На правах рукописи

ТЕПЛИЦКАЯ ЯНА ИГОРЕВНА

ГЕОМЕТРИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет».

Научный руководитель	—	Евгений Олегович Степанов, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты	—	Роман Николаевич Карасёв, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики ФГАОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)», главный научный сотрудник
	—	Алексей Викторович Пенской, доктор физико-математических наук, кафедра высшей геометрии и топологии механико-математического факультета «ФГБОУ ВПО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», доцент
Ведущая организация	—	Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук

Защита состоится 26 сентября 2018 года в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 на базе ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ауд. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан “___” __________ 2018 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физико-математических наук Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень разработанности. В диссертации решаются различные одномерные задачи оптимизации формы. Так, первые две главы работы посвящены задачам минимизации функционала длины плоских множеств при некоторых ограничениях. Такие задачи близки как к классическим задачам теории графов и теории сложности, так и к прикладным задачам оптимизации транспортных сетей. Несмотря на то, что постановки рассматриваемых задач являются достаточно классическими и элементарными, решения подобных задач зачастую очень сложны и лишь в редких случаях могут быть получены в явном виде или с помощью вычислительных методов, поскольку задачи такого рода обычно являются NP-полными. Примеров, когда задачи рассматриваемого класса решены в явном виде, известно крайне мало, а в данной диссертации построены именно явные решения: в первой главе построена серия штейнеровских деревьев (каждой достаточно быстро убывающей последовательности чисел соответствует штейнеровское дерево), а во второй главе найдены решения для большого семейства замкнутых кривых (для произвольных множеств с достаточно большим радиусом кривизны). Ввиду вышеизложенного результаты данной диссертации могут оказаться полезными для тестирования различных алгоритмов. Область, сформировавшаяся вокруг изучения штейнеровских деревьев и функционалов максимального расстояния, сейчас активно развивается не только как раздел комбинаторной геометрии, но и в рамках теории сложности и в области вычислительных методов. Подробнее с классическими результатами и современными исследованиями в этой области можно ознакомиться, например, в книгах [2] и [7] и статьях [12], [16], [14], [9], [1].

Другой аспект, непосредственно относящийся к вопросу актуальности результатов и степени разработанности темы диссертации, состоит в следующем. А. О. Иванов и А. А. Тужилин доказали (см. [17]), что на плоскости для произвольной топологической структуры конечного дерева (удовлетворяющей некоторым ограничениям) существует множество, решение задачи Штейнера (или дерево Штейнера) для которого имеет такую структуру. Однако вопрос о существовании множества, дерево Штейнера которого содержит бесконечное (счетное) количество точек ветвления, оставался до последнего времени открытым: эта задача решена в первой главе диссертации.

Третья глава посвящена бурно развивающейся в последнее время тематике самосжимающихся кривых. Начавшаяся с изучения метода градиентного спуска для выпуклых и квазивыпуклых функций в статьях [6] и [10], область получила активное продолжение в статьях [3, 10, 5, 4]. В недавней работе [13] рассматриваются самосжимающиеся кривые не только в евклидовых пространствах, но и на поверхностях Адамара и в CAT(0)-пространствах, а в работе [4] рассматриваются более широкие, чем класс самосжимающихся кривых, классы λ-кривых и кривых, удовлетворяющих λ-коническому свойству. В обеих работах цитируются и используются результаты соискателя.

В работе [6] доказано, что каждая самосжимающаяся кривая, лежащая в ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^2$ (с обычным расстоянием Евклида), обязательно имеет конечную длину, т.е. является *спрямляемой*. Этот результат в дальнейшем был расширен до $\mathbb{R}^n$ с произвольным $n \geqslant 1$, также с евклидовой нормой, в [3] (и, независимо, в [10] для непрерывных самосжимающихся кривых) и для произвольного конечномерного риманова многообразия в [5]. Это порождает естественный вопрос, можно ли распространить утверждения на самосжимающиеся кривые в $\mathbb{R}^n$ с произвольной нормой. Этот вопрос был поставлен в [8], и в той же статье частичный ответ для равномерно выпуклых гладких (C^2) норм был дан для случая $n = 2$. В третьей главе диссертации мы даем положительный ответ для случая произвольной, не обязательно гладкой, нормы в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.

Таким образом, тематика диссертации весьма актуальна.

