛОМИ, 8–80.

51. Павлов Б. С., “Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта" , Докл. АН СССР, **247** (1979), №1, 37–40.

52. Путинцева А. А., "Базисы Рисса в весовых пространствах" , Уфимский математический журнал, **3** (2011), №1, 47–52.

53. Ронкин Л. И., Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Изд.-во "Наука". Гл. редакция физ.-мат. лит., 1971.

54. Хейман У., Кеннеди П., Субгармонические функции. 1 том. — М.: "Мир". 1980.

55. Хермандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч.1. Теория распределений и анализ Фурье. — М.: "Мир". 1986. 462с.

56. Хермандер Л., Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Ч.2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: "Мир". 1986. 455с.

57. Юлмухаметов Р. С., "Пространство аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы", Математические заметки, **32** (1982), №1, 41–57.

58. Юлмухаметов Р. С., "Приближение субгармонических функций", Математический сборник, **124(166)** (1984), №3(7), 393–415.

59. Юлмухаметов Р. С., "Аппроксимация субгармонических функций", Analysis Mathematica, **11** (1985), №3, 257–282.

60. Юлмухаметов Р. С., "Квазианалитические классы функций в выпуклых областях", Математический сборник, **130(172)** (1986), №4(8), 500–519.

61. Юлмухаметов Р. С., "Асимптотическая аппроксимация субгармонических функций", Сиб. матем. журнал, **26** (1985), №4, 159–175.

62. Aronszajn N., "Theory of reproducing kernels", Transactions of the American Mathematical Society, **68** (1950), №3, 337–404.

63. Baranov A., Dumont A., Hartmann A., Kellay K., "Sampling, interpolation and Riesz Bases in small Fock spaces", J. Math. Pures Appl. **103** (2015), №6, 1358–1389.

64. Baranov A., Belov Yu., Borichev A., "Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces", Studia Mathematica, **236** (2017), №2, 127–142.

65. Borichev A., Dhuez R., and Kellay K., "Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces", J. Funct. Anal., **242** (2007), 563–606.

66. Borichev A., Lyubarskii Yu., "Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces", Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, **9** (2010), 449–461.

67. Carleman T., Les fonctions quasi analytiques. — Paris, 1926.

68. Ehrenpreis L., Fourier analysis several complex variables. — New York: Willey – Interscience publishers, 1970.

69. Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S., "Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels" , Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics, **864** (1981), 214–335.

70. Isaev K. P., "On unconditional exponential bases in weighted spaces on interval of real axis" , Lobachevskii Journal of Mathematics, **38** (2017), №1, 48–61.

71. Isaev K. P., "On entire functions with given asymptotic behavior" , Пробл. анал. Issues Anal., **7(25)** (2018), спецвыпуск, 12–30.

72. Isaev K. P., Yulmukhametov R. S., "On Hilbert spaces of entire functions with unconditional bases of reproducing kernels" , Lobachevskii Journal of Mathematics, **40** (2019), №9, 1283–1294.

73. Isaev K. P., Trounov K. V., Yulmukhametov R. S., "On representation of functions from normed subspaces of $H(D)$ by series of exponentials" , Analysis and Mathematical Physics, **9** (2019), №3, 1043–1067.

74. Kellay K., Omari Y., "Riesz bases of reproducing kernels in small Fock spaces" , J. Fourier Anal. Appl., **26** (2020), №17.

75. Mandelbrojt S., Séries adhérentes, régularisation des suites, applications. — Gauthier-Villars, Paris, 1952.

76. Ostrowski A., "Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischerEntwickelungen" , Acta Math., **53** (1930), №1, 181–266.

77. Russell D. L., "On exponential bases for the Sobolev spaces over an interval" , J. Math.Anal. Appl., **87** (1982), №2, 528–550.

78. Seip K., "Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space" , Bull. Amer. Math. Soc., **26** (1992), №2, 322–328.

79. Seip K. and Wallsten R., "Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. II", J. Reine Angew. Math., **429** (1992), 107–113.