ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Антона Сергеевича Целищева на тему «Два сюжета из гармонического анализа: квадратичные функции и задача об изоморфизме», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация посвящена исследованию нескольких задач гармонического анализа методами теории сингулярных интегральных операторов и теории мартингальных преобразований. Изучаются актуальные вопросы теории Литтлвуда–Пэли, а также вопросы вложения банаховых пространств гладких функций.

Диссертация состоит из пяти глав, первая из которых является введением.

Во второй главе доказывается аналог теоремы Литтлвуда–Пэли для пространства BMO в $\mathbb{R}^d$. В случае окружности $\mathbb{T}$ характеризация этих пространств в терминах средних Валле-Пуссена была обнаружена С.В. Бочкарёвым в 1995 году и нашла ряд замечательных приложений в теории тригонометрических рядов. В диссертации доказан многомерный общий результат, в котором ядра Валле-Пуссена заменены на последовательность $\{\psi_n\}$ мультипликаторов Фурье, удовлетворяющую тем же условиям, что и в теореме Михлина–Хёрмандера о мультипликаторе. Таким образом, во второй главе доказана эквивалентность следующих величин:

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}}^2 := \sup_{\{Q\}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^2 dx, \qquad \|f\|_D^2 := \sup_{\{Q\}} \frac{1}{|Q|} \int_Q \sum_{2^{-n} \le l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx,$$

где $f \in L_1\left(\mathbb{R}^d\right)$, $\{Q\}$ — множество всех кубов с гранями, параллельными координатным осям, $|Q|$ — объем, а $l(Q)$ — длина ребра Q, f_Q — среднее f по Q, $\widehat{\Delta_n f} = \psi_n \widehat{f}$. Описанию функциональных пространств в терминах проекторов Литтлвуда–Пэли посвящен целый ряд исследований, например, работы П. Коскелы, Е. Хана, Д. Янга.

Следующие две главы связаны с известной теоремой Рубио де Франсиа 1983 года, которая утверждает, что для любого набора $\{I_j\}$ попарно не пересекающихся отрезков в $\mathbb{Z}$ справедлива односторонняя оценка Литтлвуда–Пэли:

$$\Big\| \sum_j f_j \Big\|_p \le C_p \Big\| \Big(\sum_j |f_j|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p, \qquad 1 < p \le 2, \tag{1}$$

где функции f_j на $\mathbb{T}$ таковы, что $\operatorname{supp} \widehat{f_j} \subset I_j$. Этот результат дал толчок к многочисленным исследованиям. В частности, неравенство (1) было доказано Дж. Бургейном при $p = 1$ и С. В. Кисляковым, Д. В. Париловым при $0 < p \le 2$. В 2016 году Н. Н. Осиповым оценка (1) была установлена в случае нетригонометрического анализа Фурье, а именно, для систем Уолша. Главы 3 и 4 посвящены развитию этого направления.

В третьей главе неравенство (1) доказано для произвольного набора $\{I_j\}$ попарно не пересекающихся конечных отрезков в $\mathbb{Z}_+$ и функций f_j на $\mathbb{T}$: $\operatorname{supp} \widehat{f_j} \subset I_j$, где теперь $\widehat{f}$ — это последовательность коэффициентов Фурье по ограниченной системе Виленкина. Система Уолша является специальным случаем системы Виленкина. В основе предложенного доказательства лежит нетривиальное обобщение комбинаторной конструкции Осипова.

В главе 4 исследуется обобщение двойственного к (1) неравенства Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для рядов Фурье–Уолша на случай функций, принимающих значения в банаховых пространствах X. Доказана справедливость такого неравенства при $2 < p < \infty$ для класса банаховых решеток X таких, что ассоциированная с X 2-вогнутая решетка $X_{(2)}$ является банаховой решеткой со свойством UMD. Доказательство опирается на упомянутую комбинаторную конструкцию и оценки для мартингалов со значениями в банаховых пространствах. Тригонометрическая версия этого результата получена в работе Д. Потапова, Ф. Сукочева и К. Шу 2012 года.

