"УТВЕРЖДАЮ"
Проректор по научной работе
Санкт-Петербургского государственного
электротехнического университета,
Шестопалов М.Ю.,
.....апреля 2015 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации — Санкт-Петербургского государственного
электротехнического университета
о диссертационной работе Логунова Александра Андреевича
"О граничных свойствах гармонических функций",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Гармонические функции являются естественным аппаратом для моделирования большого количества физических процессов, и потому они постоянно находятся в зоне интенсивного изучения. Мощный аппарат теории функций одной комплексной переменной позволяет решать множество разнообразных задач, касающихся гармонических функций двух вещественных переменных. С ростом размерности те же задачи о гармонических функциях сохраняют естественность постановки, но как правило, резко усложняются из-за того, что для аналитических функций многих переменных нет аппарата близкого по силе к тому, который разработан для аналитических функций одной переменной. В последние десятилетия стал формироваться аппарат, позволивший значительно расширить наши знания о гармонических функциях многих переменных.

Представленная к защите диссертация содержит решение нескольких таких вопросов. Эти результаты важны для приложений в задачах, где решение ищется на множестве гармонических функций. Но не менее важна "внутренняя" составляющая – разработка технических приемов, позволяющих эффективно работать с гармоническими функциями многих переменных. В диссертации автор демонстрирует глубокие знания в в исследуемой области и умение эффективно использовать их для решения задач, решение которых долгое время не поддавалась усилиям математиков.

Первой рассмотрена задача об оценке частного двух гармонических функций, имеющих совпадающее множество нулей, автору удается перенести на эту ситуацию классическое неравенство Гарнака. В теореме 1 доказано, что отношение двух гармонических функций с общим множеством нулей является вещественно-аналитической функцией, причем это верно в любой размерности. Следствием этого утверждения является теорема 2, которая и является обобщением неравенства Гарнака.

Если функции u и v гармоничны в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и имеют одинаковые множества нулей, то для любого компакта $K \subset \Omega$ и любой пары точек $x, y \in K$ справедлива оценка $\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right| < C\left|\frac{u(y)}{v(y)}\right|$, где постоянная зависит только от K и от нодального множества.

Используя разработанную технику, автор далее доказывает в размерности три оценки для производных функции $\frac{u(x)}{v(x)}$(теорема 3).

Если функции u и v гармоничны в области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ и имеют одинаковые множества нулей, то их отношение является вещественно-аналитической функцией и для любого компакта $K \subset \Omega$ и любого мультииндекса α справедлива оценка $\left|D^\alpha\left(\frac{u}{v}\right)\right| < C$, где постоянная зависит только от K, нодального множества и постоянной α.

Это значительно усиливает недавно полученный результат Мангуби о гармонических функциях в плоскости.

Доказательство первой теоремы основано на теореме Брело-Шоке о делении однородных гармонических многочленов. Что бы перейти к гармоническим функциям общего вида автор использует технику формальных степенных рядов, причем с такой точностью, что удается показать сходимость построенных рядов.

Теорема 2 доказана только в размерности три. Это обстоятельство хорошо иллюстрирует технические трудности, возникающие с повышением размерности. Для проведения доказательства автору необходимо иметь гарантии достаточно хорошей структуры границы множества, на котором гармоническая функция знакопостоянна. В размерности два эти проблемы решаются с помощью конформных отображений, в размерности три, благодаря тщательному анализу строения границы множества знакопостоянства, автору удается получить нужные оценки. Принципиальность этих сложностей подтверждает пример, показывающей, что в размерности четыре такое доказательство не проходит.

Следующая задача, рассмотренная в диссертации – исследование условий нормальности семейств гармонических функций. История вопроса восходит к результату Левинсона 1940 года (теорема о двойном логарифме). Среди множества модификаций этого результата, большинство относятся к размерности два, те немногие результаты, которые касаются более высоких размерностях, не дают сколько-нибудь полной картины. В диссертации получен исчерпывающий ответ на этот вопрос — доказан полный аналог теоремы Левинсона в произвольной размерности (теорема 13).