Цели и задачи работы. Цель работы заключается в решении одномерных задач оптимизации формы, возникающих из математической физики, вариационных задач и уравнений в частных производных. А именно, в нахождении самого короткого связного множества, содержащего заданное множество (задача Штейнера); в нахождении самого короткого связного множества, такого, что заданное множество M находится в его r-окрестности для заданного $r > 0$ (в невырожденных случаях решение этой задачи совпадает с решением задачи о поиске минимайзера для функционала максимального расстояния при ограничениях на длину); а также в изучении самосжимающихся кривых (то есть таких кривых γ, что условие $\operatorname{dist}(\gamma(t_2), \gamma(t_3)) \leqslant \operatorname{dist}(\gamma(t_1), \gamma(t_3))$ выполняется для любых $t_1 < t_2 < t_3$).

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Пример, построенный в главе 1, является первым примером штейнеровского дерева с бесконечным (счетным) числом точек ветвления. Поиск минимайзеров функционала максимального расстояния даже для конкретного плоского множества M является чрезвычайно трудной задачей; положительное решение гипотезы Миранды, Степанова и Паолини о множестве минимайзеров для окружности $M = B_R(O)$ радиуса R (в случае $R < 4.98r$) является первым нетривиальным примером нахождения множества минимайзеров в явном виде. Также решение обобщается на случай замкнутых кривых с минимальным радиусом кривизны, превосходящим $5r$.

Основная теорема главы 3 (теорема 3.3.2) обобщает и распространяет на новые пространства все известные ранее результаты о конечности длины самосжимающихся кривых.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты и идеи работы могут быть полезны как в научно-теоретических, так и в практических (вычислительных) целях. Например, идеи первой главы были использованы в вычислительной работе [18], идеи второй главы применимы при поиске минимайзеров максимального расстояния для других заданных множеств, а третья глава может найти применение в теории дифференциальных уравнений. Результаты первой и третьей глав, несмотря на небольшое время, прошедшее с их публикации, уже многократно цитировались, в том числе и ведущими специалистами по теме исследований [11, 4, 13].

Достоверность результатов и апробация работы. Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием строгих математическим доказательств. Результаты работы докладывались:

- На конференции Fourth Russian Finnish Symposium on Discrete Mathematics, Турку, Финляндия, 2017;
- На Петербургском геометрическом семинаре им А. Д. Александрова, Санкт-Петербург, Россия, 2016;
- На конференции Discussion Meeting on Topology and Groups, IISER Мохали, Индия, 2016;
- На семинаре Nonlinear Analysis and Optimization Seminar, Технион, Израиль, 2016;
- На семинаре Математическое моделирование транспортных потоков, Москва, Россия, 2014;
- На семинаре Calcolo delle Variazioni e Analisi Geometrica University of Pisa, Пиза, Италия, 2013.

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [20], [21], [19] и [22]. Все они опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. В работе [20] научному руководителю принадлежит постановка задачи, схема доказательства была выработана авторами совместно, соискателю также принадлежат леммы A.3 и A.6, а также замечание A.7. В статье [19] диссертанту принадлежит идея разбиения выпуклой оболочки множества M на два множества (кольцо и внутренняя фигура) и последующий анализ поведения минимайзера внутри каждого из множеств, реализованный в леммах 2.7 и 2.8. Также диссертанту принадлежит разрешение проблемы с бесконечным количеством “особых” точек (лемма 2.12); центральная лемма (лемма 2.22), включающая в себя более десяти случаев, принадлежит соавторам в равной мере. В работе [21] научному руководителю принадлежит постановка задачи, соискатель же предложил решение задачи в простом случае, после чего возникающие при переходе к общему случаю трудности решались соавторами совместно.

Методология и методы исследования. В первой главе автор сочетает такие комбинаторные методы, как подвес графа за вершину и дальнейший анализ уровней графа с классическими планиметрическими рассуждениями. Во второй главе используются методы локального анализа, разработанные специально для этой задачи. В третьей главе используется дискретизация кривой, после чего применяется индукция, повышающая размерность, а также нетривиальная математическая редукция внутри каждой размерности.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из трех глав, каждая из которых посвящена отдельной задаче. Работа занимает 144 страницы и содержит 35 рисунков. Список литературы включает 37 наименований.

