Отзыв официального оппонента
на диссертацию Железняка Александра Владимировича
"Степенные ряды с обобщенными условиями Харди–Калуца",
представленную на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 —
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа А. В. Железняка посвящена различным обобщениям теоремы Калуца о достаточном условии неположительности коэффициентов степенного ряда, обратного в смысле операции умножения к ряду с положительными коэффициентами. Также изучаются свойства таких рядов как класса.

Актуальность рассматриваемой тематики обусловлена, например, следующим фактом. Пусть для строго положительных чисел w_n выполняются следующие соотношения, где под суммами понимаются формальные степенные ряды:

$$\Big(\sum_{n\geq 0} w_n^{-1}x^n\Big)^{-1} = w_0 - \sum_{n>0} b_n x^n, \quad b_n \geq 0.$$

После ряда исследований (Дж. А. Болл, Т. Трент, В. П. Винников, С. М. Шиморин, С. Мак-Каллах, П. Квиггин, 1993–2002) стало ясно, что для пространства $l^2(w_n)$ аналитических в круге функций $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ с нормой

$$\|f\|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geq 0} w_n |f_n|^2 < \infty$$

вышеприведенное условие на веса w_n является необходимым и достаточным для того, чтобы воспроизводящее ядро в нем обладало свойством Неванлинны–Пика. Это свойство заключается в том, что матричное условие, которое необходимо для разрешимости обобщенной интерполяционной задачи Неванлинны–Пика для мультипликаторов над $l^2(w_n)$, является также и достаточным для такой разрешимости.

Прежде чем говорить о содержании диссертационной работы, опишем классический результат о достаточных условиях, гарантирующих выполнение упомянутого условия на веса w_n. В 1928 году Калуца доказал, что если у формального степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

коэффициенты положительны и удовлетворяют условию логарифмической выпуклости $a_{n+1}a_{n-1} \geq a_n^2$, то у обратного ряда

$$g(x) = 1/f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

все коэффициенты кроме b_0 неположительны. Ометим, что на этот результат опирались Сегё и Харди в своих исследованиях по рядам, что еще раз демонстрирует актуальность тематики диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. В главах I и II доказаны различные обобщения и усиления теоремы Калуца. В главе III доказано что произведение Адамара формальных степенных рядов с положительными коэффициентами сохраняет свойство неположительности коэффициентов обратного ряда. Рассмотрим эти результаты более подробно.

В главе I, во-первых, доказаны два нетривиальных обобщения теоремы Калуца на формальные степенные ряды от нескольких переменных. Во-вторых, доказано усиление теоремы Калуца для рядов одной переменной: получено условие, обобщающее условие логарифмической выпуклости и гарантирующее неположительность коэффициентов обратного ряда. Отметим, что, по всей видимости, это условие, названное условием Харди-m, было очень непросто угадать, но при этом оно кажется математически очень красивым. Также приведено множество примеров конкретных рядов и в том числе — пример ряда, у которого коэффициенты не удовлетворяют условию логарифмической выпуклости (или что то же самос — условию Харди-1), но при этом удовлетворяют условию Харди-m для $m = 2$.

Результат, представленный в главе II, касается ситуации, когда условие логарифмической выпуклости выполняется лишь начиная с определенного места, т.е. при $n \geq K$, $K \in \mathbb{N}$. Автором диссертации доказано, что в этом случае можно подобрать коэффициент a_0 так, чтобы все коэффициенты b_n кроме b_0 были строго отрицательны. Аналогичное усиление получено для первого результата из главы I, касающегося рядов от нескольких переменных.

В главе III доказано, что ряды с положительными коэффициентами, коэффициенты обратных рядов к которым неположительны, образуют класс, замкнутый относительно произведения Адамара, т.е. относительно поэлементного произведения коэффициентов двух степенных рядов. Что касается актуальности этого результата, то из него, например, сразу следует, что если воспроизводящие ядра в пространствах $l^2(w_n)$ и $l^2(v_n)$ обладают свойством Неванлинны–Пика, то это верно и для пространства $l^2(w_n v_n)$. Доказано аналогичное утверждение для рядов от нескольких переменных.

Полученные результаты опубликованы в 4-х научных статьях из списка ВАК. Эти результаты несомненно являются новыми, значимыми и представляют большой интерес для специалистов в области математического анализа. Диссертация выполнена на высоком научном уровне. Автореферат правильно отражает результаты диссертации.

Незначительные недочеты и опечатки не влияют на высокую оценку диссертации.

1. Стр. 10, строка 11: “удовлетворяющегот”.

2. Стр. 10, посл. строка: “теорема 1.3 не является достаточной” следует заменить на “условие теоремы 1.3 не является необходимым”.

3. Стр. 30, строка 3: лишняя запятая.

4. Стр. 30, строка 7: следует добавить перенос строки перед “Доказательство...”.

5. Стр. 48, строка 6: “что” следует заменить на “такое, что”.

На основании изложенного считаю, что диссертация “Степенные ряды с обобщенными условиями Харди–Калуца” удовлетворяет всем требованиям Положения ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Железняк Александр Владимирович, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

8 апреля 2022 г.

Официальный оппонент:
кандидат физико-математических наук,
научный сотрудник
ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
191023, наб. р. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург, Россия,
тел. +7 (812) 312-40-58 Осипов Николай Николаевич

Подпись руки Осипова Николая Николаевича
УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
по кадрам ПОМИ РАН В.Э. Владимирова
«08» апреля 2022 г.