Множество функций u и v гармонических в области $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbf{R}^n, |x| < R, y \in \mathbf{R}, |y| < H\}$, допускающих оценку $|u(x,y)| < M(|y|)$, где невозрастающая функция, отображающая $[0,H]$ в $\mathbf{R}_+$, такая, что $\int_0^H \log_+ \log_+ M(y)dy < \infty$, образуют нормальное семейство.

Автор нашел изящную возможность свести задачу в произвольной размерности к оценке в размерности два. Траектория этого сведения совершенно нетривиальна.

Третья из рассмотренных в диссертации задач – вопрос о асимптотике поведения гармонической функции при приближении к границе области гармоничности. Это классическая тематика анализа, восходящая своими корнями к теореме Фату. Вопрос о существовании граничного предельного значения у гармонических функций заданных в полупространстве получил полное решение в серии последовательных модификаций в рботах L. H. Loomis (1943), W. Rudin (1978), W. Ramey, D. Ullrich (1998). Автор обобщает эти результаты и дает (теорема 15)полное и эффективное описание степенной асимптотики граничного поведения в эквивалентных терминах асимптотики поведения меры.

Если $u(x,t) = Ct + \int_{\mathbf{R}^{n-1}} K(x-\zeta,t)d\mu(\zeta)$, здесь $K(x-\zeta,t)$ ядро Пуассона в полупространстве $\mathbf{R}^n_+$, μ положительная мера, т.е. для произвольной положительной гармонической функции в верхнем полупространстве, то для любого числа $\alpha \in (-1, n-1)$, положительного числа a так же числа $b = ca$, здесь постоянная c зависит только от α, равносильны следующие утверждения
- $u(0,t) \to a, \ (t \to 0)$,
- $\dfrac{\mu(B_r)}{r^{n-1}} r^\alpha \to b, \ (r \to +0)$, здесь B_r шар с центром в нуле радиуса r.

Как и его предшественники, в доказательстве автор опирается на тауберову теорему Винера, а она предполагает наличие алгебраической структуры на границе области. Это обстоятельство затрудняет обобщение теоремы на области отличные от полуплоскости. Конформные отображения снимают это препятствие в размерности два, но в более высоких размерностях такая возможность исчезает. Автор находит выход из этого затруднения и доказывает следующее утверждение (теорема 24).

Если область в пространстве обладает достаточно гладкой границей, то в классе положительных эллиптических операторов (точное описание класса опущено здесь из-за громоздкости) для любой функции из ядра оператора некасательный предел в граничной точке существует тогда и только тогда, когда граничная мера имеет в этой точке сильную производную.

Доказательство этого утверждения активно использует свойства функции Грина. Автор проделал большую работу по доказательству и редактированию этих свойств с единых позиций, превратив эту часть работа в качественный справочник по свойствам функции Грина.

Как уже отмечалось областью применения результатов диссертации могу стать любые задачи, допускающие решение с помощью эллиптических, положительно определенных операторов.

Все установленные в диссертации А. А. Логунова результаты являются достоверными научными фактами. Результаты его работы интересны для широкого круга специалистов по теории гармонических функций и функциональному анализу. Работа соответствует всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Основное содержание диссертации опубликовано в трех статьях. Все они помещены в журналах из списка, рекомендованного ВАК. Изложение материала в диссертации ясное и последовательное. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

К недостаткам диссертации можно отнести некоторую небрежность переводах собственных статей, опубликованных в зарубежных журналах и использованных в тексте диссертации.

Однако, эти недостатки не умаляют хорошего впечатления об работы А. А. Логунова. Умение правильно выбрать трудную задачу из множества безнадежных, характеризует его как математика с хорошими перспективами.

С диссертацией рекомендуется ознакомиться в ПОМИ РАН, на математико-механическом факультете СПбГУ, на механико-математическом факультете МГУ, в МИАН, на механико-математическом факультете Новосибирского ГУ.

Диссертационная работа Александра Андреевича Логунова "О граничных свойствах гармонических функций" соответствует требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а соискатель, безусловно, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры Высшей математики Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета от 24 апреля 2015 года, протокол №5.

Заведующий кафедрой высшей математики №2
доктор физико-математических наук
профессор
А. М. Коточигов

ПОДПИСЬ Коточигова РУКИ ЗАВЕРЯЮ
НАЧ. ОК ШУБИНСКИЙ
29 . . . . 201 г
ОТДЕЛ КАДРОВ