Благодарности. Благодарю научного руководителя за постановку задач и потраченное время, Данилу Черкашина за то, что эти результаты стали диссертацией, Иосифа Гордона за то, что в диссертации меньше ошибок, чем могло бы быть, Федора Петрова за ценные замечания, Андрея Валерьевича Малютина и Петра Георгиевича Зографа за организационную помощь.

Положения, выносимые на защиту.

- Построен пример полного (то есть не имеющего вершин степени два) дерева Штейнера со счетным числом точек ветвления;
- Доказана гипотеза Миранды, Паолини и Степанова о виде минимайзера функционала максимального расстояния для окружности достаточно большого (относительного заданного ограничения на функционал) радиуса;
- Описаны множества минимайзеров и локальных минимайзеров функционала максимального расстояния для множеств с достаточно большим (относительного заданного ограничения на функционал) минимальным радиусом кривизны;
- Доказано, что для произвольной нормы в $\mathbb{R}^n$ самосжимающиеся по ней кривые, лежащие внутри компакта, имеют конечную длину.

Содержание работы. Глава 1 посвящена задаче Штейнера. Задачей Штейнера называется задача нахождения множества S минимальной длины, соединяющего заданное компактное подмножество C метрического пространства X, то есть задача нахождения элемента множества $\mathcal{S}t$:

$$\mathcal{S}t(C) := \{S \in \mathcal{N}tw(C) : \mathcal{H}^1(S) \leqslant \mathcal{H}^1(S') \text{ для всех } S' \in \mathcal{N}tw(C)\},$$

где

$$\mathcal{N}tw(C) := \{S \subset X : S \cup C \text{ связно}\}, \text{ а}$$

$$\mathcal{H}^1 \text{ — одномерная (линейная) мера Хаусдорфа.}$$

Известно (см. [15]), что при определенных естественных ограничениях для каждого $S \in \mathcal{S}t(C)$ каждая компонента связности множества $\overline{S \setminus C}$ является топологическим деревом. В частности, при $X = \mathbb{R}^2$ каждая такая компонента состоит из не более чем счетного числа прямолинейных отрезков, а степень каждой вершины не превосходит 3, откуда следует, что число вершин степени 3 (точек ветвления) не более чем счетно. А. О. Иванов и А. А. Тужилин доказали (см. [17]), что на плоскости для произвольной топологической структуры конечного дерева (удовлетворяющей вышеуказанным ограничениям) существует множество, решение задачи Штейнера (или дерево Штейнера) для которого имеет такую структуру. Однако вопрос о существовании множества, дерево Штейнера которого содержит бесконечное (счетное) количество точек ветвления, оставался до последнего времени открытым. Мы строим пример такого (вполне несвязного) множества в главе 1.

Множество строится следующим образом: для произвольного положительного числа L, и произвольной последовательности чисел $\{\lambda_j\} \in (0,1)$ опишем построение последовательностей точек x_n, y_n, z_n в $\mathbb{R}^2$, где $n = 1, 2, \dots$ (см рис. 1, 2, 3):

- $y_0 := (-L + 2\lambda_1 L, 0)$,
- $y_1 := (0,0), \quad x_1 := (2\lambda_{g(1)}L, 0), \quad$ где $g(j) := \lfloor \log_2 j + 1 \rfloor$,
- $z_n := (x_n + y_n)/2$ при $n \geqslant 1$,
- точки x_n, x_{2n}, x_{2n+1} — три вершины равностороннего треугольника, вписанного в окружность с центром z_n и радиусом $|x_n - z_n|$, перечисленные против часовой стрелки,
- $y_n := 2\lambda_{g(n)} y_{\lfloor n/2 \rfloor} + (1 - 2\lambda_{g(n)}) x_n$ при $n \geqslant 1$ (заметим, что $y_n = F(y_{\lfloor n/2 \rfloor}, x_{2n}, x_{2n+1})$, где $F(A, B, C)$ — точка Ферма, то есть такая точка, из которой все стороны треугольника ABC видны по углом $2\pi/3$).