Пятая глава методически связана с предыдущими. Исследуются пространство $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ гладких функций на многомерном торе, порожденное конечным набором $\mathcal{T}$ дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами. В 2013 г. С. В. Кисляковым, Д. В. Максимовым и Д. М. Столяровым получено достаточное условие того, что это пространство не вкладывается дополняемо в $C[0,1]$. В пятой главе доказано, что то же условие является достаточным для того, чтобы $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^d)$ не имело локальной безусловной структуры и не вкладывалось дополняемо в банахову решетку.

Исследуемая тематика относится к актуальной и активно развивающейся области современного анализа. В диссертации получены следующие новые результаты.

I. Получено общее описание Литтлвуда–Пэли пространств BMO.

II. Доказано неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для ограниченных систем Виленкина.

III. Доказано неравенство Литтлвуда–Пэли–Рубио де Франсиа для систем Уолша в случае функций со значениями на банаховых решетках.

IV. Установлены геометрические свойства пространств гладких функций на торе. Доказано, что такие пространства не имеют локальной безусловной структуры.

К диссертации имеются следующие замечания.

1. Присутствует путаница в обозначениях. Например, не введены обозначения для $|Q|$ и $\check{\psi}$. Хотя из контекста ясно, что речь идет о мере множества и обратном преобразовании Фурье. Символ D^α впервые встречается задолго до своего определения. Символы f_j и f_1, f_2, f_3 в главах 1, 2 использованы для разных объектов. Буквой G в главе 3 обозначены одновременно абелева группа и оператор. Следующие пары используются в тексте для обозначения одного и того же: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_+$, $x \cdot y = \langle x, y \rangle$.

2. В диссертации встречаются опечатки. Верхний индекс суммирования в выключенной формуле на стр. 16 должен быть n, а не N. В последнем выключенной формуле на стр. 20 в левой части неравенства вместо $\|f\|_D$ должен быть оцениваемый интеграл. В интеграле (2.3) отсутствует dy, в следующей формуле множитель dy есть, но стоит вне интеграла. В определении G_n на стр. 24. — лишняя скобка. В конце главы 3 везде, где упоминается теорема 1, речь идет о теореме 2.

3. Разная нумерация теорем в диссертации и автореферате немного сбивает с толку: теоремы 1–6 в автореферате соответствует теоремам 1,2,6,3,4,5 в диссертации.

Характеризуя диссертацию в целом, отметим, что, несмотря на указанные замечания, исследования соискателя находятся на хорошем профессиональном уровне. Не вызывает сомнений высокая квалификация автора. Все заявленные результаты снабжены доказательствами. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Основное содержание диссертации опубликовано с доказательствами в открытой печати. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов, работающих в математических институтах РАН, они докладывались на тематических семинарах и на представительной конференции мат. центров в Сочи в 2021 году.

Считаю, что диссертационная работа «Два сюжета из гармонического анализа: квадратичные функции и задача об изоморфизме» выполнена на высоком научном уровне и является цельным научно-квалификационным исследованием в актуальной области анализа. Она удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения ВАК к кандидатским диссертациям, а ее автор, Антон Сергеевич Целищев, безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Автор отзыва: Владимир Генрихович Лысов, кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ». Место работы: Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук". Должность: старший научный сотрудник. Рабочий адрес и телефон: 125047 Москва, Миусская пл., д. 4, тел. +7-499-220-78-56, vlysov@mail.ru.

26 января 2022 года

Старший научный сотрудник
Института прикладной математики им. М. В. Келдыша,
к.ф.-м.н. В. Г. Лысов

Подпись к.ф.-м.н. В. Г. Лысова заверяю.

Ученый секретарь
Института прикладной математики им. М. В. Келдыша
к.ф.-м.н. А. А. Давыдов