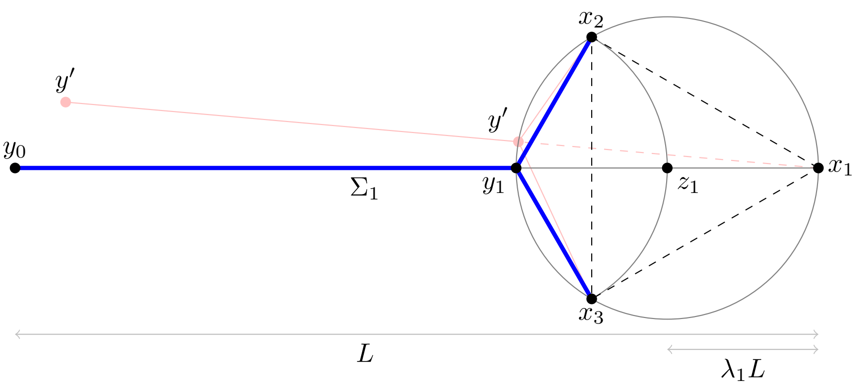

Рис. 1: Первая тренога в конструкции.

При $k = 0, 1, \ldots$ определим следующие множества:

$$\sigma_k := [y_0, y_1] \cup \bigcup_{n=1}^{2^{k-1}} [y_n, y_{2n}] \cup [y_n, y_{2n+1}],$$

$$\Sigma_k := \sigma_k \cup \bigcup_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} [y_n, x_n] \text{ — дерево } k\text{-го поколения},$$

$$A_k := \{x_{2^k}, x_{2^k+1}, \ldots, x_{2^{k+1}-1}\} \text{ — вершины } k\text{-го поколения},$$

$$S_\infty := \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k, \qquad \Sigma_\infty := \overline{S_\infty}, \qquad A_\infty := \Sigma_\infty \setminus S_\infty,$$

Основным результатом главы 1 диссертации является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть Σ_k (где k конечное или $k = \infty$) — дерево, построенное описанным способом для такой убывающей положительной последовательности коэффициентов λ_j, что*

$$\lambda_j \leqslant 0.0002 \qquad (\textit{при } j \geqslant 2), \tag{1}$$

$$120 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j < \pi/42. \tag{2}$$

Тогда $\Sigma_k \in \mathcal{S}t(\{y_0\} \cup A_k)$, и других деревьев в множестве $\mathcal{S}t(\{y_0\} \cup A_k)$ нет.

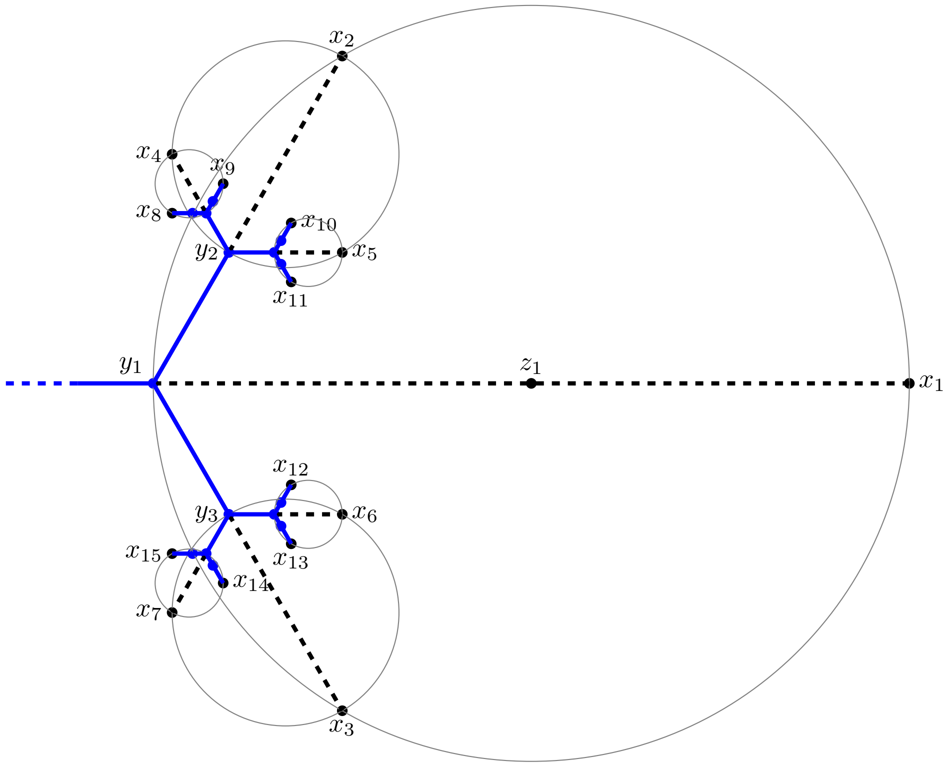

Рис. 2: Три шага построения конструкции. Выделено множество Σ_3.

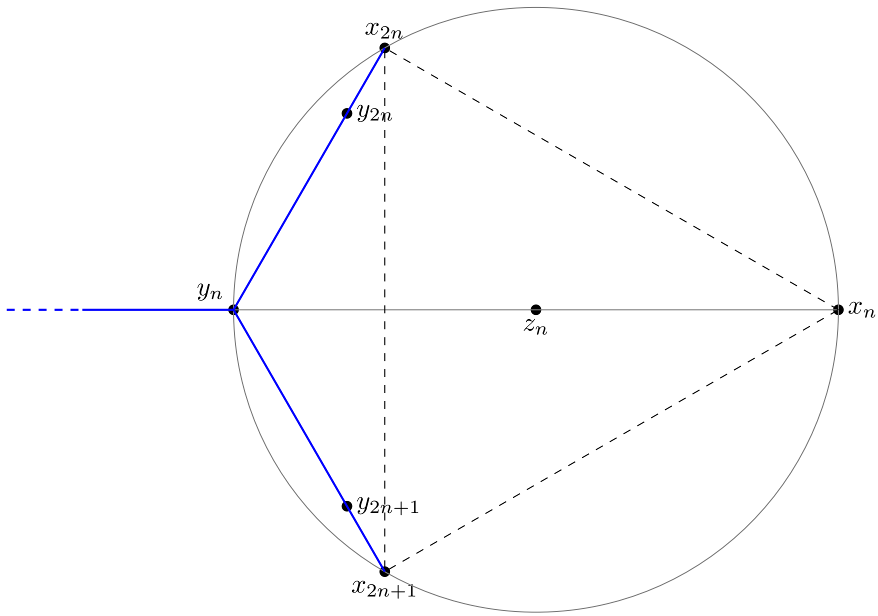

Рис. 3: Шаг построения дерева.

Глава 2 посвящена минимайзерам максимального расстояния и локальным минимайзерам максимального расстояния. Задача ставится следующим образом: для заданного компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим функционал максимального расстояния

$$F_M(\Sigma) := \max_{y \in M} \operatorname{dist}(y, \Sigma),$$

где Σ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^2$, а $\operatorname{dist}(y, \Sigma)$ означает евклидово расстояние между y и Σ. Рассмотрим класс замкнутых связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ таких, что $F_M(\Sigma) \leqslant r$ для заданного $r > 0$. Нас интересуют свойства множеств, обладающих минимальной длиной (линейной мерой Хаусдорфа) $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ среди множеств этого класса. Такие множества мы будем называть *минимайзерами*. Также в работе доказаны утверждения для более широкого класса локальных минимайзеров. В работе Миранда, Паолини и Степанова [12] высказывалась гипотеза о том, что каждый минимайзер для $M := \partial B_R(O)$ при $r < R$ имеет определенный вид. В главе 2 диссертации эта гипотеза доказана при условии $r < R/4.98$. Кроме того в диссертации доказано, что произвольная замкнутая кривая M имеет минимайзеры схожей структуры, если минимальный радиус кривизны множества M составляет хотя бы $5r$.

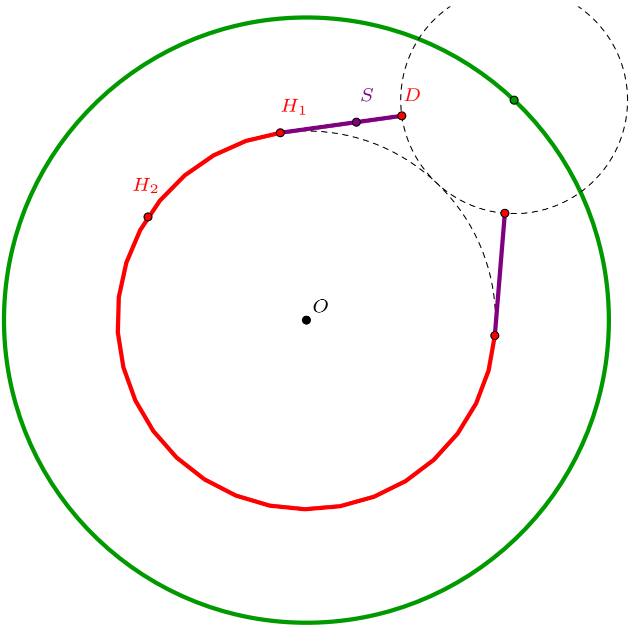

Рис. 4: Пример для $M = \partial B_R(O)$, где $R > 4.98r$.

Определение 2. *Пусть M — замкнутая выпуклая кривая с минимальным радиусом кривизны $R > r$. Тогда связная кривая Σ называется* подковой, *если $F_M(\Sigma) = r$ и Σ — объединение дуги q множества M_r и двух невырожденных отрезков, касающихся множества M_r в различных концевых точках дуги q и заканчивающихся энергетическими точками, где M_r — замкнутая кривая, полученная отступлением на r по внутренней нормали к кривой M (как изображено на Рис. 4).*

Определение 3. *Для замкнутого выпуклого множества $N \subset \mathbb{R}^2$ определим* минимальный радиус кривизны *его границы с помощью формулы*

$$R(\partial N) := \inf_{x \in \partial N} \sup\{\rho\colon \overline{B_\rho(O)} \cap \partial N = x \text{ для некоторой } O \in N\}.$$

Теперь мы можем сформулировать результат главы 2:

Теорема 4. *Для любой замкнутой выпуклой кривой M с минимальным радиусом кривизны R и для произвольного $r < R/5$ множество минимайзеров содержит только подковы. Для окружности $M := \partial B_R(O)$ утверждение верно при $r < R/4.98$.*

Глава 3 посвящена самосжимающимся кривым. Пусть E — метрическое пространство, снабженное расстоянием d. Кривая $\theta\colon I \to E$, где $I \subset \mathbb{R}$

(возможно, бесконечный) интервал, называется *самосжимающейся*, если для любой тройки моментов времени $\{t_i\}_{i=1}^3 \subset I$, где $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$, выполняется $d(\theta(t_3), \theta(t_2)) \leqslant d(\theta(t_3), \theta(t_1))$. Особый интерес вызывают непрерывные самосжимающиеся кривые в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$, снабженном некоторой нормой.

В [6] и [10] показано, что такие кривые возникают как кривые градиентного спуска для выпуклых функций и для функций с выпуклыми линиями уровня (иногда также называемых квазивыпуклыми) в пространстве Евклида. В работе [6] доказано, что каждая самосжимающаяся кривая, лежащая в ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^2$ (с обычным расстоянием Евклида), обязательно имеет конечную длину, т.е. является *спрямляемой*. Этот результат в дальнейшем был расширен до $\mathbb{R}^n$ с произвольным $n \geqslant 1$, также с евклидовой нормой, в [3] (и, независимо, в [10] для непрерывных самосжимающихся кривых) и — для произвольного конечномерного риманова многообразия — в [5].

Применяемая в третьей главе комбинаторная по духу техника дает возможность работать с произвольными, не обязательно гладкими, нормами в конечномерном пространстве, что позволяет доказать утверждение в существенно более общем случае, а именно, в пространстве произвольной конечной размерности с произвольной нормой.

Следующая теорема является главным результатом третьей главы.

Теорема 5. *Пусть E — конечномерное пространство, снабженное нормой $\|\cdot\|$, и пусть $\theta\colon I \to E$, где $I \subset \mathbb{R}$ является (возможно, неограниченным) интервалом, является самосжимающейся кривой, след которой лежит в ограниченном множестве $\mathbb{D} \subset E$. Тогда $\ell(\theta) \leqslant C \operatorname{diam} \mathbb{D}$ для некоторого $C > 0$, зависящего только от $\|\cdot\|$ и от размерности пространства.*

Для бесконечной же размерности утверждение неверно.

Пример 6. *Пусть ℓ^2 обозначает стандартное гильбертово пространство квадратично суммируемых последовательностей, снабженных стандартной нормой $\|\cdot\|_2$, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ обозначает его стандартный ортонормированный базис. Тогда кривая $\theta\colon [0, +\infty) \to \ell^2$, определенная следующим образом*

$$\theta(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0,1)\,, \\ \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} e_j, & t \in [k-1, k)\,, \quad k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, \end{cases}$$

является самосжимающейся, поскольку

$$\|\theta(k), \theta(l)\|_2^2 = \sum_{j=l}^{k-1} \frac{1}{j^2} > \sum_{j=m}^{k-1} \frac{1}{j^2} = \|\theta(k), \theta(m)\|_2^2$$

когда $l < m < k$, $\{l, m, k\} \subset \mathbb{N}$, *и ее след содержится в компактном подмножестве* ℓ^2 *(в гильбертовом кубе), но* $\ell(\theta) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} 1/k = +\infty$. *Эта же кривая, ограниченная на произвольный конечный интервал времени, скажем* $[0, n]$, $n \in \mathbb{N}$, *дает пример самосжимающейся кривой в ограниченном подмножестве евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$, *для которого константа* C *из теоремы 5 стремится к бесконечности при* $n \to +\infty$.

Также, несложно преобразовать пример 6 в пример с непрерывной самосжимающейся кривой.

Литература

[1] M. Bonafini, G. Orlandi, and E. Oudet. Variational approximation of functionals defined on 1-dimensional connected sets: the planar case. *arXiv preprint arXiv:1610.03839*, 2016.

[2] X. Cheng and D.-Z. Du. *Steiner trees in industry*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2013.

[3] A. Daniilidis, G. David, E. Durand-Cartagena, and A. Lemenant. Rectifiability of self-contracted curves in the Euclidean space and applications. *The Journal of Geometric Analysis*, 25(2):1211–1239, 2015.

[4] A. Daniilidis, R. Deville, and E. Durand-Cartagena. Metric and geometric relaxations of self-contracted curves. *arXiv preprint arXiv:1802.09637*, 2018.

[5] A. Daniilidis, R. Deville, E. Durand-Cartagena, and L. Rifford. Self-contracted curves in Riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 457(2):1333–1352, 2018.

[6] A. Daniilidis, O. Ley, and S. Sabourau. Asymptotic behaviour of self-contracted planar curves and gradient orbits of convex functions. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 94(2):183–199, 2010.

[7] D. Z. Du, J.M. Smith, and J. H. Rubinstein. *Advances in Steiner trees*, volume 6. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] A. Lemenant. Rectifiability of non Euclidean planar self-contracted curves. *Confluentes Math.*, 8(2):23–38, 2016.

[9] A. Lemenant and F. Santambrogio. A Modica–Mortola approximation for the Steiner Problem. *Comptes Rendus Mathématique*, 352(5):451–454, 2014.

[10] M. Longinetti, P. Manselli, and A. Venturi. Bounding regions to plane steepest descent curves of quasiconvex families. *Journal of Applied Mathematics*, ID 4873276, 2016.

[11] A. Marchese and A. Massaccesi. The Steiner tree problem revisited through rectifiable G-currents. *Advances in Calculus of Variations*, 9(1):19–39, 2016.

[12] M. Miranda, Jr., E. Paolini, and E. Stepanov. On one-dimensional continua uniformly approximating planar sets. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 27(3):287–309, 2006.

[13] S. Ohta. Self-contracted curves in CAT(0)-spaces and their rectifiability. *arXiv preprint arXiv:1711.09284*, 2017.

[14] E. Oudet and F. Santambrogio. A Modica–Mortola approximation for branched transport and applications. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 201(1):115–142, 2011.

[15] E. Paolini and E. Stepanov. Existence and regularity results for the Steiner problem. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 46(3-4):837–860, 2013.

[16] Александр О. Иванов и Алексей А. Тужилин. Теория экстремальных сетей. *Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований*, 2003.

[17] Александр О. Иванов и Алексей А. Тужилин. Единственность минимального дерева Штейнера для границ общего положения. *Математический сборник*, 197(9):55–90, 2006.

[18] C. Ras, K. Swanepoel, and D. A. Thomas. Approximate Euclidean Steiner trees. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 172(3):845–873, Mar 2017.

Список публикаций автора по теме диссертации

[19] Danila Cherkashin and Yana Teplitskaya. On the horseshoe conjecture for maximal distance minimizers. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, doi: 10.1051/cocv/2017025, 2018.

[20] E. Paolini, E. Stepanov, and Y. Teplitskaya. An example of an infinite Steiner tree connecting an uncountable set. *Advances in Calculus of Variations*, 8(3):267–290, 2015.

[21] E. Stepanov and Y. Teplitskaya. Self-contracted curves have finite length. *Journal of the London Mathematical Society*, 96(2):455–481, 2017.

[22] Я. Теплицкая. Регулярность минимайзеров функционала максимального расстояния. *Записки научных семинаров ПОМИ РАН*, 462(1):103–111, 2017.